东 南 大 学 考 试 试 卷(A)

姓名 ____________ 学号 ____________ 得分 ____________

课程名称： 数学物理方法　　适用专业： 面上工科　　考试形式： 闭卷

考试学期： 09–10–3　　考试时间长度： 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九
得分									

一 (5 分) 指出定解问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & (x,y)\in\Omega, \\ u(x,y)=\varphi(x,y), & (x,y)\in\partial\Omega \end{cases}$$

所描述的物理现象，其中 Ω 是平面区域， $\partial\Omega$ 是它的边界， $\varphi(x,y)$ 是已知函数.

解：I. 设有一个张紧的均匀薄膜，位于 xoy 平面上的区域 Ω. 该定解问题描述的是此薄膜不受外力作用时做自由横振动，当薄膜振动达到平衡并且边界的位移是 $\varphi(x,y)$ 时，薄膜内任意一点的位移所满足的规律.

II. 设有一个各相同性的薄板，位于 xoy 平面上的区域 Ω. 该定解问题描述的是此薄板内部无热源，当薄板内热量传导达到平衡并且边界的温度是 $\varphi(x,y)$ 时，薄板内任意一点的温度所满足的规律.

III. 设有一个导电面，位于 xoy 平面上的区域 Ω. 该定解问题描述的是此导电面区域内部无电荷，当边界的电位是 $\varphi(x,y)$ 时，区域内任意一点的电位所满足的规律.

二 (10 分) 求解特征值问题

$$\begin{cases} u''+2u'+\lambda u=0, & 0<x<l, \\ u(0)=u(l)=0. \end{cases}$$

解：I. 令 $v(x)=u(x)\mathrm{e}^x$, 则 $v(x)$ 满足特征问题

$$\begin{cases} v''(x)+(\lambda-1)v=0, & 0<x<l, \\ v(0)=v(l)=0. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4 \text{ 分} \end{cases}$$

对此特征问题，求得特征值和对应的特征函数为

$$\lambda_n=1+\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\quad v_n=\sin\frac{n\pi x}{l},\quad n=1,2,\cdots. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots 4 \text{ 分}$$

所以，原特征问题的特征值和对应的特征函数为

$$\lambda_n=1+\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\quad u_n=\mathrm{e}^{-x}\sin\frac{n\pi x}{l},\quad n=1,2,\cdots. \quad \cdots\cdots\cdots 2 \text{ 分}$$

II. 由 $r^2+2r+\lambda=0$ 得， $r_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-\lambda}$.

1° ，当 $\lambda<1$ 时，记 $\beta=\sqrt{1-\lambda}>0$ ，方程的通解为 $u(x)=A\mathrm{e}^{(\beta-1)x}+B\mathrm{e}^{-(1+\beta)x}$ ，由边界条件 $u(0)=u(l)=0$ 得 $A=B=0$ ，所以 $\lambda<1$ 不是特征值. $\cdots\cdots\cdots 3$ 分

2° ，当 $\lambda=1$ 时，方程的通解为 $u(x)=(A+Bx)\mathrm{e}^{-x}$ ，由边界条件 $u(0)=u(l)=0$ 得 $A=B=0$ ，所以 $\lambda=1$ 不是特征值. $\cdots\cdots\cdots 3$ 分

3° ，当 $\lambda>1$ 时，记 $\beta=\sqrt{\lambda-1}>0$ ，方程的通解为 $u(x)=\mathrm{e}^{-x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$ ，由边界条件 $u(0)=u(l)=0$ 得 $A=0,\ B\sin\beta l=0$ ，因为 $B\neq 0$ ，所以 $\beta_n=n\pi/l$. 所求特征值和对应的特征函数为

$$\lambda_n=1+\beta_n^2=1+\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\quad u_n=\mathrm{e}^{-x}\sin\frac{n\pi x}{l},\quad n=1,2,\cdots. \quad \cdots\cdots\cdots 4\text{ 分}$$

三 (15 分) 用分离变量法求解 Laplace 方程的边值问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<\pi,\ 0<y<\pi, \\ u_y(x,0)=0,\ u(x,\pi)=x, & 0\le x\le\pi, \\ u_x(0,y)=0,\quad u_x(\pi,y)=0, & 0\le y\le\pi. \end{cases}$$

