线性代数总复习

张小向

内容提要

友情提醒

复习提纲

- 一. 行列式
- 二. 矩阵
- 三. 向量
- 四. 线性方程组
- 五. 二次型

欢迎报名参加
东南大学国家级精品在线开放课程
《线性代数》

方法一：
扫描或长按识别右边的二维码，
或者在浏览器的地址栏输入
https://www.icourse163.org/course/SEU-1001752361
进入如下图所示的页面。
点击最下方的“立即参加”按钮，
并按照提示完成后续操作即可。

方法二：

下载安装“中国大学MOOC”APP后，
点击手机屏幕上的该APP图标按钮，
在搜索栏输入“线性代数”并搜索，
即可从同名课程中找到我们的课程。
点击即可进入报名参加页面。

➢平时作业会做就行?

平时作业: 针对性, 可翻书, 时限松

期末考试: 综合性, 闭卷考, 时限紧

➢平时作业会做就行?

➢看懂试题解答就够?

- 平时作业会做就行?
- 看懂试题解答就够?
- 多做往年试题就好?

4.已知 1,1 是 2 阶矩阵 A 的特征值，则必有 (B)　C

(A) A 与 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似　　(B) A $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 与相似

(C) 若 A $\neq E_2$,则 A 不能相似对角化　　(D) A 可以相似对角化

5.已知实矩阵 B=$(b_{ij})_{3\times3}$,实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=(b_{11}x_1+b_{12}x_2+b_{13}x_3)^2+(b_{21}x_1+b_{22}x_2+b_{23}x_3)^2+(b_{31}x_1+b_{32}x_2+b_{33}$$

(A)

(A) $f(x_1,x_2,x_3)$正定的充要条件是$|B|\neq0$　　(B) $f(x_1,x_2,x_3)$不正定

(C) $f(x_1,x_2,x_3)$正定的充要条件是 B 正定　　(D) $f(x_1,x_2,x_3)$正定

三、(本题 5 分)当 a 等于何值时，方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+ax_3=a, \\ x_1+ax_2+x_3=1, \end{cases}$ 无解，有唯一解，有无穷

已知实矩阵$B = (b_{ij})_{3\times3}$, 实二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = (b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3)^2$

$+ (b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3)^2 + (b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3)^2$,

则[ ].

(A) $f(x_1, x_2, x_3)$正定 $\Leftrightarrow |B| \neq 0$;

(B) $f(x_1, x_2, x_3)$不正定;

(C) $f(x_1, x_2, x_3)$正定 $\Leftrightarrow B$正定;

(D) $f(x_1, x_2, x_3)$正定.

已知实矩阵$B = (b_{ij})_{3\times3}$, 实二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = (b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3)^2$

$+ (b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3)^2 + (b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3)^2$.

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3, \\ y_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3, \\ y_3 = b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3, \end{cases} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

$y = Bx$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = (y_1, y_2, y_3)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$= y^T y = (Bx)^T(Bx)$$

$$= (x^T B^T)(Bx) = x^T(B^T B)x$$

已知实矩阵$B = (b_{ij})_{3\times3}$, 实二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = (b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3)^2$

$+ (b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3)^2 + (b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3)^2$.

$f(x_1, x_2, x_3) = x^T(B^TB)x$正定

$\Rightarrow B^TB$的特征值$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$全大于0

$\Rightarrow |B^TB| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 > 0$

$\Rightarrow |B^T||B| > 0$

$\Rightarrow |B| \neq 0$

已知实矩阵$B = (b_{ij})_{3\times3}$, 实二次型

$f(x_1, x_2, x_3) = (b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3)^2$

$+ (b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3)^2 + (b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3)^2$.

$f(x_1, x_2, x_3) = x^T(B^TB)x$正定 $\Rightarrow |B| \neq 0$.

反过来,

$|B| \neq 0$

$\Rightarrow B$可逆

$\Rightarrow B^TB = B^TEB$与E合同

$\Rightarrow f(x_1, x_2, x_3) = x^T(B^TB)x$正定.

已知实矩阵$B = (b_{ij})_{3\times 3}$, 实二次型
$f(x_1, x_2, x_3) = (b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3)^2$
$+ (b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3)^2 + (b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3)^2.$

$f(x_1, x_2, x_3) = x^T(B^TB)x$正定 $\Leftrightarrow |B| \neq 0.$

已知实矩阵$B = (b_{ij})_{3\times 3}$, 实二次型
$f(x_1, x_2, x_3) = (b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3)^2$
$+ (b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3)^2 + (b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3)^2,$
则[　　].
(A) $f(x_1, x_2, x_3)$正定 $\Leftrightarrow |B| \neq 0$;
(B) $f(x_1, x_2, x_3)$不正定;
(C) $f(x_1, x_2, x_3)$正定 $\Leftrightarrow B$正定; 忽悠
(D) $f(x_1, x_2, x_3)$正定.

陷阱

$f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

已知实矩阵$B = (b_{ij})_{3\times3}$, 实二次型
$f(x_1, x_2, x_3) = (b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3)^2$
$+ (b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3)^2 + (b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3)^2$,
则[　　].

