东南大学考试卷（A卷）

课程名称 工科数分（下)期中　考试学期 11-12-3　得分 ______

适用专业 选学工科数分的各类专业　考试形式 闭卷　考试时间长度 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六
得分						
评阅人						

自觉遵守考场纪律　如考试作弊　此答卷无效

学号______　姓名______

密　封　线

一、 填空题（本题共5小题，每小题4分，共20分）

1. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}=$ ______;

2. 设$z=z(x,y)$由方程$z=\displaystyle\int_{xy}^{z}f(t)\mathrm{d}t$确定,其中$f$连续,则$\mathrm{d}z=$ ______;

3. 设$z=\mathrm{Ln}(-2\,\mathrm{i})$, 则$\mathrm{Re}z=$ ______, $\mathrm{Im}z=$ ______;

4. 曲面$2xy-z-3e^z=1$在点$(1,2,0)$处的法线方程为______;

5. 交换积分次序: $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_0^{2-y}f(x,y)\mathrm{d}x=$ ______;

二、 单项选择题（本题共4小题，每小题4分，共16分）

1. 设曲线C为圆周$x^2+y^2=1$,则曲线积分$\displaystyle\oint_C(x^2+y^2-4x)\mathrm{d}s=$　[　]

(A) 1　(B) -3　(C) 2π　(D) -6π

2. 设$D=\{(x,y)|-1\le y\le x,-1\le x\le 1\}$,则　[　]

(A) $\displaystyle\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$　(B) $\displaystyle\iint_D(3y^3+x^4)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$

(C) $\displaystyle\iint_D x\ln(y+\sqrt{1+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$　(D) $\displaystyle\iint_D(\sin y+\cos x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$

3. 二次积分$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sin\varphi}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho$可以写成　[　]

(A) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$　(B) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$

(C) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$ (D) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$

4. 以下表述正确的是 [ ]

(A)若$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处存在偏导数,则$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$一定存在;

(B)若复变函数$f(z)$在点z_0处解析,则$f(z)$在点z_0的某个邻域内必然连续;

(C)若$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处存在偏导数f_x,f_y,则$z=f(x,y)$在该点处必可微;

(D)以上表述皆不正确.

三、 计算下列各题（本题共5小题，每小题8分，满分40分）

1. 设函数 $u=\ln(2xz^2\arcsin y)$, u在点 $M(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2},2)$ 处沿哪个方向的方向导数最大?并求最大的方向导数.

2. 设 $z=f(x^2-y^2,xy)+g(x^2+y^2)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, g 具有二阶导数, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

3. 设平面 $\prod$ 过原点及点 $(6,-3,2)$, 且与曲面 $2x^2-y+z^2=2$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切平面垂直,求平面 $\prod$ 的方程.

4. 求 $I=\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\0\le y\le 1}}|y-x^2|\max\{x,y\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

5. 计算第一型曲面积分$\oiint\limits_S(x^2+y)\mathrm{d}S$,其中$S$是锥体$\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$的表面.

四、（本题满分8分）设 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是解析函数,已知 $u(x,y)=x^2-y^2+4x$,且 $f(0)=-3\mathrm{i}$,求 $f(z)$. (用变量 z 表示)

五、（本题满分8分）求由 $z=\sqrt{2(x^2+y^2)}$ 与 $z=\sqrt{3-x^2-y^2}$ 所围成的立体图形的质心.(设密度 μ 为常数)

六、（本题满分8分）在第一卦限内作曲面 $S: z=4-x^2-\dfrac{y^2}{4}$ 的切平面，使得切平面与三个坐标平面及曲面 S 所围成的立体的体积最小.求切点的坐标,并求最小体积.

六、（本题满分8分）设 f 在 (x_0,y_0) 的邻域内有定义,且极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=A$, $g(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微,且 $g(x_0,y_0)=0$,证明 $z=f(x,y)g(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微.

$\because g(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，$\left(\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=A \quad \therefore f(x,y)=A+\alpha\right)$

$\therefore g(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=g(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=g_x\cdot\Delta x+g_y\Delta y+o(\rho)$

$\therefore f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)g(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)g(x_0,y_0)$

$=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)g(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=(A+\alpha)(g_x\Delta x+g_y\cdot\Delta y+o(\rho))$

$=Ag_x\Delta x+Ag_y\cdot\Delta y+\underline{(A+\alpha)\cdot o(\rho)+(\alpha\cdot\Delta x)g_x+g_y\cdot\alpha\Delta y}=A\cdot g_x\Delta x+Ag_y\cdot\Delta y+o(\rho)$

$\left(\dfrac{(A+\alpha)\cdot o(\rho)+(\alpha\cdot\Delta x)g_x+g_y(\alpha\Delta y)}{\rho}\to 0\right)$ $\therefore z=f(x,y)g(x,y)$ 可微.

