《电磁场理论》复习总结

第一章 经典电磁理论的建立及电磁场分析的数学基础

正交坐标系：笛卡尔坐标系 $\vec{a}_x,\vec{a}_y,\vec{a}_z$，圆柱坐标系 $\vec{a}_r,\vec{a}_\varphi,\vec{a}_z$，球坐标系 $\vec{a}_r,\vec{a}_\theta,\vec{a}_\varphi$。

场量：标量场的梯度 $\nabla\phi$，矢量场的散度 $\nabla\cdot\vec{A}$，矢量场的旋度 $\nabla\times\vec{A}$。

场量定理：散度（高斯）定理：$\iiint_V \nabla\cdot\vec{A}dV = \oiint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}$，旋度（斯托克斯）定理：$\iint_S \left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot d\vec{S} = \oint_l \vec{A}\cdot d\vec{l}$。

零恒等式：标量场的梯度的旋度恒为零即 $\nabla\times\left(\nabla\phi\right)\equiv 0$，矢量场的旋度的散度恒为零即 $\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{A}\right)\equiv 0$。

亥姆霍兹定理：在空间区域上的任意矢量场，如果其散度、旋度和边界条件已知，则该矢量场唯一并且可以表示为一无旋矢量场和一无散矢量场的叠加。

第二章 麦克斯韦方程组与时变电磁场

法拉第电磁感应定律：$\varepsilon = -\dfrac{d\psi}{dt} = --\dfrac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$，**电荷守恒原理**：$I = \oiint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = -\dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{d}{dt}\iiint_V \rho dV$，**电流连续性方程**（根据电荷守恒原理得到）：$\nabla\cdot\vec{J} = -\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$，即单位时间内流出曲面 S 的电流等于其包围的体积内电荷的减少量。

麦克斯韦方程组：微分形式：$\begin{cases}\nabla\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{D} = \rho\\ \nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{B} = 0\end{cases}$，**积分形式**：$\begin{cases}\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint_S \dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}\\ \oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV\\ \oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \iint_S\left(\vec{J} + \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}\\ \oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0\end{cases}$，**物质本构关系**：$\begin{cases}\vec{D} = \varepsilon\vec{E}\\ \vec{B} = \mu\vec{H}\\ \vec{J} = \sigma\vec{E}\end{cases}$。

电磁场的边界条件：电场强度的切向分量($\vec{E}_t$)和磁通量密度的法向分量($\vec{B}_n$)在边处界连续，电通量密度的法向分量($\vec{D}_n$)和磁场强度的切向分量($\vec{H}_t$)不连续，差量分别等于边界面电荷密度(ρ_s)和面电流密度($\vec{J}_s$)。

边界条件	一般情况	**理想媒质-理想媒质** 理想媒质表面不存在 自由面电荷和自由面电流	**理想导体-理想媒质** 理想导体内部电场强度与磁场强度均为零。即电力线垂直于理想导体表面，磁力线平行于理想导体表面。
标量形式	$\begin{cases}H_{2t} - H_{1t} = J_s\\ E_{2t} - E_{1t} = 0\\ B_{2n} - B_{1n} = 0\\ D_{2n} - D_{1n} = \rho_s\end{cases}$	$\begin{cases}H_{2t} = H_{1t}\\ E_{2t} = E_{1t}\\ B_{2n} = B_{1n}\\ D_{2n} = D_{1n}\end{cases}$	$\begin{cases}H_{2t} = J_s\\ E_{2t} = 0\\ B_{2n} = 0\\ D_{2n} = \rho_s\end{cases}$
矢量形式	$\begin{cases}\vec{n}\times\left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = \vec{J}_s\\ \vec{n}\times\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = 0\\ \vec{n}\cdot\left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) = 0\\ \vec{n}\cdot\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = \rho_s\end{cases}$	$\begin{cases}\vec{n}\times\left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = 0\\ \vec{n}\times\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = 0\\ \vec{n}\cdot\left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) = 0\\ \vec{n}\cdot\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = 0\end{cases}$	$\begin{cases}\vec{n}\times\vec{H}_2 = \vec{J}_s\\ \vec{n}\times\vec{E}_2 = 0\\ \vec{n}\cdot\vec{B}_2 = 0\\ \vec{n}\cdot\vec{D}_2 = \rho_s\end{cases}$

坡印廷定理：坡印廷矢量 $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$ 在闭合曲面上的面积分等于从该闭合曲面所包围体积中散发出去的功率，任何瞬间流入某闭合曲面的功率等于从该闭合曲面所包围体积内电场和磁场所存储的能量的增加率与欧姆损耗功率之和，即 $-\oiint_S\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\cdot d\vec{S} =$

$= \dfrac{\partial}{\partial t}\iiint_V\left(\dfrac{1}{2}\varepsilon E^2 + \dfrac{1}{2}\mu H^2\right)dV + \iiint_V \sigma E^2 dV$，其中电磁场能量密度 $w = w_e + w_m = \dfrac{1}{2}\varepsilon E^2 + \dfrac{1}{2}\mu H^2$，欧姆功率密度 $p_\sigma = \sigma E^2$。