解: 设 $U(x,y)=X(x)Y(y)$ 是非零特解, 将其代入 Laplace 方程和变量 x 对应的边值条件, 并分离变量，得

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, & 0<x<\pi, \\ X'(0)=0,\ X'(\pi)=0, \end{cases} \qquad Y''(y)-\lambda Y(y)=0,\ 0<y<\pi. \quad \cdots\cdots\cdots 3\text{ 分}$$

解上述的特征问题，得

$$\lambda_n=n^2,\quad X_n(x)=\cos nx,\quad n=0,1,2,\cdots. \quad \cdots\cdots\cdots 2\text{ 分}$$

当 $n=0$ 时, 由 $Y_0''(y)=0$ 得 $Y_0(y)=C_0+D_0y$. 当 $n=1,2,\cdots$ 时, 由 $Y_n''(y)-n^2Y(y)=0$ 得 $Y_n(y)=C_n\cosh(ny)+D_n\sinh(ny)$. $\cdots\cdots\cdots 3$ 分

叠加得一般解

$$u(x,y)=C_0+D_0y+\sum_{n=1}^{\infty}[C_n\cosh(ny)+D_n\sinh(ny)]\cos nx. \quad \cdots\cdots\cdots 1\text{ 分}$$

由边界条件 $u_y(x,0)=0$ 得,

$$D_0+\sum_{n=1}^{\infty}nD_n\cos nx=0,$$

所以 $D_n=0,\ n=0,1,2,\cdots.$ $\cdots\cdots\cdots 2$ 分

再由边界条件 $u(x,\pi)=x$ 得,

$$C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cosh(n\pi)\cos nx=x,$$

所以

$$\begin{aligned}C_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 1\text{ 分}\\ C_n &= \frac{2}{\pi\cosh(n\pi)}\int_0^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2[(-1)^n-1]}{\pi n^2\cosh(n\pi)}. \quad \cdots\cdots\cdots 2\text{ 分}\end{aligned}$$

最后，求得解

$$u(x,y)=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2\cosh(n\pi)}\cosh(ny)\cos nx. \quad \cdots\cdots\cdots 1\text{ 分}$$

四 (8 分) 求函数 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ -1, & -1\le x<0,\\ 0, & |x|>1\end{cases}$ 的 Fourier 变换.

解：由定义，得

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f(x)] &= \int_{\mathbb{R}}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x \quad \cdots\cdots\cdots 2\text{ 分}\\ &= \int_0^1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x-\int_{-1}^0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x \quad \cdots\cdots\cdots 2\text{ 分}\\ &= \frac{1}{\mathrm{i}\lambda}[1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda}]+\frac{1}{\mathrm{i}\lambda}[1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda}]\\ &= \frac{2\mathrm{i}}{\lambda}(\cos\lambda-1). \quad \cdots\cdots\cdots 4\text{ 分}\end{aligned}$$

五 (10 分) 已知 Fourier 变换公式 $\mathscr{F}[\mathrm{e}^{-Ax^2}]=\sqrt{\frac{\pi}{A}}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{4A}}$, $A>0$. 利用 Fourier 变换法求解初值问题

$$\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=0, & x\in\mathbb{R}^1,\ t>0,\\ u(x,0)=\delta(x), & x\in\mathbb{R}^1,\end{cases}$$

其中 $\delta(x)$ 是狄拉克函数.

解：对方程和初始条件关于 x 施行 Fourier 变换，得

$$\begin{cases}\widehat{u}_t+a^2\lambda^2\widehat{u}=0, & t>0,\\ \widehat{u}(\lambda,0)=1.\end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots 4\text{ 分}$$

求得 $\widehat{u}(\lambda,t)=\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2t}$. $\cdots\cdots\cdots$ 2 分.

因为

$$\mathscr{F}[\mathrm{e}^{-Ax^2}]=\sqrt{\frac{\pi}{A}}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{4A}},$$

所以

$$\mathscr{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{4A}}](x) = \sqrt{\frac{A}{\pi}}\mathrm{e}^{-Ax^2}.$$

因此，取 $A = \dfrac{1}{4a^2 t}$ ，作 Fourier 逆变换得

$$u(x,t) = \mathscr{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-a^2 t\lambda^2}] = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}. \quad \cdots\cdots\cdots 4\text{ 分}$$

六 (10 分) 已知下列 Laplace 变换公式 $\mathscr{L}[t^n \mathrm{e}^{at}] = \dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$. 利用 Laplace 变换法求解一阶偏微分积分方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t + xu_x = x\mathrm{e}^{-t}, & x>0,\quad t>0, \\ u(0,t)=0, & t>0, \\ u(x,0)=0, & x>0. \end{cases}$$

