Rezanje kolača brez zavisti

Predstavitev protokolov razdeljevanja

Nik Erzetič

1. junij 2019

Kako razrezati kolač, da bo vsak otrok zadovoljen s svojim kosom? Kako razporediti hišna opravila, da se nihče ne bo pritoževal, češ da mora storiti več kot ostali? Kako razdeliti sporno ozemlje med sosednji državi? V tem članku bom podal štiri protokole, ki rešijo prva dva problema in ki so navdihnili protokole, s katerim se lahko odgovori na tretje vprašanje. Zapisal jih bom tako, kot so predstavljeni v članku An Envy-Free Cake Division Protocol [1] avtorjev Brams in Taylor. Ti protokoli so: *razreži in izberi*, *proporcionalni protokol za* $n = 3$, *proporcionalni protokol za poljuben* n in *protokol brez zavisti za* $n = 3$. V izvornem članku je opisan še *protokol brez zavisti za poljuben* n, vendar ga ne bom podrobneje opisal, ker je v mojih očeh za vsakdanje situacije nepraktičen.

Definicije in protokoli v tem članku bodo skoraj povsem enaki tistim, ki jih najdemo v izvornem delu [1]. Protokoli, dokazi in zmagovalne strategije so v njem podani hkrati, jaz pa jih bom tu ločil. Prav tako bom postopek zapisal kot psevdokodo.

Preden začnem opisovati protokole, moram definirati še nekaj pojmov. Pomembno vlogo v vseh protokolih bo igrala mera. Ta pojem intuitivno razumemo - gre za način vrednotenja, ki ga uporablja vsak izmed igralcev v protokolu deljenja. Vendar je mera pojem, ki ga definiramo na merljivem prostoru. Iz tega razloga bom najprej definiral σ-algebro.

Definicija 1. *Naj bo* X *neprazna množica. Družino* $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$, *imenujemo* σ***-algebra**, *če velja:*

- $X \in \mathcal{M}$
- $\forall E \in \mathcal{P}(X).\ E \in \mathcal{M} \Rightarrow E^C \in \mathcal{M}$ *(zaprtost za komplemente)*
- $\forall E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{P}(X).\ E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \mathcal{M}$ *(zaprtost za končne unije)*

Elementom σ-algebre rečemo ***merljive množice****, paru* $(X, \mathcal{M})$ *pa* ***merljiv prostor****.*

Definicija 2. *Naj bo* $(X, \mathcal{M})$ *merljiv prostor. Preslikava* $V : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ *je* ***mera*** *na* $\mathcal{M}$*, če velja:*

- $V(\emptyset) = 0$
- *če je* $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ *zaporedje paroma disjunktnih merljivih množic, je potem* $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ *(*μ *je števno aditivna)*

Vpeljati moram še nekaj pojmov, ki bi jih s težavo formalno definiral. Prav tako so na sledeč način definirano bolj intuitivno razumljivi.

Protokol je interaktiven postopek, ki ga lahko zapišemo kot računalniški program in ki sodelujočim lahko postavlja vprašanja, ki spremenijo njegov končni izid. Od algoritma se razlikuje ravno po izbirah igralcev, ki vplivajo na končni izid. Tako bi bila primer algoritma *for zanka*, primer protokola pa barvanje platna v barvo, ki jo izbere uporabnik.

Protokol je **proporcionalen**, če za vsakega igralca obstaja strategija, ki mu bo zagotovila vsaj $\frac{1}{n}$ kolača (glede na igralčevo mero). Protokol je **brez zavisti**, če za vsakega igralca obstaja strategija, ki mu bo zagotovila kos, ki je večji ali enak ostalim kosom.

Kot sem že zapisal, bom sledeče protokole predstavil s psevdokodo. V dokazih bom moral zato le poiskati optimalno strategijo in dokazati, da vsakega igralca privede do želenega rezultata. Protokoli že po svoji definiciji igralcem ponujajo različne opcije, zato bodo dokazi v večini temeljili na obravnavi primerov. Prav tako bom v dokazih za proporcionalnost predpostavil, da mera celotnega kolača za vse igralce enaka 1.

