(1) Poenostavi naslednje izraze

(a) $(3+4i)\overline{(1-3i)}$

$$(3+4i)\overline{(1-3i)} = (3+4i)(1+3i) = 3+9i+4i-12 = -9+13i$$

(b) $\dfrac{7-3i}{1+i}$

$$\frac{7-3i}{1+i} = \frac{(7-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{7-7i-3i-3}{2} = \frac{4-10i}{2} = 2-5i$$

(c) $(1+i\sqrt{3})^{10}$

To enačbo najlažje rešimo tako, da jo pretvorimo v eulerjev zapis.

$$\begin{aligned} z &= 1+i\sqrt{3} \\ |z| &= \sqrt{1+3} = 2 \\ \tan\varphi &= \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3} \\ z &= 2e^{i\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

Nato poračunamo njeno deseto potenco:

$$z^{10} = 2^{10}e^{10i\frac{\pi}{3}} = 1024e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

Nato lahko to pretvorimo nazaj v kartezično obliko:

$$z^{10} = 1024\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 1024\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -512\left(1+i\sqrt{3}\right)$$

(2) Zapiši vse vrednosti izraza $\sqrt[7]{(-\sqrt{3}-i)^5}$ in jih nariši.

To nalogo ponovno najlažje rešimo tako, da pretvorimo v eulerjev zapis.

$$\begin{aligned} w &= -\sqrt{3}-i \\ z^7 &= (-\sqrt{3}-i)^5 = w^5 \end{aligned}$$

Rešujemo za z.

Najprej poračunamo w^5:

$$\begin{aligned} w &= -\sqrt{3} - i \\ |w| &= \sqrt{3+1} = 2 \\ \tan\varphi &= \frac{-1}{-\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Pozor! Tule se skriva pogosta napaka. Nismo izračunali pravega kota. Če bi narisali skico, bi takoj opazili, da pri številu $w = -\sqrt{3} - i$ kot zagotovo ne more biti $\frac{\pi}{6}$! Pravi kot je večji za π, torej je $\varphi = \frac{7\pi}{6}$. Sedaj lahko zapišemo w v eulerjevi obliki.

$$\begin{aligned} w &= 2e^{i\frac{7\pi}{6}} \\ w^5 &= 2^5 e^{i\frac{35\pi}{6}} = 32e^{i\frac{35\pi}{6}} \end{aligned}$$

najti želimo 7-mi koren tega števila

$$\begin{aligned} z &= |z|e^{i\varphi} \\ z^7 &= w^5 \\ |z|^7 e^{i7\varphi} &= 32e^{i(\frac{35\pi}{6}+2k\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Sedaj primerjamo absolutne vrednosti in kote posebej. Za absolutne vrednosti dobimo:

$$|z|^7 = 32 \Rightarrow |z| = \sqrt[7]{32}$$

Za kote pa dobimo:

$$\begin{aligned} 7\varphi &= \frac{35\pi}{6} + 2k\pi \\ \varphi &= \frac{5\pi}{6} + \frac{2k\pi}{7}, \ k \in \{0, 1, 2, \dots, 6\} \end{aligned}$$

k je celo število od 0 do 6, ker ko je $k = 7$ prištejemo kotu 2π in iz trigonometrije vemo, da smo nazaj na začetku.

z lahko sedaj zapišemo kot:

$$z = \sqrt[7]{32}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{2k\pi}{7}\right)} = \sqrt[7]{32}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{2k\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{2k\pi}{7}\right)\right)$$

(3) Skiciraj naslendje podmnožice kompleksnih števil.

(a) $\{z \in \mathbb{C}; 2(\text{Re } z)^2 + \text{Im } < 1\}$
Zapišimo z v kartezični obliki, $z = x + iy$. Vidimo, da so v množici tista kompleksna števila, ki ustrezajo neenačbi:

$$2x^2 + y < 1$$

Enačbo še malo preuredimo, in že znamo narisati to množico. Tu je žal ne bom narisal, ker trenutno nimam preveč časa.

$$y < -2x^2 + 1$$

Rezultat so vse točke, ki ležijo pod parabolo $y = -2x^2 + 1$.

