东 南 大 学 考 试 卷

课程名称 高等数学A期末 考试学期 12-13-3 得分

适用专业 选修高数A的各专业 考试形式 闭卷 考试时间长度 150分钟

题号	一	二	三	四	五	六
得分						

一、 填空题（本题共9小题，每小题4分，共36分）

1. 曲面 $x^2y+\ln(1+z)-\cos z=1$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程为__________；

2. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=2$ 处条件收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}(x-1)^{2n}$ 的收敛半径 $R=$___；

3. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$______收敛；

4. 设 L 为由原点 $O(0,0,0)$ 到点 $A(-2,-3,6)$ 的直线段，则曲线积分 $\int_L(x+y+z)^3\mathrm{d}s$ 之值为______；

5. 设圆周 $C:x^2+y^2=1$，取逆时针方向，则曲线积分 $\oint_C -y\mathrm{d}x+\dfrac{1}{3}x^3\mathrm{d}y=$____；

6. 已知 $(axe^{x^2}\cos y+y^3)\mathrm{d}x+(bxy^2-e^{x^2}\sin y)\mathrm{d}y$ 为某函数 $u(x,y)$ 的全微分，则 $a=$____，$b=$____；

7. 向量场 $\mathbf{A}=xy\mathbf{i}+\cos(xy)\mathbf{j}+\cos(xz)\mathbf{k}$ 在点 $M(\frac{\pi}{2},1,1)$ 处的散度 $\mathrm{div}\mathbf{A}|_M=$_____；

8. 将 $f(x)=1+\sin x(0\le x\le\pi)$ 展开为以 2π 为周期的正弦级数，$S(x)$ 为该正弦级数的和函数，则 $S(-\frac{\pi}{2})=$_____，$S(3\pi)=$_____.

9. 留数 $\mathrm{Res}\left[\dfrac{e^{z^2}-1}{z(1-\cos z)},0\right]=$______.

二、 计算下列各题（本题共5小题，每小题7分，满分35分）

1. 设方程 $z=\int_{\cos x^2}^{yz}f(t)\mathrm{d}t$ 确定了隐函数 $z=z(x,y)$，其中 f 为连续函数，求 $z=z(x,y)$ 的全微分.

2. 计算积分 $\int_0^3\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{9-y^2}}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}z$.

3. 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)(z-2)}$ 在圆环域 $1<|z|<2$ 内展开为Laurent级数.

4. 判别级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}n+2}{2n+1}\right)^n$ 的敛散性，并说明理由.

5. 判别级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{1+x}\mathrm{d}x$ 的敛散性，并说明理由.

三、（本题满分8分） 计算第二型曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+2xz^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+3y^2(z-1)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

其中 $\Sigma: z=4-x^2-y^2(0\le z\le 4)$，取下侧.

四、（本题满分7分） 计算第二型曲线积分

$$I=\oint_L(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z,$$

其中 L 是柱面 $x^2+y^2=a^2$ 与平面 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{b}=1(a>0,b>0)$ 的交线，若从 z 轴的正向看去，L 取逆时针方向.

五、(本题满分8分) 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ 的和函数，并求数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ 的和.

六、(本题满分6分) 设 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=1$，如果级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，问级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 是否一定收敛？若判断 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 一定收敛，请证明. 若判断 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 不一定收敛，请举例说明.

12-13-3 高等数学 A（下）期末考卷参考答案

（本试卷答案由学生自己整理，仅供参考）

一、填空题（本题共 9 小题，每小题 4 份，共 36 份）

1、$4x+y+z-6=0$；　2、$\sqrt{2}$；　3、条件；

4、$\frac{7}{4}$；　5、$-\frac{3}{4}a$；　6、$a=2,b=3$；

7、$1-p$；　8、略；　9、∞；

二、计算下列各题（本题共 5 小题，每小题 7 分，满分 35 分）

1.解：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f(yz)\cdot\frac{\partial(yz)}{\partial x}-f(\cos x^2)\cdot\frac{\partial(\cos x^2)}{\partial x}=f(yz)\cdot y\frac{\partial z}{\partial x}+2x\sin x^2\cdot f(\cos x^2)$$

$$\therefore\ \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x\sin^2 xf(\cos x^2)}{1-y\cdot f(yz)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f(yz)\cdot\frac{\partial(yz)}{\partial y}=f(yz)\cdot\left(z+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$\therefore\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{zf(yz)}{1-yf(yz)}$$

