东 南 大 学 考 试 试 卷 (A 卷)

课程名称 数学物理方法 考试学期 10-11-3 得分________

适用专业 面上 考试形式 闭卷 考试时间长度 120分钟

题目	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一 (15分) 求函数$f(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1\end{cases}$ 的Fourier变换，并证明恒等式

$$\int_0^{\infty}\frac{(1-\cos\omega)\cos\omega x}{\omega^2}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}(1-|x|), & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

解：利用定义直接计算，得

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f(x)](\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-i\omega x}\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1}(1-|x|)(\cos\omega x-i\sin\omega x)\mathrm{d}x\\ &= 2\int_0^1(1-x)\cos\omega x\mathrm{d}x\\ &= \frac{2}{\omega}\Big[(1-x)\sin\omega x\Big|_0^1+\int_0^1\sin\omega x\mathrm{d}x\Big]\\ &= \frac{2(1-\cos\omega)}{\omega^2}. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 8分\end{aligned}$$

因为$f(x)$在$(-\infty,\infty)$上连续、分段光滑且$f\in L^1(-\infty,\infty)$, 所以有Fourier积分

$$\begin{aligned}f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{i\omega x}\mathrm{d}\omega &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega^2}(\cos\omega x+i\sin\omega x)\mathrm{d}\omega\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega^2}\cos\omega x\mathrm{d}\omega\\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{(1-\cos\omega)\cos\omega x}{\omega^2}\mathrm{d}\omega.\end{aligned}$$

因此

$$\int_0^{\infty}\frac{(1-\cos\omega)\cos\omega x}{\omega^2}\mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{2}f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}(1-|x|), & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$7分

二 (15分) 用Fourier变换法推导出定解问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & -\infty<x<\infty,\ 0<y<\pi, \\ u(x,0)=0,\ u(x,\pi)=f(x), & -\infty<x<\infty \end{cases}$$

的求解公式，其中可能会用到下列Fourier变换公式：

$$(1)\quad \mathscr{F}\Big[\frac{\sin a}{2\pi(\cosh x+\cos a)}\Big](\omega)=\frac{\sinh a\omega}{\sinh \pi\omega},\quad a\in(-\pi,\pi),$$

$$(2)\quad \mathscr{F}\Big[\frac{\cos\frac{a}{2}\cosh\frac{x}{2}}{\pi(\cosh x-\cos a)}\Big](\omega)=\frac{\cosh a\omega}{\cosh \pi\omega},\quad a\in(-\pi,\pi).$$

解：对方程和定解条件关于x施行Fourier变换, 记$\hat{u}=\hat{u}(\omega,y)=\mathscr{F}[u(x,y)]$，得

$$\begin{cases} -\omega^2\hat{u}+\dfrac{\mathrm{d}^2\hat{u}}{\mathrm{d}y^2}=0, & 0<y<\pi, \\ \hat{u}(\omega,0)=0,\ \hat{u}(\omega,\pi)=\hat{f}(\omega). \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 5分$$

求得像函数

$$\hat{u}(\omega,y)=\hat{f}(\omega)\frac{\sinh y\omega}{\sinh \pi\omega}. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 5分$$

求Fourier逆变换，得解

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \mathscr{F}^{-1}[\hat{u}(\omega,y)]=f(x)*\mathscr{F}^{-1}\Big[\frac{\sinh y\omega}{\sinh \pi\omega}\Big] \\ &= f(x)*\Big(\frac{\sin y}{2\pi(\cosh x+\cos y)}\Big) \\ &= \frac{\sin y}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi)}{\cosh(x-\xi)+\cos y}\mathrm{d}\xi. \end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 5分$$

三 (10分) 求函数$f(t)=\mathrm{e}^{-at}\sin\omega t$ 的 Laplace 变换(常数$\omega\neq 0$).