(b) $\{z \in \mathbb{C}; \text{Re } z^2 + 4\text{Im } z = 0\}$ Naredimo enako kot pri prejšnji nalogi, samo da imamo celo nekaj dela z računanjem.

$$\begin{aligned} \text{Re}(x + iy)^2 + 4y &= 0 \\ \text{Re}(x^2 - y^2 + 2xyi) + 4x = x^2 - y^2 + 4y &= 0 \\ x^2 - (y-2)^2 + 4 &= 0 \\ (x+2)^2 - y^2 &= -4 \\ \frac{(x+2)^2}{4} - \frac{y^2}{4} &= -1 \end{aligned}$$

Po tem, ko dopolnimo popolni kvadrat je očitno, da gledamo v enačbo hiperbole. Risanje je prepuščeno bralcu.

(4) Naj bo $k \neq 0$ realno število. Za katere k je $1 + ik$ bliže izhodišču kot $1 - \frac{i}{k}$?

Razdaljo od izhodišča nam predstavlja absolutna vrednost števila, torej lahko zapišemo:

$$|1 + ik| < \left|1 - \frac{i}{k}\right|$$

Ker so absolutne vrednosti večje ali enake 0, lahko neenačbo kvadriramo in razrešimo absolutne vrednost:

$$1 + k^2 < 1 + \frac{1}{k^2}$$

Sedaj lahko enačbo nekoliko preuredimo in dobimo:

$$\begin{aligned} k^2 &< \frac{1}{k^2} \\ k^4 &< 1 \end{aligned}$$

Ker je k^2 pozitivno število, lahko enačbo korenimo in dobimo:

$$k^2 < 1$$

Sledi dolg premislek o tem, kaj je naš rezultat. Če si skiciramo parabolo $k^2 = 1$, dobimo dve ničli: $-1, 1$, parabola pa je med tema dvema ničlama manjša od 1. Torej je $k \in (-1, 1)$, ali drugače povedano: $|k| < 1$.

Seveda tudi pri tej nalogi obstaja lahka očitna geometrijska rešitev. Narišemo si premico, na kateri ležijo vsa kompleksna števila, $1 + ik$, ko k preteče vsa realna števila (razen 0). To je premica $x = 1$. Hitro opazimo da, manjši kot je $|k|$, manjša je oddaljenost od izhodišča. Sedaj nas zanima samo še za katere k velja:

$$|k| < \frac{1}{|k|}$$

Očitno to velja samo za števila $|k|$, ki so ≤ 1.

(5) Rešeno na faksu pri proseminarju. Nekako nima smisla da bi še enkrat pisal rešitev.

(6) Izračunaj množice kompleksnih števil z, ki zadoščajo (ne)enačbam. Množice rešitev nariši.

(a) $z^3 = -2 + 2i$ Obe strani enačbe zapišemo z eulerjevo formulo in primerjamo absolutno vrednost ter kot.

$$\begin{aligned}
|-2+2i| &= \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \\
\tan\theta &= \left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{2}{2} = -1 \implies \theta = \frac{3\pi}{4} \\
\left(|z|e^{i\varphi}\right) &= |z|^3 e^{i3\varphi} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \\
|z|^3 &= 2\sqrt{2} = \sqrt{8} \implies |z| = \sqrt[6]{8} = \sqrt{2} \\
3\varphi &= \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \{0, 1, 2\} \\
\varphi &= \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}
\end{aligned}$$

Sedaj lahko še napišemo števila z, ki ustrezajo enačbi, vendar v se ni treba preveč mučit, napišimo samo tako, kot je v rešitvah:

$$z = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3})),\ k = 0, 1, 2$$

(b) $z^8 + z^4 - 12 = 0$

Poskusimo podobno, vendar preden se vržemo v nalogo lahko naredimo preprosto substitucijo, da nam bo lažje. Naj bo $w = z^4$. Tako moramo rešiti samo preprosto kvadratno enačbo.