平均坡印廷矢量：$\vec{S}_{av}(x,y,z) = \dfrac{1}{T}\int_0^T \vec{S}(x,y,z,t)dt$，复数形式下 $\vec{S}_{av} = \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right)$，其与空间位置有关，与时间无关。

时变电磁场位函数：引入矢量磁位 $\vec{A}$ 和标量电位 ϕ，满足 $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$，$\vec{E} = -\nabla\phi - \dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$，则在洛伦兹规范 $\nabla\cdot\vec{A} + \mu\varepsilon\dfrac{d\phi}{dt} = 0$ 下，矢量磁位 $\vec{A}$ 和标量电位 ϕ 满足的非齐次波动方程（达朗贝尔方程）为：$\begin{cases}\nabla^2\vec{A} - \mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J}\\ \nabla^2\phi - \mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon}\end{cases}$。

第三章 静态场

静电场：基本方程：微分形式：$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=0\\ \nabla\cdot\vec{D}=\rho\\ \vec{D}=\varepsilon\vec{E}\end{cases}$，积分形式：$\begin{cases}\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l}=0\\ \oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\iiint_V \rho dV\\ \vec{D}=\varepsilon\vec{E}\end{cases}$，静电场是**无旋有源场**。

电位方程：电场强度 $\vec{E}=-\nabla\phi$，标量电位 ϕ 满足泊松方程 $\nabla^2\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon}$；若 $\rho=0$，则 ϕ 满足拉普拉斯方程 $\nabla^2\phi=0$。

理想导体：理想导体的电导率 $\sigma\to\infty$，内部电场强度和电荷密度均为零。在静态平衡条件下，理想导体表面处的电场强度垂直于导体表面，即理想导体表面是一个等位面，理想导体是一个等位体。在自由空间，理想导体表面电场强度的法向分量 $E_n=\frac{\rho_s}{\varepsilon_0}$。

电偶极子：相距一小段距离 d 的一对等值异号电荷。**电偶极矩** $\vec{p}=q\vec{d}$，空间一点的电位 $\phi=\frac{qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0R^2}=\frac{\vec{p}\cdot\vec{a}_R}{4\pi\varepsilon_0R^2}$，电场强度 $\vec{E}=-\nabla\phi=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0R^3}\left(\vec{a}_R2\cos\theta+\vec{a}_\theta\sin\theta\right)$。在外场的作用下，无极分子形成位移极化，有极分子形成取向极化，合成的电偶极矩不再为零，从而影响原来的电场分布。当有电介质存在时，极化电介质的作用可用极化面电荷和极化体电荷等效代替，**极化面电荷密度** $\rho_{ps}=\vec{P}\cdot\vec{a}_n$，**极化体电荷密度** $\rho_{pV}=-\nabla\cdot\vec{P}=-\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\nabla\cdot\vec{D}$，$\vec{P}$ 为极化强度矢量。电通量密度 $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$，极化强度 $\vec{P}=\varepsilon_0\chi_e\vec{E}$，即 $\vec{D}=\varepsilon_0\left(1+\chi_e\right)\vec{E}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}=\varepsilon\vec{E}$，其中极化率 $\chi_e=1-\varepsilon_r$，媒质的绝对介电常数 $\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$。
线性、均匀、各向同性的媒质称为简单媒质，简单媒质的相对介电常数是一个常数。

电场的能量：电场储存的能量 $W_e=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\phi_kq_k\xrightarrow{\text{电荷连续分布}}\frac{1}{2}\iiint_V\rho\phi dV=\frac{1}{2}\iiint_V\vec{D}\cdot\vec{E}dV$，电场能量密度 $w_e=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$。

静磁场：基本方程：微分形式：$\begin{cases}\nabla\times\vec{H}=\vec{J}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \vec{B}=\mu\vec{H}\end{cases}$，积分形式：$\begin{cases}\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l}=I\\ \oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0\\ \vec{B}=\mu\vec{H}\end{cases}$，静磁场是**有旋无散场**。

磁位方程：磁通量密度 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$，矢量磁位 A 满足泊松方程 $\nabla^2\vec{A}=-\mu\vec{J}$。

