电磁场作业8

06219109 孙寒石

4.1

已知自由空间中均匀平面波的电场表示式为

$$\vec{E}(x,t) = [100\sin(\omega t - \beta x)\vec{a}_z + 200\cos(\omega t - \beta x)\vec{a}_y] \quad (V/m)$$

求该电磁场的磁场强度 $\vec{H}$ 和坡印亭矢量 $\vec{S}$。

Solutions:

$$\vec{E}(x) = 100e^{-j(\beta x + \pi/2)}\vec{a}_z + 200e^{-j\beta x}\vec{a}_y$$

磁场强度复矢量为

$$\vec{H}(x) = \frac{1}{\eta_0}\vec{a}_x \times \vec{E}(x) = -\frac{5}{6\pi}e^{-j(\beta x + \pi/2)}\vec{a}_y + \frac{5}{3\pi}e^{-j\beta x}\vec{a}_z$$

磁场强度瞬时值为

$$\vec{H} = -\frac{5}{6\pi}\sin(\omega t - \beta x)\vec{a}_y + \frac{5}{3\pi}\cos(\omega t - \beta x)\vec{a}_z$$

坡印亭矢量为

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \approx [26.53 + 79.58\cos^2(\omega t - \beta x)]\vec{a}_x$$

4.2

已知在自由空间传播的均匀平面波的电场强度表示式为

$$\vec{E}(r,t) = 10(\vec{a}_x + 2\vec{a}_y + \vec{a}_z)\cos(\omega t + 3x - y - z)$$

求电磁波的传播方向、角频率、电磁波的极化状态和磁场强度 $\vec{H}(r,t)$。

Solutions:

电磁场的传播方向为

$$\vec{a}_k = (-\frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}})$$

角频率为

$$\omega = \frac{k}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 3\sqrt{11} \times 10^8 rad/s$$

极化状态：xyz 相位相同，$\sqrt{6}E_x = \sqrt{6}E_y/2 = \sqrt{6}E_z = E_{all}$
为线极化波，且与 xyz 轴夹角为

$$\arccos(1/\sqrt{6}), \arccos(1/\sqrt{6}), \arccos(2/\sqrt{6})$$

磁场强度为

$$\vec{H}(r,t) = -\frac{1}{j\omega\mu_0}\nabla \times \vec{E}$$

即

$$\vec{H} = j\frac{1}{120\sqrt{11}\pi}(-\vec{a}_x + 4\vec{a}_y - 7\vec{a}_z)\sin(\omega t + 3x - y - z)$$

4.3

均匀平面电磁波在海水中向下垂直传播（假设传播方向为 $+x$ 方向），已知 $f=500kHz$，海水的相对介电常数、相对磁导率及电导率分别为 $\varepsilon_r=80,\mu_r=1,\sigma=4S/m$。在海水表面 $x=0$ 处，磁场强度为 $\vec{H}=\vec{a}_y 20.5\times10^{-7}\cos(\omega t-0.611)$。求：

1. 海水中的波长及相速度；
2. 在 $x=1$ 处，电场强度和磁场强度的表达式；
3. 从海水表面到 1m 深处，单位体积内海水损耗的平均功率。

Solutions:

(1)

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}>>1\Rightarrow 海水为良导体$$

可以得到

$$r=j\omega\sqrt{\mu\varepsilon(1-j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon})}=\frac{1+j}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu\sigma}$$

所以可以计算得到

$$\lambda=\frac{2\pi}{\beta}=\sqrt{5}m$$

$$v_p=\frac{\omega}{\beta}=\frac{\sqrt{5}}{2}\times10^6 m/s$$

(2) 磁场的瞬时表达式为

$$\vec{H}=\vec{a}_y 20.5\times^{-7}\times e^{-\alpha x}\cos(2\pi\times10^6 t-0.611-\beta x)$$

$$\vec{E}(x,t)=-\vec{a}_z\eta_c 20.5\times10^{-7}e^{-\alpha x}\cos(2\pi\times10^6 t-0.611-\beta x)$$