$$\begin{aligned} w^2 + w - 12 &= 0 \\ (w+4)(w-3) &= 0 \implies w = -4 \vee w = 3 \end{aligned}$$

Zdaj samo poračunamo za oba primera.

i. $w = -4$

$$\begin{aligned} z^4 &= -4 \\ |z| &= \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} \\ \varphi &= \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} = \frac{pi}{4} + \frac{\pi}{2} \\ z &= \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2})), \;\; k = 0, 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Opomba: Če bi slučajno pomislil, potem bi opazil, da so tole precej lepi koti, prav tako razdalja od izhodišča, vse nam je že od nekod znano. Lahko pišemo tudi:

$$z = \pm 1 \pm i$$

ii. $w = 3$

Identično kot za prvi primer, samo da se meni ne da toliko pisat.

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{3}(\ldots) \\ \varphi &= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \\ z &= \sqrt{3}(\cos\varphi + i\sin\varphi), \;\; k = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

(c) $\sqrt{|z|^2 - 2} + \operatorname{Im} z > \operatorname{Re} z$

Poskusimo zapisati z v kartezični obliki, torej $z = x + yi$:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2 - 2} + y &> x \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 2} &> x - y \end{aligned}$$

Poglejmo, kdaj ima ta enačba sploh smisel. Pogledati moramo, kdaj je vrednost znotraj korena negativna, in kakšna je desna stran.

i. $x - y < 0$: Desna stran enačbe je negativna, leva pa bo vedno nenegativna, torej bo neenačaj veljal na celotnem definicijskem območju, torej ko velja $x^2 + y^2 - 2 \geq 0$.

$$(x < y) \wedge (x^2 + y^2 \geq 2)$$

ii. $x - y \geq 0$: Enačbo lahko kvadriramo.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2 &> (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \\ -2 &> -2xy \\ xy &> 1 \\ (x \geq y) &\wedge (xy > 1) \end{aligned}$$

Torej imamo celotno rešitev:

$$\left\{z = x + iy; (x \geq y) \wedge (xy > 1) \vee (x < y) \wedge (x^2 + y^2 \geq 2)\right\}$$

(7) Pokaži, da sta množici kompleksnih števil enaki:

$$A = \left\{z \in \mathbb{C}; \frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} \leq 2\right\} \qquad B = \left\{z \in \mathbb{C}; \left|z - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{2}\right\}$$

Poglejmo najprej množico B. Predstavlja vsa števila, ki so za vsaj $\frac{1}{2}$ oddaljena od točke $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Torej predstavlja zunanjost kroga z radijem $\frac{1}{2}$ in središčem v tej točki (in tudi to krožnico).

Pri množici A, pa je verjetno koristno, da najprej še malo poračunamo, da bomo lažje videli kaj predstavlja. Pišemo $z = x + iy$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+iy} + \frac{1}{x-iy} &\leq 2 \\ \frac{(x-iy) + (x+iy)}{(x+iy)(x-iy)} &\leq 2 \\ \frac{2x}{x^2 - y^2 i^2} = \frac{2x}{x^2 + y^2} &\leq 2 \end{aligned}$$

Imenovalec ulomka je vedno pozitiven, zato lahko z njim množimo.

$$\begin{aligned} 2x &\leq 2x^2 + 2y^2 \\ 0 &\leq x^2 - x + y^2 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1^2}{2^2} + y^2 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 &\leq (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \end{aligned}$$

Spet dobimo neenačbo, ki predstavlja kompleksna števila, ki ležijo v zunanjosti iste krožnice (ali na tej krožnici).

(8) Zapiši $x^5 - 1$ kot produkt realnih polinomov stopnje največ 2.
Najprej naivno poskusimo preprosto razbiti polinom s hornerjevim algoritmom. Z "metodo ostrega pogleda" najdemo eno ničlo, to je $x = 1$.