解：对方程和定解条件关于 t 施行 Laplace 变换，得

$$\begin{cases} p\widetilde{u}(x,p) - u(x,0) + x\widetilde{u}_x = x/(p+1), & x>0, \\ \widetilde{u}(0,p)=0. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \widetilde{u}_x + \dfrac{p}{x}\widetilde{u}(x,p) = \dfrac{1}{p+1}, & x>0, \\ \widetilde{u}(0,p)=0. \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots 5\text{ 分}$$

求解上述关于 $\widetilde{u}$ 的常微分方程初值问题，得

$$\widetilde{u}(x,p) = x^{-p}\int_0^x \frac{s^p}{p+1}\mathrm{d}s = \frac{x}{(p+1)^2}. \quad \cdots\cdots\cdots 3\text{ 分}$$

作 Laplace 逆变换，得原定解问题的解

$$u(x,t) = \mathscr{L}^{-1}[\widetilde{u}] = xt\mathrm{e}^{-t}. \quad \cdots\cdots\cdots 2\text{ 分}$$

七 (12 分) 用特征线法求解定解问题

$$\begin{cases} u_{xx} - 3u_{xt} + 2u_{tt} = 0, & x \in \mathbb{R}^1,\ t > 0, \\ u(x,0) = x^2,\ u_t(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}^1. \end{cases}$$

解：特征方程为

$$(\mathrm{d}t)^2 + 3\mathrm{d}t\mathrm{d}x + 2(\mathrm{d}x)^2 = 0. \quad \cdots\cdots\cdots 2 \text{ 分}$$

求得特征线 $t + 2x = c_1$, $t + x = c_2$，作特征变换 $\xi = t + 2x$, $\eta = t + x$. ·········2 分

由链式法则，得

$$\begin{aligned} u_t &= 2u_\xi + u_\eta, \quad u_t = u_\xi + u_\eta, \\ u_{xx} &= 4u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \quad u_{xt} = 2u_{\xi\xi} + 3u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \\ u_{tt} &= u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \end{aligned}$$

方程化为 $u_{\xi\eta} = 0$. ·········4 分

故方程的通解为

$$u(x,t) = F(\xi) + G(\eta) = F(t+2x) + G(t+x). \quad \cdots\cdots\cdots 1 \text{ 分}$$

利用初始条件得

$$F(2x) + G(x) = x^2, \quad F'(2x) + G'(x) = 0,$$

对上述第二式积分，得

$$\frac{1}{2}F(2x) + G(x) = C.$$

联立上述方程，求得

$$F(2x) = 2x^2 - 2C,\ G(x) = -x^2 + 2C,$$

所以

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - 2C.$$

最后得到原定解问题的解

$$\begin{aligned} u(x,t) &= F(t+2x) + G(t+x) \\ &= \frac{1}{2}(2x+t)^2 - (x+t)^2 = x^2 - t^2/2. \quad \cdots\cdots\cdots 3 \text{ 分} \end{aligned}$$

八 (18 分) (1) 用镜像法求在上半平面上， Laplace 方程第一边值问题的 Green 函数;

(2) 求一个保角变换，把区域 $D=\{z \mid |z|>1,\ \mathrm{Im}\, z>0\}$ 变为上半平面.

解: (1) 在 $\xi\eta$ 平面的上半平面 $\eta>0$ 上，任取一点 (x,y) ，并在此点放置一单位正电荷，它在上半平面任意一点 (ξ,η) 的电位是

$$\frac{1}{4\pi}\ln\frac{1}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}. \quad \cdots\cdots\cdots 3 \text{ 分}$$

在点 (x,y) 关于 ξ 轴对称的对称点 $(x,-y)$ 放置一单位负电荷，它在点 (ξ,η) 的电位是

$$v(x,y,\xi,\eta)=-\frac{1}{4\pi}\ln\frac{1}{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}. \quad \cdots\cdots\cdots 3 \text{ 分}$$

因为 $v(x,y,\xi,\eta)$ 在上半平面 $\eta>0$ 上调和, 在 ξ 轴 $(\eta=0)$ 上一接连续偏导数. 所以 Green 函数是这两个点电荷的电位和，即

$$\begin{aligned} G(\xi,\eta;x,y) &= \frac{1}{4\pi}\ln\frac{1}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}-\frac{1}{4\pi}\ln\frac{1}{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2} \\ &= \frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}. \quad \cdots\cdots\cdots 2 \text{ 分} \end{aligned}$$