Preden se podam v opisovanje protokolov, bi rad namenil še nekaj besed **optimalni strategiji**. Ta vsakemu igralcu, ki se je drži, zagotovi primeren kos - proporcionalen ali brez zavisti. Če ji igralec ne sledi, bo na koncu prejel šlabši"kos, kot drugače. Z drugimi besedami - ne obstaja strategija, ki bi igralcu zagotovila boljši ko.

Zdaj pa k opisovanju protokolov. Prvi je *razreži in razdeli* (cut-and-choose) za dva igralca. Ta protokol je hkrati proporcionalen in brez zavisti. Zgleda pa tako:

Protokol 1. *Razreži in razdeli:*

1. *Igralec 1 kolač razreže na 2 dela.*
2. *Igralec 2 izbere kos.*
3. *Igralec 1 dobi preostali kos.*

Trditev 1. *Protokol 1 je proporcionalen in brez zavisti.*

Dokaz: Protokol z optimalno strategijo za oba igralca je sledeč:

1. Igralec 1 razreže kolač P na kosa P_1 in P_2, da velja $\mu_1(P_1) = V_1(P_2) = \frac{1}{2}$.

2. Igralec 2 izbere kos P_{i_1}, da velja $\mu_2(P_{i_1}) \geq \mu_2(P_{i_2})$, kjer sta i_1, i_2 različna elementa $\{1, 2\}$. Ker je vsota $\mu_2(P_{i_1}) + \mu_2(P_{i_2}) = 1$ in $\mu_2(P_{i_1}) \geq \mu_2(P_{i_2})$, je $\mu_2(P_{i_1}) \geq \frac{1}{2}$. Torej strategija igralcu 2 zagotovi kos, ki je večji ali enak $\frac{1}{2}$ in večji ali enak ostalim kosom.

3. Igralec 1 dobi preostali kos P_{i_2}. Ker je $\mu_1(P_1) = \mu_1(P_2) = \frac{1}{2}$, je $\mu_1(P_{i_2}) \geq \frac{1}{2}$ in $\mu_1(P_{i_2}) \geq \mu_1(P_{i_1})$. Torej strategija igralcu 1 zagotovi kos, ki je večji ali enak $\frac{1}{2}$ in večji ali enak ostalim kosom.

Torej je protokol razreži in razdeli proporcionalen in brez zavisti. □

Naslednji je *proporcionalni protokol za* $n = 3$ (proportional protocol for $n = 3$). Razvil ga je Steinhauss med drugo svetovno vojno. Poteka pa tako:

Protokol 2. *Proporcionalni protokol za* $n = 3$*:*

1. *Igralec 1 razreže kolač na 3 dele.*
2. *Igralec 2 ne stori nič ali označi 2 kosa.*

   Če igralec 2 ne stori nič:

3. *Igralec 3 izbere kos.*
4. *Igralec 2 izbere kos.*
5. *Igralec 1 dobi preostali kos.*

   Če igralec 2 označi 2 kosa:

3. *Igralec 3 ne stori nič ali označi 2 kosa.*

   Če igralec 3 ne stori nič:

4. *Igralec 2 izbere kos.*
5. *Igralec 3 izbere kos.*
6. *Igralec 1 dobi preostali kos.*

   Če igralec 3 označi 2 kosa:

4. *Igralec 1 izbere kos, ki sta ga označila igralec 2 in igralec 3.*

5. *Preostala kosa se združita v nov kolač.*

6. *Protokol **razreži in izberi** med igralcem 2 in igralcem 3.*

Trditev 2. *Protokol 2 je proporcionalen.*

Dokaz: Protokol 2 z optimalno strategijo za vse tri igralce je sledeč:

1. Igralec 1 razreže kolač P na kose P_1, P_2 in P_3, da velja $\mu_1(P_1) = \mu_1(P_2) = \mu_1(P_3) = \frac{1}{3}$.

2. Igralec 2 ne stori nič, če obstajata različna indeksa i_1, i_2 iz $\{1, 2, 3\}$, da velja $\mu_2(P_{i_1})$, $\mu_2(P_{i_2}) \geq \frac{1}{3}$, ali označi kosa P_{i_1} in P_{i_2}, če sta $\mu_2(P_{i_1})$, $\mu_2(P_{i_2}) < \frac{1}{3}$ in i_1, i_2 različna indeksa.

   Predpostavimo, da je $\mu_2(P_{i_1}), \mu_2(P_{i_2}) \geq \frac{1}{3}$. Igralec 2 ne stori nič.

3. Igralec 3 izbere kos P_{j_3}, za katerega velja $\mu_3(P_{j_3}) \geq \frac{1}{3}$. Tak kos obstaja, ker je $\mu_3(P_{j_1}) + \mu_3(P_{j_2}) + \mu_3(P_{j_3}) = 1$ in so na voljo še vsi trije kosi. Torej strategija igralcu 3 zagotovi kos, ki je večji ali enak $\frac{1}{3}$.

4. Igralec 2 izbere kos P_{j_2} iz $\{P_{i_1}, P_{i_2}\}$. Vsaj eden izmed teh kosov je še na voljo, saj igralec 3 izbral le en kos. Po predpostavki za kos P_{j_2} velja $\mu_2(P_{j_2}) \geq \frac{1}{3}$. Torej strategija igralcu 2 zagotovi kos, ki je večji ali enak $\frac{1}{3}$.

5. Igralec 1 dobi preostali kos P_{j_1}. Ker je igralec 1 kolač razrezal tako, da velja $\mu_1(P_1) = \mu_1(P_2) = \mu_1(P_3) = \frac{1}{3}$, mu strategija zagotovi kos, ki je večji ali enak $\frac{1}{3}$.

   Predpostavimo, da je $\mu_2(P_{i_1}), \mu_2(P_{i_2}) < \frac{1}{3}$. Igralec 2 označi kosa P_{i_1} in P_{i_2}.

3. Igralec 3 ne stori nič, če obstajata različna indeksa j_1, j_2 iz $\{1, 2, 3\}$, da velja $\mu_3(P_{j_1}), \mu_3(P_{j_2}) \geq \frac{1}{3}$, ali označi kosa P_{j_1} in P_{j_2}, če sta $\mu_3(P_{j_1})$, $\mu_3(P_{j_2}) < \frac{1}{3}$ in i_1, i_2 različna indeksa.

   Predpostavimo, da je $\mu_3(P_{j_1}), \mu_3(P_{j_2}) \geq \frac{1}{3}$. Igralec 3 ne stori nič.

4. Igralec 2 izbere neoznačen kos P_{i_3}.

5. Igralec 3 izbere kos P_{j_2} iz $\{P_{i_1}, P_{i_2}\}$. Vsaj eden izmed teh kosov je še na voljo, saj igralec 3 izbral le en kos. Po predpostavki za kos P_{j_2} velja $\mu_2(P_{j_2}) \geq \frac{1}{3}$. Torej strategija igralcu 2 zagotovi kos, ki je večji ali enak $\frac{1}{3}$.

6. Igralec 1 dobi preostali kos P_{j_1}. Ker velja $\mu_1(P_1) = \mu_1(P_2) = \mu_1(P_3) = \frac{1}{3}$, je $\mu_1(P_{j_1}) \geq \frac{1}{3}$. Torej strategija igralcu 1 zagotovi kos, ki je večji ali enak $\frac{1}{3}$.

