

5. sklop: Normalni model z dvema parametroma

1 Primer

Podan imamo naslednji vzorec visin (metri) studentov moskega spola:

```
x <- c(1.91, 1.94, 1.68, 1.75, 1.81, 1.83, 1.91, 1.95, 1.77, 1.98,  
       1.81, 1.75, 1.89, 1.89, 1.83, 1.89, 1.99, 1.65, 1.82, 1.65,  
       1.73, 1.73, 1.88, 1.81, 1.84, 1.83, 1.84, 1.72, 1.91, 1.63)
```

Zanima nas populacijsko povprečje in standardni odklon za visino studentov.

2 Naloge

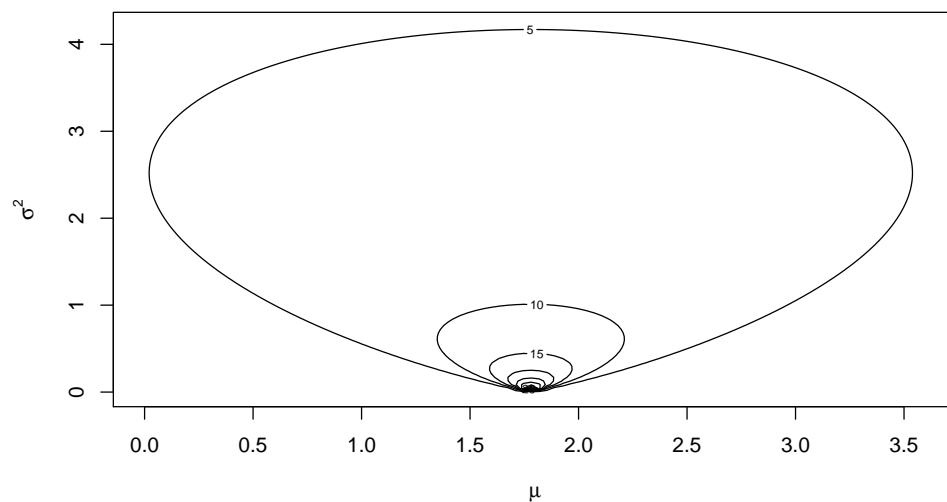
2.1 Normalni model z dvema parametroma.

Uporabite apriorno porazdelitev, ki je definirana:

$$f(\mu, \sigma^2) = f(\mu \mid \sigma^2) \cdot f(\sigma^2) = f_{N(1.78; \frac{\sigma^2}{1})}(\mu) f_{InvGamma(\frac{1}{2}, \frac{0.1^2}{2})}(\sigma^2)$$

Izračunajte aposteriorno porazdelitev na podlagi podatkov. Narisite apriorno in aposteriorno porazdelitev (na locenih grafih) za (μ, σ^2) - za ta namen si lahko pomagata s funkcijo `contour`. Za generiranje iz *InvGamma* lahko upostevate, da je inverz parametra porazdeljen *Gamma*, ali uporabite knjižnico `invgamma`.

```
#install.packages("invgamma")  
mus <- seq(0,3.6,length=100)  
sigmas2 <- seq(0,4.2,length=100)  
  
f <- function(mu,sigma2) {  
  dnorm(mu,1.78,sigma2) / dgamma(sigma2,0.5,rate=0.005)  
}  
  
apriorna <- outer(mus,sigmas2,"f")  
contour(mus, sigmas2, apriorna, xlab=expression(mu), ylab=expression(sigma^2))
```