(A) $f(x_1, x_2, x_3)$正定 $\Leftrightarrow |B| \neq 0$;

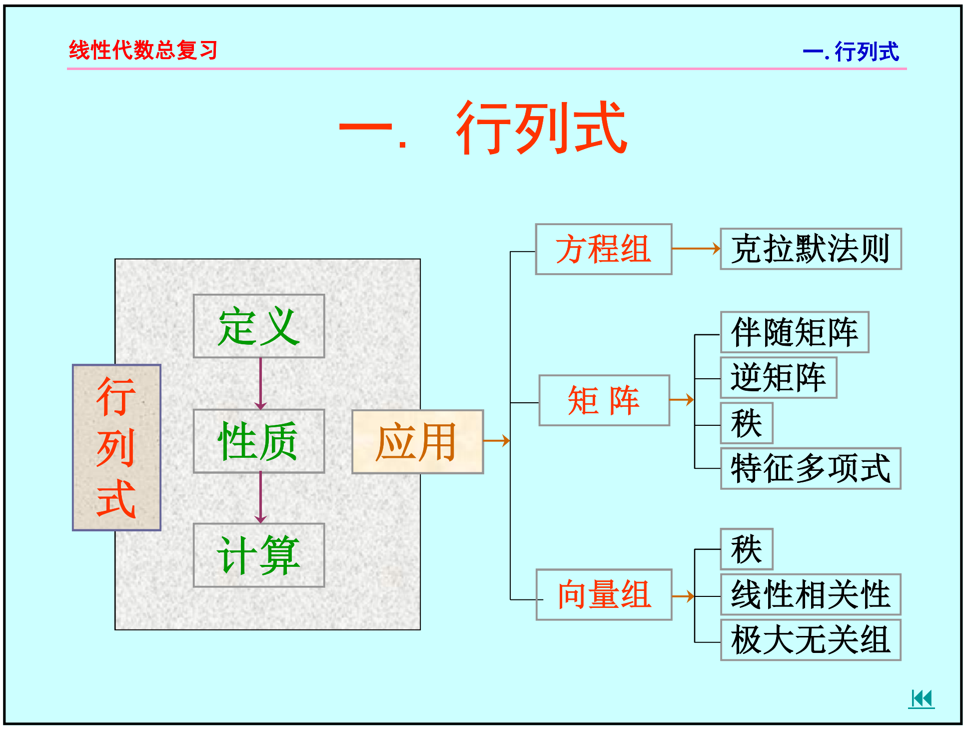
(B) $f(x_1, x_2, x_3)$不正定;

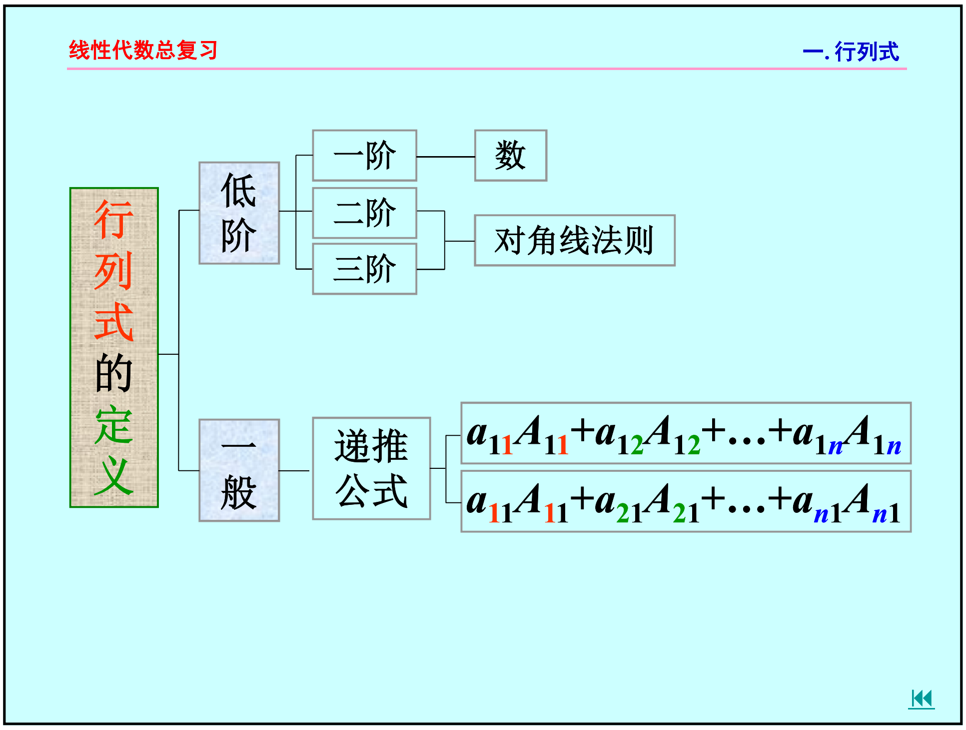
(C) $f(x_1, x_2, x_3)$正定 $\Leftrightarrow B$正定;

(D) $f(x_1, x_2, x_3)$正定.

把题目改一下: 曲面$f(x_1, x_2, x_3) = 1$的类型?
$f(x_1, x_2, x_3)$的惯性指数? B中带参数?
$B = (b_{ij})_{m\times n}$呢? B的行(列)向量组线性无关?

- 平时作业会做就行?
- 看懂试题解答就够?
- 多做往年试题就好?
- 没有问题要问就不必参加考前答疑?


线性代数总复习
一. 行列式
一. 行列式
行列式
定义
性质
计算
应用
方程组
克拉默法则
矩 阵
伴随矩阵
逆矩阵
秩
特征多项式
向量组
秩
线性相关性
极大无关组


线性代数总复习
一. 行列式
行列式的定义
低阶
一阶
数
二阶
三阶
对角线法则
一般
递推公式
$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\dots+a_{1n}A_{1n}$
$a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\dots+a_{n1}A_{n1}$

行列式的性质

性质1. 互换行列式中的两列, 行列式变号.

推论. 若行列式 D 中有两列完全相同, 则 $D = 0$.

性质2. (线性性质)

(1) $\det(\alpha_1, \ldots, k\alpha_j, \ldots, \alpha_n) = k\det(\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n)$;

(2) $\det(\alpha_1, \ldots, \beta_j+\gamma_j, \ldots, \alpha_n) = \det(\alpha_1, \ldots, \beta_j, \ldots, \alpha_n) + \det(\alpha_1, \ldots, \gamma_j, \ldots, \alpha_n)$.