磁偶极子：半径很小的圆形载流回路。**磁偶极矩** $\vec{m}=\vec{a}_zI\pi b^2$，空间一点的磁位 $\vec{A}=\vec{a}_\varphi\frac{\mu_0I\pi b^2\sin\theta}{4\pi R^2}=\frac{\mu_0\vec{m}\times\vec{a}_R}{4\pi R^2}$，磁通量密度 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\frac{\mu_0Ib^2}{4R^3}\left(\vec{a}_R2\cos\theta+\vec{a}_\theta\sin\theta\right)$。当有磁介质存在时，磁化磁介质的作用可用磁化面电流和极化体电流等效代替，**极化面电流密度** $\vec{J}_{ms}=\vec{M}\times\vec{a}_n$，**极化体电流密度** $\vec{J}_{mV}=\nabla\times\vec{M}=\left(\frac{\mu}{\mu_0}-1\right)\nabla\times\vec{H}$，$\vec{M}$ 为磁化强度矢量。磁通量密度 $\vec{B}=\mu_0\left(\vec{H}+\vec{M}\right)$，磁化强度 $\vec{M}=\chi_m\vec{H}$，即 $\vec{B}=\mu_0\left(1+\chi_m\right)\vec{H}=\mu_0\mu_r\vec{H}=\mu\vec{H}$，磁化率 $\chi_m=\mu_r-1$，磁介质的绝对磁导率 $\mu=\mu_0\mu_r$。对于抗磁质 $\chi_m<<0$，μ_r略<1；对于顺磁质 χ_m略>0，μ_r略>1；对于铁磁质 $\chi_m>>1$。

磁场的能量：磁场储存的能量 $W_m=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}I_k\psi_k\xrightarrow{\text{电流连续分布}}\frac{1}{2}\iiint_V\vec{A}\cdot\vec{J}dV=\frac{1}{2}\iiint_V\vec{H}\cdot\vec{B}dV$，磁场能量密度 $w_e=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$。

第四章 平面电磁波

时谐电磁场：麦克斯韦方程组的**时谐形式**：$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=-j\omega\vec{B}\\ \nabla\cdot\vec{D}=\rho\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{J}+j\omega\vec{D}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\end{cases}$，根据物质本构关系即可写为 $\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=-j\omega\mu\vec{H}\\ \nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{J}+j\omega\varepsilon\vec{E}\\ \nabla\cdot\vec{H}=0\end{cases}$。

在**简单非导电**$(\sigma=0)$**无源**$(\rho=0)$媒质中，时谐麦克斯韦方程组可简化为：$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=-j\omega\mu\vec{H}\\ \nabla\cdot\vec{E}=0\\ \nabla\times\vec{H}=j\omega\varepsilon\vec{E}\\ \nabla\cdot\vec{H}=0\end{cases}$，得到**均匀平面电磁波**的**齐次波**

动方程为：$\begin{cases}\nabla^2\vec{E}+\omega^2\mu\varepsilon\vec{E}=0\\ \nabla^2\vec{H}+\omega^2\mu\varepsilon\vec{H}=0\end{cases}$，令波数 $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}=\dfrac{\omega}{v}=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$，即得到**齐次亥姆霍兹方程**：$\begin{cases}\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0\\ \nabla^2\vec{H}+k^2\vec{H}=0\end{cases}$。波传播相速度 $v=\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{\omega}{k}$，媒质的本征阻抗 $\eta=\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}$ 为电场与磁场的振幅之比。即电场方向垂直于磁场方向，且均垂直于电磁波的传播方向。

横电磁波（TEM 波）：设波数矢量 $\vec{k}=\vec{a}_x k_x+\vec{a}_y k_y+\vec{a}_z k_z=\vec{a}_n k$，电场强度 $\vec{E}(R)=\vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{R}}=\vec{E}_0 e^{-j\vec{a}_n k\cdot\vec{R}}$，则等相位面方程为 $\vec{a}_n\cdot\vec{R}=0$，磁场强度 $\vec{H}(R)=\dfrac{1}{\eta}\left(\vec{a}_n\times\vec{E}_0\right)e^{-j\vec{a}_n k\cdot\vec{R}}$，媒质的本征阻抗 $\eta=\dfrac{\omega\mu}{k}=\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}$；若磁场强度 $\vec{H}(R)=\vec{H}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{R}}=\vec{H}_0 e^{-j\vec{a}_n k\cdot\vec{R}}$，则电场强度 $\vec{E}(R)=\eta\left(\vec{H}_0\times\vec{a}_n\right)e^{-j\vec{a}_n k\cdot\vec{R}}$。**均匀平面电磁波是 TEM 波**。

平面电磁波的极化：线极化波——电场强度沿某一固定的方向，不随时间变化的电磁波。椭圆极化波——两个空间相互垂直，相位差 $\dfrac{\pi}{2}$ 的线极化波的叠加，振幅相等则合成为**圆极化波**，根据相位超前情况可分为右旋(正)圆极化波，左旋(负)圆极化波。

任意一个线极化波可分解为两个振幅相等、旋向相反的圆极化波，即 $\vec{E}(z)=\vec{a}_x E_0 e^{-jkz}=\dfrac{E_0}{2}\left(\vec{a}_x+j\vec{a}_y\right)e^{-jkz}+\dfrac{E_0}{2}\left(\vec{a}_x-j\vec{a}_y\right)e^{-jkz}$。

任意一个椭圆极化波可分解为两个振幅不等、旋向相反的圆极化波，即 $\vec{E}(z)=\left(\vec{a}_x E_1+j\vec{a}_y E_2\right)e^{-jkz}=\dfrac{E_1+E_2}{2}\left(\vec{a}_x+j\vec{a}_y\right)e^{-jkz}+\dfrac{E_1-E_2}{2}\left(\vec{a}_x-j\vec{a}_y\right)e^{-jkz}$。

