

Rezanje kolača brez zavisti

Predstavitev protokolov razdeljevanja

Nik Erzetič

Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta *za matematiko in fiziko*





Kazalo

- 1 Uvod
- 2 Definicije
 - σ -algebra
 - Mera
 - Protokol, proporcionalen protokol in protokol brez zavisti
- 3 Protokoli
 - Razreži in razdeli
 - Proporcionalni protok za $n = 3$
 - Proporcionalni protokol za poljuben n
 - Protokol brez zavisti za $n = 3$
- 4 Zaključek

σ -algebra

Definicija

Naj bo X neprazna množica. Družino \mathcal{M} , $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$, imenujemo **σ -algebra**, če velja:

- $X \in \mathcal{M}$
- $\forall E \in \mathcal{P}(X). E \in \mathcal{M} \Rightarrow E^c \in \mathcal{M}$ (zaprtost za komplemente)
- $\forall E_1, \dots, E_n \in \mathcal{P}(X). E_1, \dots, E_n \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{M}$
(zaprtost za končne unije)

Elementom σ -algebre rečemo **merljive množice**, paru (X, \mathcal{M}) pa **merljiv prostor**.

Mera

Definicija

Naj bo (X, \mathcal{M}) merljiv prostor. Preslikava $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ je **mera** na \mathcal{M} , če velja:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- če je $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ zaporedje paroma disjunktnih merljivih množic, je potem $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ (μ je števno aditivna)

Protokol, proporcionalen protokol in protokol brez zavisti

Protokol je interaktiven postopek, ki ga lahko zapišemo kot računalniški program in ki sodelujočim lahko postavlja vprašanja, ki spremenijo njegov končni izid.

Protokol, proporcionalen protokol in protokol brez zavisti

Protokol je interaktiven postopek, ki ga lahko zapišemo kot računalniški program in ki sodelujočim lahko postavlja vprašanja, ki spremenijo njegov končni izid.

Protokol je **proporcionalen**, če za vsakega igralca obstaja strategija, ki mu bo zagotovila vsaj $\frac{1}{n}$ kolača (glede na igralčevo mero). Protokol je **brez zavisti**, če za vsakega igralca obstaja strategija, ki mu bo zagotovila kos, ki je večji ali enak ostalim kosom.

Protokol, proporcionalen protokol in protokol brez zavisti

Protokol je interaktiven postopek, ki ga lahko zapišemo kot računalniški program in ki sodelujočim lahko postavlja vprašanja, ki spremenijo njegov končni izid.

Protokol je **proporcionalen**, če za vsakega igralca obstaja strategija, ki mu bo zagotovila vsaj $\frac{1}{n}$ kolača (glede na igralčevo mero). Protokol je **brez zavisti**, če za vsakega igralca obstaja strategija, ki mu bo zagotovila kos, ki je večji ali enak ostalim kosom.

Optimalna strategija.

Razreži in razdeli

- 1 Igralec 1 kolač razreže na 2 dela.
- 2 Igralec 2 izbere kos.
- 3 Igralec 1 dobi preostali kos.

Proporcionalni protok za $n = 3$

- 1 Igralec 1 razreže kolač na 3 dele.
- 2 Igralec 2 ne stori nič ali označi 2 kosa.

Če igralec 2 ne stori nič:

- 3 Igralec 3 izbere kos.
- 4 Igralec 2 izbere kos.
- 5 Igralec 1 dobi preostali kos.

Proporcionalni protok za $n = 3$

Če igralec 2 označi 2 kosa:

- 3** Igralec 3 ne stori nič ali označi 2 kosa.

Če igralec 3 ne stori nič:

- 4** Igralec 2 izbere kos.
5 Igralec 3 izbere kos.
6 Igralec 1 dobi preostali kos.

Proporcionalni protok za $n = 3$

Če igralec 3 označi 2 kosa:

- 4 Igralec 1 izbere kos, ki sta ga označila igralec 2 in igralec 3.
- 5 Preostala kosa se združita v nov kolač.
- 6 Protokol **razreži in izberi** med igralcem 2 in igralcem 3.

Proporcionalni protokol za poljuben n

- 1 Igralec 1 odreže kos od kolača.
- 2
 - Igralec 2 ne stori nič ali obreže odrezani kos.
 - ⋮
 - Igralec i ne stori nič ali obreže odrezani kos.
 - ⋮
 - Igralec n ne stori nič ali obreže odrezani kos.
- 3 Zadnji igralec, ki je obrezal kos, ali igralec 1, če nihče ni obrezal kosa, prejme ta kos.
- 4 Odrezke se združijo s kolačem.
- 5 Koraki 1. - 4. se ponavljajo, dokler ne ostaneta dva igralca.
- 6 Protokol **razreži in izberi** med preostalima igralcem.

Protokol brez zavisti za $n = 3$

- 1 Igralec 1 razreže kolač na 3 dele.
- 2 Igralec 2 ne stori nič ali obreže 1 kos.

Če igralec 2 ne stori nič:

- 3 Igralec 3 izbere kos.
- 4 Igralec 2 izbere kos.
- 5 Igralec 1 dobi preostali kos.

Protokol brez zavisti za $n = 3$

Če igralec 2 obreže 1 kos:

- 3 Igralec 3 izbere kos.
- 4 Igralec 2 izbere kos. Če je na voljo, mora izbrati obrezani kos.
- 5 Igralec 1 dobi preostali kos.
- 6 Igralec 2 ali igralec 3, ki je prejel neobrezan kos, razreže odrezke na 3 dele.
- 7 Igralec, ki je prejel obrezan kos, izbere kos.
- 8 Igralec 1 izbere kos.
- 9 Igralec, ki je razrezal odrezke, dobi preostali kos.

Zaključek

Hvala za pozornost 😊