Rezanje kolača brez zavisti

Predstavitev protokolov razdeljevanja

Nik Erzetič

11. maj 2019

Uvod: zakaj pomembno, predstavil protokole za rezanje torte predstavljene v izvornem članku, definiral par pojmov, uporabno v računalništvu

Kako razrezati kolač, da bo vsak otrok zadovoljen s svojim kosom? Kako razporediti hišna opravila, da se nihče ne bo pritoževal, češ da mora storiti več kot ostali? Kako razdeliti sporno ozemlje med sosednji državi? V tem članku bom podal štiri protokole, ki rešijo prva dva problema in ki so navdihnili protokole, s katerim se lahko odgovori na tretje vprašanje. Zapisal jih bom tako, kot so predstavljeni v članku An Envy-Free Cake Division Protocol [1] avtorjev Brams in Taylor. Ti protokoli so: *razreži in izberi*, *proporcionalni protokol za* $n = 3$, *proporcionalni protokol za poljuben* n in *protokol brez zavisti za* $n = 3$. V članku izvornem članku je opisan še *protokol brez zavisti za poljuben* n, vendar ga ne bom podrobneje opisal, ker je v mojih očeh za vsakdanje situacije nepraktičen.

Definicije in protokoli v tem članku bodo skoraj povsem enaki tistim, ki jih najdemo v izvornem delu [1]. Protokoli, dokazi in zmagovalne strategije so v njem podani hkrati, jaz pa jih bom tu ločil.

Preden začnem opisovati protokole, moram definirati še nekaj pojmov. Prva od teh je - zdaj že velikokrat omenjena beseda - protokol. Sledita še dve definiciji o lastnostih protokolov - proporcionalnost in brez zavisti - ki sem ju prav tako že omenil v uvodnem odstavku.

Definicija 1. ***Protokol*** *je interaktiven postopke, ki ga lahko zapišemo kot računalniški program in ki sodelujočim lahko postavlja vprašanja, ki spremenijo njegov končni izid.*

Definicija 2. *Protokol je* ***proporcionalen****, če za vsakega igralca obstaja strategija, ki mu bo zagotovila vsaj* $\frac{1}{n}$ *kolača (glede na lasten kriterij).*

Zapis pogoja iz definicije s kvantifikatorji izgleda takole:

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}.\ \exists S_i : P \rightarrow P_i.\ V_i(P_i) \geq \frac{1}{n}$$

V zgornjem zapisu sem uporabil simbole, ki se jih bom posluževal tudi v nadaljevanju članka. Najprej je tu množica indeksov $\{1, 2, \ldots, n\}$, ki bi jo lahko kar enačili z množico igralcev. Sledi preslikava S_i, ki pomeni strategijo, s katero i-ti igralec pridobi kos kolača P_i. Nazadnje je tu še preslikava V_i, ki je kriterij i-tega igralca za določanje velikosti kosov torte.

Definicija 3. *Protokol je* ***brez zavisti****, če za vsakega igralca obstaja strategija, ki mu bo zagotovila kos, ki je večji ali enak ostalim kosom.*

Pogoj protokola brez zavisti zapišemo takole:

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}.\ \exists S_i : P \rightarrow P_i.\ \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}.\ V_i(P_i) \geq V_i(P_j)$$

Kot sem že zapisal, bom sledeče protokole predstavil brez optimalne strategije. V dokazih bom moral zato le to poiskati. Protokoli že po svoji definiciji igralcem ponujajo različne opcije, zato bodo dokazi v večini temeljili na obravnavi primerov.

Prvi protokol je *razreži in razdeli* (cut-and-choose) za dva igralca. Ta protokol je hkrati proporcionalen in brez zavisti. Zgleda pa tako:

Protokol 1. *Razreži in razdeli:*

1. *Igralec 1 kolač razreže na dva dela.*
2. *Igralec 2 izbere kos.*
3. *Igralec 1 dobi preostali kos.*

Trditev 1. *Protokol razreži in razdeli je proporcionalen in brez zavisti.*

Dokaz: Protokol z optimalno strategijo za oba igralca je sledeč:

1. Igralec 1 razreže kolač P na kosa P_1 in P_2, da velja $V_1(P_1) = V_1(P_2) = \frac{1}{2}$.
2. Igralec 2 izbere kos P_{i_1}, da velja $V_2(P_{i_1}) \geq V_2(P_{i_2})$, kjer sta i_1, i_2 elementa $\{1, 2\}$ in $i_1 \neq i_2$. Ker je vsota $V_2(P_{i_1}) + V_2(P_{i_2} = 1$ in $V_2(P_{i_1}) \geq V_2(P_{i_2})$, je $V_2(P_{i_1}) \geq \frac{1}{2}$. Torej strategija igralcu 2 zagotovi kos, ki je večji ali enak $\frac{1}{2}$ in večji ali enak ostalim kosom.

3. Igralec 1 dobi preostali kos P_{i_2}. Ker je $V_1(P_1) = V_1(P_2) = \frac{1}{2}$, je $V_1(P_{i_2}) \geq \frac{1}{2}$ in $V_1(P_{i_2}) \geq V_1(P_{i_1})$. Torej strategija igralcu 1 zagotovi kos, ki je večji ali enak $\frac{1}{2}$ in večji ali enak ostalim kosom.

Torej je protokol razreži in razdeli proporcionalen in brez zavisti. □

Naslednji je *proporcionalni protokol za* $n = 3$ (proportional protocol for $n = 3$). Razvil ga je Steinhauss med drugo svetovno vojno. Poteka pa tako:

Protokol 2. *Proporcionalni protokol za* $n = 3$*:*

1. Igralec 1 razreže kolač na 3 dele.

2. Igralec 2 ne stori nič ali označi 2 kosa.

Če igralec 2 ne stori nič:

3. Igralec 3 izbere kos.

4. Igralec 2 izbere kos.

5. Igralec 1 izbere kos.

Če igralec 2 označi 2 kosa:

3. Igralec 3 ne stori nič ali označi 2 kosa.

Če igralec 3 ne stori nič:

4. Igralec 2 izbere kos.

5. Igralec 3 izbere kos.

6. Igralec 1 izbere kos.

Če igralec 3 označi 2 kosa:

4. Igralec 1 izbere kos, ki sta ga označila igralec 2 in igralec 3

5. Preostala kosa se združita v nov kolač

6. Protokol razreži in izberi med igralcem 2 in igralcem 3

Literatura

[1] Steven J. Brams, Alan D. Taylor An Envy-Free Cake Division Protocol *The American Mathematical Monthly* **102** (1995), 9–18