   Predpostavimo, da je $\mu_3(P_{j_1}), \mu_3(P_{j_2}) < \frac{1}{3}$. Igralec 3 označi kosa P_{j_1} in P_{j_2}.

4. Igralec 1 izbere kos P_{k_1} iz $\{P_{i_1}, P_{i_2}\} \cap \{P_{j_1}, P_{j_2}\}$. Ker velja $\mu_1(P_1) = \mu_1(P_2) = \mu_1(P_3) = \frac{1}{3}$, je $\mu_1(P_{k_1}) \geq \frac{1}{3}$. Torej strategija igralcu 1 zagotovi kos, ki je večji ali enak $\frac{1}{3}$.

5. Preostala kosa se združita v nov kolač.

6. Preostala kosa se združita v nov kolač, ki se med igralca 1 in igralca 2 razdeli po protokolu **razreži in razdeli**. Optimalna strategija zanj obema zagotovo kos, ki je večji ali enak $\frac{1}{3}$.

Torej je proporcionalni protokol za $n = 3$ proporcionalen. $\square$

Proporcionalen protokol za poljuben n sta kmalu po Steinhausovem podala Banach in Knaster. Izgledato tako:

Protokol 3. *Proporcionalni protokol za poljuben n:*

1. *Igralec 1 odreže kos od kolača.*
2. *(1.) Igralec 2 ne stori nič ali obreže odrezani kos.*

   $\vdots$

   (i.) Igralec i ne stori nič ali obreže odrezani kos.

   $\vdots$

   (n.) Igralec n ne stori nič ali obreže odrezani kos.
3. *Zadnji igralec, ki je obrezal kos, ali igralec 1, če nihče ni obrezal kosa, prejme ta kos.*
4. *Odrezke se združijo s kolačem.*
5. *Koraki 1. - 4. se ponavljajo, dokler ne ostaneta dva igralca.*
6. *Protokol **razreži in izberi** med preostalima igralcem.*

Trditev 3. *Protokol 3 je proporcionalen.*

Dokaz: Protokol 3 z optimalno strategijo za vseh n igralcev je sledeč:

1. Igralec 1 odreže kos P_1 od kolača P, da velja $\mu_1(P_1) = \frac{1}{n}$.
2. (1.) Igralec 2 ne stori nič, če je $\mu_2(P_1) \leq \frac{1}{n}$, ali obreže odrezani kos, če je $\mu_2(P_1) > \frac{1}{n}$, da dobi kos P_2, za katerega velja $\mu_2(P_2) = \frac{1}{n}$.

   $\vdots$

   (i.) Igralec i ne stori nič, če je $\mu_i(P_{i-1}) \leq \frac{1}{n}$, ali obreže odrezani kos, če je $\mu_i(P_{i-1}) > \frac{1}{n}$, da dobi kos P_i, za katerega velja $\mu_i(P_i) = \frac{1}{n}$.

   $\vdots$

   (n.) Igralec n ne stori nič, če je $\mu_n(P_{n-1}) \leq \frac{1}{n}$, ali obreže odrezani kos, če je $\mu_n(P_{n-1}) > \frac{1}{n}$, da dobi kos P_n, za katerega velja $\mu_n(P_n) = \frac{1}{n}$.
3. Naj bo igralec i tisti, ki je zadnji obrezal kos. Velja $\mu_i(P_i) = \frac{1}{n}$. Torej strategija igralcu i zagotovi kos, ki je večji ali enak $\frac{1}{n}$.
4. Odrezke se združijo s kolačem.
5. Koraki 1. - 4. se ponavljajo, dokler ne ostaneta dva igralca. V vsakem koraku igralec j dobi kos, za katerega velja $\mu_j(P_j) = \frac{1}{n}$. Pri tem je potrebno dokazati še, da vsak naslednji igralec dobi $\frac{1}{n}$. To pokaže preprost račun:

$$\frac{1-\frac{1}{n}}{n-1} = \frac{\frac{n}{n}-\frac{1}{n}}{n-1} = \frac{n-1}{n(n-1)} = \frac{1}{n}$$

   Torej optimalna strategija igralcu j zagotovi kos, ki je večji ali enak $\frac{1}{n}$.
6. Protokol **razreži in izberi** med preostalima igralcem vsakemu izmed njiju zagotovi del, ki je večji ali enak $\frac{1}{n}$.

