东南大学 2006-2007 学年第二学期《高等数学(上)》期中考试试卷

课程名称	高等数学 A、B 期中	考试学期	06-07-2	得分	
适用专业	工科类	考试形式	闭卷	考试时间长度	120 分钟

一.填空题（前四题每题 4 分，第 5 题 8 分，满分 24 分）

1. 函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|(x-1)}$ 的全部间断点分别是______，它们的类型依次分别为_________；

2. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，则 a=______，b=_______；

3. 设 $y=\arctan f(x)$，其中 $f(x)$ 为可微函数，则微分 dy=_____________；

4. 设 $f(x)=\begin{cases} ax+b, & x>1 \\ x^3, & x\le 1 \end{cases}$，若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，则 a=______，b=_______；;

5. 举出符合各题要求的一例，并将其填写在横线上：

（1）在 $x=0$ 处不连续，但当 $x\to 0$ 时，极限存在的函数有_________，

（2）在 $x=0$ 处连续，但在 $x=0$ 时不可导的函数有________，

（3）在 $x=0$ 处导数为 0，但 $x=0$ 不为极值点的连续函数有_______，

（4）属于"$\dfrac{0}{0}$"或"$\dfrac{\infty}{\infty}$"未定型，且存在有限极限，但极限不能用洛必达法则求得的有_____________.

二.单项选择题（每题 4 分，满分 12 分）

1. 设 $f(x)$ 是单调增函数，$g(x)$ 是单调减函数，且复合函数 $f(f(x)),f(g(x))$，$g(f(x)),g(g(x))$ 都有意义，则下列函数组中全为单调减函数的是 [　　]

(A) $f(f(x)),f(g(x))$　　(B) $g(f(x)),g(g(x))$

(C) $f(g(x)),g(f(x))$　　(D) $g(g(x)),f(f(x))$

2. 当 $x\to 0$ 时，若 $y=\ln(1+x)-ax-bx^2$ 是比 x^2 更高阶的无穷小，则 [　　]

(A) $a=1,b=\dfrac{1}{2}$　(B) $a=1,b=-\dfrac{1}{2}$　(C) $a=-1,b=\dfrac{1}{2}$　(D) $a=-1,b=-\dfrac{1}{2}$

3. 下面四个论述中正确的是 [ ]

(A)若 $x_n \geq 0(n=1,2,\cdots)$，且数列$\{x_n\}$单调递减，则数列$\{x_n\}$收敛，且其极限 $a>0$

(B)若 $x_n > 0(n=1,2,\cdots)$，且数列$\{x_n\}$收敛，则其极限 $a>0$

(C)若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \geq 0$，则 $x_n \geq 0(n=1,2,\cdots)$

(D)若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$，则存在正整数 N，当 $n>N$ 时，都有 $x_n > \dfrac{a}{2}$。

三.计算题（每题 7 分，满分 35 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{(1-\cos x)\ln(1+x)}$

解:

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{2x-1}$

解:

3. 设$\begin{cases} x = t + \arctan t \\ y = \ln\left(1+t^2\right) \end{cases}$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1}$，$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}$.

解:

4. 设 $y = x^2 e^{3x}$，求 $y^{(10)}(x)$.

解:

5. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2+y^2-ye^{xy}=2$ 所确定的隐函数，求曲线 $y=y(x)$ 在点 $(0,2)$ 处的切线方程.

解:

四.（8 分） 设 $x_0=\sqrt{2}, x_n=\sqrt{2}+\dfrac{x_{n-1}-1}{\sqrt{2}+x_{n-1}}, (n=1,2,\cdots)$，证明数列$\{x_n\}$收敛并求极限.

证:

五.（8 分）证明：当 $x \geq 0$ 时，有

$$(1+x)^2\left(2\ln(1+x)-1\right)+1 \geq 4x\arctan x-2\ln\left(1+x^2\right).$$

证：

六. (7 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=0$，试证：存在一点 $\xi \in (0,1)$，使得

$$\frac{3f(\xi)}{1-\xi}=f'(\xi)$$

证：

七．(6 分) 设 $f_n(x)=\dfrac{1}{n+1}x-\arctan x$ (其中 n 为正整数)，

（1）证明：$f_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一的零点，即存在唯一的 $x_n \in (0,+\infty)$，使 $f_n(x_n)=0$ ；

（2）计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$.

证：

06-07-2 高等数学（A，B）期中试卷参考答案

一.填空题（前四题每题 4 分，第 5 题 8 分，满分 24 分）

1. $\underline{0\ ,1}$，<u>跳跃间断点，无穷间断点</u>；　**2.** $a=\underline{1}$，$b=\underline{-1}$；

3. $\mathrm{d}y=\underline{\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x}$；　**4.** $a=\underline{3}$，$b=\underline{-2}$；

5.（1）$\underline{y=\left|\operatorname{sgn} x\right|}$，（2）$\underline{y=|x|}$，（3）$\underline{y=x^3}$，（4）$\underline{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}}$.

