6. domača naloga

(1) Naj bo $a_n = \frac{2}{3n+7}$. Napiši nekaj členov zaporedja a_n. Ugotovi, ali je zaporedje navzgor omejeno, navzdol omejeno, naraščajoče, padajoče in, ali je konvergentno. Če je konvergento, izračunaj limito.

Zapisati nekaj členov ne bi smelo biti pretežko.

$$a_1 = \frac{2}{3+7} = \frac{2}{10}, \quad a_2 = \frac{2}{6+7} = \frac{2}{13}, a_3 = \frac{2}{9+7} = \frac{2}{16} \ldots$$

Iz tega ugibamo, da je zaporedje padajoče. To dokažemo tako, da pokažemo, da je vsak naslednji člen manjši od prejšnjega.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\overset{?}{\leq} a_n \\ \frac{2}{3n+3+7} &\overset{?}{\leq} \frac{2}{3n+7} \end{aligned}$$

Ni težav z množenjem, ker imamo sama pozitivna naravna števila

$$\begin{aligned} 2(3n+7) &\overset{?}{\leq} 2(3n+10) \\ 3n+7 &\overset{?}{\leq} 3n+10 \\ 7 &\leq 10 \end{aligned}$$

Torej je zaporedje padajoče (in ni naraščajoče). Je navzgor omejeno z $a_1 = \frac{1}{5}$. Z metodo ostrega pogleda opazimo, da je tudi navzdol omejeno, saj bo katerikoli člen zaporedja a_n zagotovo pozitiven. Spodnja meja je 0.

Ker je zaporedje navzdol omejeno in padajoče, ima limito. Ker je to eden lažjih primerov, jo lahko uganemo: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Pa po definiciji dokažimo, da je 0 limita, saj je tudi to koristno znati.

Izberemo si poljuben $\varepsilon > 0$ za katerega pokažemo, da za vse $n \in \mathbb{N}$ večje od nekega števila velja:

$$\begin{aligned} |a_n - a| &< \varepsilon \\ \left|\frac{2}{3n+7} - 0\right| = \frac{2}{|3n+7|} &< \varepsilon \end{aligned}$$

Vemo, da je $3n+7$ pozitivno število ne glede na n.

$$\frac{2}{3n+7} < \varepsilon$$

To velja zaradi arhimedske lastnosti. Sledi $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(2) Po definiciji dokaži:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n-1} = \frac{3}{2}$$

Ker smo se v srednji šoli od daleč dotaknili limit, vemo da ta enakost velja. Poskusimo jo dokazati na enak način kot smo to naredili pri prejšnji nalogi.

Izberemo poljuben $\varepsilon > 0$

$$\left|\frac{3n+1}{2n-1} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{3n+1-\frac{3}{2}(2n-1)}{2n-1}\right| = \left|\frac{3n-3n+1+\frac{3}{2}}{2n-1}\right| = \left|-\frac{5}{4n-2}\right| < \varepsilon$$

Upoštevamo absolutno vrednost. Vemo da sta števec in imenovalec vedno pozitivna.

$$\frac{5}{4n-2} < \varepsilon$$

To velja zaradi arhimedske lastnosti, venar lahko še malo poračunamo, da bo lepše vidno.

$$\frac{5}{\varepsilon} < 4n-2$$

$$\frac{5}{4\varepsilon} + \frac{1}{2} < n$$

Enakost torej velja za vsa naravna števila večja od leve strani enačbe.