推论. 若行列式 D 中有两列元素成比例, 则 $D = 0$.

性质3. 把行列式的某一列的k倍加到另一列上去, 行列式的值不变.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i}+ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i}+ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni}+ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质4. 设A, B为同阶方阵, 则$|AB| = |A||B|$.

注(1) 若A为n阶方阵($n>1$), 且$|A| = a$,
则$|A^*||A| = |A^*A| = |aE| = a^n$.

注(2) 若A可逆, 则$|A^{-1}||A| = |A^{-1}A| = |E| = 1$,
因而$|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

注(3) $|P^{-1}AP| = |P^{-1}|\cdot|A|\cdot|P| = |P|^{-1}\cdot|A|\cdot|P| = |A|$.

性质5. 设A方阵, 则$|A^{\mathrm{T}}| = |A|$.

注: 根据方阵的性质5, 前面几条关于列的性质可以翻译到行的情形. 例如:

性质1'. 互换行列式中的两行, 行列式变号.

定理1. n阶行列式D等于它的任意一行 (列) 的各元素与其对应的代数余子式乘积之和. 即

$$
\begin{aligned}
D &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} \\
&= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \ldots + a_{2n}A_{2n} \\
&= \ldots \\
&= a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \ldots + a_{nn}A_{nn} \\
&= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \ldots + a_{n1}A_{n1} \\
&= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + \ldots + a_{n2}A_{n2} \\
&= \ldots \\
&= a_{1n}A_{1n} + a_{2n}A_{2n} + \ldots + a_{nn}A_{nn} .
\end{aligned}
$$

性质6. n阶行列式的某一行(列)元素与另一行(列)的对应的代数余子式乘积之和为零. 即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\dots+a_{in}A_{jn}=0\ (i\neq j)$$
$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\dots+a_{ni}A_{nj}=0\ (i\neq j).$$

注: 克罗内克(Kronecker)记号

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

定理2. 设n阶行列式$D=|[a_{ij}]|$, 则

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=D\delta_{ij},\quad \sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=D\delta_{ij}.$$

行列式的计算

1. 二, 三阶行列式—对角线法则.
2. 利用初等变换化为三角形或分块三角形.

$$\begin{vmatrix}A & C\\ O & B\end{vmatrix}=|A|\cdot|B|,\qquad \begin{vmatrix}A & O\\ C & B\end{vmatrix}=|A|\cdot|B|.$$

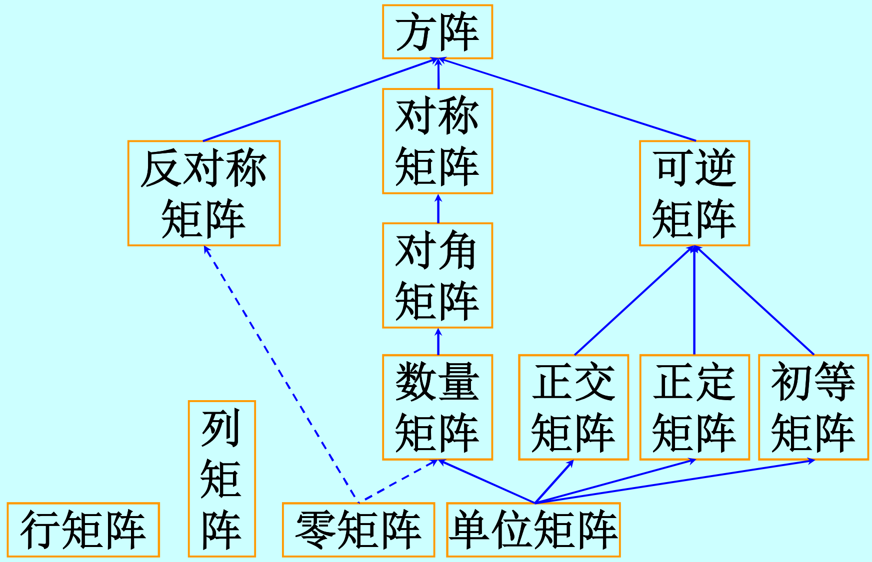
3. 按某一行(列)展开—降阶.
4. 递推/归纳.
5. 升阶.

二. 矩阵

- 矩阵
  - 运算
  - 分块运算
  - 初等变换
  - 秩
  - 特征值
  - 特征向量
  - 相似
- 应用
  - 线性方程组
    - 齐次
    - 非齐次
  - 向量组
    - 线性表示
    - 线性相关性
    - 秩
  - 向量空间
    - 线性变换
    - 基变换
    - 坐标变换
  - 二次型
    - 标准形
    - 规范形
    - 正定性