2．解：

设 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,

$$\because\ \begin{cases}0\le x\le 3\\ 0<y<\sqrt{y-y^2}\end{cases}$$

$$\therefore\ \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\rho\in[0,3]$$

$$\therefore\ 原积分=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^3\rho\,d\rho\int_\rho^{\sqrt{18-\rho^2}}\left(\rho^2+z^2\right)dz$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^3\rho\left(\frac{2}{3}\rho^2\sqrt{18-\rho^2}-\frac{4}{3}\rho^3+6\sqrt{18-\rho^2}\right)d\rho$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\int_0^3\rho^3\sqrt{18-\rho^2}\,d\rho-\int_0^3\frac{4}{3}\rho^4d\rho+\int_0^3 6\rho\sqrt{18-\rho^2}\,d\rho\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[108\left(2\sqrt{2}-1\right)-\frac{162}{5}-\frac{324}{5}+108\sqrt{2}-54\right]=\pi\left(162\sqrt{2}-\frac{648}{5}\right)$$

3.略

4.解：

设 $a_n=\dfrac{\sqrt{3}n+2}{2n+1}$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{\sqrt{3}(n+1)+2}{2(n+1)+1}-\frac{\sqrt{3}n+2}{2n+1}=\frac{\sqrt{3}-4}{(2n+1)(2n+3)}<0$$

即 $a_n>a_{n+1}$，a_n为递减序列

设 $N_1\in N^{+}$满足 $\arcsin a_N<1$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}(\arcsin a_n)^n\le\sum_{n=1}^{N-1}(\arcsin a_n)^n+\sum_{n=N}^{\infty}(\arcsin a_n)^n$$

$$=\mathrm{M}+\frac{(\arcsin a_n)^n}{1-\arcsin a_n}<0$$

其中 $\mathrm{M}<\sum_{n=1}^{N-1}(\arcsin a_n)^n$

即 $\sum_{n=1}^{\infty}(\arcsin a_n)^n$收敛

5.解：

$$a_n=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\frac{e^{x^2}-1}{1+x}\overset{积分中值定理}{=}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{e^{\frac{\theta_n^2}{n}}-1}{1+\frac{\theta_n}{\sqrt{n}}}=\frac{e^{\frac{\theta_n^2}{n}}-1}{\sqrt{n}+\theta_n}$$

设 $a_n\le\dfrac{e^{\frac{\theta_n^2}{n}-1}}{\sqrt{n}}=b_n$， $c_n=\dfrac{\theta_n^2}{n^{\frac{3}{2}}}$

$$则\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{c_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{e^{\frac{\theta_n^2}{n}}-1}{\sqrt{n}}}{\frac{\theta_n^2}{n^{\frac{3}{2}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{\theta_n^2}{n}}-1}{n\theta_n^2}=1$$

$c_n=\dfrac{\theta_n^2}{n^{\frac{3}{2}}}$级数收敛显然

则 b_n级数收敛，进而 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\dfrac{e^{x^2}-1}{1+x}dx$收敛

三、解:

补$\sum$ $z=0$取上侧

$$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}$$

$$=-\iiint\limits_{\Omega}\left(3x^2+3y^2\right)^{d_x d_y d_z}-\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}3y^2 d_x d_y$$

$$=-\int_0^{2\pi}d_\theta\int_0^2+d\rho\int_0^{4-\rho^2}3\rho^2 d-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 3\rho^3\cos\theta d\rho$$

$$=2\pi\cdot\int_0^2 d\theta+\left(4-\rho^2\right)\cdot 3\rho^2 d\rho-\pi\cdot\frac{3}{4}2^4$$

$$=-32\pi-12\pi=-44\pi$$

四、略

五、解:

设 $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$

$$\therefore\frac{1}{p}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+1)}=1\therefore p=1$$

$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$在$(-1,1)$内绝对收敛

设$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n(n+1)}f(0)=0$

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n+1},\ f'(0)=\frac{1}{2}$$

$$\left[x^{2}f'(x)\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n}=\frac{x}{1-x}$$

$$\therefore\ x^{2}f'(x)=\int_{0}^{x}\frac{x}{1-x}dx=-x-\ln(1-x)$$

$$\therefore\ f'(x)=-\frac{x+\ln(1-x)}{x^{2}}$$

$$\therefore\ f(x)-\int_{0}^{x}f'(x)dt=\int_{0}^{x}-\frac{t+\ln(1-t)}{t^{2}}dt=\int_{0}^{x}\left[t+\ln(1-t)\right]d\frac{1}{t}$$

$$=\frac{x+\ln(1-x)}{x}-\int_{0}^{x}\frac{1}{t-1}dt=\frac{x+\ln(1-x)}{x}-\ln(1-x)$$

即$f(x)=1-\ln(1-x)+\frac{\ln(1-x)}{x}$

当$x=-1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n(n+1)}$绝对收敛

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n(n+1)}=f(-1)=1-\ln^{2}+\frac{\ln^{2}}{-1}=1-2\ln^{2}$$

六、解：

不一定收敛

设$u_{n}=\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$

$$v_{n}=\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_{n}}{u_{n}}=\frac{\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}}{\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}}=1\text{或}\ \varepsilon$$

$\sum_{n=1}^{\infty}v_{n}$为交错级数收敛

u_{n}由一个交错级数和发散敛数组成，即v_{n}发散。