# Rezanje kolača brez zavisti

Predstavitev protokolov razdeljevanja

Nik Erzetič

14. maj 2019

Uvod: zakaj pomembno, predstavil protokole za rezanje torte predstavljene v izvornem članku, definiral par pojmov, uporabno v računalništvu

Kako razrezati kolač, da bo vsak otrok zadovoljen s svojim kosom? Kako razporediti hišna opravila, da se nihče ne bo pritoževal, češ da mora storiti več kot ostali? Kako razdeliti sporno ozemlje med sosednji državi? V tem članku bom podal štiri protokole, ki rešijo prva dva problema in ki so navdihnili protokole, s katerim se lahko odgovori na tretje vprašanje. Zapisal jih bom tako, kot so predstavljeni v članku An Envy-Free Cake Division Protocol [1] avtorjev Brams in Taylor. Ti protokoli so: *razreži in izberi*, *proporcionalni protokol za* $n = 3$, *proporcionalni protokol za poljuben* $n$ in *protokol brez zavisti za* $n = 3$. V izvornem članku je opisan še *protokol brez zavisti za poljuben* $n$, vendar ga ne bom podrobneje opisal, ker je v mojih očeh za vsakdanje situacije nepraktičen.

Definicije in protokoli v tem članku bodo skoraj povsem enaki tistim, ki jih najdemo v izvornem delu [1]. Protokoli, dokazi in zmagovalne strategije so v njem podani hkrati, jaz pa jih bom tu ločil. Prav tako bom postopek zapisal kot psevdokodo.

Preden začnem opisovati protokole, moram definirati še nekaj pojmov. Prva od teh je - zdaj že velikokrat omenjena beseda - protokol. Sledita še dve definiciji o lastnostih protokolov - proporcionalnost in brez zavisti - ki sem ju prav tako že omenil v uvodnem odstavku.

**Definicija 1.** *Naj bo* $X$ *neprazna množica. Družino* $\mathcal{M}$*,* $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$*, imenujemo* ***σ-algebra****, če velja:*

- $X \in \mathcal{M}$
- $\forall E \in \mathcal{P}(X).\ E \in \mathcal{M} \Rightarrow E^C \in \mathcal{M}$ *(zaprtost za komplemente)*
- $\forall E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{P}(X).\ E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \mathcal{M}$ *(zaprtost za končne unije)*

*Elementom $\sigma$-algebre rečemo* ***merljive množice****, paru $(X, \mathcal{M})$ pa* ***merljiv prostor****.*

**Definicija 2.** *Naj bo $(X, \mathcal{M})$ merljiv prostor. Preslikava $V : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ je* ***mera*** *na $\mathcal{M}$, če velja:*

- $V(\emptyset) = 0$
- *če je $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ zaporedje paroma disjunktnih merljivih množic, je potem $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ ($\mu$ je števno aditivna)*

Vpeljati moram še nekaj pojmov, ki bi jih s težavo formalno definiral. Prav tako so na sledeč način definirano bolj intuitivno razumljivi.

**Protokol** je interaktiven postopek, ki ga lahko zapišemo kot računalniški program in ki sodelujočim lahko postavlja vprašanja, ki spremenijo njegov končni izid. Od algoritma se razlikuje ravno po izbirah igralcev, ki vplivajo na končni izid. Tako bi bila primer algoritma *for zanka*, primer protokola pa barvanje platna v barvo, ki jo izbere uporabnik.

Protokol je **proporcionalen**, če za vsakega igralca obstaja strategija, ki mu bo zagotovila vsaj $\frac{1}{n}$ kolača (glede na lasten kriterij). Protokol je **brez zavisti**, če za vsakega igralca obstaja strategija, ki mu bo zagotovila kos, ki je večji ali enak ostalim kosom.

Kot sem že zapisal, bom sledeče protokole predstavil s psevdokodo. V dokazih bom moral zato le poiskati optimalno strategijo in dokazati, da vsakega igralca privede do želenega rezultata. Protokoli že po svoji definiciji igralcem ponujajo različne opcije, zato bodo dokazi v večini temeljili na obravnavi primerov.

