

《几何与代数》、《线性代数》

# 教学大纲与历年试题



南京 东南大学数学系

2007 年 9 月

# 目 录

1. 几何与代数教学大纲·····	1
2. 线性代数教学大纲·····	8
3. 几何与代数教学大纲(64学时)·····	13
4. 01-02 学年第二学期几何与代数期末考试试卷·····	21
5. 02-03 学年第二学期几何与代数期末考试试卷·····	25
6. 03-04 学年第二学期几何与代数期末考试试卷·····	30
7. 04-05 学年第二学期几何与代数期末考试试卷·····	34
8. 05-06 学年第二学期几何与代数期末考试试卷·····	39
9. 06-07 学年第二学期几何与代数期末考试试卷·····	43
10. 01-02 学年第三学期线性代数期末考试试卷·····	47
11. 03-04 学年第三学期线性代数期末考试试卷·····	52
12. 04-05 学年第三学期线性代数期末考试试卷·····	56
13. 05-06 学年第三学期线性代数期末考试试卷·····	61
14. 06-07 学年第三学期线性代数期末考试试卷·····	65
15. 05-06 学年第二学期几何与代数补考试卷·····	69
16. 05-06 学年第二学期线性代数补考试卷·····	73
17. 07-08 学年第一学期线性代数转系考试试卷·····	77

# 《几何与代数》教学大纲

48 学时

本课程是本科阶段几何及离散量数学最重要的课程。本课程的目的是使学生熟悉线性代数与空间解析的基本概念，掌握用坐标及向量的方法讨论几何图形的方法，熟悉空间中简单的几何图形的方程及其特点，掌握线性代数的基本理论和基本方法，提高其空间想象能力、抽象思维和逻辑思维的能力，为用线性代数的理论解决实际问题打下基础，并为后继课程的学习做好准备。

## 教学内容和基本要求

### 一. 向量代数 平面与直线

1. 理解几何向量的概念及其加法、数乘运算，熟悉运算规律，了解两个向量共线和三个向量共面的充分必要条件；
2. 理解空间直角坐标系的概念，了解仿射坐标系的概念，掌握向量的坐标表示；

3. 理解向量的数量积、向量积和混合积的概念，理解它们的几何意义，了解相关的运算性质，掌握利用坐标进行计算的方法；
4. 理解平面的法向量的概念，熟练掌握平面的方程的确定方法，熟悉特殊位置的平面方程的形式；
5. 理解直线的方向向量的概念，熟练掌握直线的对称方程、一般方程及参数方程的确定方法；
6. 了解直线、平面间的夹角的定义，了解点与直线、平面间的距离的定义，并掌握相关的计算；
7. 了解平面束的概念，并会用平面束处理相关几何问题。

## 二. 矩阵和行列式

1. 理解矩阵和  $n$  维向量的概念；
2. 理解矩阵和向量的加法、数乘、乘法运算及矩阵的转置及相关的运算性质，熟练掌握上述运算；
3. 理解零矩阵、单位矩阵、数量矩阵、对角阵、三角阵、对称矩阵、反对称矩阵的定义及其运算性质；
4. 理解二阶、三阶行列式的定义，熟练掌握它们的计算；
5. 知道全排列及其的逆序数的定义，会计算排列的逆序数，知道对换及对换对于排列的奇偶性的影响；

6. 了解  $n$  阶行列式的定义, 会用行列式的定义计算简单的  $n$  阶行列式;
7. 掌握行列式的性质, 熟练掌握行列式按行、列展开公式, 了解行列式的乘法定理;
8. 掌握不很复杂的低阶行列式及简单的高阶行列式的计算;
9. 理解矩阵的可逆性的概念, 掌握矩阵可逆的判别方法, 掌握逆矩阵的性质;
10. 了解伴随矩阵的概念, 熟练掌握伴随矩阵的性质, 掌握利用伴随矩阵计算矩阵的逆矩阵;
11. 理解 Cramer 法则, 掌握用 Cramer 法则求方程组的解的方法;
12. 了解分块矩阵的运算性质, 掌握简单的分块矩阵的运算规则。

### 三. 矩阵的初等变换与 Gauss 消元法

1. 理解矩阵的初等行变换与 Gauss 消元法的关系, 掌握求解线性方程组的 Gauss 消元法;
2. 理解向量组的线性组合和线性表示的概念及相关的性质, 掌握相关计算;
3. 理解向量组的线性相关、线性无关的概念以及有关性质, 掌握向量组的线性相关性的判别方法;

4. 理解向量组的极大线性无关组和秩的概念,理解向量组的秩的性质,熟练掌握向量组的秩的计算,并会求向量组的极大线性无关组;
5. 理解矩阵的秩的概念,理解向量组的秩与矩阵的秩间的关系,熟练掌握矩阵的秩的计算;
6. 理解齐次线性方程组有非零解的充要条件,理解齐次线性方程组的基础解系的概念,熟练掌握基础解系的求法;
7. 理解非齐次线性方程组有解的充要条件,理解非齐次线性方程组与相应的齐次线性方程组的解之间的关系,熟练掌握非齐次线性方程组的通解的表达式的求法;
8. 理解矩阵的初等变换及矩阵的等价关系的概念
9. 了解矩阵的等价标准形的概念,理解矩阵的初等变换与矩阵的乘法间的关系;
10. 了解可逆矩阵与初等矩阵间的关系,掌握用初等变换求逆矩阵的方法,会求简单的矩阵方程的解;
11. 知道矩阵的分块初等变换,并会利用这一方法解决简单的矩阵问题。

#### 四. 向量空间

1. 知道向量空间、子空间的概念，会判断向两空间的子集是否构成子空间；
2. 知道向量空间的基及维数的概念，会求由一向量组生成的子空间及一齊次线性方程组的解空间的基及它们的维数；
3. 知道坐标变换公式，会求两组基间的过渡矩阵；
4. 理解向量的内积、长度及正交性的概念，了解向量内积的基本性质；
5. 理解向量空间的标准正交基的概念，熟练掌握Schmidt 正交化方法；
6. 理解正交矩阵的概念，了解正交矩阵的性质。

#### 五. 相似矩阵和矩阵的特征值、特征向量

1. 理解矩阵的特征值、特征向量的概念，熟练掌握矩阵的特征多项式、特征值、特征向量的求法；
2. 熟练掌握特征多项式、特征值、特征向量的性质；
3. 了解矩阵的迹的概念，了解矩阵的迹、行列式与其特征值间的关系；
4. 理解矩阵的相似性概念，理解两矩阵相似的必要条件；
5. 熟练掌握矩阵相似于对角阵的充要条件，并熟练掌

握相应的对角阵及相似变换矩阵的求法；

6. 熟练掌握实对称矩阵的性质，熟练掌握求正交矩阵将实对称矩阵化成对角阵的方法。

## 六. 二次型与二次曲面

1. 理解二次型及二次型的矩阵的概念，熟练掌握二次型的矩阵的求法；
2. 理解可逆线性变换及二次型的标准形的概念，了解二次型的规范形的概念；
3. 理解矩阵间的合同关系的概念；
4. 理解二次型在正交变换下的标准形与二次型的矩阵的特征值的关系，熟练掌握用正交变换化二次型为标准形的方法，掌握用可逆线性变换化二次型为标准形的方法；
5. 理解惯性定理的结论及其几何含义，掌握判断实对称矩阵合同的方法；
6. 理解正定性的概念，熟练掌握判断二次型、实对称矩阵是否正定的方法；
7. 熟悉一般曲面的概念，熟悉球面、柱面、旋转面、锥面等重要曲面的几何特征以及它们的方程的特点；
8. 知道二次曲线的参数方程；



9. 熟悉二次曲面的标准方程，以及它们的几何特征；
10. 掌握二次曲面的交线以及这些交线在坐标平面上的投影曲线的方程的求法；
11. 掌握一些简单的几何图形的草图的作法。

**注：**对于概念与结论分知道、了解、理解三个层次，对方法分会、掌握、熟练掌握三个层次。

# 《线性代数》教学大纲

32 学时

本课程是以矩阵为主要工具研究数量间的线性关系的基础理论课程，也是本科阶段关于离散量数学的最重要的课程。本课程的目的是使学生熟悉线性代数的基本概念，掌握线性代数的基本理论和基本方法，提高其抽象思维、逻辑思维的能力，为用线性代数的理论解决实际问题打下基础。

## 教学内容和基本要求

### 一. 行列式

1. 理解二阶、三阶行列式的定义，熟练掌握它们的计算；
2. 知道全排列及全排列的逆序数的定义，会计算排列的逆序数，知道对换及对换对于排列的奇偶性的影响；

3. 了解  $n$  阶行列式的定义, 会用行列式的定义计算简单的  $n$  阶行列式;
4. 掌握行列式的性质, 熟练掌握行列式按行、列展开公式, 了解行列式的乘法定理;
5. 掌握不很复杂的低阶行列式及简单的高阶行列式的计算;
6. 理解 Cramer 法则, 掌握用 Cramer 法则求方程组的解的方法。