Torej je proporcionalni protokol za poljuben n proporcionalen. □

Zadnji protokol, ki ga bom predstavil je protokol brez zavisti za $n = 3$. Prva sta ga predstavila Selfridge in Conway ter je sledeč:

Protokol 4. *Protokol brez zavisti za* $n = 3$

1. *Igralec 1 razreže kolač na 3 dele.*
2. *Igralec 2 ne stori nič ali obreže 1 kos.*

   Če igralec 2 ne stori nič:

3. Igralec 3 izbere kos.

4. Igralec 2 izbere kos.

5. Igralec 1 dobi preostali kos.

Če igralec 2 obreže 1 kos:

3. Igralec 3 izbere kos.

4. Igralec 2 izbere kos. Če je na voljo, mora izbrati obrezani kos.

5. Igralec 1 dobi preostali kos.

6. Igralec 2 ali igralec 3, ki je prejel neobrezan kos, razreže odrezke na 3 dele.

7. Igralec, ki je prejel obrezan kos, izbere kos.

8. Igralec 1 izbere kos.

9. Igralec, ki je razrezal odrezke, dobi preostali kos.

Trditev 4. *Protokol 4 je brez zavisti.*

Dokaz: Protokol 4 z optimalno strategijo za vse tri igralce je sledeč:

1. Igralec 1 razreže kolač na dele P_1, P_2 in P_3, za katere velja $\mu_1(P_1) = \mu_2(P_2) = \mu_3(P_3)$.

2. Igralec 2 ne stori nič, če obstajata kosa P_{i_1} in P_{i_2}, da velja $\mu_2(P_{i_1})$, $\mu_2(P_{i_2}) \geq \mu_2(P_1)$, $\mu_2(P_2)$, $\mu_2(P_3)$, ali obreže kos P_{i_1}, če velja $\mu_2(P_{i_1}) > \mu_2(P_{i_2})$, $\mu_2(P_{i_3})$.

   Predpostavimo, da velja $\mu_2(P_{i_1}), \mu_2(P_{i_2}) \geq \mu_2(P_1), \mu_2(P_2), \mu_2(P_3)$. Igralec 2 ne stori nič.

3. Igralec 3 izbere kos P_{j_3}, za katerega velja $\mu_3(P_{j_3}) \geq \mu_3(P_1)$, $\mu_3(P_2)$, $\mu_3(P_3)$. Torej optimalna strategija igralcu 3 zagotovi kos, ki večji ali enak ostalim kosom.

4. Igralec 2 izbere kos P_{j_2}, za katerega velja $\mu_2(P_{j_2}) \geq \mu_2(P_1)$, $\mu_2(P_2)$, $\mu_2(P_3)$. Po predpostavki obstajata dva taka kosa in igralec 3 je izbral največ enega. Torej optimalna strategija igralcu 2 zagotovi kos, ki večji ali enak ostalim kosom.

5. Igralec 1 dobi preostali kos P_{j_1}. Ker za vse tri kose velja $\mu_1(P_1) = \mu_2(P_2) = \mu_3(P_3)$, optimalna strategija igralcu 1 zagotovi kos, ki je večji ali enak ostalim kosom.

   Predpostavimo, da velja $\mu_2(P_{i_1}) > \mu_2(P_{i_2}), \mu_2(P_{i_3})$ Igralec 2 obreže kos P_{i_1} tako, da sta vsaj dva kosa večja ali enaka ostalim. Odrezke označimo z L.

