东 南 大 学 考 试 卷(A 卷)

课程名称: 数学物理方法　　考试学期: 08–09–3　　得分 ______

适用专业: 面上工科　　考试形式: 闭卷　　考试时间长度: 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
得分										

一 (7 分) 指出定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(0,t) = u_0,\ u_x(l,t) = A\sin\omega t, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

所描述的物理现象，以及定解条件的物理意义，其中 u_0, A 为常数.

答: 该定解问题描述的是长为 l 的细杆, 杆上无热源, 杆的侧面绝热, 杆上任意一点 $x\,(0 < x < l)$ 在任意时刻 t 的温度变化规律. 边界条件 $u(0,t) = u_0$ 说明端点 $x = 0$ 处的温度固定, 边界条件 $u_x(l,t) = A\sin\omega t$ 表示在端点 $x = l$ 处有一个热流 $A\sin\omega t$ 流入杆内, 初始条件 $u(x,0) = \varphi(x)$ 表示初始时刻杆上任意一点 x 的温度是 $\varphi(x)$(已知).

[**说明**:] 所叙述的物理现象基本正确，得 4 分；没有指出 “无热源”，给 3 分；没有指出 “温度的变化规律”，给 3 分；叙述不正确，不给分。初边值条件的物理现象及物理意义叙述基本正确，得 3 分；每对一个得 1 分。

二 (8 分) 求函数 $f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ 的 Fourier 变换.

解 由 Fourier 变换的定义，得

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(x)] &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x & \cdots\cdots\cdots 3\text{ 分} \\ &= -\mathrm{i}\int_{-1}^{1} x\sin\lambda x\mathrm{d}x \\ &= 2\Big(\frac{\cos\lambda}{\lambda} - \frac{\sin\lambda}{\lambda^2}\Big)\mathrm{i}. & \cdots\cdots\cdots 5\text{ 分} \end{aligned}$$

三 (10 分) 已知 Fourier 变换公式

$$\mathcal{F}\big[\mathrm{e}^{-Ax^2}\big] = \sqrt{\frac{\pi}{A}}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{4A}}.$$

利用 Fourier 变换法推导出下列初值问题的求解公式

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + 2tu = 0, & x \in \mathbb{R}^1,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^1. \end{cases}$$

解 对方程及其初始条件关于 x 施行 Fourier 变换，记 $\widehat{u}(\lambda,t)=\mathcal{F}[u(x,t)]$, 利用 Fourier 变换的微分性质，得

$$\begin{cases} \widehat{u}_t + a^2\lambda^2\widehat{u} + 2t\widehat{u} = 0, \quad t>0, \\ \widehat{u}(\lambda,0)=\widehat{\varphi}(\lambda). \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 3 \text{ 分}$$

把 λ 作为参数，上述初值问题的解为

$$\widehat{u}(\lambda,t)=\widehat{\varphi}(\lambda)\mathrm{e}^{-(a^2\lambda^2t+t^2)}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2 \text{ 分}$$

利用已知的 Fourier 变换公式可得下面的 Fourier 逆变换公式

$$\mathcal{F}^{-1}\big[\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2t}\big]=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2 \text{ 分}$$

作 Fourier 逆变换，得

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}\big[\widehat{u}(\lambda,t)\big] \\ &= \mathcal{F}^{-1}\big[\widehat{\varphi}(\lambda)\mathrm{e}^{-(a^2\lambda^2t+t^2)}\big] \\ &= \mathrm{e}^{-t^2}\mathcal{F}^{-1}\big[\widehat{\varphi}(\lambda)\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2t}\big] \\ &= \mathrm{e}^{-t^2}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbb{R}}\varphi(\xi)\exp\left\{\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right\}\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 3 \text{ 分}$$

四 (10 分) 已知下列 Laplace 变换公式

$$\mathscr{L}[\sin\omega x]=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}, \quad \mathscr{L}[\cos\omega x]=\frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

利用 Laplace 变换法求解微分积分方程的初值问题

$$y'(t)+3\int_0^t\cos(t-\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau=4\sin t, \quad y(0)=0.$$

解 对方程及其定解条件关于 t 施行 Laplace 变换，记 $\widetilde{u}(p)=\mathcal{L}[u(t)]$, 利用 Laplace 变换的微分性质和卷积性质，得

$$p\widetilde{u}+3\widetilde{u}\frac{p}{p^2+1}=\frac{4}{p^2+1}. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4 \text{ 分}$$

通过上式求得

$$\widetilde{u}(p)=\frac{4}{p(p^2+4)}=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+4}. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2 \text{ 分}$$