矩阵的运算

运算	前提条件	定义	性质
加法 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$是同类型的	对应元素相加	$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$; $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$; $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$; $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$
数乘 $k\boldsymbol{A}$	k是一个数	用k乘$\boldsymbol{A}$的每一个元素	$k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$; $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$; $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$; $(-1)\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}$
乘法 $\boldsymbol{AB}$	$\boldsymbol{A}$的列数 = $\boldsymbol{B}$的行数	$(a_{ij})_{m\times l}(b_{ij})_{l\times n}=(c_{ij})_{m\times n}$ $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$	$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$; $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$; $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$; $(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=k(\boldsymbol{AB})$
幂 $\boldsymbol{A}^m$	$\boldsymbol{A}$是方阵, m是正整数	$\boldsymbol{A}^1=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$; $(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$
转置 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	无	${(a_{ij})_{m\times l}}^{\mathrm{T}}=(a_{ji})_{l\times m}$	$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$; $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$; $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$; $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$
多项式 $f(\boldsymbol{A})$	$\boldsymbol{A}$是一个方阵, $f(x)=a_sx^s+\ldots+a_1x+a_0$	$f(\boldsymbol{A})=a_s\boldsymbol{A}^s+\ldots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{A}\xi=\lambda\xi\,(\xi\neq\theta)\Rightarrow f(\boldsymbol{A})\xi=f(\lambda)\xi$, $\boldsymbol{A}\xi=\lambda\xi\,(\xi\neq\theta), f(\boldsymbol{A})\xi=\boldsymbol{O}\Rightarrow f(\lambda)=0$
行列式$\lvert\boldsymbol{A}\rvert$	$\boldsymbol{A}$是一个方阵		, $\lvert\boldsymbol{A}^{-1}\rvert=\lvert\boldsymbol{A}\rvert^{-1}$
逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$	$\boldsymbol{A}$是一个方阵且$\lvert\boldsymbol{A}\rvert\neq0$	若$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$则$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$	唯一性, $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$, $(\boldsymbol{A}^{-1})^m=(\boldsymbol{A}^m)^{-1}$, $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$, $(k\boldsymbol{A})^{-1}=k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$, $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$, 满秩, 特征值$\neq0$



行矩阵$A_{1\times n}$: 只有一行, 又名行向量.
列矩阵$A_{n\times 1}$: 只有一列, 又名列向量.
零矩阵: 每个元素都是0, 常记为$O_{m\times n}$或O.
单位矩阵: 主对角线元素都是1, 其余元素都是0, 常记为E或I.
数量矩阵: kE, kI, 其中k为常数.
对角矩阵: $\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, 常用$\Lambda$表示.
对称矩阵: $A^{\mathrm{T}} = A$.
反对称矩阵: $A^{\mathrm{T}} = -A$.
方阵: 行数=列数.
正交矩阵: $Q^{\mathrm{T}}Q = QQ^{\mathrm{T}} = E$.
正定矩阵: $A^{\mathrm{T}} = A$且$\forall x \neq \theta$有$x^{\mathrm{T}}Ax > 0$.
可逆矩阵: $AB = BA = E$.
初等矩阵: 由单位矩阵经过一次初等变换所得.

矩阵的乘积

- 定义
  - 实际问题(背景)
- 性质
  - 结合律的妙用
    - $(\alpha\beta^{\mathrm{T}})^k$
    - $(P^{-1}AP)^k$
  - 不满足交换律
  - 有非平凡的零因子
  - 不满足消去律
- 应用
  - 线性方程组的矩阵表达式($Ax = b$)
  - 向量组之间的线性表示(系数矩阵)
  - 两组基之间的联系(过渡矩阵)
  - 向量的内积($\langle\alpha, \beta\rangle = \alpha^{\mathrm{T}}\beta$)
  - 二次型的矩阵表达式($f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax$)
  - 线性变换的合成($z = By = BAx$)

值得注意的现象:

(1) AB和BA未必相等.

(2) $(AB)^2$和A^2B^2未必相等.

(3) $(A+B)^2$和$A^2+2AB+B^2$未必相等,
$(A+B)(A-B)$和A^2-B^2未必相等.

(4) "$AB = O$"推不出"$A = O$或$B = O$".

(5) "$AB = AC$且$A \neq O$"推不出"$B = C$".

例如: $(1\ 0)\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = 0 = (1\ 0)\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$, 但$\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$,

又如: $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}$,

但$\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}$.

逆矩阵

抽象矩阵的逆

定义: $AB=BA=I$

计算 A^{-1}:
- 利用伴随矩阵
- 利用初等变换

n 阶方阵 A 可逆的充要条件
- 存在方阵 B 使 $AB=I$
- 存在方阵 B 使 $BA=I$
- 秩$(A) = n$ — $|A| \neq 0$
- $Ax = \theta$ 只有零解
- $Ax = b$ 有唯一解
- A 的行(列)向量组线性无关
- A 与 I 相抵(等价)
- A 为有限多个初等矩阵的乘积
- A 的特征值全非零
- $A^{\mathrm{T}}A$ 正定

n 阶可逆矩阵的性质
- 唯一性
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^{-1})^m = (A^m)^{-1}$
- $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$
- $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $|A^{-1}| = |A|^{-1}$
- 若 A 可逆, 则 秩(AB) = 秩(B), 秩(CA) = 秩(C)
- λ 是 A 的特征值 $\Rightarrow$ λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值

设 A 可逆, 则 A 可以经过有限次初等行变换化为行最简形——单位矩阵 E.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & P_1A & & P_2P_1A & & & & P_{l-1}\cdots P_2P_1A & & P_lP_{l-1}\cdots P_2P_1A \\
 & & \| & & \| & & & & \| & & \| \\
A & \to & * & \to & * & \to & \cdots & \to & * & \to & E \\
(A\ E) & \to & * & \to & * & \to & \cdots & \to & * & \to & (E\ \ ?) \\
 & & \| & & \| & & & & \| & & \| \\
 & & P_1(A\ E) & & P_2P_1(A\ E) & & & & P_{l-1}\cdots P_2P_1(A\ E) & & P_lP_{l-1}\cdots P_2P_1(A\ E)
\end{array}
$$

$$P_lP_{l-1}\cdots P_2P_1(A\ E) = (P_lP_{l-1}\cdots P_2P_1A,\ P_lP_{l-1}\cdots P_2P_1)$$

$$? = A^{-1} \Leftarrow (P_lP_{l-1}\cdots P_2P_1A,\ P_lP_{l-1}\cdots P_2P_1)$$

设A可逆, 则A可以经过有限次初等行变换化为行最简形——单位矩阵E.

下面用初等变换解矩阵方程$AX = B$.

注意到$X = A^{-1}B$.