解：利用定义直接计算，得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-at}\sin\omega t](p) &= \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(p+a)t}\sin\omega t\mathrm{d}t\\ &= \mathscr{L}[\sin\omega t](p+a)\\ &= \frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}.\end{aligned}$$

四 (15分) 已知下列 Laplace 变换公式: $\mathscr{L}[t^n\mathrm{e}^{at}]=\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$, $\mathscr{L}[\sin\alpha t]=\dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$, $\mathscr{L}[\cos\alpha t]=\dfrac{p}{p^2+\alpha^2}$, $\mathscr{L}[f(t-a)H(t-a)]=\tilde{f}(p)\mathrm{e}^{-pa},(a>0)$. 利用 Laplace 变换法求解微分积分方程的定解问题(其中$t_0>0$是常数)

$$\begin{cases} y'(t)+3\displaystyle\int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\mathrm{d}\tau=H(t-t_0), \quad t>0,\\ y(0)=0.\end{cases}$$

解：对方程关于t施行Laplace变换，得

$$p\tilde{y}(p)+3\Big(\tilde{y}(p)\frac{p}{p^2+1}\Big)=\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-pt_0}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 5分$$

求得像函数

$$\tilde{y}(p)=\frac{p^2+1}{p^2(p^2+4)}\mathrm{e}^{-pt_0}=\frac{1}{4}\Big(\frac{1}{p^2}+\frac{3}{p^2+4}\Big)\mathrm{e}^{-pt_0}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 5分$$

求Laplace逆变换，得解

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[\tilde{y}(p)](t)=\frac{1}{4}(t-t_0)H(t-t_0)+\frac{3}{8}\sin 2(t-t_0)H(t-t_0). \quad \cdots\cdots\cdots\cdots 5分$$

五 (15分) 用分离变量法求解初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0,\ u_x(\pi,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = x,\ u_t(x,0) = \cos x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

解：设$U(x,t) = X(x)T(t)$是一非零特解，把它代入方程，得

$$T''(t)X(x) = a^2 X''(x)T(t) \Longrightarrow \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

即$X''(x) + \lambda X(x) = 0, 0 < x < \pi$, $T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, t > 0$. 又由边界条件，得$X'(0) = 0,\ X'(\pi) = 0$. 于是得特征值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < \pi, \\ X'(0) = 0,\ X'(\pi) = 0. \end{cases}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$4分

求解此特征值问题，得特征值和对应的特征函数

$$\lambda_n = n^2, \quad X_n = \cos nx, \quad n = 0, 1, \cdots.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$2分

把$\lambda = \lambda_n$代入$T(t)$满足的方程，得$T_n''(t) + (an)^2 T_n(t) = 0, t > 0$，其解为

$$T_0 = C_0 + D_0 t,\ T_n(t) = C_n \cos nat + D_n \sin nat, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$2分

故求得方程的非零特解$U_n(x,t) = X_n(x)T_n(t), n = 0, 1, \cdots$, 这些特解叠加，得一般解

$$u(x,t) = C_0 + D_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos nat + D_n \sin nat) \cos nx.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$2分

利用初始条件，得

$$C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos nx = x, \quad D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} naD_n \cos nx = \cos x.$$

因此

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \quad C_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos nx \mathrm{d}x = \frac{2[(-1)^{n-1} - 1]}{\pi n^2}. \\ D_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x \mathrm{d}x = 0, \quad D_1 = \frac{2}{a\pi}\int_0^{\pi} \cos^2 x \mathrm{d}x = \frac{1}{a}, \\ D_n &= \frac{2}{an\pi}\int_0^{\pi} \cos x \cos nx \mathrm{d}x = 0,\ n = 2, 3, \cdots. \end{aligned}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$4分

最后，所求的解为

$$u(x,t) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{a}\sin at \cos x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2[(-1)^{n-1} - 1]}{\pi n^2} \cos nat \cos nx.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$1分

六 (15分) 用分离变量法求解Laplace方程边值问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<a,\ 0<y<b, \\ u(0,y)=0,\ u(a,y)=0, & 0<y<b, \\ u_y(x,0)=0,\ u(x,b)=x, & 0<x<a. \end{cases}$$

解：设$U(x,y)=X(x)Y(y)$是一非零特解，把它代入方程，得

$$X''(x)Y(y)=-Y''(y)X(x)\Longrightarrow\frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=-\lambda.$$