## 二. 矩阵

1. 理解矩阵的概念;
2. 理解矩阵的加法、数乘、乘法运算及矩阵的转置及相关的运算性质, 熟练掌握上述运算;
3. 理解零矩阵、单位矩阵、数量矩阵、对角阵、三角阵、对称矩阵、反对称矩阵的定义及其运算性质;
4. 理解矩阵的可逆性的概念, 掌握矩阵可逆的判别方法, 掌握逆矩阵的性质;
5. 了解伴随矩阵的概念, 熟练掌握伴随矩阵的性质, 掌握利用伴随矩阵计算矩阵的逆矩阵;
6. 了解分块矩阵的运算性质, 掌握简单的分块矩阵的运算规则。

### 三. 矩阵的初等变换与 Gauss 消元法

1. 理解矩阵的初等行变换与 Gauss 消元法的关系, 理解矩阵的初等变换及矩阵的等价关系的概念;
2. 了解矩阵的等价标准形的概念, 理解矩阵的初等变换与矩阵的乘法间的关系;
3. 了解可逆矩阵与初等矩阵间的关系, 掌握用初等变换求逆矩阵的方法, 会求简单的矩阵方程的解;
4. 理解矩阵的秩的概念, 熟练掌握矩阵的秩的求法, 理解矩阵运算前后的秩之间的关系;
5. 熟练掌握用矩阵的秩判断线性方程组的相容性及讨论解的情况的方法。

### 四. 向量组的线性相关性

1. 理解向量的概念, 理解线性组合和线性表示的概念;
2. 理解向量组的线性相关、线性无关的概念以及有关性质, 掌握向量组的线性相关性的判别方法;
3. 理解向量组的秩的概念, 理解向量组的秩与矩阵的秩间的关系, 熟练掌握向量组的秩的性质;
4. 理解向量组的最大线性无关组的概念, 理解向量组的最大线性无关组与向量组的秩间的关系, 会求向量组的最大线性无关组;

5. 理解齐次线性方程组有非零解的充要条件, 理解齐次线性方程组的基础解系的概念, 熟练掌握基础解系的求法;
6. 理解非齐次线性方程组有解的充要条件, 理解非齐次线性方程组与相应的齐次线性方程组的解之间的关系, 熟练掌握非齐次线性方程组的通解的表达式的求法;
7. 知道向量空间、子空间、向量空间的基及维数的概念, 会判断向两空间的子集是否构成子空间, 会求由一向量组生成的子空间及一齐次线性方程组的解空间的基及它们的维数;
8. 知道坐标变换公式, 会求两组基间的过渡矩阵。

## 五. 相似矩阵和二次型

1. 理解向量的内积、长度及正交性的概念, 了解向量内积的基本性质;
2. 理解向量空间的标准正交基的概念, 熟练掌握Schmidt 正交化方法;
3. 理解正交矩阵的概念, 了解正交矩阵的性质;
4. 理解矩阵的特征值、特征向量的概念, 熟练掌握矩阵的特征多项式、特征值、特征向量的求法, 理解特征多项式、特征值、特征向量的性质;

5. 理解矩阵的相似性概念,理解两矩阵相似的必要条件;
  6. 熟练掌握矩阵相似于对角阵的充要条件,并熟练掌握相应的对角阵及相似变换矩阵的求法;
  7. 熟练掌握实对称矩阵的性质,熟练掌握求正交矩阵将实对称矩阵化成对角阵的方法;
  8. 理解二次型及二次型的矩阵的概念,熟练掌握二次型的矩阵的求法;
  9. 理解可逆线性变换及二次型的标准形的概念,了解二次型的规范形的概念;
  10. 理解矩阵间的合同关系的概念;
  11. 理解二次型在正交变换下的标准形与二次型的矩阵的特征值的关系,熟练掌握用正交变换化二次型为标准形的方法,掌握用可逆线性变换化二次型为标准形的方法;
  12. 理解惯性定理的结论,掌握判断实对称矩阵合同的方法;
  13. 理解正定性的概念,熟练掌握判断二次型、实对称矩阵是否正定的方法。
- 注:** 对于概念与结论分知道、了解、理解三个层次,对方法分会、掌握、熟练掌握三个层次。

# 几何与代数教学大纲

(总学分：4；总上课学时：64；上机时数：0)

## 一. 课程的性质与目的

本课程是工科电类专业学生本科阶段关于几何及离散量数学重要的数学基础课程。本课程的目的使学生熟悉空间解析几何与线性代数基本概念，掌握用坐标及向量的方法讨论几何图形的方法，熟悉空间中简单的几何图形的方程及其特点，掌握线性代数的基本理论和基本方法，熟悉矩阵运算的基本规律和基本技巧，熟悉矩阵在等价关系、相似关系、合同关系下的标准形，提高其空间想象能力、抽象思维和逻辑思维的能力，为后继课程的学习做好准备，并为用线性代数的理论解决实际问题打下基础。

## 二. 课程内容的教学要求

### 1. 向量代数 平面与直线

- (1) 理解几何向量的概念及其加法、数乘运算，熟悉运算规律，了解两个向量共线和三个向量共面的充分必要条件；
- (2) 理解空间直角坐标系的概念，理解仿射坐标系

的概念，掌握向量的坐标表示；

- (3) 理解向量的数量积、向量积和混合积的概念，理解它们的几何意义，了解相关的运算性质，掌握利用坐标进行计算的方法；
- (4) 理解平面的法向量概念，熟练掌握平面的方程的确定方法，熟悉特殊位置的平面方程的形式；
- (5) 理解直线的方向向量的概念，熟练掌握直线的对称方程、一般方程及参数方程的确定方法；
- (6) 了解直线、平面间的夹角的定义，了解点与直线、平面间的距离的定义，并掌握相关的计算；
- (7) 了解平面束的概念，并会用平面束处理相关几何问题。

## 2. 矩阵和行列式

- (1) 理解矩阵和  $n$  维向量的概念；
- (2) 理解矩阵和向量的加法、数乘、乘法运算及矩阵的转置及相关运算性质，熟练掌握上述运算；
- (3) 理解零矩阵、单位矩阵、数量矩阵、对角阵、三角阵、对称矩阵、反对称矩阵的定义及其运算性质；
- (4) 理解二阶、三阶行列式的定义，熟练掌握它们的计算；
- (5) 知道全排列及全排列的逆序数的定义，会计算



排列的逆序数，知道对换及对换对于排列的奇偶性的影响；

- (6) 了解  $n$  阶行列式的定义，会用行列式的定义计算简单的  $n$  阶行列式；
- (7) 掌握行列式的性质，熟练掌握行列式按行、列展开公式，了解行列式的乘法定理；
- (8) 掌握利用行列式的性质计算行列式的方法；
- (9) 理解矩阵的可逆性的概念，掌握矩阵可逆的判别方法，掌握逆矩阵的性质；
- (10) 理解伴随矩阵的概念，熟练掌握伴随矩阵的性质，掌握利用伴随矩阵计算矩阵的逆矩阵；
- (11) 理解 Cramer 法则，掌握用 Cramer 法则求方程组的解的方法；
- (12) 掌握分块矩阵的运算规则，掌握典型的分块方法。

### 3. 矩阵的初等变换与 Gauss 消元法

- (1) 理解矩阵的初等行变换与 Gauss 消元法的关系，掌握求解线性方程组的 Gauss 消元法；
- (2) 理解向量组的线性组合和线性表示的概念及相关的性质，掌握相关计算；
- (3) 理解向量组的线性相关、线性无关的概念及有关性质，掌握向量组的线性相关性的判别方法；

- (4) 理解向量组的极大线性无关组和秩的概念，理解向量组的秩的性质，熟练掌握向量组的秩的计算，并会求向量组的极大线性无关组；
- (5) 理解矩阵的秩的概念，理解向量组的秩与矩阵的秩间的关系，熟练掌握矩阵的秩的计算；
- (6) 理解齐次线性方程组有非零解的充要条件，理解齐次线性方程组的基础解系的概念，熟练掌握基础解系的求法；
- (7) 理解非齐次线性方程组有解的充要条件，理解非齐次线性方程组与相应的齐次线性方程组的解之间的关系，熟练掌握非齐次线性方程组的通解的表达式的求法；
- (8) 理解矩阵的初等变换及矩阵的等价关系的概念；了解矩阵的等价标准形的概念，并会用矩阵的等价标准形讨论矩阵的性质；
- (9) 理解矩阵的初等变换与矩阵的乘法间的关系；
- (10) 了解可逆矩阵与初等矩阵间的关系，掌握用初等变换求逆矩阵的方法；
- (11) 掌握求简单的矩阵方程的解的方法；
- (12) 了解矩阵的分块初等变换，会利用这一方法解决典型的矩阵问题。

#### 4. 向量空间

- (1) 理解向量空间、子空间的概念，会判断向两空间的子集是否构成子空间，
- (2) 理解向量空间的基及维数的概念，会求由一向量组生成的子空间及一齐次线性方程组的解空间的基及它们的维数；
- (3) 知道坐标变换公式，会求两组基间的过渡矩阵；
- (4) 理解向量的内积、长度及正交性的概念，了解向量内积的基本性质；
- (5) 理解向量空间的标准正交基的概念，熟练掌握 Schimdt 正交化方法；
- (6) 理解正交矩阵的概念，了解正交矩阵的性质。

