

# Rezanje kolača brez zavisti

Predstavitev protokolov razdeljevanja

Nik Erzetič

10. maj 2019

Uvod: zakaj pomembno, predstavil protokole za rezanje torte predstavljene v izvornem članku, definiral par pojmov, uporabno v računalništvu

Kako razrezati kolač, da bo vsak otrok zadovoljen s svojim kosom? Kako razporediti hišna opravila, da se nihče ne bo pritoževal, češ da mora storiti več kot ostali? Kako razdeliti sporno ozemlje med sosednji državi? V tem članku bom podal štiri protokole, ki rešijo prva dva problema in ki so navdihnili protokole, s katerim se lahko odgovori na tretje vprašanje. Zapisal jih bom tako, kot so predstavljeni v članku An Envy-Free Cake Division Protocol [1] avtorjev Brams in Taylor. Ti protokoli so: *razreži in izberi*, *proporcionalni protokol* za  $n = 3$ , *proporcionalni protokol* za *poljuben*  $n$  in *protokol brez zavisti* za  $n = 3$ . V članku izvornem članku je opisan še *protokol brez zavisti* za *poljuben*  $n$ , vendar ga ne bom podrobneje opisal, ker je v mojih očeh za vsakdanje situacije nepraktičen.

Definicije in protokoli v tem članku bodo skoraj povsem enaki tistim, ki jih najdemo v izvornem delu [1]. Protokoli, dokazi in zmagovalne strategije so v njem podani hkrati, jaz pa jih bom tu ločil. Prav tako bom protokole zapisal v obliki psevdokode, prav tako kot ubesedeno.

Preden začnem opisovati protokole, moram definirati nekaj pojmov. Prva od teh je - zdaj že velikokrat omenjena beseda - protokol. Sledita še dve definiciji o lastnostih protokolov - proporcionalnost in brez zavisti - ki sem ju prav tako že omenil v uvodnem odstavku.

**Definicija 1.** *Protokol* je interaktiven postopke, ki ga lahko zapišemo kot računalniški program in ki sodelujočim lahko postavlja vprašanja, ki spreminijo njegov končni izid.

**Definicija 2.** Protokol je **proporcionalen**, če za vsakega igralca obstaja strategija, ki mu bo zagotovila vsaj  $\frac{1}{n}$  kolača (glede na lasten kriterij).

Zapis pogoja iz definicije s kvantifikatorji izgleda takole:

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}. \exists S_i : P \rightarrow P_i. V_i(P_i) \geq \frac{1}{n}$$

V zgornjem zapisu sem uporabil simbole, ki se jih bom posluževal tudi v nadaljevanju članka. Najprej je tu množica indeksov  $\{1, 2, \dots, n\}$ , ki bi jo lahko kar enačili z množico igralcev. Sledi preslikava  $S_i$ , ki pomeni strategijo, s katero  $i$ -ti igralec pridobi kos kolača  $P_i$ . Nazadnje je tu še preslikava  $V_i$ , ki je kriterij  $i$ -tega igralca za določanje velikosti kosov torte.

**Definicija 3.** *Protokol je **brez zavisti**, če za vsakega igralca obstaja strategija, ki mu bo zagotovila kos, ki je večji ali enak ostalim kosom.*

Pogoj protokola brez zavisti zapišem takole:

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}. \exists S_i : P \rightarrow P_i. \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}. V_i(P_i) \geq V_i(P_j)$$

## Literatura

- [1] Steven J. Brams, Alan D. Taylor An Envy-Free Cake Division Protocol  
*The American Mathematical Monthly* **102** (1995), 9–18