二.单项选择题（每题 4 分，满分 12 分）

1. C　**2.** B　**3.** D

三.计算题（每题 7 分，满分 35 分）

1. 解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{(1-\cos x)\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{6}x^3}{\frac{1}{2}x^3}=\dfrac{1}{3}$

2. 解： $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{2x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x+1}\right)^{-\frac{x+1}{3}\left(-\frac{3(2x-1)}{x+1}\right)}=\mathrm{e}^{-3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x+1}}=\mathrm{e}^{-6}$

3. 解： $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=1}=\dfrac{\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1}{1+t^2}}\Big|_{t=1}=\dfrac{2t}{2+t^2}\Big|_{t=1}=\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{t=1}=\dfrac{2(2-t^2)(1+t^2)}{(2+t^2)^3}\Big|_{t=1}=\dfrac{4}{27}$

4.解： $y^{(10)}(x)=3^{10}x^2\mathrm{e}^{3x}+3^9 20x\mathrm{e}^{3x}+3^{10}10\mathrm{e}^{3x}=3^9\left(3x^2+20x+30\right)\mathrm{e}^{3x}$

5.解： 对方程关于 x 求导得：$2x+2yy'-y'\mathrm{e}^{xy}-y\mathrm{e}^{xy}(y+xy')=0$，将 $x=0$，$y=2$ 代入得

$y'(0)=\dfrac{4}{3}$，于是所求切线方程为 $y-2=\dfrac{4}{3}x$，即 $4x-3y+6=0$.

四.（8 分）证： $x_n=\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}+x_{n-1}}\right)<1+\sqrt{2},(n=1,2,\cdots)$，$\{x_n\}$ 有上界。

$x_1=\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}+x_0}\right)=\dfrac{2+3\sqrt{2}}{4}>\sqrt{2}=x_0$，设 $x_{n-1}<x_n$，

$x_{n+1}-x_n=\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)(x_n-x_{n-1})}{\left(\sqrt{2}+x_{n-1}\right)\left(\sqrt{2}+x_n\right)}>0$，由归纳法得：$\{x_n\}$ 单调递增，

故$\{x_n\}$收敛。设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ （1 分）在递推关系式中令$n\to\infty$，得

$a=\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}+a}\right)$，即$a^2-a-1=0$，得$a=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，由极限保序性得$a\ge\sqrt{2}$，

故$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

五.（8 分）

证：设$f(x)=(1+x)^2\left(2\ln(1+x)-1\right)+1-4x\arctan x+2\ln\left(1+x^2\right)$，

$f'(x)=4(1+x)\ln(1+x)-4\arctan x$， $f''(x)=4\ln(1+x)+4-\dfrac{4}{1+x^2}\ge 0,\ x\ge 0$

所以 $f'(x)\ge f'(0)=0,\ x\ge 0$，故$f(x)\ge f(0)=0,\ x\ge 0$，原不等式得证。

六. (7 分) 证：设$F(x)=(1-x)^3 f(x)$， $F(x)$在区间$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且

$F(0)=F(1)=0$，由罗尔定理知$\exists\,\xi\in(0,1)$，使得

$F'(\xi)=(1-\xi)^2\left((1-\xi)f'(\xi)-3f(\xi)\right)=0$，由于$1-\xi\ne 0$，得$\dfrac{3f(\xi)}{1-\xi}=f'(\xi)$

七. (6 分)

证：(1) 令$g_n(x)=\dfrac{\arctan x}{x}-\dfrac{1}{n+1}$， $x\in(0,+\infty)$，$\lim\limits_{x\to 0^+} g_n(x)=1-\dfrac{1}{n+1}>0$ ，

$\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)=-\dfrac{1}{n+1}<0$，故$\exists\,0<x_1<x_2<+\infty$，使得$g_n(x_1)>0,\ g_n(x_2)<0$，

$g_n(x)$在区间$[x_1,x_2]$上连续，$g_n(x)$在(x_1,x_2)内至少存在一个零点。

$g_n'(x)=\dfrac{\dfrac{x}{1+x^2}-\arctan x}{x^2}$，记$h(x)=\dfrac{x}{1+x^2}-\arctan x,\ h'(x)=-\dfrac{2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}<0$，

$x\in(0,+\infty)$，$h(x)<h(0)=0,\ x>0$，即$g_n'(x)<0,\ x>0$，$g_n(x)$在$(0,+\infty)$内严格单调递减，$g_n(x)$在$(0,+\infty)$内至多存在一个零点。$g_n(x)$在$(0,+\infty)$内存在唯一零点，即$f_n(x)$在$(0,+\infty)$内存在唯一零点，记为$x_n\in(0,+\infty)$。

(2) 由于$\dfrac{\arctan x_{n+1}}{x_{n+1}}=\dfrac{1}{n+2}<\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{\arctan x_n}{x_n}$，而$\dfrac{\arctan x}{x}$严格单调递减，故

$x_n < x_{n+1}$，所以 $(n+1)\arctan x_1 \le x_n < \frac{\pi}{2}(n+1)$，得 $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\arctan x_{n+1}}{(n+1)\arctan x_n} = 1$$