## 5. 相似矩阵和矩阵的特征值、特征向量

- (1) 理解矩阵的特征值、特征向量的概念，熟练掌握特征多项式、特征值、特征向量的求法；
- (2) 熟练掌握矩阵的特征多项式、特征值、特征向量的性质；
- (3) 理解矩阵的迹的概念，理解矩阵的迹、行列式与其特征值间的关系；
- (4) 理解矩阵的相似性概念，理解两矩阵相似的必要条件；
- (5) 理解 Hamilton-Cayley 定理及其意义，会利用 Hamilton-Cayley 定理讨论矩阵的性质，做一些

重要的计算；

- (6) 理解矩阵的最小多项式的概念，理解矩阵的最小多项式与特征多项式的关系；
- (7) 理解矩阵的 Jordan 标准形的概念，知道 Jordan 标准形的存在性定理，掌握 Jordan 标准形的唯一性定理；
- (8) 熟练掌握矩阵的 Jordan 标准形，会计算相应的相似变换矩阵；
- (9) 掌握利用矩阵的 Jordan 标准形讨论矩阵性质的方法；
- (10) 熟练掌握矩阵相似于对角阵的各种充要条件，并熟练掌握相应的对角阵及相似变换矩阵的求法；
- (11) 熟练掌握实对称矩阵的性质，熟练掌握求正交矩阵将实对称矩阵化成对角阵的方法。

## 6. 二次型与二次曲面

- (1) 理解二次型及二次型的矩阵的概念，熟练掌握二次型的矩阵的求法；
- (2) 理解可逆线性变换及二次型的标准形的概念，了解二次型的规范形的概念；
- (3) 理解矩阵间的合同关系的概念；
- (4) 理解二次型在正交变换下的标准形与二次型的

矩阵的特征值的关系，熟练掌握用正交变换化二次型为标准形的方法，掌握用可逆线性变换化二次型为标准形的方法；

- (5) 理解惯性定理的结论及其几何含义，掌握判断实对称矩阵合同的方法；
- (6) 理解正定性的概念，熟练掌握判断二次型、实对称矩阵是否正定的方法；
- (7) 熟悉一般曲面的概念，熟悉球面、柱面、旋转面、锥面等重要曲面的几何特征以及它们的方程的特点；
- (8) 知道二次曲线的参数方程；
- (9) 熟悉二次曲面的标准方程及其图形特征；
- (10) 掌握二次曲面的交线以及这些交线在坐标平面上的投影曲线的方程的求法；
- (11) 掌握一些简单的几何图形的草图的作法。

### 三. 能力培养要求

- 1. 逻辑思维能力的培养：主要根据线性代数理论特有的逻辑体系，尤其是通过向量组的线性相关性、矩阵的等价、相似、相合关系等内容的教学，培养学生的逻辑思维能力。
- 2. 抽象思维能力的培养：在要求学生理解线性代数

特有的思维方式的同时，让学生体会如何从具体的实际问题以及直观的几何问题抽象、概括、提炼出代数问题，进而寻求适用于解决更一般问题的代数方法。

3. 代数运算能力：着重培养学生的矩阵运算能力。
4. 空间想象能力的培养：利用几何空间中向量之间的线性关系以及一些典型的几何图形的特点，结合线性代数方法，注重对学生空间想象能力的培养，使学生具备初步的根据解析表达式想象并作出简单空间图形的能力。
5. 叙述表达能力的培养：注重培养学生用代数的语言表达自己的思想、描述具体的数学问题的能力，并特别要注意表达方式的条理性、逻辑性和准确性。
6. 自我学习能力的培养：利用相关内容的教学，让学生体会代数的思维特点，体会代数的思维方式，增强自我学习的能力。
7. 实践创新能力的培养：培养学生用代数方法思考、解决实际问题的能力。

**注：**对于概念与结论分知道、了解、理解三个层次，对方法分会、掌握、熟练掌握三个层次。

01-02 学年第二学期

## 几何与代数期末考试试卷

一 (30%) 填空题:

1. 设  $\alpha = (1, 2)$ ,  $\beta = (1, -1)$ , 则  $\alpha\beta^T =$  \_\_\_\_\_;

$$\alpha^T \beta = \text{_____}; \quad (\alpha^T \beta)^{100} = \text{_____};$$

2. 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ , 则行

$$\text{列式 } |AB^{-1}| = \text{_____};$$

3. 若向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 则当参数  $k$  \_\_\_\_\_ 时,

$$\alpha_1 - \alpha_2, k\alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1 \text{ 也线性无关};$$

4. 矩 阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  的 伴 随 矩 阵

$$\underline{A^* = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix};}$$

5. 设矩阵  $A$  及  $A+E$  均可逆, 则  $G = E - (A+E)^{-1}$ ,

且  $G^{-1} =$  \_\_\_\_\_;

6. 与向量  $\alpha = (1, 0, 1)$ ,  $\beta = (1, 1, 1)$  均正交的单位向量为 \_\_\_\_\_;

7. 四点  $A(1, 1, 1), B(1, 1, x), C(2, 1, 1), D(2, y, 3)$  共面的充要条件为 \_\_\_\_\_ ;

8. 设实二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + kx_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3$ ,

则当  $k$  满足条件 \_\_\_\_\_ 时,  $f(x_1, x_2, x_3) = 1$  是椭

球面; 当  $k$  满足条件 \_\_\_\_\_ 时,  $f(x_1, x_2, x_3) = 1$  是

柱面。

二 (8%) 记  $\pi_1$  为由曲线  $\begin{cases} z = y^2 - 3 \\ x = 0 \end{cases}$  绕  $z$ -轴旋转所产生



的旋转曲面,  $\pi_2$  为以  $\pi_1$  与平面  $\pi_3: x+y+z=1$  的交线为准线, 母线平行于  $z$ -轴的柱面。试给出曲面  $\pi_1$  及  $\pi_2$  的方程, 并画出  $\pi_1$  被  $\pi_3$  所截有界部分在  $x-y$  平面上的投影区域的草图 (应标明区域边界与坐标轴的交点)。

三 (8%) 求经过直线  $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ -x+y-2z=1 \end{cases}$  且与

$x-y$  平面垂直的平面方程。

四 (12%) 求矩阵方程  $XA=2X+B$  的解, 其中,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

五 (12%) 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 2 \\ -x_2 + px_3 - 2x_4 = q \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + (p+3)x_4 = -1 \end{cases}$$

1. 问: 当参数  $p, q$  满足什么条件时, 方程组无解、有唯一解、有无穷多解?

2. 当方程组有无穷多解时, 求出其通解。

六 (12%) 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & k & -2 \end{pmatrix}$ , 已知

$$\text{秩}(A) = 2。$$

1. 求参数  $k$  的值;

2. 求一  $4 \times 2$  矩阵  $B$ , 使得  $AB = O$ , 且  $\text{秩}(B) = 2$ ;

3. 问: 是否存在秩大于 2 的矩阵  $M$  使得  $AM = O$ ?  
为什么?

七 (12%) 设实对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 与 } B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & l & \\ & & 1 \end{pmatrix} \text{ 相似.}$$

1. 求参数  $k, l$  的值;

2. 求一正交阵  $Q$ , 使得  $Q^T A Q = B$ .

八 (6%) 已知  $n$  阶方阵  $A$  相似于对角阵, 并且,  $A$  的特征向量均是矩阵  $B$  的特征向量。证明:  $AB = BA$ 。

02-03 学年第二学期

## 几何与代数期末考试试卷

一. 填空题、单选题 (每小题 3 分, 共 36 分)

$$1. \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} [5 \ 1 \ -3] \right\}^{2002} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$2. \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \underline{\hspace{2cm}};$$

3. 若  $A$  是正交矩阵, 则行列式  $|A^3 A^T| = \underline{\hspace{2cm}};$

4. 空间四点  $A(1,1,1)$ ,  $B(2,3,4)$ ,  $C(1,2,k)$ ,

$D(-1,4,9)$  共面的充要条件是  $k = \underline{\hspace{2cm}};$

5. 点  $P(2,-1,1)$  到直线  $l: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$  的距离为  $\underline{\hspace{2cm}};$

6. 若 4 阶方阵  $A$  的秩为 2, 则伴随矩阵  $A^*$  的秩为\_\_;

7. 若可逆矩阵  $P$  使  $AP = PB$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ , 则方

阵  $A$  的特征多项式为\_\_;

8. 若 3 阶方阵  $A$  使  $I - A, 2I - A, A + 3I$  都不可逆, 则

$A$  与对角阵\_\_\_\_\_相似 (其中,  $I$  是 3 阶单位阵);

9. 若  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$  与对角阵相合, 则  $(x, y) =$ \_\_;

10. 设  $A = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ , 其中列向量  $A_1, A_2, A_4$  线

性无关,  $A_3 = 2A_1 - A_2 + A_4$ , 则齐次线性方程组

$Ax = 0$  的一个基础解系是\_\_;

11. 设  $A, B$  都是 3 阶方阵,  $AB = O$ ,  $r(A) - r(B) = 2$ ,

则  $r(A) + r(B) =$  ( )

(A) 5;            (B) 4;            (C) 3;            (D) 2

12. 设  $n$  阶矩阵  $A$  满足  $A^2 = 2A$ , 则以下结论中未必

成立的是 ( )

(A)  $A-I$  可逆, 且  $(A-I)^{-1} = A-I$ ;

(B)  $A=O$  或  $A=2I$ ;

(C) 若 2 不是  $A$  的特征值, 则  $A=O$ ;

(D)  $|A|=0$  或  $A=2I$ 。

二. 计算题 (每小题 8 分, 共 24 分)

$$13. \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

14. 求直线  $l: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$  在平面

$\pi: x+y-2z+1=0$  上的垂直投影直线方程.