在无界**导电** $(\sigma\neq 0)$ **有损耗无源** $(\rho=0)$ 媒质中，时谐麦克斯韦方程组可化为 $\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=-j\omega\mu\vec{H}\\ \nabla\cdot\vec{E}=0\\ \nabla\times\vec{H}=\sigma\vec{E}+j\omega\varepsilon\vec{E}=j\omega\left(\varepsilon+\dfrac{\sigma}{j\omega}\right)\vec{E}\\ \nabla\cdot\vec{H}=0\end{cases}$，定义**复介电常数** $\varepsilon_c=\varepsilon+\dfrac{\sigma}{j\omega}=\varepsilon-j\dfrac{\sigma}{\omega}$，则**传输常数** $\gamma=jk_c=j\omega\sqrt{\mu\varepsilon_c}=j\omega\sqrt{\mu\varepsilon\left(1-j\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)}=\alpha+j\beta$，其中 α 为**衰减常数**，β 为**相位常数**，媒质的**特征阻抗** $\eta_c=\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon_c}}$。若电场强度的瞬时表达式为 $\vec{E}(z,t)=\vec{a}_x E_m e^{-\alpha z}\cos(\omega t-\beta z+\varphi_0)$，则磁场强度的瞬时表达式为 $\vec{H}(z,t)=\vec{a}_y\dfrac{E_m}{\eta_c}e^{-\alpha z}\cos(\omega t-\beta z+\varphi_0)$，电场和磁场之间存在相位差。定义**损耗角正切** $\tan\delta_c=\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}$，其与电磁波频率有关，表示了传导电流与位移电流幅度之比，即反映了媒质的欧姆损耗。在理想导体中有 $\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}\to\infty$，在理想介质中有 $\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}=0$。

在**低损耗电介质**中，$\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}<<1$，传播常数 $\gamma=\alpha+j\beta\approx\dfrac{\sigma}{2}\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}+j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[1+\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]$，本征阻抗 $\eta_c=\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon_c}}\approx\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}(1+j\dfrac{\sigma}{2\omega\varepsilon})$，相速度 $v_p=\dfrac{\omega}{\beta}\approx\dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\left[1-\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]$；在**良导体**中，$\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}>>1$，传播常数 $\gamma=\alpha+j\beta\approx\sqrt{\dfrac{\omega\mu\sigma}{2}}+j\sqrt{\dfrac{\omega\mu\sigma}{2}}$，本征阻抗 $\eta_c=\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon_c}}\approx(1+j)\sqrt{\dfrac{\omega\mu}{2\sigma}}$，即在良导体中本征阻抗的相位角为 45°，即磁场在相位上落后电场 $\dfrac{\pi}{4}$。此时相速度 $v_p=\dfrac{\omega}{\beta}=\sqrt{\dfrac{2\omega}{\mu\sigma}}$，波长 $\lambda=\dfrac{2\pi}{\beta}$，趋肤/穿透深度 $\delta=\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{1}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}}=\dfrac{\lambda}{2\pi}$ 为振幅衰减为原来 $\dfrac{1}{e}$ 时电磁波传播的距离，其与频率有关，与波长成正比，即频率越高，趋肤深度越小。因电磁感应在电介质中会产生感应电流，从而会产生**涡流损耗**。涡流损耗功率与电磁场频率的平方、金属的电导率和材料厚度的平方成正比。为了减小涡流损耗，金属板的厚度应较小，故铁芯多采用叠片的形式，并可在钢片中掺杂硅或使用铁的氧化物，以减小材料的电导率。

集肤效应：在导体中传导的变化电流产生的变化磁场在导体中产生感应电流，使导体中的电流趋向于导体的表面，且越趋近导体表面，电流密度越大。随着电流频率的增加，电流越趋近导体表面，当频率很高时，导体有效横截面积减小，电阻增大。故在高频时，常采用中空导线或若干股并列的细导线代替单股导线。

色散与群速：色散是不同频率分量的电磁波以不同的相速度传播，导致信号波形畸变的现象，有损耗媒质即是一种色散媒质。相速度 $v_p=\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{\omega}{\beta}$ ——等相位点传播的速度，群速度 $v_g=\dfrac{d\omega}{d\beta}$ ——波包包络传播的速度，其之间关系为 $v_g=\dfrac{v_p}{1-\dfrac{\omega}{v_p}\dfrac{dv_p}{d\omega}}$。

无色散时，$\frac{dv_p}{d\omega}=0$，$v_g=v_p$，正常色散时，$\frac{dv_p}{d\omega}<0$，$v_g<v_p$，异常色散时，$\frac{dv_p}{d\omega}>0$，$v_g>v_p$。

