Rezanje kolača brez zavisti

Predstavitev protokolov razdeljevanja

Nik Erzetič

20. maj 2019

Kako razrezati kolač, da bo vsak otrok zadovoljen s svojim kosom? Kako razporediti hišna opravila, da se nihče ne bo pritoževal, češ da mora storiti več kot ostali? Kako razdeliti sporno ozemlje med sosednji državi? V tem članku bom podal štiri protokole, ki rešijo prva dva problema in ki so navdihnili protokole, s katerim se lahko odgovori na tretje vprašanje. Zapisal jih bom tako, kot so predstavljeni v članku An Envy-Free Cake Division Protocol [1] avtorjev Brams in Taylor. Ti protokoli so: *razreži in izberi*, *proporcionalni protokol za* $n = 3$, *proporcionalni protokol za poljuben* n in *protokol brez zavisti za* $n = 3$. V izvornem članku je opisan še *protokol brez zavisti za poljuben* n, vendar ga ne bom podrobneje opisal, ker je v mojih očeh za vsakdanje situacije nepraktičen.

Definicije in protokoli v tem članku bodo skoraj povsem enaki tistim, ki jih najdemo v izvornem delu [1]. Protokoli, dokazi in zmagovalne strategije so v njem podani hkrati, jaz pa jih bom tu ločil. Prav tako bom postopek zapisal kot psevdokodo.

Preden začnem opisovati protokole, moram definirati še nekaj pojmov. Prva od teh je - zdaj že velikokrat omenjena beseda - protokol. Sledita še dve definiciji o lastnostih protokolov - proporcionalnost in brez zavisti - ki sem ju prav tako že omenil v uvodnem odstavku.

Definicija 1. *Naj bo* X *neprazna množica. Družino* $\mathcal{M}$*,* $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$*, imenujemo* ***σ-algebra****, če velja:*

- $X \in \mathcal{M}$
- $\forall E \in \mathcal{P}(X).\ E \in \mathcal{M} \Rightarrow E^C \in \mathcal{M}$ *(zaprtost za komplemente)*
- $\forall E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{P}(X).\ E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \mathcal{M}$ *(zaprtost za končne unije)*

Elementom σ-algebre rečemo ***merljive množice****, paru $(X, \mathcal{M})$ pa* ***merljiv prostor****.*

Definicija 2. *Naj bo $(X, \mathcal{M})$ merljiv prostor. Preslikava $V : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ je* ***mera*** *na $\mathcal{M}$, če velja:*

- $V(\emptyset) = 0$
- *če je $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ zaporedje paroma disjunktnih merljivih množic, je potem $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ (μ je števno aditivna)*

Vpeljati moram še nekaj pojmov, ki bi jih s težavo formalno definiral. Prav tako so na sledeč način definirano bolj intuitivno razumljivi.

Protokol je interaktiven postopek, ki ga lahko zapišemo kot računalniški program in ki sodelujočim lahko postavlja vprašanja, ki spremenijo njegov končni izid. Od algoritma se razlikuje ravno po izbirah igralcev, ki vplivajo na končni izid. Tako bi bila primer algoritma *for zanka*, primer protokola pa barvanje platna v barvo, ki jo izbere uporabnik.

Protokol je **proporcionalen**, če za vsakega igralca obstaja strategija, ki mu bo zagotovila vsaj $\frac{1}{n}$ kolača (glede na lasten kriterij). Protokol je **brez zavisti**, če za vsakega igralca obstaja strategija, ki mu bo zagotovila kos, ki je večji ali enak ostalim kosom.

Kot sem že zapisal, bom sledeče protokole predstavil s psevdokodo. V dokazih bom moral zato le poiskati optimalno strategijo in dokazati, da vsakega igralca privede do želenega rezultata. Protokoli že po svoji definiciji igralcem ponujajo različne opcije, zato bodo dokazi v večini temeljili na obravnavi primerov. Prav tako bom v dokazih za proporcionalnost predpostavil, da mera celotnega kolača za vse igralce enaka 1.