分块矩阵

初等行变换

$$\underbrace{(A\ B) \to * \to * \to \dots \to * \to (E\ \ ?)}_{\text{初等行变换}}$$

$$* = P_1(A\ B), \quad * = P_2P_1(A\ B), \quad * = P_{l-1}\dots P_2P_1(A\ B), \quad (E\ \ ?) = P_l P_{l-1}\dots P_2P_1(A\ B)$$

$$? = A^{-1}B = X \Leftarrow (P_l P_{l-1}\dots P_2P_1A,\ P_l P_{l-1}\dots P_2P_1B)$$

分块矩阵

- 运算
  - 加法
  - 数乘
  - 乘法
  - 转置
  - 行列式
  - 逆矩阵
- 应用
  - $Ax = b$的增广矩阵 (A, b)
  - 向量组↔矩阵
  - 用初等行变换求A^{-1}: $(A, E)\to(E, A^{-1})$; 解$AX = B$: $(A, B)\to(E, A^{-1}B)$
  - 矩阵的等价标准形 $E_{m\times n}^{(r)}$

矩阵的分块运算

- 加法
- 数乘
- 乘法
- **转置**
- 行列式
- 逆矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}$$

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{1t}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1t}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{st}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

线性代数总复习 二. 矩阵

矩阵的分块运算

- 加法
- 数乘
- 乘法
- 转置
- **行列式**
- 逆矩阵

$$\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix}=|A|\times|B|,\quad \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix}=|A|\times|B|,$$

其中A, B都是方阵.

但即使A, B, C, D都是方阵,

$$\begin{vmatrix} A & C \\ D & B \end{vmatrix}=|A|\times|B|-|C|\times|D|$$

也未必成立, 例如

$$\begin{vmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \\ 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&1&0 \\ 0&1&0&0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{vmatrix}=1.$$

分块对角矩阵的行列式 $\begin{vmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_t \end{vmatrix}=|A_1|\times\ldots\times|A_t|.$

矩阵的分块运算
- 加法
- 数乘
- 乘法
- 转置
- 行列式
- 逆矩阵

若$A_1, \ldots, A_t$都是可逆方阵(不必是同阶的), 则

$$\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_t \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & A_t^{-1} \end{pmatrix}.$$

矩阵的初等变换

来源
- 线性方程组的初等变换

分类
- 初等列变换
- 初等行变换

性质
- 可逆性
- 与初等矩阵的联系
- 保矩阵的秩

应用
- 解线性方程组
- 求逆矩阵
- 解矩阵方程
- 求矩阵的秩
- 求向量组的秩
- 求极大无关组
- 求$L(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$的基和维数
- 求合同标准形

矩阵的秩

- 定义
  - 最高阶非零子式的阶数
  - 行向量组的秩 ═ 行空间的维数
  - 列向量组的秩 ═ 列空间的维数
- 等式
  - $r(A) = r(A^T) = r(A^TA)$
  - A与B等价$\Rightarrow r(A) = r(B)$
  - P与Q可逆$\Rightarrow r(A)=r(PAQ)$
  - A与B相似$\Rightarrow r(A) = r(B)$
  - A与B合同$\Rightarrow r(A) = r(B)$
- 不等式
  - $\max\{r(A), r(B)\} \le r(A, B) \le r(A)+r(B)$
  - $r(A+B) \le r(A) + r(B)$
  - $r(A)+r(B)-n \le r(A_{s\times n}B_{n\times t}) \le r(A), r(B)$

特征值和特征向量

- 定义
  - $A\xi = \lambda\xi$ 其中$\xi \ne \theta$
- 计算
  - $|\lambda E-A| = 0$
  - $(\lambda E-A)x = 0$
- 应用
  - 相似对角化
  - 用$A=P^{-1}\Lambda P$计算A^k
  - 化二次型为标准形
- 性质
  - $|\lambda E-A| = |\lambda E-(P^{-1}AP)|$
  - $\sum\lambda_i = tr(A), \Pi\lambda_i = |A|$
  - $|\lambda E-A| = |\lambda E-A^T|$
  - $A\xi=\lambda\xi \Rightarrow f(A)\xi=f(\lambda)\xi$
  - 对应于不同特征值的特征向量线性无关
  - A可逆$\Leftrightarrow A$的特征值全不为零, 此时 $A\xi=\lambda\xi \Leftrightarrow A^{-1}\xi=\lambda^{-1}\xi$
  - $A^T=A \Rightarrow \lambda\in R$且对应于不同特征值的特征向量正交

n阶方阵　非零向量　特征值

$$A\xi = \lambda\xi$$

特征向量

特征矩阵

$\lambda E - A$

$$(\lambda E - A)\xi = 0$$

特征多项式

$$|\lambda E - A| = 0$$

特征方程

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

直接计算$|\lambda E - A|$

① $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 \\ 0 & \lambda-4 & -5 \\ 0 & 0 & \lambda-6 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-6).$

② $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda-4 & 0 \\ -3 & -5 & \lambda-6 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-6).$

③ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 \\ 0 & \lambda-4 & 0 \\ -5 & -6 & \lambda-7 \end{vmatrix} = (\lambda-4)\ldots.$

④ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-4 & \lambda-4 & \lambda-4 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-4)\ldots.$

⑤ $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 2 \\ -1 & \lambda & 3 \\ -1 & 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 2 \\ 0 & \lambda-1 & -\lambda+1 \\ -1 & 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\ldots.$

间接计算$|\lambda E-A|$

① $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$,

$r(A)=1$, $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=3$, $|\lambda E-A|=\lambda^2(\lambda-3)$.

② $\alpha=(a_1,\ldots,a_n)^T$, $A=\alpha\alpha^T$, $|\lambda E-A|=\lambda^{n-1}(\lambda-\|\alpha\|^2)$.