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

Sedaj moramo samo faktorizirati še preostali del polinoma. Kako pa bi našli še kakšno ničlo? (*malo prelistam zvezek...*) Zakaj le bi bila taka naloga med kompleksnimi števili? Vrnimo se na začetek naloge (včasih je koristno napisati tudi kakšno napako, iz napak se navsezadnje učimo). Lahko samo obrnemo enačbo:

$$x^5 = 1$$

Sedaj pa poiščemo 5-te korene števila 1, za katere ta enakost velja.

$$\begin{aligned} e^{i5\varphi} &= e^{i\cdot 0} \\ 5\varphi &= 0 + 2k\pi,\ k = 0, 1, 2, 3, 4 \\ \varphi &= \frac{2k\pi}{5} \end{aligned}$$

Sedaj lahko zapišemo vse rešitve. Vemo, da kompleksne rešitve v polinomih z realnimi koeficienti nastopajo v urejenih parih, tako da jih zapišemo tako.

$$\begin{aligned} &x_0 = 1 \\ &x_1 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} \qquad && x_2 = \cos\frac{2\pi}{5} - i\sin\frac{2\pi}{5} \\ &x_3 = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5} \qquad && x_4 = \cos\frac{4\pi}{5} - i\sin\frac{4\pi}{5} \end{aligned}$$

Da dobimo polinome z realnimi koeficienti, moramo zmnožiti po dve ničli. To ni zares težko, ampak najprej raje naredimo to na preprostem primeru, da dobimo formulo, potem pa vstavimo zgornje ničle.

$$\begin{aligned} (x - x_i)(x - \overline{x_i}) &= (x - a - ib)(x - a + ib) = \\ &= x^2 - ax + bxi - ax + a^2 - bxi + abi + b^2 = \\ &= x^2 - 2ax + a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Ker sta naši komponenti ničel $\cos\zeta$ in $\sin\zeta$ za nek kot ζ, vemo da velja, da je vsota njunih kvadratov enaka 1.

$$\begin{aligned} (x - x_1)(x - x_2) &= x^2 - 2\cos\frac{2\pi}{5} + 1 \\ (x - x_3)(x - x_4) &= x^2 - 2\cos\frac{4\pi}{5} + 1 \end{aligned}$$

Torej je naš končni polinom:

$$x^5 - 1 = (x-1)\left(x^2 - 2\cos\frac{2\pi}{5} + 1\right)\left(x^2 - 2\cos\frac{4\pi}{5} + 1\right)$$

(9) Z uporabo Moivrove formule izrazi $\cos 4\varphi$ in $\sin 4\varphi$ samo z $\sin\varphi$ in $\cos\varphi$. Načeloma bi lahko nalogo rešili zgolj tako, da bi dvakrat uporabili formule za dvojne kote, vendar to ne bi bilo zares poučno. Bolj koristno je, če si najprej pogledamo kako bi lahko to rešili za splošen večkratnik kota φ (recimo mu n). Recimo, da bi šli računat tole kompleksno število:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = l \qquad\qquad = \ldots + i(\ldots)$$

Dobili bi nekaj ogabnega, ampak to znamo izračunat s pomočjo binomske formule. Lahko pa bi uporabili Moivrovo formulo:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

Vidimo, da je realni del ogabne stvari zgoraj natanko enak $\cos n\varphi$ in imaginarni del enak $\sin n\varphi$. Sedaj moramo le še ugotoviti, kateri členi izraza $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$ pri razvoju v binomsko vrsto so realni in kateri imaginarni. Tega ni težko ugotoviti in je prepuščeno bralcu v razmislek (namig: stopnja i v izrazu se spreminja, dobimo lahko tudi pozitivne in negativne člene).

Za stopnjo 4 pa bomo brez večjih težav to poračunali tudi na roke, oziroma naj bi znali tudi formulo:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^4 = \cos^4\varphi+4i\cos^3\varphi\sin\varphi-6\cos^2\varphi\sin^2\varphi-4i\cos\varphi\sin^3\varphi+\sin^4\varphi$$

Torej samo še poberemo vsake člene posebej in dobimo rešitev:

$$\cos 4\varphi = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi$$
$$\sin 4\varphi = 4\cos^3\varphi\sin\varphi - 4\cos\varphi\sin^3\varphi$$