(1) Poenostavi naslednje izraze

(a) $(3+4i)\overline{(1-3i)}$

$$(3+4i)\overline{(1-3i)} = (3+4i)(1+3i) = 3+9i+4i-12 = -9+13i$$

(b) $\dfrac{7-3i}{1+i}$

$$\frac{7-3i}{1+i} = \frac{(7-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{7-7i-3i-3}{2} = \frac{4-10i}{2} = 2-5i$$

(c) $(1+i\sqrt{3})^{10}$

To enačbo najlažje rešimo tako, da jo pretvorimo v eulerjev zapis.

$$\begin{aligned} z &= 1+i\sqrt{3} \\ |z| &= \sqrt{1+3} = 2 \\ \tan\varphi &= \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3} \\ z &= 2e^{i\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

Nato poračunamo njeno deseto potenco:

$$z^{10} = 2^{10}e^{10i\frac{\pi}{3}} = 1024e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

Nato lahko to pretvorimo nazaj v kartezično obliko:

$$z^{10} = 1024\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 1024\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -512\left(1+i\sqrt{3}\right)$$

(2) Zapiši vse vrednosti izraza $\sqrt[7]{(-\sqrt{3}-i)^5}$ in jih nariši.

To nalogo ponovno najlažje rešimo tako, da pretvorimo v eulerjev zapis.

$$\begin{aligned} w &= -\sqrt{3}-i \\ z^7 &= (-\sqrt{3}-i)^5 = w^5 \end{aligned}$$

Rešujemo za z.

Najprej poračunamo w^5:

$$\begin{aligned} w &= -\sqrt{3} - i \\ |w| &= \sqrt{3+1} = 2 \\ \tan\varphi &= \frac{-1}{-\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Pozor! Tule se skriva pogosta napaka. Nismo izračunali pravega kota. Če bi narisali skico, bi takoj opazili, da pri številu $w = -\sqrt{3} - i$ kot zagotovo ne more biti $\frac{\pi}{6}$! Pravi kot je večji za π, torej je $\varphi = \frac{7\pi}{6}$. Sedaj lahko zapišemo w v eulerjevi obliki.

$$\begin{aligned} w &= 2e^{i\frac{7\pi}{6}} \\ w^5 &= 2^5 e^{i\frac{35\pi}{6}} = 32e^{i\frac{35\pi}{6}} \end{aligned}$$

najti želimo 7-mi koren tega števila

$$\begin{aligned} z &= |z|e^{i\varphi} \\ z^7 &= w^5 \\ |z|^7 e^{i7\varphi} &= 32e^{i(\frac{35\pi}{6}+2k\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Sedaj primerjamo absolutne vrednosti in kote posebej. Za absolutne vrednosti dobimo:

$$|z|^7 = 32 \Rightarrow |z| = \sqrt[7]{32}$$

Za kote pa dobimo:

$$\begin{aligned} 7\varphi &= \frac{35\pi}{6} + 2k\pi \\ \varphi &= \frac{5\pi}{6} + \frac{2k\pi}{7}, \ k \in \{0, 1, 2, \ldots, 6\} \end{aligned}$$

k je celo število od 0 do 6, ker ko je $k = 7$ prištejemo kotu 2π in iz trigonometrije vemo, da smo nazaj na začetku.

z lahko sedaj zapišemo kot:

$$z = \sqrt[7]{32}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{2k\pi}{7}\right)} = \sqrt[7]{32}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{2k\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{2k\pi}{7}\right)\right)$$

(3) Skiciraj naslendje podmnožice kompleksnih števil.

(a) $\{z \in \mathbb{C}; 2(\mathrm{Re}\ z)^2 + \mathrm{Im}\ \ < 1\}$
Zapišimo z v kartezični obliki, $z = x + iy$. Vidimo, da so v množici tista kompleksna števila, ki ustrezajo neenačbi:

$$2x^2 + y < 1$$

Enačbo še malo preuredimo, in že znamo narisati to množico. Tu je žal ne bom narisal, ker trenutno nimam preveč časa.

$$y < -2x^2 + 1$$

Rezultat so vse točke, ki ležijo pod parabolo $y = -2x^2 + 1$.

(b) $\{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}\ z^2 + 4\mathrm{Im}\ z = 0\}$ Naredimo enako kot pri prejšnji nalogi, samo da imamo celo nekaj dela z računanjem.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(x+iy)^2 + 4y &= 0 \\
\mathrm{Re}(x^2 - y^2 + 2xyi) + 4x = x^2 - y^2 + 4y &= 0 \\
x^2 - (y-2)^2 + 4 &= 0 \\
(x+2)^2 - y^2 &= -4 \\
\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{y^2}{4} &= -1
\end{aligned}$$

Po tem, ko dopolnimo popolni kvadrat je očitno, da gledamo v enačbo hiperbole. Risanje je prepuščeno bralcu.

(4) Naj bo $k \neq 0$ realno število. Za katere k je $1 + ik$ bližje izhodišču kot $1 - \frac{i}{k}$?