③ 3阶方阵$E-A$, $E+A$, $2E-3A$都不可逆,

$|\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2/3)$.

④ 若$A_{3\times3}$的特征值为1, –1, 2,

则 $|\lambda E-A^{-1}|=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-1/2)$,

$|\lambda E-A^*|=(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda+1)$.

⑤ 若$A_{3\times3}$满足$A^2-A=O$, $r(A)=2$, 则 $|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-1)^2$.

相似矩阵

- **定义**：A与B相似($A\sim B$): 存在可逆阵P使$P^{-1}AP=B$
- **性质**：
  - 反身性,对称性,传递性
  - $A\sim B\Rightarrow A\cong B$(相抵/等价)
  - $A\sim B\Rightarrow r(A)=r(B)$
  - $A\sim B\Rightarrow$ 多项式 $f(A)\sim f(B)$
  - $A\sim B\Rightarrow|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$
  - $A\sim B\Rightarrow|A|=|B|$
  - $A\sim B\Rightarrow tr(A)=tr(B)$
- **相似对角化**：
  - $A_{n\times n}\sim$对角阵$\Leftrightarrow A$有n个线性无关的特征向量
  - $A_{n\times n}$有n个不同的特征值$\Rightarrow A_{n\times n}\sim$对角阵
  - 实对称矩阵一定可以正交相似对角化

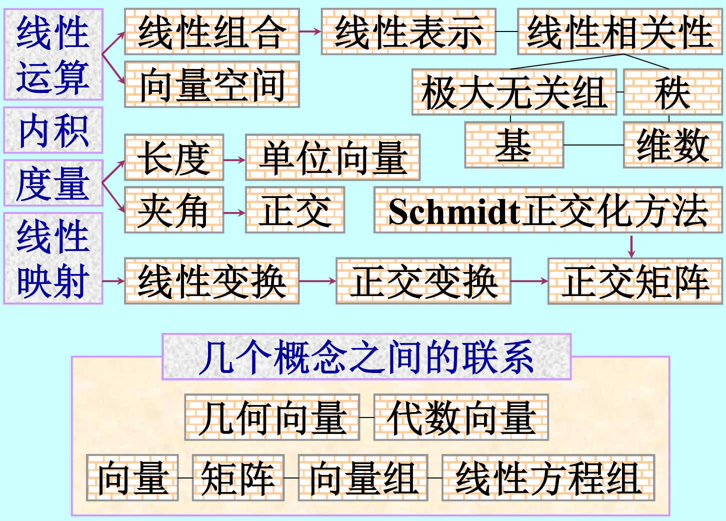
矩阵之间的三种等价关系

	相抵(又称等价)	相似	相合(又称合同)
定义	设A, B为两个$m\times n$矩阵, 若A可经过有限次初等变换化为B, 即存在m阶可逆矩阵P和n阶可逆矩阵Q, 使得$PAQ = B$, 则称A与B相抵(等价).	设A, B为两个n阶方阵, 若存在n阶可逆矩阵P, 使得$P^{-1}AP = B$, 则称A与B相似.	设A, B为两个n阶方阵, 若存在n阶可逆矩阵P, 使得$P^{\mathrm{T}}AP = B$, 则称A与B相合(合同).
不变量	秩	秩, 特征多项式, 特征值, 迹, 行列式	一般情况: 秩 实对称矩阵: 正惯性指数

	相抵(等价)	相似	相合(又称合同)
标准形/规范形	若$m\times n$矩阵A的秩为r, 则其相抵标准形为 $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$	一般情况: Jordan矩阵 若A有n个线性无关的特征向量, 则其相似标准形为: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 其中$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$为$A$的全部特征值.	若A为实对称矩阵, 则其相合标准形为: $\begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix}$ 若A为实对称矩阵, 则其相合规范形为: $\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & O \end{pmatrix}$ 其中$p+q$ = 秩(A).
	A与单位矩阵相抵$\Leftrightarrow A$可逆$\Leftrightarrow \lvert A\rvert\neq 0\Leftrightarrow\ldots$	A与单位矩阵E相似$\Leftrightarrow A = E$	A与单位矩阵相合$\Leftrightarrow A$正定

	相抵(又称等价)	相似	相合(又称合同)
	A与B相抵的大前提是它们是同类型的, 但不要求一定是方阵.	A与B相似的大前提是它们是同阶方阵.	矩阵A与B相合的大前提是它们是阶方阵. 容易证明与对称矩阵相合的矩阵一定是对称的.
判别	若A与B不是同类型的, 肯定不会相抵.	若矩阵A与B的秩(或: 迹, 行列式)不相等, 则它们不相似.	若矩阵A与B的秩不相等, 则它们不相合. 若两个同阶方阵A与B的中一个是对称的, 而另一个不是对称的, 则它们不相合.
	若同类型的矩阵A与B的秩不相等, 则它们不相抵.	若两个同阶方阵A与B的秩(或: 迹, 行列式)相等, 再进一步比较它们的特征值, 若它们的特征值不完全相同, 则它们不相似.	若两个同阶实对称矩阵A与B的正惯性指数不相等, 则它们不相合.
	若A与B是同类型的, 且秩相等, 则它们相抵.	若方阵A与B的相似标准形相同, 则它们相似.	若两个同阶实对称矩阵A与B的秩相等, 正惯性指数也相等, 则它们相合.