均匀平面电磁波在理想导体平面边界上的垂直入射：

设入射波电场强度及磁场强度表达式 $\begin{cases}\vec{E}_i(z)=\vec{a}_x E_{i0}e^{-j\beta_1 z}\\ \vec{H}_i(z)=\vec{a}_y\dfrac{E_{i0}}{\eta_1}e^{-j\beta_1 z}\end{cases}$，则由电场强度边界条件及麦克斯韦方程得反射波电场强度及磁场强度表达式 $\begin{cases}\vec{E}_r(z)=-\vec{a}_x E_{i0}e^{j\beta_1 z}\\ \vec{H}_r(z)=\vec{a}_y\dfrac{E_{i0}}{\eta_1}e^{j\beta_1 z}\end{cases}$，总电场强度及磁场强度表达式 $\begin{cases}\vec{E}_1(z)=-\vec{a}_x j2E_{i0}\sin\beta_1 z\\ \vec{H}_1(z)=\vec{a}_y 2\dfrac{E_{i0}}{\eta_1}\cos\beta_1 z\end{cases}$。即合成电磁波在媒质 1 中形成**驻波**，电场强度和磁场强度在时间上相位差 $\frac{\pi}{2}$，在空间上错开 $\frac{\lambda}{4}$。在理想导体分界面上，电场强度为零，磁场强度最大，存在面电流密度 $\vec{J}_s(x)=\vec{a}_x 2\frac{E_{i0}}{\eta_1}$。

均匀平面电磁波在理想导体平面边界上的倾斜入射：

垂直极化平面波入射：设入射波电场强度及磁场强度表达式为 $\begin{cases}\vec{E}_i(x,z)=\vec{a}_y E_{i0}e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i+z\cos\theta_i)}\\ \vec{H}_i(x,z)=\left(-\vec{a}_x\cos\theta_i+\vec{a}_z\sin\theta_i\right)\dfrac{E_{i0}}{\eta_1}e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i+z\cos\theta_i)}\end{cases}$，则反射波电场强度及磁场强度表达式为 $\begin{cases}\vec{E}_r(x,z)=-\vec{a}_y E_{i0}e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i-z\cos\theta_i)}\\ \vec{H}_r(x,z)=\left(-\vec{a}_x\cos\theta_i-\vec{a}_z\sin\theta_i\right)\dfrac{E_{i0}}{\eta_1}e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i-z\cos\theta_i)}\end{cases}$，叠加总电场强度及磁场强度表达式为 $\begin{cases}\vec{E}_1(x,z)=-\vec{a}_y j2E_{i0}\sin\left(\beta_1 z\cos\theta_i\right)e^{-j\beta_1 x\sin\theta_i}\\ \vec{H}_1(x,z)=\left[-\vec{a}_x\cos\theta_i\cos\left(\beta_1 z\cos\theta_i\right)-\vec{a}_z j\sin\theta_i\sin\left(\beta_1 z\cos\theta_i\right)\right]2\dfrac{E_{i0}}{\eta_1}e^{-j\beta_1 x\sin\theta_i}\end{cases}$。合成电磁波在媒质 1 的 z 方向上形成**驻波，**传播的平均功率为零，在 x 方向上形成**非均匀平面行波**，相速度 $v_{xp}=\frac{v_p}{\cos\theta_i}$，因 $E_{1x}=0$，即合成电磁波为**横电波（TE 波）**。媒质 1 中合成电磁波的平均坡印廷矢量 $\vec{S}_1^{av}=\vec{a}_x 2\frac{E_{i0}}{\eta_1}\sin\theta_i\sin^2\left(\beta_1\cos\theta_i z\right)$，理想导体表面存在面电流密度 $\vec{J}_s(x)=\vec{a}_y 2\frac{E_{i0}}{\eta_1}\cos\theta_i e^{-j\beta_1 x\sin\theta_i}$。

平行极化平面波入射：设入射波电场强度及磁场强度表达式为 $\begin{cases}\vec{E}_i(x,z)=\left(\vec{a}_x\cos\theta_i-\vec{a}_z\sin\theta_i\right)E_{i0}e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i+z\cos\theta_i)}\\ \vec{H}_i(x,z)=\vec{a}_y\dfrac{E_{i0}}{\eta_1}e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i+z\cos\theta_i)}\end{cases}$，则反射波电场强度及磁场强度表达式为 $\begin{cases}\vec{E}_r(x,z)=\left(\vec{a}_x\cos\theta_i+\vec{a}_z\sin\theta_i\right)E_{i0}e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i-z\cos\theta_i)}\\ \vec{H}_r(x,z)=-\vec{a}_y\dfrac{E_{i0}}{\eta_1}e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i-z\cos\theta_i)}\end{cases}$，此时合成电磁波在媒质 1 的 z 方向上形成**驻波，**传播的平均功率为零，在 x 方向上形成**非均匀平面行波**，相速度 $v_{xp}=\frac{v_p}{\sin\theta_i}$，因 $H_{1x}=0$，即合成电磁波为**横磁波（TM 波）**。媒质 1 中合成电磁波的平均坡印廷矢量 $\vec{S}_1^{av}=\vec{a}_x 2\frac{E_{i0}}{\eta_1}\sin\theta_i\cos^2\left(\beta_1\cos\theta_i z\right)$，理想导体表面存在面电流密度 $\vec{J}_s(x)=\vec{a}_x 2\frac{E_{i0}}{\eta_1}e^{-j\beta_1 x\sin\theta_i}$，面电荷密度 $\rho_s=2E_{i0}\sin\theta_i e^{-j\beta_1 x\sin\theta_i}$。

