

东南大学考试卷(A卷)

课程名称 高等数学B期末 考试学期 09-10-3 得分 _____

适用专业 选修高数B的各专业 考试形式 闭卷 考试时间长度 150分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

一. 填空题(本题共9小题, 每小题4分, 满分36分)

1. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域为 _____;

2. 球面 $x^2 + y^2 + z^2 - 3x = 0$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切平面方程为 _____;

3. 已知两条直线 $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{m}$ 与 $x = y = 3z$ 相交, $m =$ _____;

4. 交换积分次序 $\int_0^1 dx \int_{x-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy =$ _____;

5. 将 $\int_{-2}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x^2 + y^2 + z^2) dz$ (其中 $f(t)$ 为连续函数) 写成球面坐标系下的三次积分 _____;

6. 设 L 为由点 $A(2, 1, 2)$ 到原点 $O(0, 0, 0)$ 的直线段, 则曲线积分 $\int_L (x + y + z)^2 ds$ 为 _____。

7. 已知 $(axy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 + by \sin x + 3x^2 y^2)dy$ 为某个二元函数 $f(x, y)$ 的全微分, 则 $a =$ _____, $b =$ _____;

8. 设 $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$, $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则散度 $\text{div}(\mathbf{e}^r \mathbf{r}) =$ _____;

9. 设 Σ 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq 1$) 下侧, 则

$$\iint_{\Sigma} 3x dy \wedge dz + 2y dz \wedge dx + (z-1) dx \wedge dy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

二. 计算下列各题(本题共4小题, 每小题7分, 满分28分)

10. 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $ze^z = xe^y + ye^x$ 所确定的隐函数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

11. 计算二重积分 $\iint_D y dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \geq 2, x^2 + y^2 \leq 2y\}$.

12. 计算 $\int_0^{\sqrt{2}} e^{-y^2} dy \int_0^y e^{-x^2} dx + \int_{\sqrt{2}}^2 e^{-y^2} dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} e^{-x^2} dx$.

13. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} e^y dx dy dz$, 其中 Ω 由曲面 $x^2 - y^2 + z^2 = 1, y = 0, y = 2$ 所围成.

三 (14). (本题满分 7 分) 求由抛物面 $x^2 + y^2 = 2z$ 与平面 $z = 1, z = 2$ 所围成的密度均匀 (密度 $\mu = 1$) 的立体对 z 轴的转动惯量

四 (15). (本题满分 7 分) 计算第二型曲面积分 $\iint_S x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$, 其中 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 在第二卦限部分的外侧.

五 (16) (本题满分 7 分) 计算 $\oint_C \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2}$, 其中 C 为 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$, 方向为逆时针.

六 (17) (本题满分 7 分) 将函数 $f(x) = \frac{3x}{x^2 + x - 2}$ 展开为 $x - 2$ 的幂级数, 并指明收敛域.

七 (18) (本题满分 8 分) 计算由柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 、锥面 $2z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及 xOy 平面所围立体的表面积.

09-10-3 高数 B 期末试卷 (A) 参考答案

一. 填空题(本题共 9 小题, 每小题 4 分, 满分 36 分)

1、 $[-1, 3)$ 2、 $x - 2y - 2z + 3 = 0$ 3、 $m = \frac{1}{9}$

4、 $\int_0^1 dx \int_{x-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy = \int_{-1}^0 dy \int_0^{y+1} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$

5、 $\int_0^\pi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^2 f(r^2) r^2 dr$ 6、 25 7、 $a = \underline{2}, b = \underline{-2}$

8、 $\operatorname{div}(\mathbf{e}^T \mathbf{r}) = \mathbf{e}^T (3 + \mathbf{r})$ 9、 $\iint_{\Sigma} 3x dy \wedge dz + 2y dz \wedge dx + (z-1) dx \wedge dy = 2\pi$

二. 计算下列各题(本题共 4 小题, 每小题 7 分, 满分 28 分)

10、 解: $\frac{\partial z}{\partial x}(1+z)e^z = e^y + ye^x$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^{y-z} + ye^{x-z}}{1+z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^{x-z} + xe^{y-z}}{1+z}$

11、 解: $\iint_D y dx dy = 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_{\sqrt{2}}^{2\sin \theta} \rho^2 d\rho = \frac{2}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (8 \sin^3 \theta - 2\sqrt{2}) \sin \theta d\theta = \frac{\pi}{2}$

12、 解: $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq x \leq y\}$,

原式 = $\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 e^{-\rho^2} \rho d\rho = \frac{\pi}{8} (1 - e^{-4})$

13、 解: $\Sigma_y: x^2 + z^2 \leq 1 + y^2, 0 \leq y \leq 2$,

$\iiint_{\Omega} e^y dx dy dz = \int_0^2 e^y dy \iint_{\Sigma_y} dx dz = \pi \int_0^2 (1 + y^2) e^y dy = 3\pi(e^2 - 1)$

三 (14). (本题满分 7 分)

解: 题中的立体记为 Ω , 则

$I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv = \int_1^2 dz \iint_{x^2+y^2 \leq 2z} (x^2 + y^2) d\sigma = 2\pi \int_1^2 dz \int_0^{\sqrt{2z}} \rho^3 d\rho = \frac{14}{3}\pi$

四 (15). (本题满分 7 分)

解: $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = (x, y, z)$,

$\iint_S x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy = \iint_S (x^3 + y^3 + z^3) dS$

$= \iint_{D_{xy}} \left(\frac{x^3 + y^3}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + 1 - x^2 - y^2 \right) d\sigma = \frac{\pi}{8}$

五 (16) (本题满分 7 分)

解: $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2}$, 取正数 ε 很小, 使 $C_\varepsilon: x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ 含于

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \text{ 内, } \oint_C \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2} = 2\varepsilon^{-2} \iint_{D_\varepsilon} dx dy = 2\pi$$

六 (17) (本题满分 7 分)

解: $f(x) = \frac{3x}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2} = \frac{1}{1+x-2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x-2}{4}}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{2^{2n+1}}\right) (x-2)^n, \quad x \in (1, 3)$$

七 (18) (本题满分 8 分)

解: 记 S_1 为锥面 $2z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 所截部分, 其面积记为 A_1 , 记 S_2 为柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 被锥面 $2z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和 xOy 平面所截部分, 其面积记为 A_2 , 记 S_3 为底面, 其面积记为 A_3 , 表面积 $A = A_1 + A_2 + A_3$

$$A = \iint_{x^2+y^2 \leq 2x} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} d\sigma + \frac{1}{2} \int_{x^2+y^2=2x} \sqrt{x^2 + y^2} ds + \pi = \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + 1\right)\pi + 2 \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$= \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + 1\right)\pi + 4$$