15. 设  $XA = AB + X$ , 其中  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

$$B = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \text{ 求 } X^{99}.$$

三. 计算题、解答题 (三小题共 32 分)

16. 设向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \\ b \end{pmatrix}$$

$V = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  是  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  生成的空间. 已知

$\dim(V) = 2, \beta \in V.$

(1) 求  $a, b$ ;

(2) 求  $V$  的一个基, 并求  $\beta$  在此基下的坐标;

(3) 求  $V$  的一个标准正交基.

17. 用正交变换化简二次曲面方程

$$x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 1$$

求出正交变换和标准形) 并指出曲面类型.

18. 设  $D$  为由  $yo z$  平面中的直线  $z = 0$ , 直线

$z = y, (y \geq 0)$  及抛物线  $y + z^2 = 2$  围成的平面区

域. 将  $D$  绕  $y$  轴旋转一周得旋转体  $\Omega$ . (1) 画出平面区域  $D$  的图形; (2) 分别写出围成  $\Omega$  的两块曲面  $S_1, S_2$  的方程; (3) 求  $S_1, S_2$  的交线  $l$  在  $zox$  平面上的投影曲线  $C$  的方程; (4) 画出  $S_1, S_2$  和  $l$ ,  $C$  的图形.

四. 证明题、解答题 (每小题 4 分, 共 8 分)

19. 设  $\eta$  是线性方程组  $Ax = b$  的一个解,  $b \neq 0$ ,  $\xi_1, \xi_2$  是导出组  $Ax = 0$  的基础解系. 证明:  
 $\eta, \xi_1 + \eta, \xi_2 + \eta$  线性无关.

20. 设  $\alpha$  是 3 维非零实列向量,  $\|\alpha\| = \sqrt{2}$ . 又  
 $A = \alpha\alpha^T$ . (1) 求  $A$  的秩; (2) 求  $A$  的全部特征值; (3) 问  $A$  是否与对角阵相似? (4) 求  
 $|I - A^3|$ .

03-04 学年第二学期

## 几何与代数期末考试试卷

### 一. (24%) 填空题

1. 若向量  $\vec{\alpha} = \vec{i} + a\vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{\beta} = b\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{\gamma} = \vec{k}$   
共面, 则参数  $a, b$  满足\_\_\_\_\_.

2. 过点  $P(1,2,1)$  且包含  $x$  轴的平面方程为\_\_\_\_\_.

3. 已知矩阵  $A$  满足  $A^2 + 2A - 3I = O$ , 则  $A$  的逆矩阵  $A^{-1} =$ \_\_\_\_\_.

4. 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ , 则行列式  $|A^2 B^{-1}| =$ \_\_\_\_\_.

5. 设向量组  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ -1 \end{pmatrix}$ , 则当  $k$  \_\_\_\_\_ 时,



$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关.

6. 向量空间  $R^2$  中向量  $\eta = (2, 3)$  在  $R^2$  的基  $\alpha = (1, 1)$ ,

$\beta = (0, 1)$  下的坐标为\_\_\_\_\_.

7. 满足下述三个条件的一个向量组为\_\_\_\_\_, 这三个条件是: ①它是线性无关的; ②其中的每个向量均与向量  $\alpha = (1 \ 2 \ 1)$  正交; ③凡与  $\alpha$  正交的向量均可由它们线性表示.

8. 已知  $2 \times 2$  矩阵  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ , 若对任意 2 维列向量  $\eta$

有  $\eta^T A \eta = 0$ , 则  $a, b, c, d$  满足条件\_\_\_\_\_.

二. (12%) 假设矩阵  $A, B$  满足  $A - B = AB$ , 其

中  $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . 求  $B$ .

三. (15%) 设向量  $\alpha_1 = (a \ 2 \ 10)^T$ ,

$\alpha_2 = (-2 \ 1 \ 5)^T$ ,  $\alpha_3 = (-1 \ 2 \ 4)^T$ ,

$\beta = (1 \quad b \quad c)^T$ . 问: 当参数  $a, b, c$  满足什么条件时

1.  $\beta$  能用  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  唯一线性表示?
2.  $\beta$  不能用  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示?
3.  $\beta$  能用  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 但表示法不唯一? 求

这时  $\beta$  用  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示的一般表达式.

四. (8%) 设实二次型

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2axy + 2ayz$$

问: 实数  $a$  满足什么条件时, 方程  $f(x, y, z) = 1$  表示直角坐标系中的椭球面?

五. (12%) 设 3 阶方阵  $A$  的特征值为  $2, -2, 1$ ,

$$\text{矩阵 } B = aA^3 - 4aA + I.$$

1. 求参数  $a$  的值, 使得矩阵  $B$  不可逆;
2. 问: 矩阵  $B$  是否相似于对角阵? 请说明你的理由.

六. (12%) 已知二次曲面  $S_1$  的方程为:

$$z = 3x^2 + y^2, \quad S_2 \text{ 的方程为: } z = 1 - x^2.$$

1. 问:  $S_1$ ,  $S_2$  分别是哪种类型的二次曲面?
2. 求  $S_1$  与  $S_2$  的交线在  $xOy$  平面上的投影曲线方程;
3. 画出由  $S_1$  及  $S_2$  所围成的立体的草图.

七. (10%) 假设  $3 \times 3$  实对称矩阵  $A$  的秩为 2, 并

且  $AB = C$ , 其中  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . 求

$A$  的所有特征值及相应的特征向量; 并求矩阵

$A$  及  $A^{9999}$ .

八. (7%) 证明题:

1. 设  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$  是齐次线性方程组  $Ax = \theta$  的

线性无关的解向量,  $\beta$  不是其解向量. 证明:

$\beta, \beta + \eta_1, \beta + \eta_2, \dots, \beta + \eta_t$  也线性无关.

2. 设  $A$  是  $n$  阶正定矩阵, 证明:  $|I + A| > 1$ .

## 几何与代数期末考试试卷

### 一、 (24%)填空题

1. 以  $A(1,1,2)$ ,  $B(-2,-1,1)$ ,  $C(-1,1,-1)$  为顶点的三角形的面积为\_\_\_\_\_;

2. 设 3 阶 矩 阵  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  ,  
 $B = (\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 - 2\alpha_3, \alpha_1)$  。 若  $A$  的 行 列 式  $|A| = 3$  , 则  $B$  的行列式  $|B| =$ \_\_\_\_\_;

3. 若向量  $\alpha = (1,0,1)$ ,  $\beta = (2,1,-1)$ ,  $\gamma = (-1,1,k)$  共面, 则参数  $k =$ \_\_\_\_\_;

4. 若  $A$  为  $n$  阶方阵, 则方阵  $B = \begin{pmatrix} I & O \\ A & 2I \end{pmatrix}$  的逆矩阵  $B^{-1} =$ \_\_\_\_\_;

5. 已知向量  $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  是矩阵  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$  的特征

向量, 则参数  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ , 相应的特征值等于  $\underline{\hspace{2cm}}$ ;

6. 假 设 矩 阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 则 在 实 矩 阵

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 中, 与 } A \text{ 相抵的有 } \underline{\hspace{2cm}}; \text{ 与 } A \text{ 相似}$$

的有  $\underline{\hspace{2cm}}$ ; 与  $A$  相合的有  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

二、 (8%) 计算行列式 
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x & 1 \\ x & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ x & x & x & 1 \end{vmatrix}.$$

三、 (10%) 假设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

求矩阵方程  $3X = B + XA$  的解.

四、（14%）假设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. 已知齐次线性方程组  $Ax = \theta$  的基础解系中有两个线性无关的解向量. 试确定这时参数  $\lambda$  的值, 并求这时  $Ax = \theta$  的一个基础解系.
2. 若在非齐次线性方程组  $Ax = b$  的解集中, 存在两个线性无关的解向量, 但不存在更多的线性无关的解向量, 试确定这时参数  $\lambda$  及  $a$  的值, 并求  $Ax = b$  的通解.

五、（10%）已知直线  $l$  过点  $P(1,1,1)$ , 与平面

$\pi: x + y - z = 1$  平行, 且与直线

$\lambda: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$  相交. 求直线  $l$  的方向向量,

并写出直线  $l$  的方程.

六、（10%）假设二次曲面  $\pi_1$  的方程为:

$x^2 + 4y^2 = 2z$ ; 平面  $\pi_2$  的方程为:  $x = z - 1$ .

1.  $\pi_1$  与  $\pi_2$  的交线向  $xy$  平面作投影所得的投影曲线  $l$  的方程为\_\_\_\_\_;
2. 该投影曲线绕  $x$  轴旋转所得的旋转曲面  $\pi$  的方程为\_\_\_\_\_;
3. 在坐标系中画出投影曲线  $l$  的草图 (请给坐标轴标上名称);
4. 在坐标系中画出  $\pi_1$  与  $\pi_2$  所围成的立体的草图 (请给坐标轴标上名称).