均匀平面电磁波在理想电介质平面边界上的垂直入射：

因理想电介质表面**无面电荷和面电流**，则由边界条件得 $\begin{cases}\vec{E}_i(0)+\vec{E}_r(0)=\vec{E}_t(0)\\ \vec{H}_i(0)+\vec{H}_r(0)=\vec{H}_t(0)\end{cases}$。定义反射系数 $\Gamma=\frac{E_{r0}}{E_{i0}}=\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}$，透射系数 $\tau=\frac{E_{t0}}{E_{i0}}=\frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}$，可得总电场强度和磁场强度 $\begin{cases}\vec{E}_1(z)=\vec{a}_x E_{i0}\left[\tau e^{-j\beta_1 z}+\Gamma j2\sin\beta_1 z\right]\\ \vec{H}_1(z)=\vec{a}_y\dfrac{E_{i0}}{\eta_1}\left[\tau e^{-j\beta_1 z}-\Gamma j2\cos\beta_1 z\right]\end{cases}$，且有 $1+\Gamma=\tau$。媒质 1 中电场强度和磁场强度在 z 方向是**行波**和**驻波**的合成，媒质 2 中的透射电磁波是行波。当 $\eta_2>\eta_1$ 时，反射系数 $\Gamma>0$，在界面处电场强度为最大值 $E_{i0}\left(1+\Gamma\right)$；当 $\eta_2<\eta_1$ 时，反射系数 $\Gamma<0$，在界面处电场强度为最小值 $E_{i0}\left(1+\Gamma\right)$。定义驻波电场强度的最大值与最小值之

比为驻波比，即驻波比 $S=\dfrac{|E|_{\max}}{|E|_{\min}}=\dfrac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}$。媒质 1 中电磁波的平均坡印廷矢量 $\vec{S}_1^{av}=\vec{S}_i^{av}\left(1-|\Gamma|^2\right)$，媒质 2 中 $\vec{S}_2^{av}=\vec{S}_i^{av}\dfrac{\eta_1}{\eta_2}|\tau|^2$，因 $|\Gamma|^2+\dfrac{\eta_1}{\eta_2}|\tau|^2=1$，即 $\vec{S}_1^{av}=\vec{S}_2^{av}$。

均匀平面电磁波向多层电介质的垂直入射：

定义总场波阻抗为平行平面上总电场强度与总磁场强度之比即 $Z(z)=\dfrac{E_x(z)}{H_y(z)}$。则均匀平面电磁波在媒质表面垂直入射时 $Z(z)=\eta_1\dfrac{e^{-j\beta_1 z}+\Gamma e^{j\beta_1 z}}{e^{-j\beta_1 z}-\Gamma e^{j\beta_1 z}}$，距离边界-$L$ 处的总场波阻抗 $Z(-L)=\eta_1\dfrac{e^{j\beta_1 L}+\Gamma e^{-j\beta_1 L}}{e^{j\beta_1 L}-\Gamma e^{-j\beta_1 L}}=\eta_1\dfrac{\eta_2\cos\beta_1 L+j\eta_1\sin\beta_1 L}{\eta_1\cos\beta_1 L+j\eta_2\sin\beta_1 L}$。若均匀平面电磁波从媒质 1 垂直入射到媒质 2 和媒质 3 ，则在媒质 2 表面的反射系数 $\Gamma_2(0)=\dfrac{Z_2(0)-\eta_1}{Z_2(0)+\eta_1}=\dfrac{\eta_2\dfrac{\eta_3\cos\beta_2 d+j\eta_2\sin\beta_2 d}{\eta_2\cos\beta_2 d+j\eta_3\sin\beta_2 d}-\eta_1}{Z_2(0)+\eta_1}$。若要在媒质 2 表面处不发生反射，则需满足 $\eta_2(\eta_3\cos\beta_2 d+j\eta_2\sin\beta_2 d)=\eta_1(\eta_2\cos\beta_2 d+j\eta_3\sin\beta_2 d)$。当 $\eta_1=\eta_3$ 时，则 $\sin\beta_2 d=0$，即 $Z(0)=\eta_3$，媒质 2 的厚度 $d=n\dfrac{\lambda_2}{2}$，为媒质 2 中半波长的整数倍，此介质层称为半波介质窗；当 $\eta_1\neq\eta_3$ 时，则 $\eta_2=\sqrt{\eta_1\eta_3}$，$\cos\beta_2 d=0$，即 $Z(0)=\dfrac{\eta_2^2}{\eta_3}$，$d=(2n+1)\dfrac{\lambda_2}{4}$，为媒质 2 中 $\dfrac{1}{4}$ 波长的奇数倍，此时媒质 2 的作用等效于 $\dfrac{1}{4}$ 波长阻抗变换器。