即$X''(x)+\lambda X(x)=0, 0<x<a,\quad Y''(y)-\lambda Y(y)=0, 0<y<b$. 又由边界条件$u(0,y)=0,\ u(a,y)=0,\ 0<y<b$，得$X(0)=0,\ X(a)=0$. 于是得特征值问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, & 0<x<a, \\ X(0)=0,\ X(a)=0. \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 4分$$

求解此特征值问题，得特征值和对应的特征函数

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2,\quad X_n=\sin\frac{n\pi x}{a},\quad n=1,2,\cdots. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 2分$$

对$\lambda=\lambda_n$，$Y(y)$的方程变为$Y_n''(y)+\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2Y_n(y)=0, 0<y<b$，其解为

$$Y_n(t)=C_n\cosh\frac{n\pi y}{a}+D_n\sinh\frac{n\pi y}{a},\quad n=1,2,\cdots. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 2分$$

故求得方程的非零特解$U_n(x,y)=X_n(x)Y_n(y), n=1,2,\cdots$, 这些特解叠加，得一般解

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cosh\frac{n\pi y}{a}+D_n\sinh\frac{n\pi y}{a}\right)\sin\frac{n\pi x}{a}. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 2分$$

利用边界条件$u_y(x,0)=0$，得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}D_n\frac{n\pi}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}=0$. 因此$D_n=0,\ n=1,2,\cdots$. ······2分

利用边界条件$u(x,b)=x$，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cosh\frac{nb\pi}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}=x.$$

因此

$$C_n=\frac{2}{a\cosh\frac{nb\pi}{a}}\int_0^a x\sin\frac{n\pi x}{a}\mathrm{d}x=\frac{2a(-1)^{n-1}}{n\pi\cosh\frac{nb\pi}{a}},\ n=1,2,\cdots. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2分$$

最后，所求的解为

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a(-1)^{n-1}}{n\pi}\frac{\cosh\frac{n\pi y}{a}}{\cosh\frac{nb\pi}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 1分$$

七 (15分) 设 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Bessel 函数$J_0(x)$的所有正零点，将函数 $f(x)=1-x^2$, $x\in[0,1]$ 展开成 Bessel 函数系 $\{J_0(\alpha_n x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的级数, 其中

$$[N_n^{(0)}]^2=\int_0^1 xJ_0^2(\alpha_n x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}J_1^2(\alpha_n),\ 1,2,\cdots.$$

解：函数 $f(x)=1-x^2$在区间$[0,1]$上 Bessel 函数系 $\{J_0(\alpha_n x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的级数形式是

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_nJ_0(\alpha_n x)=1-x^2,\quad 0<x<1, \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots 4分$$

其中

$$A_n=\frac{\displaystyle\int_0^1 x(1-x^2)J_0(\alpha_n x)\mathrm{d}x}{[N_n^{(0)}]^2}.$$

由梯推公式$(x^\nu J_\nu(x))'=x^\nu J_{\nu-1}$, $xJ_0(x)+xJ_2(x)=2J_1(x)$以及α_n是$J_0(x)$的零点，得

$$\begin{aligned}\int_0^1 x(1-x^2)J_0(\alpha_n x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{\alpha_n^2}\int_0^{\alpha_n}\left(1-\frac{s^2}{\alpha_n^2}\right)sJ_0(s)\mathrm{d}s\\ &= \frac{2}{\alpha_n^4}\int_0^{\alpha_n}s^2J_1(s)\mathrm{d}s\\ &= \frac{2}{\alpha_n^2}J_2(\alpha_n)\\ &= \frac{4}{\alpha_n^3}J_1(\alpha_n). \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots 8分\end{aligned}$$

所以

$$A_n=\frac{\displaystyle\int_0^1 x(1-x^2)J_0(\alpha_n x)\mathrm{d}x}{[N_n^{(0)}]^2}=\frac{8}{\alpha_n^3J_1(\alpha_n)}. \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots 2分$$

因此，所求的级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\alpha_n^3J_1(\alpha_n)}J_0(\alpha_n x)=1-x^2,\quad 0<x<1. \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots 1分$$