Prvi protokol je *razreži in razdeli* (cut-and-choose) za dva igralca. Ta protokol je hkrati proporcionalen in brez zavisti. Zgleda pa tako:

**Protokol 1.** *Razreži in razdeli:*

1. *Igralec 1 kolač razreže na 2 dela.*
2. *Igralec 2 izbere kos.*
3. *Igralec 1 dobi preostali kos.*

**Trditev 1.** *Protokol 1 je proporcionalen in brez zavisti.*

**Dokaz:** Protokol z optimalno strategijo za oba igralca je sledeč:

1. Igralec 1 razreže kolač $P$ na kosa $P_1$ in $P_2$, da velja $\mu_1(P_1) = V_1(P_2) = \frac{1}{2}$.

2. Igralec 2 izbere kos $P_{i_1}$, da velja $\mu_2(P_{i_1}) \geq \mu_2(P_{i_2})$, kjer sta $i_1, i_2$ elementa $\{1, 2\}$ in $i_1 \neq i_2$. Ker je vsota $\mu_2(P_{i_1}) + \mu_2(P_{i_2} = 1$ in $\mu_2(P_{i_1}) \geq \mu_2(P_{i_2})$, je $\mu_2(P_{i_1}) \geq \frac{1}{2}$. Torej strategija igralcu 2 zagotovi kos, ki je večji ali enak $\frac{1}{2}$ in večji ali enak ostalim kosom.

3. Igralec 1 dobi preostali kos $P_{i_2}$. Ker je $\mu_1(P_1) = \mu_1(P_2) = \frac{1}{2}$, je $\mu_1(P_{i_2}) \geq \frac{1}{2}$ in $\mu_1(P_{i_2}) \geq \mu_1(P_{i_1})$. Torej strategija igralcu 1 zagotovi kos, ki je večji ali enak $\frac{1}{2}$ in večji ali enak ostalim kosom.

Torej je protokol razreži in razdeli proporcionalen in brez zavisti. □

Naslednji je *proporcionalni protokol za* $n = 3$ (proportional protocol for $n = 3$). Razvil ga je Steinhauss med drugo svetovno vojno. Poteka pa tako:

**Protokol 2.** *Proporcionalni protokol za* $n = 3$*:*

1. *Igralec 1 razreže kolač na 3 dele.*

2. *Igralec 2 ne stori nič ali označi 2 kosa.*

   *Če igralec 2 ne stori nič:*

3. *Igralec 3 izbere kos.*

4. *Igralec 2 izbere kos.*

5. *Igralec 1 dobi preostali kos.*

   *Če igralec 2 označi 2 kosa:*

3. *Igralec 3 ne stori nič ali označi 2 kosa.*

   *Če igralec 3 ne stori nič:*

4. *Igralec 2 izbere kos.*

5. *Igralec 3 izbere kos.*

6. *Igralec 1 dobi preostali kos.*

   *Če igralec 3 označi 2 kosa:*

4. *Igralec 1 izbere kos, ki sta ga označila igralec 2 in igralec 3*

5. *Preostala kosa se združita v nov kolač*

6. *Protokol **razreži in izberi** med igralcem 2 in igralcem 3*

**Trditev 2.** *Protokol 2 je proporcionalen.*

**Dokaz:** Protokol z optimalno strategijo za vse tri igralce je sledeč: □

**Protokol 3.** *Proporcionalni protokol za poljuben $n$:*

1. *Igralec 1 odreže kos od kolača.*
2. *(1.) Igralec 2 ne stori nič ali obreže odrezani kos.*

   $\vdots$

   *(i.) Igralec i ne stori nič ali obreže odrezani kos.*

   $\vdots$

   *(n.) Igralec n ne stori nič ali obreže odrezani kos.*
3. *Zadnji igralec, ki je obrezal kos, ali igralec 1, če nihče ni obrezal kosa, prejme ta kos.*
4. *Odrezke se združijo s kolačem.*
5. *Koraki 1. - 4. se ponavljajo, dokler ne ostaneta dva igralca.*
6. *Protokol* ***razreži in izberi*** *med preostalima igralcem.*

**Trditev 3.** *Protokol 3 je proporcionalen.*

**Protokol 4.** *Protokol brez zavisti za $n = 3$*

1. *Igralec 1 razreže kolač na 3 dele.*
2. *Igralec 2 ne stori nič ali obreže 1 kos.*

   *Če igralec 2 ne stori nič:*
3. *Igralec 3 izbere kos.*
4. *Igralec 2 izbere kos.*
5. *Igralec 1 dobi preostali kos.*

   *Če igralec 2 obreže 1 kos:*
3. *Igralec 3 izbere kos.*
4. *Igralec 2 izbere kos. Če je na voljo, mora izbrati obrezani kos.*
5. *Igralec 1 dobi preostali kos.*

6. *Igralec 2 ali igralec 3, ki je prejel neobrezan kos, razreže odrezke na 3 dele.*

7. *Igralec, ki je prejel obrezan kos, izbere kos.*

8. *Igralec 1 izbere kos.*

9. *Igralec, ki je razrezal odrezke, dobi preostali kos.*

**Trditev 4.** *Protokol 4 je brez zavisti.*

## Literatura

[1] Steven J. Brams, Alan D. Taylor An Envy-Free Cake Division Protocol *The American Mathematical Monthly* **102** (1995), 9–18