

东南大学考试卷 (A 卷)

课程名称 高等数学A(下)期末 考试学期 17-18-3 得分

适用专业 选学高数A的各类专业 考试形式 闭卷 考试时间长度 150 分钟

题号	一	二	三	四	五	六
得分						
评阅人						

一、填空题 (本题共9小题, 每题4分, 共36分)

1. 设函数 $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)|_{(1,1,1)} =$ _____.

2. 已知 $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ x - 1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$ 设 $S(x)$ 是 $f(x)$ 的以 4 为周期的正弦级数的和函数, 则 $S(7) =$ _____.

3. 设 $f(x)$ 为连续函数, 且 $f(2) \neq 0$, 记 $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$, 则 $\frac{F'(2)}{2f(2)} =$ _____.

4. 设曲线 $L: y = \sqrt{x - x^2}$, 则第一型曲线积分 $\int_L (x^2 + y^2) ds =$ _____.

5. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}) x^n$ 的收敛半径为_____.

6. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - 1)^n$ 在 $x = 0$ 处收敛, 在 $x = 2$ 处发散, 则该幂级数的收敛域为_____.

7. 设 $a_n = \int_0^1 x(1 - x)^{n-1} dx$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n =$ _____.

8. 设 C 为圆周 $|z| = 2$, 取逆时针方向, 则 $\oint_C \frac{2z^2 - z + 1}{(z - 1)^2} dz =$ _____.

9. 留数 $\operatorname{Res} \left[\frac{z \sin z}{(1 - e^z)^3}, 0 \right] =$ _____.

二、 计算下列各题（本题共5小题，每小题7分，满分35分）

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2}$.

2. 试判别 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x} + x^2} dx$ 的敛散性, 并说明理由.

3. 求函数 $f(x) = \frac{3x+8}{(2x-3)(x^2+4)}$ 的麦克劳林(Maclaurin)级数.

4. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{9}} \cdot 8^{\frac{1}{27}} \cdots (2^n)^{\frac{1}{3^n}}$.

5. 计算第二型曲线积分 $I = \oint_C \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2}$, 其中 C 是以 $(1, 0)$ 为圆心, R 为半径的圆周 ($R \neq 1$), 取逆时针方向.

三、(本题满分8分) 计算三重积分 $I = \iiint_{\Omega} e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dV$, 其中 Ω 是单位球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 内满足 $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ 的部分.

四、(本题满分8分) 计算第二型曲面积分 $\iint_{\Sigma} yzdy \wedge dz + (x^2 + z^2)ydz \wedge dx + xydx \wedge dy$, 其中 Σ 为曲面 $4 - y = x^2 + z^2$ ($y \geq 0$), 取右侧.

五、(本题满分7分) 计算第一型曲面积分 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2)dS$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ ($a > 0$).

六、(本题满分6分) 试判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\sqrt{n} \ln \frac{2\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1} - 1 \right)$ 的敛散性. 若收敛, 是绝对收敛还是条件收敛?