均匀平面电磁波在电介质分界面上的倾斜入射：

基本规律：反射定律：$\theta_i=\theta_r$，折射定律：$\dfrac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{\beta_1}{\beta_2}=\dfrac{\sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}}{\sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}}$。全反射临界角 $\theta_c=\arcsin\sqrt{\dfrac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}$，即当入射角大于全反射临界角时，无透射波，仅存在沿分界面表面传播的表面波，其振幅沿分界面法线方向指数衰减，且平均能流密度为零，即没有功率进入媒质 2。

垂直极化平面波(*s* 波)入射：

反射系数 $\Gamma_\perp=-\dfrac{\eta_2\cos\theta_i-\eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i+\eta_1\cos\theta_t}=-\dfrac{\dfrac{\eta_2}{\cos\theta_t}-\dfrac{\eta_1}{\cos\theta_i}}{\dfrac{\eta_2}{\cos\theta_t}+\dfrac{\eta_1}{\cos\theta_i}}$，透射系数 $\tau_\perp=\dfrac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_i+\eta_1\cos\theta_t}=\dfrac{2\dfrac{\eta_2}{\cos\theta_t}}{\dfrac{\eta_2}{\cos\theta_t}+\dfrac{\eta_1}{\cos\theta_i}}$，满足 $1-\Gamma_\perp=\tau_\perp$。

即当 $\eta_2\cos\theta_i=\eta_1\cos\theta_t$ 时，反射系数 $\Gamma_\perp=0$，此时垂直极化波无反射，且满足 $\sin^2\theta_i=\dfrac{1-\dfrac{\mu_1\varepsilon_2}{\mu_2\varepsilon_1}}{1-\left(\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2}$，入射角为垂直极化时无反射的**布鲁斯特角** $\theta_{B\perp}$。若两媒质磁导率相同即 $\mu_1=\mu_2$，此时布鲁斯特角 $\theta_{B\perp}$ 不存在；若两媒质介电常数相同即 $\varepsilon_1=\varepsilon_2$，此时 $\sin\theta_{B\perp}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{\mu_1}{\mu_2}}}$。

平行极化平面波(*p* 波)入射：

反射系数 $\Gamma_{//}=\dfrac{\eta_2\cos\theta_t-\eta_1\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_t+\eta_1\cos\theta_i}=\dfrac{\dfrac{\eta_2}{\cos\theta_i}-\dfrac{\eta_1}{\cos\theta_t}}{\dfrac{\eta_2}{\cos\theta_i}+\dfrac{\eta_1}{\cos\theta_t}}$，透射系数 $\tau_{//}=\dfrac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_t+\eta_1\cos\theta_i}=\dfrac{2\dfrac{\eta_2}{\cos\theta_t}}{\dfrac{\eta_2}{\cos\theta_i}+\dfrac{\eta_1}{\cos\theta_t}}$，满足 $1+\Gamma_{//}=\dfrac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}\tau_{//}$。即当 $\eta_2\cos\theta_t=\eta_1\cos\theta_i$ 时，反射系数 $\Gamma_{//}=0$，此时平行极化波无反射，且满足 $\sin^2\theta_i=\dfrac{1-\dfrac{\mu_2\varepsilon_1}{\mu_1\varepsilon_2}}{1-\left(\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2}$，入射角为垂直极化时无反射的**布鲁斯特角** $\theta_{B//}$。若两媒质介电常数相同即 $\varepsilon_1=\varepsilon_2$，此时布鲁斯特角 $\theta_{B//}$ 不存在；若两媒质磁导率相同即 $\mu_1=\mu_2$，此时 $\sin\theta_{B//}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}}$，即 $\tan\theta_{B//}=\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}=\dfrac{n_2}{n_1}$。

第五章 导行电磁波及电磁波辐射

波导系统：双导线（直流至米波波段），同轴线（直流至分米波波段），矩形波导、圆波导（微波波段），带状线、微带线，介质波导、光导纤维（光波波段）。

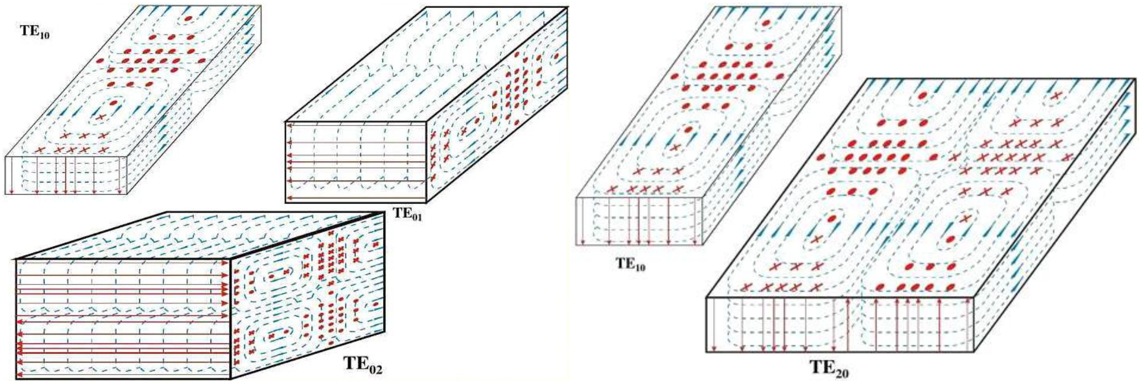
导波波型可分为 TEM 波，TE 波，TM 波，单导体长直波导结构中不存在 TEM 波，而多导体长直波导结构如同轴线，因其中可以存在纵向传导电流，故其中可存在 TEM 波。