七、 (14%) 设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2kx_1x_3$$

1. 试就参数  $k$  不同的取值范围, 讨论二次曲面  $f(x_1, x_2, x_3) = 1$  的类型;
2. 假设  $k > 0$ . 若经正交变换  $X = QY$ ,  $f(x_1, x_2, x_3)$  可以化成标准形  $2y_1^2 + 2y_2^2 - 4y_3^2$ , 求参数  $k$  及一个合适的正交矩阵  $Q$ .

八、 (10%) 证明题

1. 假设  $n$  维向量  $\beta_1 = a\alpha_1 + b\alpha_2$ ,  $\beta_2 = c\alpha_1 + d\alpha_2$ 。

若  $\beta_1, \beta_2$  线性无关, 证明:  $\alpha_1, \alpha_2$  线性无关, 并且,

行列式  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ 。

2. 假设  $A, B$  都是  $n$  阶实对称矩阵, 并且,  $A$  的特征值均大于  $a$ ,  $B$  的特征值均大于  $b$ , 证明:  $A+B$  的特征值均大于  $a+b$ 。



## 几何与代数期末考试试卷

一. (24%)填空题

1. 直角坐标系中向量  $\alpha = (1, 1, 2)$  与  $\beta = (1, 0, 1)$  的向量积为\_\_\_\_\_;

2. 过点  $P(1, 0, 1)$  且与直线  $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$  垂直的平面的方程为\_\_\_\_\_;

3. 设  $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , 则

$$P^{10} A Q^{10} = \underline{\hspace{2cm}};$$

4. 若  $3 \times 3$  矩阵  $A$  的秩为 2,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是线性方程组  $Ax = b$  的解向量, 并且  $\alpha_1 = (2, 3, 4)^T$ ,  $\alpha_2 + \alpha_3 = (2, 4, 6)^T$ , 则线性方程组  $Ax = b$  的通解是\_\_\_\_\_;

5. 设  $\alpha$  是  $n(n > 1)$  维列向量, 则  $n$  阶方阵  $A = \alpha\alpha^T$  的

行列式 $|A|$ 的值为\_\_\_\_\_;

6. 设 $A$ 是 $3 \times 3$ 矩阵, 若矩阵 $I + A, 2I - A, 2I - 3A$

均不可逆, 则行列式 $|A|$  = \_\_\_\_\_ ;

7. 若 $3$ 是 $n \times n$ 矩阵 $A$ 的特征值,  $|A| = 2, A^*$ 是 $A$ 的伴

随矩阵, 则矩阵 $A^*$ 的一特征值为\_\_\_\_\_;

8. 若 $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2kxz = 1$ 表示一单叶双曲面,

则 $k$ 满足条件\_\_\_\_\_。

二 (12%) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$

求 $A^{-1}, B^{-1}$ 以及矩阵 $X$ , 使 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} C \\ O \end{pmatrix}$ 。式中的

$O$ 均指相应的零矩阵。

三 (10%) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 问: 参数 $l, m$

满足什么条件时, 向量组 $\alpha_1 + l\alpha_2, \alpha_2 + m\alpha_3,$

$\alpha_1 + \alpha_3$ 也线性无关?

四 (14%) 已知空间直角坐标系中三平面的方程分别为:

$$\pi_1: x + y + 2z = 1,$$

$$\pi_2: x + \lambda y + z = 2,$$

$$\pi_3: \lambda x + y + z = 1 + \lambda$$

1. 问: 当  $\lambda$  取何值时这三个平面交于一点? 交于一直线? 没有公共交点?
2. 当它们交于一直线时, 求直线的方程。

五 (12%) 已知  $3 \times 3$  矩阵  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -a & 2 & a+3 \\ -a-3 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$  有一

个二重特征值。

1. 试求参数  $a$  的值, 并讨论矩阵  $A$  是否相似于对角阵。
2. 如果  $A$  相似于对角阵, 求可逆矩阵  $P$ , 使得

$$P^{-1}AP = \Lambda \text{ 是对角阵。}$$

六 (10%) 假设  $A, B$  是实对称矩阵。证明: 分块矩

阵  $M = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$  是正定矩阵的充分必要条件是

$A, B$  都是正定矩阵。

七（8%）由与平面  $z = -1$  及点  $M(0,0,1)$  等距离运动的

动点  $P(x,y,z)$  所生成的曲面记为  $\pi_1$ ，将  $yOz$  平面上

曲线  $\begin{cases} y^2 + z = 5 \\ x = 0 \end{cases}$  以  $z$  轴为旋转轴所生成的旋转曲面

记为  $\pi_2$ 。则：

1.  $\pi_1$  的方程是：\_\_\_\_\_； $\pi_2$  的方程是：\_\_\_\_\_；
2.  $\pi_1$  与  $\pi_2$  的交线在  $xOy$  平面上的投影曲线方程是：\_\_\_\_\_；
3. 在坐标系中画出由这两个曲面所围成的有限立体的简图。

八（10%）证明题：

1. 若  $2 \times 2$  实矩阵  $A$  的行列式  $|A| < 0$ ，证明： $A$  必定相似于对角阵。
2. 假设  $n \times n$  实对称矩阵  $A$  的特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ， $\alpha$  是  $A$  的属于特征值  $\lambda_1$  单位特征向量，矩阵  $B = A - \lambda_1 \alpha \alpha^T$ 。证明： $B$  的特征值为  $0, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 。

## 06-07 第二学期

### 几何代数期末考试试卷

一. (30%)填空题 ( $I$  表示单位矩阵)

1. 向量  $\alpha = (1, 0, -1), \beta = (-1, 1, 0), \gamma = (1, 1, k)$

共面时参数  $k$  的值为\_\_\_\_, 此时, 与这三个向量都正交的一个单位向量是\_\_\_\_\_;

2. 向量组

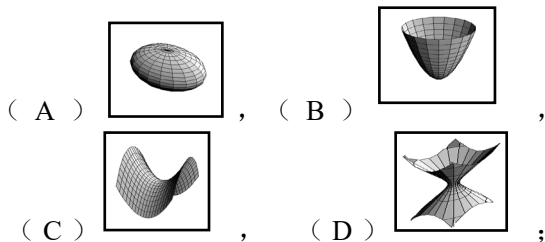
$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ 的秩}$$

等于\_\_\_\_, 这个向量组的一极大线性无关组是\_\_;

3. 假设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (2, t)$ , 若1是  $A$  的特征值, 则

参数  $t$  的值为\_\_\_\_\_;

4. 二次型  $f(x, y, z) = x^2 + 2z^2 + 2xy$  的正、负惯性指数分别为\_\_\_\_, 下列图形中, 能表示二次曲面  $f(x, y, z) = 1$  的图形的标号为\_\_\_\_\_:



5. 由曲线  $\begin{cases} z = x^2 \\ y = 0 \end{cases}$  绕  $z$ -轴旋转所产生的旋转曲面方程为\_\_\_\_\_;

6. 若向量组  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$  与向量组

$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$  等价, 则参数  $a, b$  必定满足条件\_\_\_\_\_;

7. 若  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$  与  $B = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  相似, 则

$(a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

二. (10%) 已知向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性无关, 问:

当参数  $p$  取何值时, 向量组

$$\beta_1 = \alpha_2 + 2\alpha_3, \beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2,$$

$$\beta_3 = \alpha_3 + 2\alpha_4, \beta_4 = p\alpha_1 + \alpha_4$$

也线性无关?

三. (15%) 假设  $p, q$  是参数, 空间直角坐标系中平面

$\pi_1, \pi_2, \pi_3$  的方程分别如下:

$$\pi_1: x - y + 2z = 1,$$

$$\pi_2: 2x + py + z = 2,$$

$$\pi_3: 3x + 5y + 2z = q$$

(1) 问: 当  $p, q$  取何值时, 这三个平面的公共点构成一直线?

(2) 当它们的公共点构成一直线时, 求直线的方向向量, 并给出该直线的对称方程。

四. (15%) 设  $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

并且  $AP = P\Lambda$ , 求  $A$  及  $A^{99}$ 。

五. (15%) 已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2.$$

(1) 写出二次型  $f$  的矩阵;

(2) 求一个正交变换  $x = Qy$ , 把  $f$  化为标准形, 并给出该标准形;

(3) 假设  $a > 0$ , 求  $t = \max_{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a} f(x_1, x_2, x_3)$  的值.

六. (15%) 证明题:

1. 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq I$ , 其中,

$a + d = 2, ad - bc = 1$ . 证明:  $A$  不与任何对角阵相似.

2. 假设  $s \times n$  矩阵  $A$  的秩等于  $r$ , 并且非齐次线性方程组  $Ax = b$  ( $b \neq \theta$ ) 有解. 证明:  $Ax = b$  有并且只有  $n - r + 1$  个线性无关的解向量.

3. 若  $A, B$  都是可逆的实对称矩阵, 且  $A, B, A - B$  都是正定矩阵, 证明:  $B^{-1} - A^{-1}$  也是正定矩阵.