(2) (I) 作变换 $w_1=k\dfrac{z-1}{z+1}$ ，它把点 $z=1$ 变为原点，把点 $z=-1$ 变为 ∞. 因此，变换把上半圆和实轴变为过原点且交角是 $\pi/2$ 的直线. 下面确定 k 使得此变换把实轴去掉 $[-1,1]$ 后的部分变为正实轴，于是 旋转角 $=0$. 另一方面，

$$w_1'(1)=\frac{k}{2},\quad \arg w_1'(1)=\arg k \Longrightarrow \arg k=0.$$

所以取 $k=1$ ，于是变换 $w_1=\dfrac{z-1}{z+1}$ 把区域 D 变为 w_1 平面的第一象限. ·········6 分

再作变换 $w=w_1^2$ ，它把 w_1 平面的第一象限变为 w 平面的上半平面. 最后，所求的变换是

$$w=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2. \quad \cdots\cdots\cdots 4 \text{ 分}$$

(II) 作变换 $w_1=k\dfrac{z+1}{z-1}$ ，它把点 $z=-1$ 变为原点，把点 $z=1$ 变为 ∞. 因此，变换把上半圆和实轴变为过原点且交角是 $\pi/2$ 的直线. 下面确定 k 使得此变换把上半单位圆变为正实轴，于是 旋转角 $=-\pi/2$. 另一方面，

$$w_1'(-1)=-\frac{k}{2},\quad \arg w_1'(-1)=\arg k-\pi \Longrightarrow \arg k=\pi/2.$$

所以取 $k=\mathrm{i}$, 于是变换 $w_1=\mathrm{i}\dfrac{z-1}{z+1}$ 把区域 D 变为 w_1 平面的第一象限. ·········6 分

再作变换 $w=w_1^2$ ，它把 w_1 平面的第一象限变为 w 平面的上半平面. 最后，所求的变换是

$$w=-\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2. \quad \cdots\cdots\cdots 4 \text{ 分}$$

九 (12 分) 设 $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 0 阶 Bessel 函数 $J_0(x)$ 的正零点，请将函数 $f(x)=x^2$, $x\in[0,1]$ 展开成函数系 $\{J_0(\mu_n x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的 Fourier-Bessel 级数，其中 0 阶 Bessel 函数的模值为

$$N_n^2=\int_0^1 xJ_0^2(\mu_n x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Big(\big[J_0'(\mu_n)\big]^2+\big[J_0(\mu_n)\big]^2\Big).$$

解：$f(x)=x^2$ 在 $[0,1]$ 上的 F-B 级数具有形式

$$x^2=\sum_{n=1}^{\infty}A_nJ_0(\mu_n x),\ 0<x<1,$$

其中 $A_n=\dfrac{\int_0^1 x^3J_0(\mu_n x)\mathrm{d}x}{N_n^2}$, $N_n^2=\dfrac{1}{2}[J_0'(\mu_n)]^2=\dfrac{1}{2}J_1^2(\mu_n)$. 因为

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^3J_0(\mu_n x)\mathrm{d}x &= \left(\frac{1}{\mu_n}\right)^4\int_0^{\mu_n}s^3J_0(s)\mathrm{d}s\\ &= \left(\frac{1}{\mu_n}\right)^4\left[s^3J_1(s)\Big|_0^{\mu_n}-2\int_0^{\mu_n}s^2J_1(s)\mathrm{d}s\right]\\ &= \left(\frac{1}{\mu_n}\right)^4\left[\mu_n^3J_1(\mu_n)-2\mu_n^2J_2(\mu_n)\right]\\ &= \frac{1}{\mu_n^2}\left[\mu_nJ_1(\mu_n)-2J_2(\mu_n)\right],\quad \cdots\cdots\cdots 6\text{ 分}\end{aligned}$$

所以系数

$$A_n=\frac{\int_0^1 x^3J_0(\mu_n x)\mathrm{d}x}{N_n^2}=\frac{1}{\mu_n^2J_1^2(\mu_n)}\left[\mu_nJ_1(\mu_n)-2J_2(\mu_n)\right].\quad \cdots\cdots\cdots 4\text{ 分}$$

故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的 F-B 级数为

$$x^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^2J_1^2(\mu_n)}\left[\mu_nJ_1(\mu_n)-2J_2(\mu_n)\right]J_0(\mu_n x),\ 0<x<1.\quad \cdots\cdots\cdots 2\text{ 分}$$