Prvi protokol je *razreži in razdeli* (cut-and-choose) za dva igralca. Ta protokol je hkrati proporcionalen in brez zavisti. Zgleda pa tako:

Protokol 1. *Razreži in razdeli:*

1. *Igralec 1 kolač razreže na 2 dela.*
2. *Igralec 2 izbere kos.*
3. *Igralec 1 dobi preostali kos.*

Trditev 1. *Protokol 1 je proporcionalen in brez zavisti.*

Dokaz: Protokol z optimalno strategijo za oba igralca je sledeč:

1. Igralec 1 razreže kolač P na kosa P_1 in P_2, da velja $\mu_1(P_1) = V_1(P_2) = \frac{1}{2}$.
2. Igralec 2 izbere kos P_{i_1}, da velja $\mu_2(P_{i_1}) \geq \mu_2(P_{i_2})$, kjer sta i_1, i_2 različna elementa $\{1, 2\}$. Ker je vsota $\mu_2(P_{i_1})+\mu_2(P_{i_2}) = 1$ in $\mu_2(P_{i_1}) \geq \mu_2(P_{i_2})$, je $\mu_2(P_{i_1}) \geq \frac{1}{2}$. Torej strategija igralcu 2 zagotovi kos, ki je večji ali enak $\frac{1}{2}$ in večji ali enak ostalim kosom.
3. Igralec 1 dobi preostali kos P_{i_2}. Ker je $\mu_1(P_1) = \mu_1(P_2) = \frac{1}{2}$, je $\mu_1(P_{i_2}) \geq \frac{1}{2}$ in $\mu_1(P_{i_2}) \geq \mu_1(P_{i_1})$. Torej strategija igralcu 1 zagotovi kos, ki je večji ali enak $\frac{1}{2}$ in večji ali enak ostalim kosom.

Torej je protokol razreži in razdeli proporcionalen in brez zavisti. □

Naslednji je *proporcionalni protokol za* $n = 3$ (proportional protocol for $n = 3$). Razvil ga je Steinhauss med drugo svetovno vojno. Poteka pa tako:

Protokol 2. *Proporcionalni protokol za* $n = 3$*:*

1. *Igralec 1 razreže kolač na 3 dele.*
2. *Igralec 2 ne stori nič ali označi 2 kosa.*

   Če igralec 2 ne stori nič:

3. *Igralec 3 izbere kos.*
4. *Igralec 2 izbere kos.*
5. *Igralec 1 dobi preostali kos.*

   Če igralec 2 označi 2 kosa:

3. *Igralec 3 ne stori nič ali označi 2 kosa.*

   Če igralec 3 ne stori nič:

4. *Igralec 2 izbere kos.*
5. *Igralec 3 izbere kos.*
6. *Igralec 1 dobi preostali kos.*

   Če igralec 3 označi 2 kosa:

4. *Igralec 1 izbere kos, ki sta ga označila igralec 2 in igralec 3.*

5. *Preostala kosa se združita v nov kolač.*

6. *Protokol **razreži in izberi** med igralcem 2 in igralcem 3.*

Trditev 2. *Protokol 2 je proporcionalen.*

Dokaz: Protokol 2 z optimalno strategijo za vse tri igralce je sledeč:

1. Igralec 1 razreže kolač P na kose P_1, P_2 in P_3, da velja $\mu_1(P_1) = \mu_1(P_2) = \mu_1(P_3) = \frac{1}{3}$.

2. Igralec 2 ne stori nič, če obstajata različna indeksa i_1, i_2 iz $\{1, 2, 3\}$, da velja $\mu_2(P_{i_1}), \mu_2(P_{i_2}) \geq \frac{1}{3}$, ali označi kosa P_{i_1} in P_{i_2}, če sta $\mu_2(P_{i_1}), \mu_2(P_{i_2}) < \frac{1}{3}$ in i_1, i_2 različna indeksa.

   Predpostavimo, da je $\mu_2(P_{i_1}), \mu_2(P_{i_2}) \geq \frac{1}{3}$. Igralec 2 ne stori nič.

3. Igralec 3 izbere kos P_{j_3}, za katerega velja $\mu_3(P_{j_3}) \geq \frac{1}{3}$. Tak kos obstaja, ker je $\mu_3(P_{j_1}) + \mu_3(P_{j_2}) + \mu_3(P_{j_3}) = 1$ in so na voljo še vsi trije kosi. Torej strategija igralcu 3 zagotovi kos, ki je večji ali enak $\frac{1}{3}$.

4. Igralec 2 izbere kos P_{j_2} iz $\{P_{i_1}, P_{i_2}\}$. Vsaj eden izmed teh kosov je še na voljo, saj igralec 3 izbral le en kos. Po predpostavki za kos P_{j_2} velja $\mu_2(P_{j_2}) \geq \frac{1}{3}$. Torej strategija igralcu 2 zagotovi kos, ki je večji ali enak $\frac{1}{3}$.

