东南大学 2009-2010 学年第二学期《高等数学(上)》期中考试试卷

课程名称 高等数学 A、B（期中） 考试学期 09-10-2 得分

适用专业 工科类 考试形式 闭卷 考试时间长度 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

一.填空题（每个空格 4 分，本题满分 24 分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}, & x<0\\ a+bx, & x\geq 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导,则 $a=$____， $b=$________；

2. 设 $y=\arctan e^{x}-x+\dfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}=$____________；

3. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $x\sin y+ye^{x}+\dfrac{\pi}{2}=0$ 所确定的隐函数，则 $y'(0)=$_____；

4. 函数 $y=e^{2x}(x^{2}-2)$ 的单调减少区间是_____；

5. $f(x)=\arcsin x$ 带有 $Peano$ 余项的三阶 $Maclaurin$ 公式为________；

6. 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\sin x-2\sin 3x+\sin 5x$ 是 x 的______阶无穷小量(填数字)；

二.单项选择题（每小题 4 分，本题满分 12 分）

7. 若极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty,\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$，则必有 [ ]

(A) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\infty$

(B) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\infty$

(C) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)+g(x)}=0$

(D) $\lim\limits_{x\to a}kf(x)=\infty$,($k$为非零常数)

8. 设函数 f 在区间 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f''(x)>0$，则有 [ ]

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$

(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$

(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

9. 下列命题中正确的是 [ ]

(A)若 f 在点 x_0 处可导,则 $|f|$ 在点 x_0 处也可导;

(B) 若 f 在点 x_0 处可导,则 f 在点 x_0 的某个邻域内连续;

(C) 若 $f \in C[a,b)$, f 在 (a,b) 可导,且 $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = k$,($k$为有限数),则 f 在点 a 处存在右导数 $f'_+(a)$,且 $f'_+(a) = \lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = k$;

(D) 设函数 $y = f \circ g$ 是由 $y = f(u), u = g(x)$ 复合而成,如果 g 在 x_0 处间断, f 在点 $u_0 = g(x_0)$ 处间断,则复合函数 $y = f \circ g$ 在点 x_0 处也间断。

三.计算题(每小题 9 分,本题满分 36 分)

10. 计算极限 $\lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\sin^2 n\right)^n$

11. 计算极限 $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{e^{-x^2} - 1 + x^2}{\sin^4(\sqrt{2}x)}$

12. 设 f 二阶可导, $f'(0) = 3, f''(0) = 1$,且 $\begin{cases} x = f(t) - \pi \\ y = f(e^{3t} - 1) \end{cases}$,求 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=0}, \dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}$.

13. 设 $f(x) = x^2\cos^2 x$,求 $f^{(n)}(x) \quad (n \ge 3)$.

四(14).(8分) 求函数 $F(x) = \dfrac{1 + e^{\frac{1}{x}}}{2 - 3e^{\frac{1}{x}}}$ 的间断点,并指出间断点的类型(需说明理由).

五(15).(8分) 证明:当 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时, $2\sin x + \tan x > 3x$.

六(16).(6分). 设 $f(x) = ax^2 + bx + c$,(a,b,c为常数),且当 $|x| \le 1$时, $|f(x)| \le 1$,

证明：当 $|x|\le 1$ 时，$|f'(x)|\le 4$.

七(17). (6分) 设 $f\in C[0,1]$， f 在 $(0,1)$ 可导，且 $f(0)=f(1)=0$，

$\max\limits_{x\in[0,1]} f(x)=M>0$，证明：对于大于 1 的任意正整数 n，存在互异的两点 $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$，

使得 $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}-\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=\dfrac{n}{M}$.

09-10-2 高等数学（A，B）期中试卷参考答案

一.填空题（每个空格 4 分，本题满分 24 分）

1. $\frac{1}{2}$， $\frac{1}{8}$； **2.** $-\frac{e-1}{e^2+1}$； **3.** $1+\frac{\pi}{2}$；

4. $(-2,1)$； **5.** $x+\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)$； **6.** 3；

二.单项选择题（每小题 4 分，本题满分 12 分）

7. D **8.** B **9.** C

反例：$u=g(x)=\begin{cases}2, & x=0\\ 1, & x\neq 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 间断，$y=f(u)=\begin{cases}3, & u>2\\ 1, & u\le 2\end{cases}$ 在 $u=2$ 间断

而 $y=f(g(x))\equiv 1$ 处处连续 .

三.计算题（每小题 9 分，本题满分 36 分）

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\sin^2 n\right)^n=e$ **11.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^2}-1+x^2}{\sin^4(\sqrt{2x})}=\frac{1}{8}$

12. $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0},\ \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=3,\ \frac{11}{3}$

13. $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^2\cos 2x$

$$f^{(n)}(x)=2^{n-3}\left[4x^2\cos(2x+\frac{n}{2}\pi)+4nx\cos(2x+\frac{n-1}{2}\pi)+n(n-1)\cos(2x+\frac{n-2}{2}\pi)\right]$$ 四

(14).（8分）

$x=0$ 是第一类，$x=\dfrac{1}{\ln\frac{2}{3}}$ 是第二类

五(15).（8分）答案略

六(16).(6分). 提 示 : $\left|f'(x)\right| = \left|2ax + b\right| \le \left|\pm 2a + b\right| \le \left|a\right| + \left|a \pm b\right| \le 2 + 2 = 4$

七(17).(6分) 提 示 : 存 在 c, $f(c) = \dfrac{M}{n}$, 在 $[0,c][c,1]$上 分 别 使 用 Lagrange中 值 定 理 .