导波方程：$\begin{cases}\nabla_t^2\vec{E}(u,v)+k_c^2\vec{E}(u,v)=0\\ \nabla_t^2\vec{H}(u,v)+k_c^2\vec{H}(u,v)=0\end{cases}$，横向波数满足 $k_c^2=k^2-\beta^2$。可由纵向场分量 E_z,H_z 求得横向场分量 E_u,H_u,E_v,H_v。

定义传输常数 $\gamma=\alpha+j\beta$，α 为衰减常数，β 为相位常数。TE 波和 TM 波存在高通低频截止和色散现象，截止频率 $f_c=\dfrac{k_c u}{2\pi}$，截止波数 $k_c^2=k^2+\gamma^2$，即 $\gamma=\sqrt{k_c^2-k^2}=k\sqrt{\left(\dfrac{f_c}{f}\right)^2-1}$。当工作频率 $f<f_c$ 时，$\gamma=\alpha$，电磁波没有相位的移动，只有纵向衰减，故不能传播，处于截止状态；当工作频率 $f>f_c$ 时，$\gamma=j\beta$，$\beta=k\sqrt{1-\left(\dfrac{f_c}{f}\right)^2}$，电磁波以一定的相速度和群速度传播，相速度 $v_p=\dfrac{\omega}{\beta}$，群速度 $v_g=\dfrac{d\omega}{d\beta}$，且 $v_p v_g=u^2$，导波波长 $\lambda_g=\dfrac{2\pi}{\beta}$，即电磁波传播速度与工作频率有关。对于 TEM 波，$k_c=0$，$\lambda_c=\infty$，故 TEM 波没有截止和色散现象，任何频率均可传播。

矩形波导：边界条件——在理想导体壁上，电场强度的切向分量为零。截止波数 $k_c=\sqrt{k^2+\gamma^2}=\sqrt{\left(\dfrac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\dfrac{n\pi}{b}\right)^2}$，传播常数 $\gamma=j\beta=j\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon-\left(\dfrac{m\pi}{a}\right)^2-\left(\dfrac{n\pi}{b}\right)^2}$，截止频率 $f_c=\dfrac{k_c u}{2\pi}$。m,n 分别表示场沿宽边和窄边的半周期数。TM_{mn} 波中 m,n 均不能为 0，最小模式是 TM_{11}，其截止频率最低；TE_{mn} 波中 m,n 可以有一个为 0，若 m=0 则 $E_y=H_x=0$，若 n=0 则 $E_x=H_y=0$，TE_{10} 波的截止频率最低。

常见模场分布图：



谐振腔：TM_{mnp} 模的谐振频率 $f_{mnp}=\dfrac{\omega_{mnp}}{2\pi}=\dfrac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\dfrac{m}{a}\right)^2+\left(\dfrac{n}{b}\right)^2+\left(\dfrac{p}{d}\right)^2}$。

电磁辐射：电偶极子辐射场的磁场强度 $\vec{H}=\dfrac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{A}$，只存在 φ 方向分量；电场强度 $\vec{E}=\dfrac{1}{j\omega\varepsilon_0}\nabla\times\vec{H}$，存在 r,θ 方向分量。

在电偶极子附近，电场变化和电荷变化同相位。而在远离电偶极子处，由于延迟效应，电磁场变化相位滞后于电荷变化。变化的磁场可产生电场，电场不再由源电荷产生，因此电磁波可脱离电偶极子向外传播，形成电磁辐射。

近区场：$\beta R=\dfrac{2\pi}{\lambda}R<<1$，磁场强度与静态场中电流元产生的磁场强度表达式相同，电场强度与静态场中电偶极子产生的电场强度表达式相同，故振荡的时变偶极子的近场区**呈准静态特性**，无能量传输。

远区场：$\beta R=\dfrac{2\pi}{\lambda}R>>1$，$E_\theta$ 和 H_φ 在空间互相垂直，时间上相位相同，且 $\dfrac{E_\theta}{H_\varphi}=\eta_0$，故远区场具有和平面波相同的特性，可近似为平面波；但 E_θ 和 H_φ 的幅值与离开波源的距离 R 成反比，相位是 R 的周期函数，故远区场为非均匀球面波。

第七章 电磁兼容技术

未讲