三. 向量



n维向量的概念

n维向量
- 本 质 — n个数$a_1, a_2, \ldots, a_n$构成的有序数组（分量）
- 几何背景 — 向量/点的坐标
- 表现形式
  - 行矩阵 — 行向量
  - 列矩阵 — 列向量

列向量组: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$

$\downarrow$

矩阵$A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$

$\downarrow$

矩阵A的秩

$\downarrow$

向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$的秩

$r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$

行向量组: $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$

$\downarrow$

矩阵$A = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_s \end{pmatrix}$

$\downarrow$

矩阵A的秩

$\downarrow$

向量组$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$的秩

$r(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s)$

$r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) \le s$

$r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) < s$ $\rightarrow$ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性相关

$r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) = s$ $\rightarrow$ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 线性无关

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ns} \end{pmatrix}=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s),$$

$$\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix},$$

$$\boxed{Ax=\beta} \longleftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1s}x_s=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2s}x_s=b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{ns}x_s=b_n \end{cases}$$

$$\boxed{Ax=\beta} \longleftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1s}x_s=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2s}x_s=b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{ns}x_s=b_n \end{cases}$$

$Ax=\beta$有解$\Leftrightarrow$ β能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示

$Ax=\theta$ 有非零解$\Leftrightarrow$ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\dots+x_s\alpha_s$$

$$=x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}+\dots+x_s\begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \cdots \\ a_{ns} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1s}x_s \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2s}x_s \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{ns}x_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}=\beta$$

向量组的线性表示与矩阵乘积

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}$$

矩阵的乘积$C_{m\times n} = A_{m\times s} B_{s\times n}$,

$\Updownarrow$

向量组的线性表示:

列向量$\gamma_j = b_{1j}\alpha_1 + b_{2j}\alpha_2 + \dots + b_{sj}\alpha_s, j = 1, 2, \dots, n,$

行向量$\eta_i = a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \dots + a_{is}\beta_s, i = 1, 2, \dots, m.$

设A与B是同类型的矩阵,

(1) 若它们的行向量组等价, 则$r(A) = r(B)$,
从而可得A与B等价(相抵).

(2) 若它们的列向量组等价, 则$r(A) = r(B)$,
从而可得A与B等价(相抵).

但是反过来, 都未必成立. 例如:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则A与B等价(相抵), 但它们的行向量组不等价,
列向量组也不等价.

一些常用的结论

(1) 含有零向量的向量组一定线性相关.

(2) 单个向量α构成的向量组线性相关$\Leftrightarrow \alpha=\theta$.

(3) 两个向量α, β线性相关$\Leftrightarrow \alpha$与β的分量成比例.

(4) 若$\alpha_1, \dots, \alpha_s$线性相关, 则$\alpha_1, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_t$也线性相关.
若$\alpha_1, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_t$线性无关, 则$\alpha_1, \dots, \alpha_s$也线性无关.

(5) 任意$n+1$个n维向量线性相关.

(6) 如果向量组$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}\alpha_s\\ \beta_s\end{pmatrix}$线性相关,
其中$\alpha_1, \dots, \alpha_s$是维数相同的列向量($\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$也是维数相同的列向量), 则$\alpha_1, \dots, \alpha_s$也是线性相关的.

若$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$线性无关, 则$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}\alpha_s\\ \beta_s\end{pmatrix}$线性无关.

线性代数总复习 三. 向量

一些常用的结论

(7) 向量组$\alpha_1, \dots, \alpha_s$ ($s\geq 2$) 线性相关的充分必要条件是:
其中至少有某一个向量可由其余的向量线性表示.

(8) 若向量组$\alpha_1, \dots, \alpha_s$线性无关, 而$\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta$线性相关,
则β一定能由$\alpha_1, \dots, \alpha_s$线性表示, 且表示的方式是唯一的.

(9) 若向量组I: $\alpha_1, \dots, \alpha_s$可由向量组II: $\beta_1, \dots, \beta_t$线性表示,
并且$s>t$, 则向量组I是线性相关的.

(10) 若$\alpha_1, \dots, \alpha_s$线性无关, 且可由$\beta_1, \dots, \beta_t$线性表示, 则$s\leq t$.

(11) 若向量组$\alpha_1, \dots, \alpha_s$和$\beta_1, \dots, \beta_t$都线性无关, 并且这两个
向量组等价, 则$s=t$.

(12) 设I_0: $\alpha_1, \dots, \alpha_r$是向量组I: $\alpha_1, \dots, \alpha_s$的一个极大无关组,
则I_0与I等价.

一些常用的结论

(13) 若向量组I: $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$可由向量组II: $\beta_1, \ldots, \beta_t$线性表示,
则秩(I)≤秩(II);
若这两个向量组等价, 则秩(I) = 秩(II).
(注: 一般情况下, 两个向量组的秩相等时, 它们未必等价!
例如:

$$\text{I: } \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}; \quad \text{II: } \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

这两个向量组的秩都是2, 但它们不等价. 事实上, I中的

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$不能由II线性表示.)

四. 线性方程组

基本概念
- (非)齐次线性方程组
- 系数矩阵 — 增广矩阵
- 解(向量) — 通解 — 特解
- (非)零解 — 基础解系 — 解空间

基本理论 — 解的存在性与通解的结构

应用
- 研究线性相关性
- 线性表示, 求坐标
- 求矩阵的特征向量
- 平面的位置关系

定理1. 设$A\in R^{m\times n}$. 若$m<n$(方程的个数小于未知量的个数), 则齐次线性方程组$Ax=\theta$有非零解, 且其通解中至少含$n-m$个自由未知量.

性质1. 若α, β都是$Ax=\theta$的解向量, 则$\alpha+\beta$也是$Ax=\theta$的解向量.

性质2. 若α是$Ax=\theta$的解向量, $k\in\mathbf{R}$, 则$k\alpha$也是$Ax=\theta$的解向量.

定理2. 设$A\in\mathbf{R}^{m\times n}$, 秩$(A)=r$.

