东 南 大 学 考 试 卷 (A 卷)

课 程 名 称	线性代数A	考试学期	14-15-3	得 分	
适 用 专 业	非电类专业	考试形式	闭 卷	考试时间长度	120分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

姓名______ 学号______ 密 封 线

一.（30%）填空题

1. 设3维行向量 $x=(x_1,x_2,x_3)$ 满足 $xA=(x_1+x_3,2x_1-x_2)$，则 $A=$__________；

2. 已知 $A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$，则伴随矩阵 $A^*=$__________；

3. 若3阶行列式 $|\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3|=2$，$|\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_3|=3$，则 $|2\alpha_2,\ \alpha_1,\ \alpha_3+\beta_3|=$______；

4. 若向量组 $\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}b\\0\\1\end{pmatrix}$ 线性相关，则 a,b 满足__________；

5. 向量空间 $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in \mathrm{R}^3 \,\middle|\, \begin{cases}2x-y+3z=0\\ x+y-2z=0\end{cases}\right\}$ 的维数等于__________；

6. 将 4×3 矩阵 A 的第3列的 -2 倍加到第2列得到矩阵 AP，则 $P=$__________；

7. 若二次型 $f(x_1,x_2)=ax_1^2-2x_2^2+4ax_1x_2$ 的负惯性指数为2，则 a 满足__________；

8. 设 $A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，以下矩阵中与 A 相似但不合同的是__________：

$B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，$D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，$E=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$；

9. 设方阵 A,B 满足 $A-B=AB$，则 $(A+E)^{-1}=$__________；

10. 若 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$，其中 $P=(\alpha,\beta)$。取 $Q=(\alpha+\beta,\alpha)$，则 $Q^{-1}AQ=$________。

二. （**10%**）求行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 9 & 27 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 8 \\ -2 & 1 & 4 & -8 \end{vmatrix}$ 的值。

三. （**14%**）设线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3=b+4 \\ -x_1-2x_2+ax_3=2 \\ 4x_1+5x_2-2x_3=c \end{cases}$，

1. 问：当 a,b,c 满足什么条件时，方程组有唯一解；无解；有无穷多解？

2. 当方程组有无穷多解时，求其通解。

四．（**12%**）设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$。求矩阵 X 使得 $A+X=XA$。

五．（**12%**）已知向量组 $\alpha_1=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$。

1．利用 **Schmidt** 正交化方法求与 α_1，α_2，α_3 等价的标准正交向量组；

2．记 $A=(\alpha_1，\alpha_2，\alpha_3)$，求一正交阵 Q 和上三角阵 R，使得 $A=QR$。

六. （**14%**）已知3×3矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & -a-2 & 0 \\ 0 & a-3 & 0 \\ 4-a & b & -2 \end{pmatrix}$有一个二重特征值，且$A$可相似对角化。

1. 求参数a,b的值；

2. 求一可逆阵P及对角阵Λ，使得$P^{-1}AP=\Lambda$。

七. （**8%**）证明题：

1. 设A是3阶方阵，ξ是3维列向量，已知$A^3\xi=\theta, A^2\xi\neq\theta$，记$P=(\xi, A\xi, A^2\xi)$，证明：方阵$P$可逆。

2. 设A是$n\times n$实对称矩阵，证明：若$E-A^2$是正定的，则$\begin{pmatrix} E & A \\ A & E \end{pmatrix}$也是正定的。