11-12-3高数A期中试卷参考答案及评分标准

一、 填空题（本题共5小题，每小题4分，共20分）

1. $\underline{0}$; 2. $\underline{\mathrm{d}z=\dfrac{yf(xy)}{f(z)-1}\mathrm{d}x+\dfrac{xf(xy)}{f(z)-1}\mathrm{d}y}$; 3. $\underline{\ln 2,-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi}$; 4. $\underline{\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-2}}$;

5. $\underline{\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{2-x}f(x,y)\mathrm{d}y}$

二、 单项选择题（本题共4小题，每小题4分，共16分）

1. C; 2. C; 3. A; 4. B

三、 计算下列各题（本题共5小题，每小题8分，满分40分）

1. 解 $\mathrm{d}u|_M=\{\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x+\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}\arcsin y}\mathrm{d}y+\dfrac{2}{z}\mathrm{d}z\}|_M=\mathrm{d}x+\dfrac{4\sqrt{2}}{\pi}\mathrm{d}y+\mathrm{d}z$,(4分)

函数 u 在点 M 处沿方向 $\{1,\dfrac{4\sqrt{2}}{\pi},1\}$ 的方向导数最大,(2分) 最大的方向导数为 $\dfrac{\sqrt{32+2\pi^2}}{\pi}$ (2分)

2. 解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf_1+yf_2+2xg'$,(3分)

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-4xyf_{11}+2(x^2-y^2)f_{12}+xyf_{22}+f_2+4xyg''$(5分)

3. 解平面 $\prod$ 的法向量为 $\mathbf{n}=\{4,-1,2\}\times\{6,-3,2\}=\{4,4,-6\}$,(5分)

平面 $\prod$ 的方程为 $2x+2y-3z=0$.(3分)

4. 解 $I=\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}(x^2-y)x\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}(y-x^2)x\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1(y-x^2)y\mathrm{d}y$

(4分) $=\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{120}+\dfrac{11}{60}=\dfrac{11}{40}$.(4分)

5. 解 $\displaystyle\oiint_S(x^2+y)\mathrm{d}S=(1+\sqrt{2})\iint_{x^2+y^2\le 1}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{1+\sqrt{2}}{4}\pi$ (5分)+(3分)

四、 （本题满分8分） 解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+4=\dfrac{\partial v}{\partial y},v=2xy+4y+\varphi(x)$,(3分)

$\dfrac{\partial v}{\partial x}=2y+\varphi'(x)=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=2y,\varphi(x)=C,v=2xy+4y+C$, (2分) 所以

$f(z)=x^2-y^2+4x+\mathrm{i}(2xy+4y+C)$,令 $y=0$,得 $f(x)=x^2+4x+\mathrm{i}C$, 于是 $f(z)=z^2+4z+\mathrm{i}C$, (2分) 由$f(0)=-3\mathrm{i}$,得 $C=-3$,故 $f(z)=z^2+4z-3\mathrm{i}$, (1分)

五、 （本题满分8分） 解 由对称性得 $\bar{x}=\bar{y}=0$,(2分)

$$m=\frac{\mu\pi}{2}\int_0^{\sqrt{2}}z^2\mathrm{d}z+\mu\pi\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}(3-z^2)\mathrm{d}z=2(\sqrt{3}-\sqrt{2})\mu\pi$$

$$\bar{z}=\frac{1}{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}\{\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}}z^3\mathrm{d}z+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}(3-z^2)z\mathrm{d}z\}=\frac{3}{8}(\sqrt{3}+\sqrt{2})\ (6分)$$

六、 （本题满分8分） 解 设切点为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$, 切平面方程为

$2x_0x+\frac{y_0}{2}y+z=8-z_0$,(2分)三个坐标平面与切平面所围四面体的体积为

$V^*=\frac{(8-z_0)^3}{6x_0y_0}$,Lagrange函数为 $L=\frac{(8-z_0)^3}{6x_0y_0}+\lambda(x_0^2+\frac{y_0^2}{4}+z_0-4)$,令

$L_{x_0}=-\frac{(8-z_0)^3}{6x_0^2y_0}+2\lambda x_0=0,L_{y_0}-\frac{(8-z_0)^3}{6x_0y_0^2}+\frac{1}{2}\lambda y_0=0,$

$L_{z_0}=-\frac{(8-z_0)^2}{2x_0y_0}+\lambda=0$,解得 $(x_0,y_0,z_0)=(1,2,2)$,由问题的实际意义知,该点即为所求切点,(4分)最小体积 $V_{\min}=V^*-\frac{\pi}{4}\int_0^4 2(4-z)\mathrm{d}z=18-4\pi$ (2分)

六、 （本题满分8分） 设f在(x_0,y_0)的邻域内有定义,且极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$,

$g(x,y)$在(x_0,y_0)处可微,且$g(x_0,y_0)=0$,证明$z=f(x,y)g(x,y)$在(x_0,y_0)处可微.

$\because$ $g(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，($\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$. $\therefore f(x,y)=A+\alpha$)

$\therefore g(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=g(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=g_x\cdot\Delta x+g_y\Delta y+o(\rho)$

$\therefore f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)g(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)g(x_0,y_0)$

$=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)g(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=(A+\alpha)(g_x\Delta x+g_y\cdot\Delta y+o(\rho))$

$=Ag_x\Delta x+Ag_y\cdot\Delta y+\underline{(A+\alpha)\cdot o(\rho)+(\alpha\cdot\Delta x)g_x+g_y\cdot\alpha\Delta y}=A\cdot g_x\Delta x+Ag_y\cdot\Delta y+o(\rho)$.

$\left(\frac{(A+\alpha)\cdot o(\rho)+(\alpha\cdot\Delta x)g_x+g_y(\alpha\Delta y)}{\rho}\to 0\right)$ $\therefore z=f(x,y)g(x,y)$ 可微.