5. Igralec 1 dobi preostali kos P_{j_1}. Ker je igralec 1 kolač razrezal tako, da velja $\mu_1(P_1) = \mu_1(P_2) = \mu_1(P_3) = \frac{1}{3}$, mu strategija zagotovi kos, ki je večji ali enak $\frac{1}{3}$.

   Predpostavimo, da je $\mu_2(P_{i_1}), \mu_2(P_{i_2}) < \frac{1}{3}$. Igralec 2 označi kosa P_{i_1} in P_{i_2}.

3. Igralec 3 ne stori nič, če obstajata različna indeksa j_1, j_2 iz $\{1, 2, 3\}$, da velja $\mu_3(P_{j_1}), \mu_3(P_{j_2}) \geq \frac{1}{3}$, ali označi kosa P_{j_1} in P_{j_2}, če sta $\mu_3(P_{j_1}), \mu_3(P_{j_2}) < \frac{1}{3}$ in i_1, i_2 različna indeksa.

   Predpostavimo, da je $\mu_3(P_{j_1}), \mu_3(P_{j_2}) \geq \frac{1}{3}$. Igralec 3 ne stori nič.

4. Igralec 2 izbere neoznačen kos P_{i_3}.

5. Igralec 3 izbere kos P_{j_2} iz $\{P_{i_1}, P_{i_2}\}$. Vsaj eden izmed teh kosov je še na voljo, saj igralec 3 izbral le en kos. Po predpostavki za kos P_{j_2} velja $\mu_2(P_{j_2}) \geq \frac{1}{3}$. Torej strategija igralcu 2 zagotovi kos, ki je večji ali enak $\frac{1}{3}$.

6. Igralec 1 dobi preostali kos P_{j_1}. Ker velja $\mu_1(P_1) = \mu_1(P_2) = \mu_1(P_3) = \frac{1}{3}$, je $\mu_1(P_{j_1}) \geq \frac{1}{3}$. Torej strategija igralcu 1 zagotovi kos, ki je večji ali enak $\frac{1}{3}$.

   Predpostavimo, da je $\mu_3(P_{j_1}), \mu_3(P_{j_2}) < \frac{1}{3}$. Igralec 3 označi kosa P_{j_1} in P_{j_2}.

4. Igralec 1 izbere kos P_{k_1} iz $\{P_{i_1}, P_{i_2}\} \cap \{P_{j_1}, P_{j_2}\}$. Ker velja $\mu_1(P_1) = \mu_1(P_2) = \mu_1(P_3) = \frac{1}{3}$, je $\mu_1(P_{k_1}) \geq \frac{1}{3}$. Torej strategija igralcu 1 zagotovi kos, ki je večji ali enak $\frac{1}{3}$.

5. Preostala kosa se združita v nov kolač.

6. Preostala kosa se združita v nov kolač, ki se med igralca 1 in igralca 2 razdeli po protokolu **razreži in razdeli**. Optimalna strategija zanj obema zagotovo kos, ki je večji ali enak $\frac{1}{3}$.

Torej je proporcionalni protokol za $n = 3$ proporcionalen. □

Proporcionalen protokol za poljuben n sta kmalu po Steinhausovem podala Banach in Knaster. Izgledato tako:

Protokol 3. *Proporcionalni protokol za poljuben n:*

1. *Igralec 1 odreže kos od kolača.*
2. *(1.) Igralec 2 ne stori nič ali obreže odrezani kos.*

   $\vdots$

   (i.) Igralec i ne stori nič ali obreže odrezani kos.

   $\vdots$

   (n.) Igralec n ne stori nič ali obreže odrezani kos.
3. *Zadnji igralec, ki je obrezal kos, ali igralec 1, če nihče ni obrezal kosa, prejme ta kos.*
4. *Odrezke se združijo s kolačem.*
5. *Koraki 1. - 4. se ponavljajo, dokler ne ostaneta dva igralca.*
6. *Protokol **razreži in izberi** med preostalima igralcem.*

Trditev 3. *Protokol 3 je proporcionalen.*

Dokaz: Protokol 3 z optimalno strategijo za vseh n igralcev je sledeč:

1. Igralec 1 odreže kos P_1 od kolača P, da velja $\mu_1(P_1) = \frac{1}{n}$.
2. (1.) Igralec 2 ne stori nič, če je $\mu_2(P_1) \leq \frac{1}{n}$, ali obreže odrezani kos, če je $\mu_2(P_1) > \frac{1}{n}$, da dobi kos P_2, za katerega velja $\mu_2(P_2) = \frac{1}{n}$.