作 Laplace 逆变换，得

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathcal{L}^{-1}\big[\widetilde{u}(p)\big]=\mathcal{L}^{-1}\big[\frac{1}{p}\big]-\mathcal{L}^{-1}\big[\frac{p}{p^2+4}\big] \\ &= 1-\cos 2t. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4 \text{ 分} \end{aligned}$$

五 (8 分) 求函数 $w(x)$ ，使得变换 $u(x,t)=v(x,t)+w(x)$ 能将下列非齐次方程非齐次边界条件的初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=6x, & 0<x<l,\ t>0, \\ u_x(0,t)-ku(0,t)=0,\ u_x(l,t)=2, & t\geq 0, \\ u(x,0)=0, u_t(x,0)=0, & 0\leq x\leq l, \end{cases}$$

同时化为齐次方程齐次边界条件的初边值问题，其中常数 $k>0$. 并写出此时 v 所满足的初边值问题.

解 把 $u(x,t)=v(x,t)+w(x)$ 代入初边值问题知， v 满足下面的初边值问题

$$\begin{cases} v_{tt}-v_{xx}=6x+w''(x), & 0<x<l,\ t>0, \\ v_x(0,t)-kv(0,t)=-[w'(0)-kw(0)],\ v_x(l,t)=2-w'(l), & t\geq 0, \\ v(x,0)=-w(x), v_t(x,0)=0, & 0\leq x\leq l. \end{cases}$$

令

$$\begin{cases} 6x+w''(x)=0, & 0<x<l, \\ w'(0)-kw(0)=0,\ 2-w'(l)=0. \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2\text{ 分}$$

解上述的常微方程，得

$$w(x)=-x^3+Ax+B. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2\text{ 分}$$

再由边界条件知

$$A-kB=0,\quad 2+3l^2-A=0 \Longrightarrow w(x)=-x^3+(3l^2+2)x+\frac{3l^2+2}{k}. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2\text{ 分}$$

最后得 v 所满足的初边值问题

$$\begin{cases} v_{tt}-v_{xx}=0, & 0<x<l,\ t>0, \\ v_x(0,t)-kv(0,t)=0,\ v_x(l,t)=0, & t\geq 0, \\ v(x,0)=x^3-(3l^2+2)x-\frac{3l^2+2}{k}, v_t(x,0)=0, & 0\leq x\leq l. \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2\text{ 分}$$

六 (15 分) 用分离变量法求解弦振动方程的定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & 0<x<l,\ t>0, \\ u_x(0,t)=0,\ u_x(l,t)=0, & t\geq 0, \\ u(x,0)=3-2\cos\dfrac{2\pi x}{l},\ u_t(x,0)=-4+3\cos\dfrac{\pi x}{l}, & 0\leq x\leq l. \end{cases}$$

解 设 $U(x,t)=X(x)T(t)$ 是一非平凡解，将其代入方程，得

$$X''+\lambda X(x)=0,\ 0<x<l,\quad T''(t)+a^2\lambda T(t)=0. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 2\text{ 分}$$

利用边界条件，得 $X(0)=X'(l)=0$.　求解下列特征值问题

$$\begin{cases} X''+\lambda X(x)=0,\ 0<x<l, \\ X'(0)=X'(l)=0, \end{cases}$$

得所有特征值及其对应的特征函数

$$\lambda_n=\big(\frac{n\pi}{l}\big)^2,\ X_n(x)=\cos\frac{n\pi x}{l},\ n=0,1,2,\cdots. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 4\text{ 分}$$

将 $\lambda=\lambda_n=\big(\frac{n\pi}{l}\big)^2$ 代入 $T(t)$ 的方程，求得

$$\begin{aligned} T_n(t) &= C_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l},\quad n=1,2,\cdots, \\ T_0(t) &= C_0+D_0t. \end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 2\text{ 分}$$

于是得到方程的形式解

$$u(x,t) = C_0+D_0t+\sum_{n=1}^{\infty}\big[C_n\cos\frac{n\pi at}{l}+D_n\sin\frac{n\pi at}{l}\big]\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots 2$ 分

利用边界条件，得

$$3-2\cos\frac{2\pi x}{l}=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos\frac{n\pi x}{l},$$
$$-4+3\cos\frac{\pi x}{l}=D_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}D_n\cos\frac{n\pi x}{l}$$

利用特征函数的正交性，比较 $\cos\frac{n\pi x}{l}$ 的系数得

$$\begin{aligned} &C_0=3,\ C_2=-2,\ C_n=0,\ n=1,3,4,\cdots; \\ &D_0=-4,\ D_1=\frac{3l}{\pi a},\ D_n=0,\ n=2,\ 3,\ \cdots. \end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 4\text{ 分}$$