Razdaljo od izhodišča nam predstavlja absolutna vrednost števila, torej lahko zapišemo:

$$|1 + ik| < \left|1 - \frac{i}{k}\right|$$

Ker so absolutne vrednosti večje ali enake 0, lahko neenačbo kvadriramo in razrešimo absolutne vrednost:

$$1 + k^2 < 1 + \frac{1}{k^2}$$

Sedaj lahko enačbo nekoliko preuredimo in dobimo:

$$\begin{aligned}
k^2 &< \frac{1}{k^2} \\
k^4 &< 1
\end{aligned}$$

Ker je k^2 pozitivno število, lahko enačbo korenimo in dobimo:

$$k^2 < 1$$

Sledi dolg premislek o tem, kaj je naš rezultat. Če si skiciramo parabolo $k^2 = 1$, dobimo dve ničli: $-1, 1$, parabola pa je med tema dvema ničlama manjša od 1. Torej je $k \in (-1, 1)$, ali drugače povedano: $|k| < 1$.

Seveda tudi pri tej nalogi obstaja lahka očitna geometrijska rešitev. Narišemo si premico, na kateri ležijo vsa kompleksna števila, $1 + ik$, ko k preteče vsa realna števila (razen 0). To je premica $x = 1$. Hitro opazimo da, manjši kot je $|k|$, manjša je oddaljenost od izhodišča. Sedaj nas zanima samo še za katere k velja:

$$|k| < \frac{1}{|k|}$$

Očitno to velja samo za števila $|k|$, ki so ≤ 1.

(5) Rešeno na faksu pri proseminarju. Nekako nima smisla da bi še enkrat pisal rešitev.

(6) Izračunaj množice kompleksnih števil z, ki zadoščajo (ne)enačbam. Množice rešitev nariši.

(a) $z^3 = -2 + 2i$ Obe strani enačbe zapišemo z eulerjevo formulo in primerjamo absolutno vrednost ter kot.

$$\begin{aligned}
|-2+2i| &= \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \\
\tan\theta &= \left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{2}{2} = -1 \implies \theta = \frac{3\pi}{4} \\
\left(|z|e^{i\varphi}\right) &= |z|^3 e^{i3\varphi} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \\
|z|^3 &= 2\sqrt{2} = \sqrt{8} \implies |z| = \sqrt[6]{8} = \sqrt{2} \\
3\varphi &= \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \{0, 1, 2\} \\
\varphi &= \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}
\end{aligned}$$

Sedaj lahko še napišemo števila z, ki ustrezajo enačbi, vendar v se ni treba preveč mučit, napišimo samo tako, kot je v rešitvah:

$$z = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3})),\ k = 0, 1, 2$$

(b) $z^8 + z^4 - 12 = 0$
Poskusimo podobno, vendar preden se vržemo v nalogo lahko naredimo preprosto substitucijo, da nam bo lažje. Naj bo $w = z^4$. Tako moramo rešiti samo preprosto kvadratno enačbo.

$$\begin{aligned} w^2 + w - 12 &= 0 \\ (w+4)(w-3) &= 0 \implies w = -4 \vee w = 3 \end{aligned}$$

Zdaj samo poračunamo za oba primera.

i. $w = -4$

$$\begin{aligned} z^4 &= -4 \\ |z| &= \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} \\ \varphi &= \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} = \frac{pi}{4} + \frac{\pi}{2} \\ z &= \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2})), \ k = 0, 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Opomba: Če bi slučajno pomislil, potem bi opazil, da so tole precej lepi koti, prav tako razdalja od izhodišča, vse nam je že od nekod znano. Lahko pišemo tudi:

$$z = \pm 1 \pm i$$

ii. $w = 3$
Identično kot za prvi primer, samo da se meni ne da toliko pisat.

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{3}(\ldots) \\ \varphi &= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \\ z &= \sqrt{3}(\cos\varphi + i\sin\varphi), \ k = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

(c) $\sqrt{|z|^2 - 2} + \operatorname{Im} z > \operatorname{Re} z$
Poskusimo zapisati z v kartezični obliki, torej $z = x + yi$:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2 - 2} + y &> x \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 2} &> x - y \end{aligned}$$

Poglejmo, kdaj ima ta enačba sploh smisel. Pogledati moramo, kdaj je vrednost znotraj korena negativna, in kakšna je desna stran.

i. $x - y < 0$: Desna stran enačbe je negativna, leva pa bo vedno nenegativna, torej bo neenačaj veljal na celotnem definicijskem območju, torej ko velja $x^2 + y^2 - 2 \geq 0$.

$$(x < y) \wedge (x^2 + y^2 \geq 2)$$

ii. $x - y \geq 0$: Enačbo lahko kvadriramo.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2 &> (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \\ -2 &> -2xy \\ xy &> 1 \\ (x \geq y) &\wedge (xy > 1) \end{aligned}$$

Torej imamo celotno rešitev:

$$\left\{z = x + iy; (x \geq y) \wedge (xy > 1) \vee (x < y) \wedge (x^2 + y^2 \geq 2)\right\}$$