01-02 学年第三学期

## 线性代数期末考试试卷

一 (33%) 填空题 ( $E$  表示单位矩阵,  $O$  表示零矩阵,  $A^T$  指矩阵  $A$  的转置矩阵):

1. 设  $\alpha = (1, 2)$ ,  $\beta = (1, -1)$ , 则  $\alpha\beta^T =$  \_\_\_\_\_;

$(\alpha^T \beta)^{999} =$  \_\_\_\_\_;

2. 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ , 则行列

式  $|AB^{-1}| =$  \_\_\_\_\_;

3. 若向量组  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ -1 \end{pmatrix}$ , 则当参数

$k$  \_\_\_\_\_ 时,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关;

4.  $2 \times 2$  矩阵  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  的伴随矩阵  $A^* = \underline{\hspace{2cm}}$ ;
5. 设矩阵  $A$  及  $A + E$  均可逆,  $G = E - (A + E)^{-1}$ , 则  
 $G^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$ ;
6. 分块矩阵  $\begin{pmatrix} A & E \\ E & O \end{pmatrix}$  的逆矩阵为  $\underline{\hspace{2cm}}$ ;
7. 设  $A$  是  $6 \times 5$  矩阵. 若齐次线性方程组  $Ax = \theta$  的解空间是 2 维的, 则齐次线性方程组  $A^T x = \theta$  的解空间是  $\underline{\hspace{2cm}}$  维的;
8. 与向量  $\alpha = (1, 0, 1)^T$ ,  $\beta = (1, 1, 1)^T$  均正交的一个单位向量为  $\underline{\hspace{2cm}}$ ;
9. 已知矩阵  $M = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 3 & k \end{pmatrix}$ ,  $A = MM^T$ , 则当数  $k$  满足条件  $\underline{\hspace{2cm}}$  时,  $A$  是正定的;
10. 若  $n$  阶实对称矩阵  $A$  满足  $A^2 - 3A + 2E = O$ , 且有两个不同的特征值, 则当参数  $k$  满足条件  $\underline{\hspace{2cm}}$  时,

矩阵  $E + kA$  是正定的;

二 (12%) 求矩阵方程  $XA = 2X + B$  的解, 其中,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

三 (12%) 设 3 阶方阵  $A$  有特征值 1(二重)和  $-1$ ,

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 是其相应于特征值 } 1 \text{ 的特征向}$$

$$\text{量, } \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 是其相应于特征值 } -1 \text{ 的特征向量。}$$

1. 求  $A$  及  $A^{999}$ 。

2. 若 3 阶实对称矩阵  $B$  的特征值也是 1(二重)和  $-1$ ,

证明:  $A$  与  $B$  必定相似。

四 (12%) 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 2 \\ -x_2 + px_3 - 2x_4 = q \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + (p+3)x_4 = -1 \end{cases}$$

1. 问：当参数  $p, q$  满足什么条件时，方程组无解、有唯一解、有无穷多解？
2. 当方程组有无穷多解时，求出其通解（写成向量形式）。

五（12%）矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 。

1. 求一  $4 \times 2$  矩阵  $B$ , 使得  $AB = O$ , 且  $\text{秩}(B) = 2$ ;
2. 问：是否存在秩大于 2 的矩阵  $C$  使得  $AC = O$ ? 为什么？

六（12%）设实对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ 与 } B = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 2 & \\ & & 4 \end{pmatrix} \text{ 相似.}$$

1. 求参数  $k$  的值；

2. 求一正交矩阵  $Q$ , 使得  $Q^T A Q = B$ .

七 (7%) 证明题:

1. 设  $\lambda_1, \lambda_2$  是矩阵  $A$  的两个互异的特征值,  $\eta_1, \eta_2$  是

$A$  的属于  $\lambda_1$  的线性无关的特征向量,  $\eta_3$  是  $A$  的属于

$\lambda_2$  的特征向量。证明:  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  线性无关。

2. 已知  $n$  阶方阵  $A$  相似于对角阵, 并且, 矩阵  $A$  的特征向量均是矩阵  $B$  的特征向量 (注:  $A, B$  的特征值未必相同)。证明  $AB = BA$ 。

## 线性代数期末考试试卷

## 一. (24%) 填空题:

1. 假设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , 则  $A^n = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ 。

2. 假设向量组 A:  $\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , 则当参

数  $t$  满足条件\_\_\_\_\_时, 向量组 A 的秩为 1;

时 A 的秩为 2; \_\_\_\_\_时 A 的秩为 3。

3. 若向量  $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$  是矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$  的特征向量, 则

$(a, b) = (\underline{\hspace{2cm}})$ 。

4. 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , 且

$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ , 则参数  $a, b$  满足条

件\_\_\_\_\_。

5. 若矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & x \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  与对角阵  $\Lambda$  相似, 则  $x$  满足

条件\_\_\_\_\_。

6. 若  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix}$  是正交矩阵, 则  $a, b, c$  满足条件\_\_\_\_\_。

7. 若对满足条件  $A^2 + 3A - 4E = O$  的实对称矩阵  $A$ ,  $aE + A$  都是正定矩阵, 则实数  $a$  必定满足条件\_\_\_\_\_。

二. (8%) 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x & x \\ 1 & 1 & 1 & x \\ x & 1 & 1 & 1 \\ x & x & 1 & 1 \end{pmatrix}$  的行列式

$\det(A)$  的值。

三. (15%) 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & p & 2 \\ 1 & 2 & p \end{pmatrix}$ , 向量

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ q \end{pmatrix}, \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. 若  $\eta$  是线性方程组  $Ax=b$  的解, 试求  $p, q$  的值,  
并求这时  $Ax=b$  的通解;
2. 若  $Ax=b$  有无穷多组解, 但  $\eta$  不是  $Ax=b$  的解,  
求  $p, q$  的值。

四. (15%) 解矩阵方程  $XA=2X+B$ 。其中

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}。$$

五. (15%) 设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3$$

1. 写出二次型  $f$  的矩阵;
  2. 求一正交变换  $X=QY$  将  $f$  化成标准形, 并写出  
相应的标准形。
- 六. (12%) 设 3 阶矩阵  $A$  的特征值是 2 (二重) 和 4, 且  $\alpha = (1 \ 0 \ 1)^T$ ,  $\beta = (0 \ 1 \ 0)^T$  是  $A$  的相应于特征值 2 的特征向量,  $\gamma = (1 \ 0 \ -1)^T$  是  $A$  的相应



于特征值是 4 的特征向量。求矩阵  $A$  及  $(A-2E)^n$ 。

七. (5%) 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & x \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix}$ 。问:

当参数  $x, y$  满足什么条件时, 矩阵方程  $AX = B$  有解, 但  $BY = A$  无解?

八. (6%) 证明题:

1. 已知向量组  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  可以由  $\alpha_1, \alpha_2$  线性表示。若

向量组  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  的秩为 2, 证明:  $\alpha_1, \alpha_2$  线性无关。

2. 设 2 阶方阵  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , 且  $a+d=2$ ,

$ad-bc=1$ 。若  $b, c$  不全为零, 证明:  $A$  不与任何对角阵相似。

04-05 学年第三学期

## 线性代数期末考试试卷

### 一. (27%) 填空题

1. 若矩阵  $A = \begin{pmatrix} 4 & a \\ b & 5 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ , 且  $AB = BA$ ,

则  $a, b$  的值分别为\_\_\_\_\_;

2. 设 对 任 意 列 向 量  $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ,

$$AX = \begin{pmatrix} a + 2b + 3c \\ 4a + 5b + 6c \end{pmatrix}, \text{ 则矩阵 } A = \underline{\hspace{2cm}};$$

3. 设 3 阶 方 阵  $A = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)$ ,

$$B = (3\alpha_2 - \alpha_3 \quad \alpha_1 - \alpha_3 \quad \alpha_1 - \alpha_2)$$

若  $A$  的行列式  $|A| = 3$ , 则矩阵  $B$  的行列式

$$|B| = \underline{\hspace{2cm}};$$

4. 设  $A$  为  $n$  阶可逆方阵,  $2n$  阶矩阵  $B = \begin{pmatrix} E & A \\ O & A \end{pmatrix}$  的

逆矩阵为\_\_\_\_\_;

5. 齐次线性方程组  $3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$  的一个基础解

系为\_\_\_\_\_;

6. 若二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + tx_2x_3$$

是正定的, 则参数  $t$  的取值范围是\_\_\_\_\_;

7. 若矩阵  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a+2 \end{pmatrix}$  是正交矩阵, 则参数

$a, b, c$  的值分别为 \_\_\_\_\_;

8. 假设 3 阶矩阵  $A$  的特征值为  $2, 1, -1$ 。则行列式

$|A + A^{-1}|$  的值为\_\_\_\_\_;

9. 若实二次型  $f, g$  的矩阵分别为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & b & \\ & & 2 \end{pmatrix}, \text{ 则 } f, g \text{ 的正惯性指}$$

数相同, 负惯性指数也相同的充分必要条件是参数  $a, b$  满足\_\_\_\_\_。

二 (14%) 假设  $n$  阶矩阵  $A$  满足  $A^2 + 2A - 3E = O$ 。

1. 证明矩阵  $A$  及  $A + E$  均可逆, 并分别求  $A^{-1}$  及  $(A + E)^{-1}$ ;

2. 证明: 若  $A \neq E$ , 矩阵  $A + 3E$  肯定不可逆。

三 (14%) 假设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 。已

知线性方程组  $Ax = b$  有无穷多组解。试求参数  $\lambda$  的值, 并求方程组的通解 (要求用  $Ax = b$  的一特解及相应的齐次线性方程组的基础解系表示)。

