

东南大学考试卷 (A卷)

课程名称 高等数学AB (上)期中 考试学期 12-13-2 得分

适用专业 选学高数AB的各类专业 考试形式 闭卷 考试时间长度 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六
得分						
评阅人						

一、填空题 (本题共6小题, 前5题每题4分, 第6题9分,共29分)

1. 设斜率为 $-\frac{1}{2}$ 的直线 L 是曲线 $y = \frac{2}{x} (x > 0)$ 的切线,则 L 的方程为_____;
2. 函数 $f(x) = \frac{3}{2 - \frac{2}{x}}$ 的全部间断点分别是_____,它们的类型依次分别为_____;
3. 设 $f(x) = x(x+1)(x+2) \cdots (x+2012)$, 则 $f'(-1) =$ _____;
4. 设 $y = f(\ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}))$, 其中 $f(u)$ 为可微函数, 则微分 $dy =$ _____;
5. 函数 $f(x) = e^{\sin x}$ 带Peano余项的2阶Maclaurin公式是 _____;
6. 分别举出符合下列各题要求的一例,并将其填写在横线上:
 - (1) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$ 存在, 但极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 不存在的数列 $a_n =$ _____;
 - (2) 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)$ 都存在, 但极限 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 不存在的函数 $f(x) =$ _____, $g(x) =$ _____;
 - (3) 在 $x = 0$ 处导数不存在, 但 $x = 0$ 是极值点的连续函数有_____.

二、单项选择题 (本题共3小题, 每小题4分, 满分12分)

1. 设 $f(x) = \begin{cases} (1-x)^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ b, & x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} - a, & x < 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 []

(A) $a = b = e$ (B) $a = b = e^{-1}$ (C) $a = -b = e^{-1}$ (D) $a = -b = -e^{-1}$
2. 设 $f(x) = (x + |\sin x|) \cos x$, 则 []

(A) $f'(0) = 2$ (B) $f'(0) = 0$ (C) $f'(0) = 1$ (D) $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导

3. 下列命题正确的是: []

(A)任何两个无穷小量之比的极限必存在(极限值为有限实数或 ∞);

(B)若数列 $\{a_{2k-1}\}$ 和 $\{a_{2k}\}$ 都收敛,则数列 $\{a_n\}$ 也收敛;

(C)若数列 $\{a_n\}$ 收敛,数列 $\{b_n\}$ 发散,则数列 $\{a_nb_n\}$ 必发散;

(D)若数列 $\{a_n\}$ 单调增加,数列 $\{b_n\}$ 单调减少,且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

三、 计算下列各题 (本题共5小题, 每小题7分, 满分35分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^4} - \sqrt[3]{1-2x^4}}{(1 - \cos x) \sin^2 x}$.

2. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^4 + 4^n}$.

3. 设 $y = y(x)$ 是由方程 $x + y = \arctan(x - y)$ 所确定的隐函数,求导数 $\frac{dy}{dx}$.

4. 设 $f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$, 求 $f^{(n)}(x)$.

5. 设 $f(x) = \begin{cases} x = e^{2t} - 1 \\ y = t^3 + 1 \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}|_{t=2}$.

四、（本题满分8分）证明：当 $x > 0$ 时， $x^2 + 1 > \ln x$.

五、（本题满分8分） 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 3a]$ ($a > 0$)上连续，在开区间 $(0, 3a)$ 内可导，且 $f(3a) = f(a) < f(0) < f(2a)$.

证明：至少存在一点 $\xi \in (0, 2a)$, 使得 $f'(\xi) = f'(\xi + a)$.

六、（本题满分8分） (1) 证明不等式： $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$;

(2) 设 $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$, 利用单调有界原理证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.