最后所求的形式解为

$$u(x,t)=3-4t-2\cos\frac{2\pi at}{l}\cos\frac{2\pi x}{l}+\frac{3l}{\pi a}\sin\frac{\pi at}{l}\cos\frac{\pi x}{l}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots 1\text{ 分}$$

七　(12 分) 求解非齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=x\sin t, & x\in\mathbb{R}^1,\ t>0, \\ u(x,0)=x,\ u_t(x,0)=\sin x, & x\in\mathbb{R}^1. \end{cases}$$

解 直接利用公式，得

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2}[(x+at)+(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\sin\xi\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\xi\sin\tau\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2\text{ 分 }+2\text{ 分 }+2\text{ 分} \\
&= x+\frac{1}{2a}[\cos(x-at)-\cos(x+at)]+x\int_0^t(t-\tau)\sin\tau\mathrm{d}\tau \\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0\text{ 分 }+2\text{ 分 }+2\text{ 分} \\
&= x+\frac{1}{a}\sin x\sin at+x\big[t-\sin t\big]. \\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0\text{ 分 }+0\text{ 分 }+2\text{ 分}
\end{aligned}$$

八 (10 分) 求一个分式线性变换，使得它把圆周 $|z|=1$ 变为圆周 $|w-1|=1$ ，且将 $z_1=2\mathrm{i}$ 变为 $w_1=1$ ； $z_2=\mathrm{i}$ 变为 $w_2=0$.

解 在 z 平面上 $z_1=2\mathrm{i}$ 和 $z_1'=\frac{\mathrm{i}}{2}$ 是关于圆 $|z|=1$ 的对称点，在 w 平面上， $w_1=1$ 和 $w_1'=\infty$ 是关于圆 $|w-1|=1$ 的对称点. 由保对称点性知，分式线性变换把 $z_1=2\mathrm{i}$ 变为 $w_1=1$; 把 $z_1'=\frac{\mathrm{i}}{2}$ 变为 $w_1'=\infty$. 又因为变换把 $z_2=\mathrm{i}$ 变为 $w_2=0$, 故可设分式线性变换为

$$w=k\frac{z-\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}/2}.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 5 分

于是有

$$1=k\frac{2\mathrm{i}-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}-\mathrm{i}/2},$$

即 $k=\frac{3}{2}$. 最后求得分式线性变换

$$w=\frac{3(z-\mathrm{i})}{2z-\mathrm{i}}.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 5 分

九 (10 分) 设有一个无限大的角形区域 $D=\{z|\,\frac{\pi}{3}<\arg z<\frac{2\pi}{3}\}$.

(1) 求一个保角变换，使得它将区域 D 变为上半平面;

(2) 写出上半平面的 Green 函数的表达式;

(3) 用保角变换方法求角形区域 D 的 Green 函数.

解 (1) 先作旋转变换 $w_1=\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/3}$ 把区域 D 变为角区域

$$D_1=\{z|\,0<\arg z<\frac{\pi}{3}\},$$

再作变换 $w=w_1^3$ 就把区域 D_1 变为上半平面，故所求的变换为

$$w=w_1^3=\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}}z^3=-z^3. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 4\text{ 分}$$

(2) 在 w 半平面，上半平面的 Green 函数为

$$G(w,w_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|w-\bar{w}_0|}{|w-w_0}|. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 3\text{ 分}$$

(3) 把由 (2) 得到的 Green 函数回到 z 平面，得 Green 函数

$$G(z,z_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|z^3-\bar{z}_0^3|}{|z^3-z_0^3|}. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 3\text{ 分}$$

十 (10 分) 求解下面 Bessel 方程的特征值问题 (给出所有特征值和对应的特征函数)

$$\begin{cases} r^2R''+rR'+(\lambda r^2-n^2)R=0, & 0<r<r_0, \\ R(r_0)=0, \quad |R(0)|<\infty. \end{cases}$$

解 容易证明特征值 $\lambda\ge n^2$. 令 $x=\sqrt{\lambda}r, y(x)=R(r)$, 则方程变化为 n 阶 Bessel 方程：

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0.$$

所以 $R(r)=y(x)=AJ_n(\sqrt{\lambda}r)+BY_n(\sqrt{\lambda}r)$. 因为 $|R(0)|<\infty$, 所以 $B=0$. 又因为 $R(r_0)=0$, 所以 $J_n(\sqrt{\lambda}r_0)=0$. 记 μ_m 是 Bessel 函数 $J_n(x)$ 的第 m 个正零点，则特征值为： $(\frac{\mu_m}{r_0})^2$, 对应的特征函数为： $J_n(\frac{\mu_m}{r_0}r), m=1,2,\cdots$.