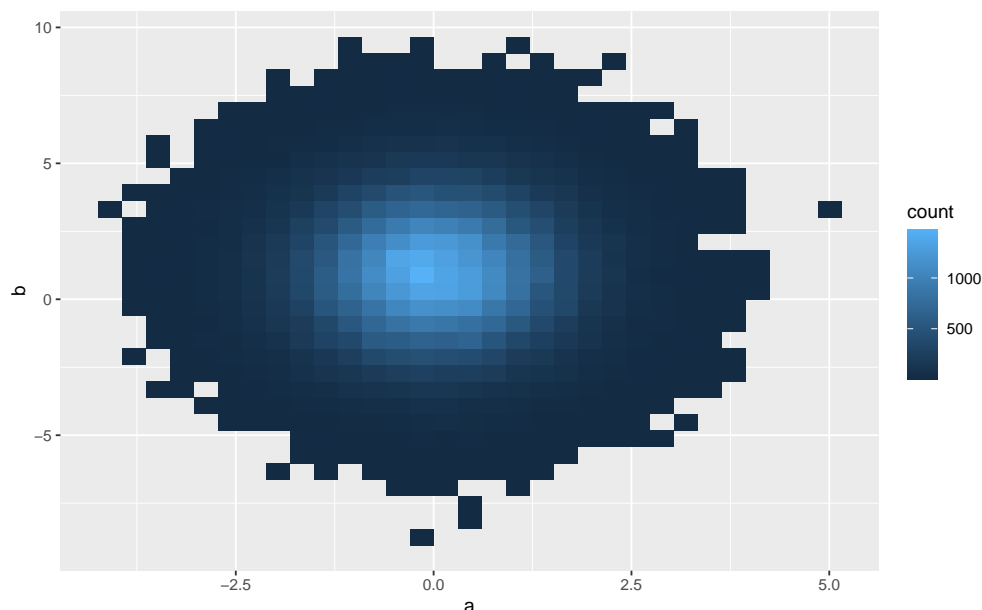


2.2 Naloga - simulacija

Simulirajte iz aposteriorne porazdelitve, ki jo dobimo za nas primer pri zgoraj izbrani konjugirani apriorni porazdelitvi.

Za dobljeni vzorec narisite histogram s knjižnico ggplot in ukazom `stat_bin2d`. Spodaj je primer za simulacijo iz bivariate normalne porazdelitve, katere robni porazdelitvi sta neodvisni.

```
#install.packages("ggplot2")
library(ggplot2)
a <- rnorm(100000, 0, 1)
b <- rnorm(100000, 1, 2)
simulacija <- data.frame(a, b)
ggplot(simulacija, aes(a, b)) + stat_bin2d()
```



2.3 Robna aposteriorona porazdelitev pri neinformativni apriorni porazdelitvi

V primeru neinformativne apriorne porazdelitve dobimo posplošeno/nestandardizirano Studentovo porazdelitev:

$$\mu \mid x \sim t_{n-1}(\bar{x}, s^2/n).$$

Ce imamo v modelu $N(\mu, \sigma^2 = 0.1^2)$ neinformativno aposteriorno porazdelitev, potem je

$$\mu \mid x \sim N(\bar{x}, \sigma^2/n) = N(\bar{x}, 0.1^2/n).$$

Primerjajte rezultata iz obeh modelov (neinformativna apriorna v eno- ali dvoparametricnem modelu), kjer se zozimo na podvzorec prvih 10 visin (pri vecjem n razlika ne bi bila tako očitna) in v modelu z znano varianco vzamemo kar $\sigma^2 = s^2$ (s cimer goljufamo, saj iz vzorca ocenimo varianco, ki naj bi bila znana vnaprej):

2.4 Dodatna naloga: napovedovanje

Zanima nas, kaj lahko povemo o visini novega studenta ob upoštevanju podatkov 30 studentov, tj. zanima nas **aposteriorna napovedna porazdelitev**.

V primeru konjugirane apriorne porazdelitve dobimo posplošeno/nestandardizirano Studentovo porazdelitev:

$$x_{nov} \mid x \sim t_{\nu_n}(\mu_n, \sigma_n^2/\kappa_n + \sigma_n^2).$$

V primeru neinformativne apriorne porazdelitve dobimo posplošeno/nestandardizirano Studentovo porazdelitev:

$$x_{nov} \mid x \sim t_{n-1}(\bar{x}, s^2/n + s^2).$$

Poudarite bistveno razliko med aposteriorno porazdelitvijo povprečne visine in aposteriorno napovedno porazdelitvijo za visino novega studenta (npr. vzemite konjugirano apriorno porazdelitev).