四 (15%) 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & a & 3 \end{pmatrix}$  相似于对角阵。

1. 求  $a$  的值, 并求  $A$  的特征值及相应的特征向量;
2. 求一可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP$  为对角阵, 并写出

相应的对角阵；

3. 问：是否存在正交矩阵  $Q$ ，使得  $Q^{-1}AQ$  为对角阵？

试说明你的理由。

五（12%）已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ，矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ 求矩阵 } X, \text{ 使得}$$

$$DXA = 2DX + B.$$

六（12%）假设 3 维向量  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ ；

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}。 \text{ 已知向量组 } \alpha_1, \alpha_2$$

与向量组  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  等价。

1. 求  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  的秩及其一个最大线性无关组，并求

参数  $a, b, c$  的值；

2. 令矩阵  $A = (\alpha_1, \alpha_2), B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  , 求满足  $AX = B$  的矩阵  $X$  。

七 (6%) 假设  $n$  阶矩阵  $A$  满足  $A^2 = 2A$  。

1. 证 明 : 关 于 矩 阵 的 秩 有 等 式

$$R(2E - A) + R(A) = n, \text{ 并且 } A \text{ 相似于对角阵};$$

2. 若  $R(A) = r$  , 试求行列式  $|A + E|$  的值。

## 05-06 第三学期

### 线性代数期终考试试卷

一. (30%) 填空题 ( $E$  表示相应的单位矩阵)

1. 设 3 阶矩阵  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  的行列式  $|A| = 3$ , 矩

阵  $B = (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1)$ , 则矩阵  $A - B$  的行列式

$$|A - B| = \underline{\hspace{2cm}};$$

2. 若矩阵  $A$  满足  $A^2 = O$ , 则  $E + A$  的逆矩阵

$$(E + A)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}};$$

3. 若向量组  $\alpha_1 = (1, t, 1), \alpha_2 = (1, 1, t), \alpha_3 = (t, 1, 1)$ ,

的秩为 2, 则参数  $t$  满足条件  $\underline{\hspace{2cm}}$ ;

4. 假设 3 阶矩阵  $A$  的特征值为  $1, 2, -1$ , 矩阵

$B = E - 2A^*$ , 其中,  $A^*$  是  $A$  的伴随矩阵, 则  $B$

的行列式  $|B| = \underline{\hspace{2cm}};$

5. 若 矩 阵  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  与 矩 阵

$$B = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 3 & \\ & & y \end{pmatrix} \text{相似, 则}(x, y) = \underline{\hspace{2cm}};$$

6. 设  $(1, -1, 0)^T, (1, 0, -1)^T$  是 3 阶实对称矩阵  $A$  的相应于某个非零二重特征值的特征向量。若  $A$  不可逆, 则  $A$  的另一个特征值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ , 相应的一个特征向量为  $\underline{\hspace{2cm}}$ ;

7. 已知 3 元非齐次线性方程组  $Ax = b$  的系数矩阵的秩为 2, 并且  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是  $Ax = b$  的 3 个解向量, 其中  $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T, \alpha_2 + \alpha_3 = (2, 4, 6)^T$ , 则  $Ax = b$  的通解是  $\underline{\hspace{2cm}}$ ;

8. 若 4 阶方阵  $A, B$  的秩都等于 1, 则矩阵  $A + B$  的行列式  $|A + B| = \underline{\hspace{2cm}}$ ;

9. 若矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$  与矩阵  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  合同, 则



参数  $x$  满足条件\_\_\_\_\_。

二. ( 10% ) 计 算 下 述 行 列 式 的 值 :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \\ 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

三. (15%) 设线性方程组 
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ -x_1 + 4x_2 + \lambda x_3 = \mu \end{cases}$$
 问:

当参数  $\lambda, \mu$  取何值时, 线性方程组有唯一解? 当

参数  $\lambda, \mu$  取何值时, 线性方程组有无穷多组解?

当线性方程组有无穷多组解时, 求出其通解。

四. (12%) 假设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

矩阵  $X$  满足  $A^{-1}X = A^*C + 2X$ , 其中  $A^*$  是  $A$  的

伴随矩阵，求  $X$ 。

五. (10%) 已知向量组  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  线性无关，问：参数

$a, b, c$  满足什么条件时，向量组

$a\eta_1 + \eta_2, b\eta_2 + \eta_3, c\eta_3 + \eta_1$  线性相关？

六. (15%) 已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3$$

① 写出二次型  $f$  的矩阵； ② 求一正交变换  $x = Qy$ ，

将  $f$  变成其标准形（并写出  $f$  的相应的标准形）； ③

求当  $x^T x = 1$  时  $f(x_1, x_2, x_3)$  的最大值。

七. (8%) 证明题：

1. 设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  中， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关，

$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性无关，证明： $\alpha_1$  能由  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  线性表示。

2. 设  $A$  是  $n$  阶正定矩阵, 证明: 矩阵  $A + A^{-1} - E$  也是正定矩阵。

## 06-07 第三学期

### 线性代数期末考试试卷

一、(18%)填空题 (  $E$  表示单位矩阵 )

1. 假设  $\alpha = (1, 3), \beta = (1, -1)$ , 则  $(\alpha^T \beta)^{100} = \underline{\hspace{2cm}}$ ;
2. 矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  的逆矩阵  $A^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$ ;
3. 若  $3 \times 3$  矩阵  $A = (\alpha, \beta, \gamma)$  的行列式等于 2, 矩阵

$B = (\beta, \gamma, \alpha)$ , 则 矩 阵  $A + B$  的 行 列 式

$$|A + B| = \underline{\hspace{2cm}};$$

4. 齐次线性方程组  $3x + 2y - 5z = 0$  的一个基础解系是  $\underline{\hspace{2cm}}$ ;
5. 向量组

$$\alpha_1 = (1, 2, 3, 4)^T, \alpha_2 = (2, -1, 1, 0)^T,$$

$$\alpha_3 = (1, -3, -2, -4)^T, \quad \alpha_4 = (3, 1, 4, 1)^T$$

的一个极大线性无关组是\_\_\_\_\_;

6. 若矩阵  $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  合同, 则参数  $a, b$  满足条件\_\_\_\_\_。

## 二、(12%) 选择题

1. 假设  $A, B$  是同阶方阵, 数  $k \neq 0$ , 则正确的命题是 (\_\_\_\_\_)

(A)  $|A+B| = |A| + |B|$ ;

(B)  $|kA| = k|A|$ ;

(C)  $r(A+B) = r(A) + r(B)$ ;

(D)  $r(kA) = r(A)$ 。

2. 假设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , 则**不**与  $A$  相似的矩阵为

(\_\_\_\_\_)

(A)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ;      (B)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ;

$$(C) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad (D) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

3. 假设  $A, B$  都是非零矩阵且  $AB = O$ , 则正确的命题是 ( )

- (A)  $A$  的行向量组线性相关;
- (B)  $B$  的行向量组线性相关;
- (C)  $A, B$  的行向量组都线性相关;
- (D)  $A, B$  的列向量组都线性相关。

三、(16%) 设线性方程组 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 4 \\ -x_1 + kx_2 - x_3 = k^2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$

1. 参数  $k$  取何值时, 线性方程组有唯一解?  $k$  取何值时, 方程组没有解?
2. 当  $k$  取何值时, 方程组有无穷多组解? 当方程组有无穷多组解时, 求其通解。

四、(16%) 设  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ , 并

且  $AP = P\Lambda$ ，求  $A$  及  $A^{2008}$ 。

五、（14%）已知向量  $\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  是矩阵

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix}$  的一个特征向量。

1. 求参数  $a, b$  的值，并求  $A$  的相应于特征向量  $\eta$  的特征值；
2. 问：矩阵  $A$  是否相似于对角阵？说明你的理由。

六、（14%）已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 。求一正交矩阵  $Q$  使

得  $Q^T A Q$  为对角阵；

七、（10%）假设  $n$  维实向量  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ，  
 $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ ，矩阵  $A = \alpha^T \beta$ 。

1. 证明： $A$  是对称矩阵当且仅当  $\alpha, \beta$  线性相关；
2. 当  $\alpha, \beta$  线性相关时，求实数  $k$  的取值范围，使

得  $kE + A$  是正定矩阵。

05-06 学年第二学期

## 几何与代数补考试卷

一(30%)填空题

1. 设 3 阶 矩 阵  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  ,

$B = (\alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_1 - \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2)$ 。若  $A$  的行列式

$|A| = 2$  , 则  $B$  的行列式  $|B| =$  \_\_\_\_\_;

2. 直角坐标系中经过点  $P(1, 2, 1)$  , 并且与直线

$l: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$  垂直的平面的方程为\_\_\_\_\_;

3. 坐标系中点  $A(1, 1, 2)$  ,  $B(-2, -1, 1)$  ,  $C(3, a, b)$  共

线的充分必要条件是参数  $a, b$  满足条件\_\_\_\_\_;

4. 假 设  $\alpha = (1, -1)$  ,  $\beta = (2, 3)$  , 则  $\alpha^T \beta =$  \_\_\_\_\_;

$\alpha\beta^T =$  \_\_\_\_\_;