   $\vdots$

   (i.) Igralec i ne stori nič, če je $\mu_i(P_{i-1}) \leq \frac{1}{n}$, ali obreže odrezani kos, če je $\mu_i(P_{i-1}) > \frac{1}{n}$, da dobi kos P_i, za katerega velja $\mu_i(P_i) = \frac{1}{n}$.

   $\vdots$

   (n.) Igralec n ne stori nič, če je $\mu_n(P_{n-1}) \leq \frac{1}{n}$, ali obreže odrezani kos, če je $\mu_n(P_{n-1}) > \frac{1}{n}$, da dobi kos P_n, za katerega velja $\mu_n(P_n) = \frac{1}{n}$.
3. Naj bo igralec i tisti, ki je zadnji obrezal kos. Velja $\mu_i(P_i) = \frac{1}{n}$. Torej strategija igralcu i zagotovi kos, ki je večji ali enak $\frac{1}{n}$.
4. Odrezke se združijo s kolačem.
5. Koraki 1. - 4. se ponavljajo, dokler ne ostaneta dva igralca. V vsakem koraku igralec j dobi kos, za katerega velja $\mu_j(P_j) = \frac{1}{n}$. Pri tem je potrebno dokazati še, da vsak naslednji igralec dobi $\frac{1}{n}$. To pokaže preprost račun:

$$\frac{1-\frac{1}{n}}{n-1} = \frac{\frac{n}{n}-\frac{1}{n}}{n-1} = \frac{n-1}{n(n-1)} = \frac{1}{n}$$

   Torej optimalna strategija igralcu j zagotovi kos, ki je večji ali enak $\frac{1}{n}$.
6. Protokol **razreži in izberi** med preostalima igralcem vsakemu izmed njiju zagotovi del, ki je večji ali enak $\frac{1}{n}$.

Torej je proporcionalni protokol za poljuben n proporcionalen. □

Zadnji protokol, ki ga bom predstavil je protokol brez zavisti za $n = 3$. Prva sta ga predstavila Selfridge in Conway ter je sledeč:

Protokol 4. *Protokol brez zavisti za $n = 3$*

1. *Igralec 1 razreže kolač na 3 dele.*
2. *Igralec 2 ne stori nič ali obreže 1 kos.*

   Če igralec 2 ne stori nič:

3. *Igralec 3 izbere kos.*

4. *Igralec 2 izbere kos.*

5. *Igralec 1 dobi preostali kos.*

Če igralec 2 obreže 1 kos:

3. *Igralec 3 izbere kos.*

4. *Igralec 2 izbere kos. Če je na voljo, mora izbrati obrezani kos.*

5. *Igralec 1 dobi preostali kos.*

6. *Igralec 2 ali igralec 3, ki je prejel neobrezan kos, razreže odrezke na 3 dele.*

7. *Igralec, ki je prejel obrezan kos, izbere kos.*

8. *Igralec 1 izbere kos.*

9. *Igralec, ki je razrezal odrezke, dobi preostali kos.*

Trditev 4. *Protokol 4 je brez zavisti.*

Dokaz: Protokol 4 z optimalno strategijo za vse tri igralce je sledeč:

1. Igralec 1 razreže kolač na 3 dele.

2. Igralec 2 ne stori nič ali obreže 1 kos.

Če igralec 2 ne stori nič:

3. Igralec 3 izbere kos.

4. Igralec 2 izbere kos.

5. Igralec 1 dobi preostali kos.

Če igralec 2 obreže 1 kos:

3. Igralec 3 izbere kos.

4. Igralec 2 izbere kos. Če je na voljo, mora izbrati obrezani kos.

5. Igralec 1 dobi preostali kos.

6. Igralec 2 ali igralec 3, ki je prejel neobrezan kos, razreže odrezke na 3 dele.

7. Igralec, ki je prejel obrezan kos, izbere kos.

8. Igralec 1 izbere kos.

9. Igralec, ki je razrezal odrezke, dobi preostali kos.

□

Literatura

[1] Steven J. Brams, Alan D. Taylor An Envy-Free Cake Division Protocol *The American Mathematical Monthly* **102** (1995), 9–18