(1) 若$r=n$, 则$Ax=\theta$没有基础解系;

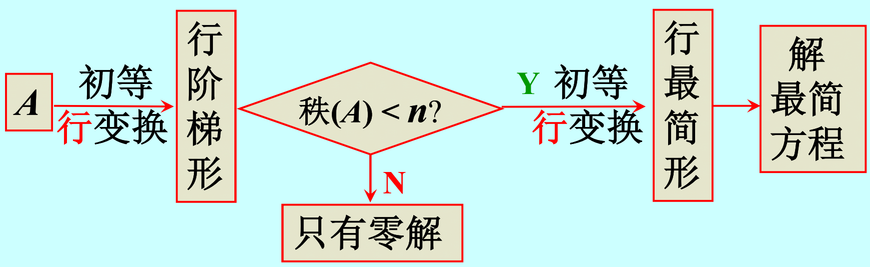
(2) 若$r<n$, 则$Ax=\theta$确有基础解系,

且任一基础解系中均含有$n-r$个解向量.

性质3. 与基础解系等价的线性无关向量组也是基础解系.

性质4. 若$A\in\mathbf{R}^{m\times n}$, 秩$(A)=r$, 则$Ax=\theta$的任意$n-r$个线性无关的解向量都是$Ax=\theta$的基础解系.

解齐次线性方程组$A_{m\times n}x=\theta$的一般步骤



定理3. 设$A\in \mathbf{R}^{m\times n}$, $b\in \mathbf{R}^m$, 则

(1) $Ax=b$有解$\Leftrightarrow$秩$([A, b])$ = 秩(A);

(2) 当秩$([A, b])$=秩(A)=n时, $Ax=b$有唯一解;

(3) 当秩$([A, b])$=秩$(A)<n$时, $Ax=b$有无穷多解, 且通解中含有$n-$秩(A)个自由未知量.

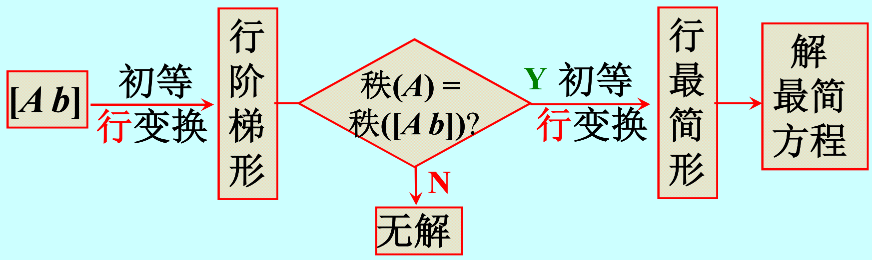
性质5. 设η_1, η_2都是 $Ax = b$ 的解, 则$\eta_1-\eta_2$是$Ax = \theta$的解.

性质6. η是$Ax = b$的解, ξ是$Ax = \theta$的解, 则$\xi+\eta$是$Ax = b$的解.

定理4. 设η^*是$Ax = b$的一个解, $\eta_1, \ldots, \eta_{n-r}$是$Ax = \theta$的基础解系, 则$Ax = b$的<u>结构式通解</u>为

$$x = k_1\eta_1 +\ldots+k_{n-r}\eta_{n-r}+\eta^*.$$

解非齐次线性方程组$A_{m\times n}x = b$的一般步骤



五. 二次型

实对称矩阵 ↔ 实二次型 → 配方 / 合同变换 / 正交变换 → 标准形 → 规范形

x^TAx

$x = Py$ (P可逆)

y^TBy 只含平方项
$B = P^TAP$为对角形

$x = Qy$ ($Q^TQ=E$)

$y^T\Lambda y$只含平方项
$\Lambda=Q^{-1}AQ$为对角形

$z^T\begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_q & \\ & & O \end{pmatrix}z$

不变量: 秩, 正惯指数

不变性: 正定性

n元实二次型

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\ldots+a_{nn}x_n^2 +2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\ldots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

$a_{ij} = a_{ji}$

$$\|$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

A的二次型

f 的秩: r(*A*)

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

f 的矩阵

$$x^TAx$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = x^TAx$$

f 的标准形

?

$$k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \dots + k_ny_n^2$$

$$= (y_1, y_2, \dots, y_n)\begin{pmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

寻求可逆的线性变换$x = Py$, 使得

$$f(x) = x^TAx = (Py)^TA(Py) = y^T(P^TAP)y = g(y)$$

⇕

寻求可逆矩阵P, 使得

$$P^TAP = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_n \end{pmatrix}$$

基本结论

(1) 实二次型$f(x) = x^TAx$总可以通过$\mathbf{R}^n$中的可逆线性变换将其化为标准形

$$f = k_1y_1^2 + \dots + k_ny_n^2,$$

其中$k1, \dots, kn$中非零的个数r =秩(f), 且正项的个数 p与负项的个数q ($p + q = r$)都是在可逆线性变换下的不变量.

(2) 实二次型$f(x) = x^TAx$总可以通过$\mathbf{R}^n$中的可逆线性变换将其化为规范形

$$f = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2 + 0y_{r+1}^2 + \dots + 0y_n^2$$

且规范形是唯一的.

基本结论

(3) 设n实阶对称矩阵A的秩为r, 则存在可逆阵P, 使

$$P^{\mathrm{T}}AP=\begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_q & \\ & & O \end{pmatrix},\ \text{其中} p+q=r.$$

(4) 同阶正定矩阵的和仍为正定矩阵.

(5) 可逆线性变换不改变二次型的正定性.

(6) 设A为n阶实对称矩阵, 则下列叙述等价:

① A是正定矩阵; ② A的正惯性指数为n;
③ A的特征值均大于零; ④ A与单位矩阵相合;
⑤ 存在可逆矩阵P, 使得$A = P^{\mathrm{T}}P$;
⑥ A的各阶顺序主子式均大于零.