5. 若  $A$  为  $n$  阶方阵, 则方阵  $B = \begin{pmatrix} -I & A \\ O & 2I \end{pmatrix}$  的逆矩阵

$$B^{-1} = \underline{\hspace{2cm}};$$

6. 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & 0 & a \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ , 若  $A$  不可逆, 则参数  $a$

满足条件\_\_\_\_\_, 这时,  $A$  的秩为\_\_\_\_\_;

7. 假设  $n$  阶方阵  $A$  满足  $A^2 - 3A + 2I = O$ , 但  $A \neq I$ , 则可以肯定,  $A$  的一个特征值等于\_\_\_\_\_;

8. 假设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$  相似于对角阵, 并且 2 是  $A$

的一个二重特征值, 则参数  $x, y$  的值分别等于\_\_\_\_\_。

二 (12%) 假设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 。求矩

阵方程  $2X = B + XA$  的解。



三 (14%) 假设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1+\lambda \end{pmatrix}$ 。

1. 问: 当参数  $\lambda$  取什么值时, 线性方程组  $Ax = b$  有唯一解、有无穷多组解、无解?
2. 当线性方程组  $Ax = b$  有无穷多组解时, 求出其通解。

四 (14%) 已知三阶方阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  与矩阵

$B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & y \end{pmatrix}$  相似, 求参数  $x, y$  的值, 并求一可

逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = B$ 。

五 (12%) 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2kx_1x_3$

1. 求一可逆线性变换将  $f$  变成其标准形;
2. 问: 当参数  $k$  取什么值时,  $f$  是正定二次型?
3. 试就参数  $k$  不同的取值, 讨论二次曲面  $f(x_1, x_2, x_3) = 1$  的类型;

六（12%）假设空间直角坐标系中，二次曲面 $\pi_1$ 的方程

为： $x^2 + 4y^2 = 2z$ ； $\pi_2$ 为曲线 $\begin{cases} z = 2 - 3y^2 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 $z$ 轴

旋转所得旋转曲面。

1. 曲面 $\pi_2$ 的方程为\_\_\_\_\_；
2.  $\pi_1$ 与 $\pi_2$ 的交线向 $xy$ 平面作垂直投影所得的投影曲线 $l$ 的方程为\_\_\_\_\_；
3. 画出 $\pi_1$ 与 $\pi_2$ 所围成的立体的草图（请给坐标轴标上名称），并在同一坐标系中画出它们的交线在 $x-y$ 平面上的投影曲线所围成的有限区域的草图。

七（6%）假设 $A$ 是 $n$ 阶正交阵。若 $A$ 是实对称矩阵，证明： $A$ 的特征值只能是1和-1，并且，若 $A \neq I$ ，则-1一定是 $A$ 的特征值。

05-06 学年第二学期

## 线性代数补考试卷

一(30%)填空题

1. 设 3 阶 矩 阵  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  ,

$B = (\alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_1 - \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2)$ 。若  $A$  的行列

式  $|A| = 2$  , 则  $B$  的行列式  $|B| =$  \_\_\_\_\_;

2. 与向量  $\alpha = (1, 0, 1)$  及  $\beta = (0, 1, 0)$  都正交的单

位向量为\_\_\_\_\_;

3. 矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  的伴随矩阵  $A^* =$  \_\_\_\_\_;

4. 假设  $\alpha = (1, -1), \beta = (2, 3)$  , 则  $\alpha^T \beta =$  \_\_\_\_\_;

$\alpha \beta^T =$  \_\_\_\_\_;

5. 若  $A$  为  $n$  阶方阵, 则方阵  $B = \begin{pmatrix} -E & A \\ O & 2E \end{pmatrix}$  的

逆矩阵  $B^{-1} =$  \_\_\_\_\_;

6. 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & 0 & a \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ , 若  $A$  不可逆, 则

参数  $a$  满足条件\_\_\_\_, 这时,  $A$  的秩为\_\_\_\_\_;

7. 假设  $n$  阶方阵  $A$  满足  $A^2 - 3A + 2E = O$ , 则

$A + E$  是可逆的, 且  $(A + E)^{-1} =$  \_\_\_\_\_;

8. 假设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$  相似于对角阵, 并

且 2 是  $A$  的一个二重特征值, 则参数  $x, y$  的值  
分别等于\_\_\_\_\_。

二 (12%) 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ 。

1. 求  $A$  的行列式的值;

2. 根据  $\lambda$  的不同的值, 求  $A$  的秩及列向量组的极

大线性无关组。

三 (12%) 假设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 。求矩

阵方程  $2X = B + XA$  的解。

四 (14%) 假设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1+\lambda \end{pmatrix}$ 。

1. 问：当参数  $\lambda$  取什么值时，线性方程组  $Ax = b$  有唯一解、有无穷多组解、无解？
2. 当线性方程组  $Ax = b$  有无穷多组解时，求出其通解。

五 (14%) 已知三阶方阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  与矩阵

$B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & y \end{pmatrix}$  相似，求参数  $x, y$  的值，并求一可

逆矩阵  $P$ ，使得  $P^{-1}AP = B$ 。

六(12%) 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2kx_1x_3$

1. 求一可逆线性变换将  $f$  变成其标准形;
2. 根据参数  $k$  的不同取值, 讨论  $f$  的秩及正、负惯性指数;
3. 问: 当参数  $k$  取什么值时,  $f$  是正定二次型?

七(6%) 假设  $A$  是  $n$  阶正交阵。若  $A$  是实对称矩阵, 证明:  $A$  的特征值只能是 1 和  $-1$ , 并且, 若  $A \neq E$ , 则  $-1$  肯定是  $A$  的特征值。

07-08 学年第一学期

## 线性代数转系考试试卷

一 (18%)填空题 ( $E$  表示单位矩阵)

1. 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 4 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$ , 若  $AB$  和  $B$  都是对称矩阵, 则  $x, y$  的值分别为\_\_\_\_\_;
2. 若  $3 \times 3$  矩阵  $A$  的特征值是  $-1, 1, 2$ , 则  $A$  的伴随矩阵  $A^*$  的行列式等于\_\_\_\_\_;
3. 如果矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}$  相似于对角阵, 则参数  $x$  必满足条件\_\_\_\_\_;
4. 如果矩阵  $A = \begin{pmatrix} x & x \\ x & 3 \end{pmatrix}$  是正定的, 则参数  $x$  满足条件\_\_\_\_\_;
5. 对秩为  $r$  的  $s \times n$  矩阵  $A$ , 非齐次线性方程组  $Ax = b (b \neq \theta)$  的解集合中, 线性无关的解向量的个数为\_\_\_\_\_;
6. 如果将实对称矩阵按合同关系分类, 使得两个矩阵在同一类的充分必要条件是它们是合同的, 则

$n \times n$  实对称矩阵全体可以分成的合同类的个数为\_\_\_\_\_.

二(12%)选择题

1. 对于  $4 \times 6$  矩阵  $A$ , 齐次线性方程组  $Ax = \theta$  的基础解系中向量个数不可能是\_\_\_\_\_

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

2. 假设  $\alpha, \beta$  是矩阵  $A$  的属于不同特征值  $k, l$  的特征

向量, 则  $\alpha, A(\alpha + \beta)$  线性无关的充分必要条件是

(A)  $k \neq 0$ ; (B)  $l \neq 0$ ;

(C)  $k = 0$ ; (D)  $l = 0$ .

3. 下列论断中, 正确的一项为\_\_\_\_\_

(A) 存在实对称矩阵  $A, B$ , 使得  $A + B \neq O$ , 但  $A^2 = B^2 = O$ ;

(B) 存在实对称矩阵  $A, B$ , 使得  $A^2 = B^2 = O$ , 但  $A + B \neq O$ ;

(C) 存在实对称矩阵  $A, B$ , 使得  $A$  与  $B$  相似, 但  $A$  与  $B$  不合同;

(D) 存在实对称矩阵  $A, B$ , 使得  $A$  与  $B$  合同, 但  $A$  与  $B$  不相似.



三 (10%) 计算行列式  $D = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$  .

四 (12%) 已知线性方程组  $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 = 4 \end{cases}$  的每个

解都满足方程  $x_1 + 2x_2 = b$  .

1. 求参数  $a, b$  的值;
2. 求所述线性方程组的通解.

五 (14%) 已知矩阵方程  $X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  与

$X \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$  有公共解. 求公共解  $X$ , 并求

参数  $a, b, c$  的值.

六 (12%) 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & b \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix}$  与  $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

相似. 求参数  $a, b$  的值, 并求一正交矩阵  $Q$  使得

$$Q^T A Q = \Lambda.$$

七 (14%) 假设  $a, b, c$  是不全为零的实数, 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)(ax_1 + bx_2 + cx_3)$$

1. 求二次型  $f(x_1, x_2, x_3)$  的矩阵  $A$ ;
  2. 证明: 二次型  $f$  的秩等于 2 当且仅当  $a, b, c$  不全相等;
  3. 当  $f$  的秩等于 2 时, 求  $f$  的正、负惯性指数.
- 八 (8%) 设  $A$  是  $n \times n$  上三角矩阵, 且  $A$  的主对角元素均为 1. 记  $B = I - A$  (其中  $I$  是单位阵). 证明  $A$  可逆, 且  $A^{-1} = I + B + B^2 + \cdots + B^{n-1}$ .