3. Igralec 3 izbere kos P_{j_3}, za katerega velja $\mu_3(P_{j_3}) \geq \mu_3(P_{i_1})$, $\mu_3(P_{i_2})$, $\mu_3(P_{i_3})$. Tak kos obstaja, ker so na voljo še vsi kosi.

4. Igralec 2 izbere kos P_{j_2}. Če je na voljo, mora izbrati obrezani kos. Zanj velja $\mu_2(P_{j_2}) \geq \mu_2(P_{i_1}), \mu_2(P_{i_2}), \mu_2(P_{i_3})$, ker je enega od kosov obrezal tako, da sta vsaj dva kosa večja ali enaka ostalim, in ker je igralec 3 izbral največ enega izmed teh kosov.

5. Igralec 1 dobi preostali kos P_{j_1}. Ta je večji ali enak ostalim kosom, ker velja $\mu_1(P_1) = \mu_2(P_2) = \mu_3(P_3)$ in ker je obrezani kos manjši od prvotnega.

6. Ker se ne glede na to, kdo izbere obrezan kos, lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da ga je izbral igralec 3. Igralec 2 potem razreže odrezke L na kose L_1, L_2 in L_3.

7. Igralec 3 izbere kos L_{k_3}, za katerega velja $\mu_N(L_{k_3}) \geq \mu_N(L_1)$, $\mu_N(L_2)$, $\mu_N(L_3)$. Ker je igralec izbral kos P_{j_3}, ki je večji ali enak ostalim, in odrezke L_{k_3}, ki so večji ali enaki ostalim, je njegov skupen kos $P_{j_3} \cup L_{k_3}$ večji ali enak ostalim kosom. Torej mu optimalna strategija zagotovi kos, ki je večji ali enak ostalim kosom.

8. Igralec 1 izbere kos L_{k_1}, ki je večji ali enak drugemu preostalemu kosu L_{k_2}. Ker je $\mu_1(P_1) = \mu_2(P_2) = \mu_3(P_3)$ in ker je igralec 3 vzel obrezan kos, je $P_{j_1} > P_{j_3} \cup L_{k_3}$. Torej optimalna strategija igralcu 1 zagotovi kos, ki je večji ali enak ostalim kosom.

9. Igralec 2 dobi preostali kos L_{k_2}. Ker je P_{j_2} večji ali enak ostalim kosom in L_{k_2} enak ostalim odrezkom, je njegov skupen kos $P_{j_3} \cup L_{k_3}$ večji ali enak ostalim kosom. Torej optimalna strategija igralcu 2 zagotovi kos, ki je večji ali enak ostalim kosom.

Torej je protokol brez zavisti za $n = 3$ brez zavisti. $\square$

Na koncu želim še odgovoriti na vprašanja, ki sem jih zastavil na začetku članka. Kolač lahko med otroke pravično razdelimo z enim izmed protokolov za primerno število oseb. Najboljši za to bi bil zadnji protokol, pod pogojem, da kolač delimo med tri otroke. Prav tako lahko hišna opravila razdelimo z enim izmed zgornjih protokolov, če le zamenjamo *večje ali enako* z *manjše ali enako* in *večje* z *manjše*. Problem delitve zemlje je prvi zastavil Ted Hill leta 1983 [2], rešitev pa je podal Anatole Beck [3] nekaj let za tem .

Literatura

[1] Steven J. Brams, Alan D. Taylor An Envy-Free Cake Division Protocol *The American Mathematical Monthly* **102** (1995), 9–18

[2] T. P. Hill Determining a Fair Border *The American Mathematical Monthly* **90** (1983), 438–442

[3] A. Beck Constructing a Fair Border *The American Mathematical Monthly* **94** (1987), 157–162

[4] **Sigma-algebra**, dostop: *http://wiki.fmf.uni-lj.si/wiki/Merljiv_prostor*

[5] **Mera**, dostop: *http://wiki.fmf.uni-lj.si/wiki/Mera*