5. domača naloga

(1) Dokaži, da imata množici $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$ isto moč.

Želimo pokazati, da imata 2 množici isto moč. To lahko naredimo na več načinov. Lahko konstruiramo bijekcijo iz ene množice v drugo, s čimer bi dokazali, da imata množici enako moč. Vendar bijekcije ni vedno lahko najti. Zato lahko uporabimo kratek izrek z dolgim imenom:

Cantor-Bernstein-Schroederjev izrek: $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \implies |A| = |B|$

Pri čemer oznaka $|A|$ predstavlja moč množice A. Z drugimi besedami to pomeni, da lahko pokažemo, da sta množici A in B enako močni tako, da poiščemo:

- Injektivno preslikavo $A \to B$ in
- Injektivno preslikavo $B \to A$

Iz tega sledi, da mora med množicama A in B obstajati tudi neka bijekcija, čeprav ni nujno, da smo jo našli.

- $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \{0, 1\} \quad : \quad x \mapsto (x, 0)$

  To je primer injektivne preslikave. Ni pomembno, katero smo našli, zanima nas le, če se vsaka 2 elementa iz množice $\mathbb{R}$ preslikata v 2 različna elementa množice $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$. To v tem primeru očitno velja.

- $\mathbb{R} \times \{0, 1\} \to \mathbb{R}$:

  Kako pa bi sedaj naredili injektivno preslikavo? Pri vajah smo pokazali, da velja:
  $$|(0, 1)| = |\mathbb{R}|$$
  Torej je dovolj, da pokažemo, da obstaja takšna injektivna preslikava:
  $$(0, 1) \times \{0, 1\} \to \mathbb{R}$$
  Takšne preslikave pa ni težko konstruirati. Primer:
  $$(a, b) \mapsto a + b$$

Opomba: Zakaj velja $|(0,1)| = |\mathbb{R}|$? Ni težko konstruirati bijekcije, ki bi preslikala elemente nekega intervala v vsa realna števila. To lahko naredimo npr. z eno vejo funkcije tan, ki jo ustrezno premaknemo in raztegnemo/skrčimo v x smeri.

$$f(x) = \tan \pi (x - \frac{1}{2}) \ , \qquad f^{-1}(x) = \frac{1}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2}$$

Še ena opomba: Ni potrebno, da $\mathbb{R}$ zamenjamo z manjšim intervalom. V tem primeru lahko samo uporabimo neko funkcijo, ki "sploščí" vsa realna števila na nek končen interval. Primer:

$$(a,b) \mapsto \arctan a + 10b$$

(2) Dokaži, da imata množici $\mathbb{R}$ in $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{Z} \times [0,1])$ isto moč.

Enako kot pri prejšnji nalogi, konstruirajmo 2 injekciji na teh dveh množicah:

- $\mathbb{R} \to (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{Z} \times [0,1]) \quad : \quad x \mapsto (x, 0)$
- $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{Z} \times [0,1]) \to \mathbb{R}$:

  Spet imamo več težav s tem, da bi pokazali obratno. Problema se lahko rešimo tudi tako, da napišemo 2 posamezna predpisa, za vsak del množice posebej:

$$(a,b) \mapsto \begin{cases} \arctan a - 10 & \text{če } (a,b) \in \mathbb{R} \times \{0\} \\ a + \frac{b}{4} & \text{če } (a,b) \in \mathbb{Z} \times [0,1] \text{ in } a \geq 0 \\ -a + \frac{b}{4} + \frac{1}{2} & \text{če } (a,b) \in \mathbb{Z} \times [0,1] \text{ in } a < 0 \end{cases}$$

  To je samo en primer, kako bi lahko konstruirali takšno injektivno preslikavo. Prepričan sem, da se da nalogo rešiti na kakšen veliko bolj eleganten način. Poglejmo zakaj je zgornja preslikava injektivna:

  - Elementi $\mathbb{R} \times \{0\}$ se bodo injektivno preslikali na interval $[-10 - \frac{\pi}{2}, -10 + \frac{\pi}{2}]$
  - Elementi $\mathbb{Z} \times [0,1]$ se bodo preslikali v neskončno mnogo zaprtih intervalov, vendar samo v nenegativna realna števila.

$$\left[0, \frac{1}{4}\right] \cup \left[1, 1 + \frac{1}{4}\right] \cup \left[1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{3}{4}\right] \cup \left[2, 2 + \frac{1}{4}\right] \cup \ldots$$

  Torej je ta preslikava injektivna.

(3) Dokaži, da imata množici $[0,1]$ in $\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x^2+y^2=1\}$ isto moč.

- $[0,1] \to \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x^2+y^2=1\}$

  V to stran injektivne preslikave ni tako težko narediti, vsako točko na intervalu preslikamo v točko na krožnici nad intervalom.

  $$x \mapsto (x, \sqrt{1-x^2})$$

- $\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x^2+y^2=1\} \to [0,1]$

  Če poskusimo z inverzno funkcijo funkcije $x \mapsto (x, \sqrt{1-x^2})$, vidimo, da dobro deluje za vse točke v prvem kvadrantu, težave pa imamo z vsemi ostalimi točkami. Lahko pa preprosto "stisnemo" točke iz prvega kvadranta samo na manjši del intervala $[0,1]$, ter tako naredimo "prostor" za ostale točke.

  $$(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x}{8} & x \geq 0 \land y \geq 0 \\ \frac{x}{8} + \frac{1}{4} & x < 0 \land y \geq 0 \\ \frac{x}{8} + \frac{1}{2} & x < 0 \land y < 0 \\ \frac{x}{8} + \frac{3}{4} & x \geq 0 \land y < 0 \end{cases}$$

  Spet pa je to samo ena izmed mnogo možnosti, kako konstruirati injektivno funkcijo.

