Rezanje kolača brez zavisti

Predstavitev protokolov razdeljevanja

Nik Erzetič

11. maj 2019

Uvod: zakaj pomembno, predstavil protokole za rezanje torte predstavljene v izvornem članku, definiral par pojmov, uporabno v računalništvu

Kako razrezati kolač, da bo vsak otrok zadovoljen s svojim kosom? Kako razporediti hišna opravila, da se nihče ne bo pritoževal, češ da mora storiti več kot ostali? Kako razdeliti sporno ozemlje med sosednji državi? V tem članku bom podal štiri protokole, ki rešijo prva dva problema in ki so navdihnili protokole, s katerim se lahko odgovori na tretje vprašanje. Zapisal jih bom tako, kot so predstavljeni v članku An Envy-Free Cake Division Protocol [1] avtorjev Brams in Taylor. Ti protokoli so: *razreži in izberi*, *proporcionalni protokol za* $n = 3$, *proporcionalni protokol za poljuben* n in *protokol brez zavisti za* $n = 3$. V izvornem članku je opisan še *protokol brez zavisti za poljuben* n, vendar ga ne bom podrobneje opisal, ker je v mojih očeh za vsakdanje situacije nepraktičen.

Definicije in protokoli v tem članku bodo skoraj povsem enaki tistim, ki jih najdemo v izvornem delu [1]. Protokoli, dokazi in zmagovalne strategije so v njem podani hkrati, jaz pa jih bom tu ločil. Prav tako bom postopek zapisal kot psevdokodo.

Preden začnem opisovati protokole, moram definirati še nekaj pojmov. Prva od teh je - zdaj že velikokrat omenjena beseda - protokol. Sledita še dve definiciji o lastnostih protokolov - proporcionalnost in brez zavisti - ki sem ju prav tako že omenil v uvodnem odstavku.

Definicija 1. ***Protokol*** *je interaktiven postopke, ki ga lahko zapišemo kot računalniški program in ki sodelujočim lahko postavlja vprašanja, ki spremenijo njegov končni izid.*

Definicija 2. *Protokol je* ***proporcionalen****, če za vsakega igralca obstaja strategija, ki mu bo zagotovila vsaj* $\frac{1}{n}$ *kolača (glede na lasten kriterij).*

Zapis pogoja iz definicije s kvantifikatorji izgleda takole:

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.\ \exists S_i : P \to P_i.\ V_i(P_i) \geq \frac{1}{n}$$

V zgornjem zapisu sem uporabil simbole, ki se jih bom posluževal tudi v nadaljevanju članka. Najprej je tu množica indeksov $\{1, 2, \dots, n\}$, ki bi jo lahko kar enačili z množico igralcev. Sledi preslikava S_i, ki pomeni strategijo, s katero i-ti igralec pridobi kos kolača P_i. Nazadnje je tu še preslikava V_i, ki je kriterij i-tega igralca za določanje velikosti kosov torte.

Definicija 3. *Protokol je **brez zavisti**, če za vsakega igralca obstaja strategija, ki mu bo zagotovila kos, ki je večji ali enak ostalim kosom.*

Pogoj protokola brez zavisti zapišemo takole:

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.\ \exists S_i : P \to P_i.\ \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}.\ V_i(P_i) \geq V_i(P_j)$$

Kot sem že zapisal, bom sledeče protokole predstavil s psevdokodo. V dokazih bom moral zato le poiskati optimalno strategijo in dokazati, da vsakega igralca privede do želenega rezultata. Protokoli že po svoji definiciji igralcem ponujajo različne opcije, zato bodo dokazi v večini temeljili na obravnavi primerov.

Prvi protokol je *razreži in razdeli* (cut-and-choose) za dva igralca. Ta protokol je hkrati proporcionalen in brez zavisti. Zgleda pa tako:

Protokol 1. *Razreži in razdeli:*

1. *Igralec 1 kolač razreže na 2 dela.*
2. *Igralec 2 izbere kos.*
3. *Igralec 1 dobi preostali kos.*

Trditev 1. *Protokol 1 je proporcionalen in brez zavisti.*

Dokaz: Protokol z optimalno strategijo za oba igralca je sledeč:

1. Igralec 1 razreže kolač P na kosa P_1 in P_2, da velja $V_1(P_1) = V_1(P_2) = \frac{1}{2}$.
2. Igralec 2 izbere kos P_{i_1}, da velja $V_2(P_{i_1}) \geq V_2(P_{i_2})$, kjer sta i_1, i_2 elementa $\{1, 2\}$ in $i_1 \neq i_2$. Ker je vsota $V_2(P_{i_1}) + V_2(P_{i_2} = 1$ in $V_2(P_{i_1}) \geq V_2(P_{i_2})$, je $V_2(P_{i_1}) \geq \frac{1}{2}$. Torej strategija igralcu 2 zagotovi kos, ki je večji ali enak $\frac{1}{2}$ in večji ali enak ostalim kosom.

