5. domača naloga

(1) Dokaži, da imata množici $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$ isto moč.

Želimo pokazati, da imata 2 množici isto moč. To lahko naredimo na več načinov. Lahko konstruiramo bijekcijo iz ene množice v drugo, s čimer bi dokazali, da imata množici enako moč. Vendar bijekcije ni vedno lahko najti. Zato lahko uporabimo kratek izrek z dolgim imenom:

Cantor-Bernstein-Schroederjev izrek: $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \implies |A| = |B|$

Pri čemer oznaka $|A|$ predstavlja moč množice A. Z drugimi besedami to pomeni, da lahko pokažemo, da sta množici A in B enako močni tako, da poiščemo:

- Injektivno preslikavo $A \to B$ in
- Injektivno preslikavo $B \to A$

Iz tega sledi, da mora med množicama A in B obstajati tudi neka bijekcija, čeprav ni nujno, da smo jo našli.

- $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \{0, 1\} \quad : \quad x \mapsto (x, 0)$

  To je primer injektivne preslikave. Ni pomembno, katero smo našli, zanima nas le, če se vsaka 2 elementa iz množice $\mathbb{R}$ preslikata v 2 različna elementa množice $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$. To v tem primeru očitno velja.

- $\mathbb{R} \times \{0, 1\} \to \mathbb{R}$:

  Kako pa bi sedaj naredili injektivno preslikavo? Pri vajah smo pokazali, da velja:
  $$|(0, 1)| = |\mathbb{R}|$$
  Torej je dovolj, da pokažemo, da obstaja takšna injektivna preslikava:
  $$(0, 1) \times \{0, 1\} \to \mathbb{R}$$
  Takšne preslikave pa ni težko konstruirati. Primer:
  $$(a, b) \mapsto a + b$$

Opomba: Zakaj velja $|(0,1)| = |\mathbb{R}|$? Ni težko konstruirati bijekcije, ki bi preslikala elemente nekega intervala v vsa realna števila. To lahko naredimo npr. z eno vejo funkcije tan, ki jo ustrezno premaknemo in raztegnemo/skrčimo v x smeri.

$$f(x) = \tan \pi(x - \frac{1}{2}) \ , \qquad f^{-1}(x) = \frac{1}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2}$$

Še ena opomba: Ni potrebno, da $\mathbb{R}$ zamenjamo z manjšim intervalom. V tem primeru lahko samo uporabimo neko funkcijo, ki "splošči" vsa realna števila na nek končen interval. Primer:

$$(a,b) \mapsto \arctan a + 10b$$

(2) Dokaži, da imata množici $\mathbb{R}$ in $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{Z} \times [0,1])$ isto moč.

Enako kot pri prejšnji nalogi, konstruirajmo 2 injekciji na teh dveh množicah:

- $\mathbb{R} \to (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{Z} \times [0,1]) \quad : \quad x \mapsto (x, 0)$
- $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{Z} \times [0,1]) \to \mathbb{R}$:

  Spet imamo več težav s tem, da bi pokazali obratno. Problema se lahko rešimo tudi tako, da napišemo 2 posamezna predpisa, za vsak del množice posebej:

$$(a,b) \mapsto \begin{cases} \arctan a - 10 & \text{če } (a,b) \in \mathbb{R} \times \{0\} \\ a + \frac{b}{4} & \text{če } (a,b) \in \mathbb{Z} \times [0,1] \text{ in } a \geq 0 \\ -a + \frac{b}{4} + \frac{1}{2} & \text{če } (a,b) \in \mathbb{Z} \times [0,1] \text{ in } a < 0 \end{cases}$$

  To je samo en primer, kako bi lahko konstruirali takšno injektivno preslikavo. Prepričan sem, da se da nalogo rešiti na kakšen veliko bolj eleganten način. Poglejmo zakaj je zgornja preslikava injektivna:

  - Elementi $\mathbb{R} \times \{0\}$ se bodo injektivno preslikali na interval $[-10 - \frac{\pi}{2}, -10 + \frac{\pi}{2}]$
  - Elementi $\mathbb{Z} \times [0,1]$ se bodo preslikali v neskončno mnogo zaprtih intervalov, vendar samo v nenegativna realna števila.

$$\left[0, \frac{1}{4}\right] \cup \left[1, 1 + \frac{1}{4}\right] \cup \left[1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{3}{4}\right] \cup \left[2, 2 + \frac{1}{4}\right] \cup \ldots$$

  Torej je ta preslikava injektivna.

(3) Dokaži, da imata množici $[0,1]$ in $\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x^2+y^2=1\}$ enako moč.

- $[0,1] \to \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x^2+y^2=1\}$

  V to stran injektivne preslikave ni tako težko narediti, vsako točko na intervalu preslikamo točko na krožnici nad intervalom.

  $$x \mapsto (x, \sqrt{1-x^2})$$

- $\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x^2+y^2=1\} \to [0,1]$

  Če poskusimo z inverzno funkcijo funkcije $x \mapsto (x, \sqrt{1-x^2})$, vidimo, da dobro deluje za vse točke v prvem kvadrantu, težave pa imamo z vsemi ostalimi točkami. Lahko pa preprosto "stisnemo" točke iz prvega kvadranta samo na manjši del intervala $[0,1]$, ter tako naredimo "prostor" za ostale točke.

  $$(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x}{8} & x \geq 0 \land y \geq 0 \\ \frac{x}{8} + \frac{1}{4} & x < 0 \land y \geq 0 \\ \frac{x}{8} + \frac{1}{2} & x < 0 \land y < 0 \\ \frac{x}{8} + \frac{3}{4} & x \geq 0 \land y < 0 \end{cases}$$

  Spet pa je to samo ena izmed mnogo možnosti, kako konstruirati injektivno funkcijo.