(4) Dokaži, da imata množici $[0,1]^2$ in $[0,1] \times [0,1)$ isto moč.

- $[0,1] \times [0,1) \to [0,1]^2$

  Dokažimo najprej v to stran, ker je malo lažje. Injektivna preslikava se ponuja sama od sebe:

  $$(a,b) \mapsto (a,b) \qquad \text{Ker: } [0,1] \times [0,1) \subseteq [0,1]^2$$

- $[0,1]^2 \to [0,1] \times [0,1)$

  V to stran pa lahko naredimo tako, da drugi element v paru, malo "stisnemo" v manjši interval:

  $$(a,b) \mapsto \left(a, \frac{b}{2}\right)$$

(5) Dokaži, da imata množici $[0,1]^2$ in $[0,1)^2$ isto moč.

S pomočjo rešene naloge 4 je trivialno rešiti to nalogo, zato je reševanje za vajo prepuščeno bralcu.

(6) Ali je katera izmed naslednjih množic števna?

Kdorkoli že si, te pred branjem sledeče naloge opozarjam na visoko verjetnost napake. Zatorej ti priporočam uporabo kritičnega mišljenja.

- $X = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots) \mid x_i \in \mathbb{Z}\}$

  Podobno nalogo smo delali na vajah, zato posumimo, da je množica števno neskončna. Če je to res, je treba dokazati, da je moč te množice enaka moči realnih števil. To lahko naredimo tako, da opišemo neko konstrukcijo, s katero bi naredili injektivni preslikavi.

  - $\mathbb{R} \to X$

    Naj bo $r \in \mathbb{R}$. Iščemo preslikavo, ki bo r preslikala v neko zaporedje celih števil. Število r lahko zapišemo v decimalnem zapisu.

    $$r = r_0, r_1 r_2 r_3 \ldots r_k r_{k+1} \ldots$$

    r_0 je gotovo celo število. Števke $r_1, r_2 \ldots$ so števila med 0 in 9. torej so prav tako cela števila. Lepo bi bilo opozoriti še na primer, ko je r oblike $r_0, 999999\ldots$ kjer lahko nastopijo težave. Načeloma je preslikava v vsakem primeru injektivna, vendar ni zares več preslikava, saj enako število, zapisano na 2 različna načina preslika v 2 različni sliki. Primer:

    $$1 = 0,\overline{9} \qquad (1,0,0,\ldots) \neq (0,9,9,\ldots)$$

  - $X \to \mathbb{R}$

    Preslikavo v drugo smer lahko definiramo podobno, če imamo v mislih prejšnji primer. Imamo zaporedje celih števil, vendar bomo v tem primeru naredili samo preslikavo iz zaporedja naravnih števil. To je enako, saj ima množica $\mathbb{N}$ enako moč kot $\mathbb{Z}$.

    $$(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots), \quad x_i \in \mathbb{N}$$

Vsako naravno število pa lahko v decimalnem zapisu zapišemo s končno mnogo števkami.

$$(x_{1_n} \dots x_{1_2} x_{1_1} x_{1_0}, \quad x_{2_k} \dots x_{2_2} x_{2_1} x_{2_0}, \quad \dots)$$

Zdaj pa lahko vse števke zapišemo "povrsti", ter tako dobimo neko realno število:

$$r = 0, x_{1_n} \dots x_{1_2} x_{1_1} x_{1_0} x_{2_k} \dots x_{2_2} x_{2_1} x_{2_0} \dots$$

- $Y_n = \{(x_1, x_2, x_3, \dots) \in X \mid x_i = 0 \text{ za } i > n\}$

  Ta množica ima eno pomembno razliko od prejšnje. Vsa zaporedja imajo vse člene od nekje naprej enake 0. To nas spomni na racionalna števila, kar pa je števno neskončna množica.

  Pravzaprav lahko na to množico potem gledamo drugače:

  $$Y_n = \mathbb{Z}^n \times \{0\}^{|\mathbb{Z}|}$$

  Za moč takšne množice pa že vemo, da je števno neskončna ($\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Q}$ je števna, torej je tudi $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{Z}^4$ števno neskončna...).

- $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$

  Sedaj pa gledamo množico ki je pravzaprav:

  $$\begin{aligned} & \mathbb{Z} \times \{0\} \times \{0\} \times \{0\} \times \dots \\ \cup\ & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \{0\} \times \{0\} \times \dots \\ \cup\ & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \{0\} \times \dots \\ \cup\ & \dots \end{aligned}$$

  Ker je $\{0\} \subseteq \mathbb{Z}$, hitro opazimo, da je vsaka vrstica podmnožica naslednje vrstice.

  $$\mathbb{Z} \times \{0\} \times \{0\} \times \dots \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \{0\} \times \dots$$

  Sedaj nas zanima samo, če lahko katero koli zaporedje celih števil zapišemo na ta način. Ker delamo unijo $U_{n=1}^{\infty}$ je lahko torej dolžina zaporedja preden pridemo do samih ničel števno neskončna, kar je enako kot dolžina začetnega zaporedja $(x_1, x_2, x_3 \dots)$. Iz tega sledi, da Y ni števno neskončna množica.