3. Igralec 1 dobi preostali kos P_{i_2}. Ker je $V_1(P_1) = V_1(P_2) = \frac{1}{2}$, je $V_1(P_{i_2}) \geq \frac{1}{2}$ in $V_1(P_{i_2}) \geq V_1(P_{i_1})$. Torej strategija igralcu 1 zagotovi kos, ki je večji ali enak $\frac{1}{2}$ in večji ali enak ostalim kosom.

Torej je protokol razreži in razdeli proporcionalen in brez zavisti. □

Naslednji je *proporcionalni protokol za* $n = 3$ (proportional protocol for $n = 3$). Razvil ga je Steinhauss med drugo svetovno vojno. Poteka pa tako:

Protokol 2. *Proporcionalni protokol za* $n = 3$*:*

1. *Igralec 1 razreže kolač na 3 dele.*
2. *Igralec 2 ne stori nič ali označi 2 kosa.*

   Če igralec 2 ne stori nič:

3. *Igralec 3 izbere kos.*
4. *Igralec 2 izbere kos.*
5. *Igralec 1 dobi preostali kos.*

   Če igralec 2 označi 2 kosa:

3. *Igralec 3 ne stori nič ali označi 2 kosa.*

   Če igralec 3 ne stori nič:

4. *Igralec 2 izbere kos.*
5. *Igralec 3 izbere kos.*
6. *Igralec 1 dobi preostali kos.*

   Če igralec 3 označi 2 kosa:

4. *Igralec 1 izbere kos, ki sta ga označila igralec 2 in igralec 3*
5. *Preostala kosa se združita v nov kolač*
6. *Protokol **razreži in izberi** med igralcem 2 in igralcem 3*

Trditev 2. *Protokol 2 je proporcionalen.*

Dokaz: Protokol z optimalno strategijo za vse tri igralce je sledeč: □

Protokol 3. *Proporcionalni protokol za poljuben n:*

1. *Igralec 1 odreže kos od kolača.*
2. *(1.) Igralec 2 ne stori nič ali obreže odrezani kos.*

   ⋮

   (i.) Igralec i ne stori nič ali obreže odrezani kos.

   ⋮

   (n.) Igralec n ne stori nič ali obreže odrezani kos.
3. *Zadnji igralec, ki je obrezal kos, ali igralec 1, če nihče ni obrezal kosa, prejme ta kos.*
4. *Odrezke se združijo s kolačem.*
5. *Koraki 1. - 4. se ponavljajo, dokler ne ostaneta dva igralca.*
6. *Protokol **razreži in izberi** med preostalima igralcem.*

Trditev 3. *Protokol 3 je proporcionalen.*

Protokol 4. *Protokol brez zavisti za* $n = 3$

1. *Igralec 1 razreže kolač na 3 dele.*
2. *Igralec 2 ne stori nič ali obreže 1 kos.*

   Če igralec 2 ne stori nič:
3. *Igralec 3 izbere kos.*
4. *Igralec 2 izbere kos.*
5. *Igralec 1 dobi preostali kos.*

   Če igralec 2 obreže 1 kos:
3. *Igralec 3 izbere kos.*
4. *Igralec 2 izbere kos. Če je na voljo, mora izbrati obrezani kos.*
5. *Igralec 1 dobi preostali kos.*

6. *Igralec 2 ali igralec 3, ki je prejel neobrezan kos, razreže odrezke na 3 dele.*

7. *Igralec, ki je prejel obrezan kos, izbere kos.*

8. *Igralec 1 izbere kos.*

9. *Igralec, ki je razrezal odrezke, dobi preostali kos.*

Trditev 4. *Protokol 4 je brez zavisti.*

Literatura

[1] Steven J. Brams, Alan D. Taylor An Envy-Free Cake Division Protocol *The American Mathematical Monthly* **102** (1995), 9–18