在 $x=1$ 处，电场强度和磁场强度为:

$$\vec{E}=-\vec{a}_z\eta_c 20.5\times 10^{-7}e^{-2\sqrt{5}\pi/5}\cos(2\pi\times 10^6 t-0.611-2\sqrt{5}/5\pi)$$

$$\vec{H}=-\vec{a}_y 20.5\times 10^{-7}e^{-2\sqrt{5}\pi/5}\cos(2\pi\times 10^6 t-0.611-2\sqrt{5}/5\pi)$$

(3)

$$P_{aver}=\frac{1}{2}Re[E\times H^*]=7.27\times 10^{-3}W$$

4.5

已知一电磁波的电场强度表达式为

$$\vec{E}=\vec{a}_x E_0\cos(\sqrt{\mu\varepsilon}z-t)+\vec{a}_y E_0\sin(\sqrt{\mu\varepsilon}z-t)$$

求磁场强度 $\vec{H}$ 和平均能流密度矢量。

Solutions:

可以知道

$$\vec{E}=\vec{a}_x E_0 e^{-j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}z}+j\vec{a}_y E_0 e^{-j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}z}$$

$$\vec{H}(z)=\frac{1}{\eta_c}\vec{e}_z\times\vec{E}(z)=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(\overrightarrow{a_y}E_0 e^{-j\omega\sqrt{\mu_\varepsilon z}}-j\overrightarrow{a_x}E_0 e^{-j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}z}\right)$$

$$\Rightarrow\vec{H}(z,t)=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left[\overrightarrow{a_y}E_0\cos\left(\omega t-\omega\sqrt{\mu_\varepsilon z}\right)+\overrightarrow{a_x}E_0\cos\left(\omega t-\omega\sqrt{\mu\right.\right.$$

$$=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left[\overrightarrow{a_y}E_0\cos(\omega t-\omega\sqrt{\mu\varepsilon}z)+\vec{a}_x E_0\sin(\omega t-\omega\sqrt{\mu\varepsilon}z)\right]$$

$$\overrightarrow{S_{aver}}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[E\times H^*\right]=\vec{a}_z\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0^2\cos(2\omega\sqrt{\mu\varepsilon}z)$$

4.7

一个频率为 3 GHz，沿 y 方向极化的均匀平面电磁波，在介电常数和导电率分别为 $\varepsilon_r = 2.5, \sigma = 1.67 \times 10^{-3} S/m$ 的非磁性媒质中沿 $+x$ 方向传播。求：

1. 电磁波的振幅减小到原来的一半时，电磁波在媒质中传播了多少距离？
2. 媒质的波阻抗、波长和相速度
3. 设在 $x = 0$ 处，电场强度为 $\vec{E} = \vec{a}_y 50 \sin(6\pi \times 10^9 t + \frac{\pi}{3})$。给出磁场强度的瞬时表达式。

Solutions:

（1）

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} << 1 \Rightarrow \text{海水为弱导电媒质}$$

可以得到

$$r = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon})} \approx j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}(1 - j\text{-})$$

$$\alpha = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \approx 0.199, \quad \beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \approx 31.6\pi \mathrm{rad/s}$$

$$e^{-\alpha z} = \frac{1}{2} \Rightarrow z = \frac{1}{2}\ln 2 \approx 3.48 \text{ m}$$

（2）波阻抗

$$\eta_c = \sqrt{\mu/\varepsilon}(1 + \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon})^{-1/2} \approx 238.43 e^{j \times 2 \times 10^{-3}}$$

波长：

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{5}{79} m$$

相速度：

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \approx 1.89 \times 10^8 m/s$$

（3）电场强度的复矢量为

$$\vec{E}(z) = -\vec{a}_y 50 \cdot je^{-\alpha x} \cdot e^{-j\beta x} \cdot e^{j\frac{\pi}{3}}$$
$$\vec{H}(z) = \frac{1}{\eta_0} \cdot \vec{a}_x \times \vec{E}(z) = -\overrightarrow{a_z} \cdot 0.21 je^{-\alpha x} \cdot e^{-j\beta x} e^{\left(\frac{\pi}{3} - 2\times 10^{-3}\right)}$$
$$\therefore \vec{H}(z,t) = -\overrightarrow{a_z} \cdot 0.21 \sin\left(6\pi \times 10^{-9} t - 31.6\pi x + \frac{\pi}{3} - 0.002\right) e^{-0.1}$$