17-18-3高等数学A期末试卷参考答案及评分标准

一、 填空题（本题共9小题，每小题4分，满分36分）

1. $\frac{1}{3}$; 2. $-\frac{1}{2}$; 3. $\frac{1}{2}$; 4. $\frac{\pi}{4}$; 5. 1; 6. $[0,2)$; 7. 1; 8. $6\pi i$; 9. -1.

二、 计算下列各题（本题共5小题，每小题7分，满分35分）

1. 由于 $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{1}{3^k}(1+\frac{1}{k})^{k^2}}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{k})^k}{3}=\frac{e}{3}<1$, 所以 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}(1+\frac{1}{k})^{k^2}$ 收敛, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}(1+\frac{1}{k})^{k^2}$ 存在。从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}(1+\frac{1}{k})^{k^2}=0$.(3分+2分+2分)

2. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\mathrm{d}x$. 而 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+x^2}=1$, 所以$\int_0^{1}\frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\mathrm{d}x$收敛; $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+x^2}=1$, 所以$\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\mathrm{d}x$ 亦收敛. 故原级数收敛.(3分+3分+1分)

3. $f(x)=\frac{3x+8}{(2x-3)(x^2+4)}=\frac{2}{2x-3}-\frac{x}{x^2+4}=-\frac{2}{3(1-\frac{2x}{3})}-\frac{x}{4(1+\frac{x^2}{4})}=-\frac{2}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{2x}{3})^n-\frac{x}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x^2}{4})^n=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{3})^{n+1}x^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{4^{n+1}}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{3})^{2n+1}x^{2n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}[\frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+1}}-(\frac{2}{3})^{2n+2}]x^{2n+1}$, $|x|<\frac{3}{2}$.(3分+3分+1分)

4. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n)'=x(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n)'=x(\frac{x}{1-x})'=\frac{x}{(1-x)^2}$, $|x|<1$, 将 $x=\frac{1}{3}$ 代入上式, 得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}=\frac{3}{4}$. 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{3}}\cdot4^{\frac{1}{9}}\cdot8^{\frac{1}{27}}\cdot\cdots\cdot(2^n)^{\frac{1}{3^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots+\frac{n}{3^n}}=2^{\frac{3}{4}}$.(4分+1分+2分)

5. $P(x,y)=\frac{-y}{4x^2+y^2}$, $Q(x,y)=\frac{x}{4x^2+y^2}$, 除原点 $(0,0)$ 外, P,Q 都存在连续偏导数, 且 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}$.

(1) 若 $R<1$, 则 $(0,0)$ 不在 C 曲线围成的区域内, 由格林公式知, $I=\oint_C\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=0$;

(2) 若 $R>1$, $(0,0)$ 在 C 内, 记椭圆曲线 L: $4x^2+y^2=\varepsilon^2$ (其中 ε 充分小), 且取逆时针. 则 $I=\oint_C\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\oint_C\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{\varepsilon^2}=\frac{2}{\varepsilon^2}\iint\limits_D\mathrm{d}\sigma=\pi$, 其中 D 为椭圆域 $4x^2+y^2\le\varepsilon^2$.(1分+2分+4分)

三、 $I=\iiint\limits_\Omega e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 e^r r^2\sin\theta\mathrm{d}r=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\mathrm{d}e^r=(2-\sqrt{2})(e-2)\pi$.(3分+4分+1分)

四、 补充曲面 $\Sigma_1:\begin{cases}y=0,\\x^2+z^2\le4.\end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$, 取左侧. 则有 $\iint\limits_\Sigma yz\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(x^2+z^2)y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma\cup\Sigma_1}yz\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(x^2+z^2)y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_1}yz\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(x^2+z^2)y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=$

$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+z^2)\mathrm{d}V-0=\int_0^4\mathrm{d}y\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{4-y}}\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{32}{3}\pi$.(1分+1分+4分+2分)

五、 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}2az\mathrm{d}S=2a\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S=2a\iint\limits_{\Sigma}(z-a)\mathrm{d}S+2a\iint\limits_{\Sigma}a\mathrm{d}S=0+2a^2\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=2a^2\cdot 4\pi a^2=8\pi a^4$.(2分+4分+1分)

六、 记 $u_n=\sqrt{n}\ln\frac{2\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1}-1$. 由泰勒公式得, $u_n=\sqrt{n}\Big(\frac{2}{2\sqrt{n}-1}-\frac{2}{(2\sqrt{n}-1)^2}+\frac{8}{(3\sqrt{n}-1)^3}+o(\frac{1}{n})\Big)-1=\frac{1}{3(2\sqrt{n}-1)^2}+o(\frac{1}{n})$, 即 $u_n\sim\frac{1}{12n}$, $n\to\infty$. 故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big|(-1)^{n-1}\Big(\sqrt{n}\ln\frac{2\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1}-1\Big)\Big|$ 发散. 另一方面, 令 $f(t)=\frac{\ln\frac{2+t}{2-t}}{t}$, 其中 $0<t<1$. 则 $f'(t)=\frac{\frac{4t}{4-t^2}-\ln\frac{2+t}{2-t}}{t^2}$. 记 $g(t)=\frac{4t}{4-t^2}-\ln\frac{2+t}{2-t}$, 有 $g'(t)=\frac{8t^2}{(4-t^2)^2}>0$, 从而当 $0<t<1$ 时, $g(t)>g(0)=0$, 所以 $f(t)$ 关于 t 单调增加, 亦即 $u_n=\sqrt{n}\ln\frac{2\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1}-1$ 关于 n 单调减少, 而 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, 由Leibniz判别法知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\Big(\sqrt{n}\ln\frac{2\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1}-1\Big)$收敛. 综上, 原级数条件收敛.(3分+3分)