东南大学 2012-2013 学年《高等数学(上)》期末考试试卷

课程名称 高等数学　　考试学期 12-13-2　　得分

适用专业 选高数 AB 的专业　　考试形式 闭卷　　考试时间长度 150 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								

一.填空题（本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 36 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} e^{t^2}\sin t\,dt}{x^2\tan^2 x} =$ ________；

2. 设常数 $k>0$，则方程 $\dfrac{\ln x}{x}+k=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内根的个数为________；

3. 曲线 $\begin{cases} x=\sec t \\ y=e^{4t-\pi} \end{cases}$ 在点 $(x,y)=(\sqrt{2},1)$ 处的切线方程是________；

4. 设 $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$，则 $f'(x)$ 的间断点是________，其类型________；

5. 若连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\int_0^x f(t)dt$，则 $f(x)=$ ________；

6. $\int_0^{2\pi}(\sin^3 x\cdot e^{\cos x}+\sin^4\dfrac{x}{2})dx =$ ________；

7. 曲线 $x^2+xy+y^2=3$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率 $k=$ ________；

8. $\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{1+e^x} =$ ________；

9. 微分方程 $y\ln y\,dx+(x-\ln y)dy=0$ 的通解为________。

二.计算下列各积分（本题共 5 小题，每小题 7 分，满分 35 分）

1. $\int_0^1 \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\,dx$

2. $\int\dfrac{dx}{x+\sqrt{x+2}}$

3. $\int \frac{2\sin x - x}{1+\cos x}dx$

4. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x \arctan e^{x} dx$

5. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2014$，计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{0}^{1} f(nx)dx$ 。

三.（本题满分 6 分） 设方程 $x^{y}+\sin \pi x + y = 0$ 确定了 $x=1$ 附近的一个二阶可导的隐函数 $y=y(x)$，求 $\left.\frac{d^{2}y}{dx^{2}}\right|_{x=1}$

四.（本题满分 6 分） 设 $f(x)=a\left|\cos x\right|+b\left|\sin x\right|$ 在 $x=-\frac{\pi}{3}$ 处取得极小值，且 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f^{2}(x)dx = 2(\sqrt{3}+\pi)$，求常数 a 和 b 。

五.（本题满分 8 分）

设 $f(x)$ 为二阶可导函数，且满足 $f(x)=\sin x-\int_{0}^{x}(x-t)f(t)dt$ 。

试求函数 $f(x)$ 。

六.（本题满分 9 分）

（1）求由曲线 $y=x^2$ 与 $y=\sin(\frac{\pi}{2}x)$ 围成的平面图形 D 的面积；

（2）求（1）中平面图形 D 绕直线 $y=1$ 旋转而成的旋转体的体积。

12-13-2 高数（上）期末试卷参考答案

一.填空题（本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 36 分）

1. $\frac{1}{2}$；　**2.** 1；　**3.** $y=2\sqrt{2}x-3$；

4. $x=\pm1$，第一类；　**5.** 0；

6. $\frac{3}{4}\pi$；　**7.** $\frac{\sqrt{2}}{6}$；

8. $\ln 2$；　**9.** $x=\frac{1}{2}\ln y+\frac{C}{\ln y}$。

二.计算下列各积分（本题共 5 小题，每小题 7 分，满分 35 分）

1. 1

2. $\frac{4}{3}\ln(\sqrt{x+2}+2)+\frac{2}{3}\ln(\sqrt{x+2}-1)+C$

3.

$$\int\frac{2\sin x}{1+\cos x}dx-\int\frac{x}{1+\cos x}dx=-2\ln(1+\cos x)-\int\frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx$$

$$=-2\ln(1+\cos x)-\int xd\tan\frac{x}{2}=-2\ln(1+\cos x)-x\tan\frac{x}{2}-2\ln\cos\frac{x}{2}+C$$

4.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x\arctan e^x+\cos(-x)\arctan e^{-x})dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x(\arctan e^x+\arctan e^{-x})dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos xdx=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\int_0^n f(t)dt}{n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{1}=2014$

三.（本题满分 6 分）

$e^{y\ln x}+\sin\pi x+y=0,\quad x=1\Rightarrow y=-1$

$e^{y\ln x}(y'\ln x+\dfrac{y}{x})+\pi\cos\pi x+y'=0\quad\Rightarrow y'\big|_{x=1}=1+\pi$

$\cdots\cdots\quad\Rightarrow y''\big|_{x=1}=-2(\pi+2)$

四.（本题满分 6 分）

在 $x=-\dfrac{\pi}{3}$ 附近，$f(x)=a\cos x-b\sin x$,由 $f'(-\dfrac{\pi}{3})=0\Rightarrow b=\sqrt{3}a$ (1)

$\because f(x)$ 为偶，$\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f^2(x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f^2(x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\cos x+b\sin x)^2dx$

$=2[\dfrac{\pi}{4}(a^2+b^2)+ab]=2(\sqrt{3}+\pi)$ (2)

(1),(2) $\Rightarrow a=\pm1, b=\pm\sqrt{3}$

$\because x=-\dfrac{\pi}{3}$ 为极小点，$f''(-\dfrac{\pi}{3})=-\dfrac{1}{2}(a+\sqrt{3}b)>0,\therefore a=-1,b=-\sqrt{3}$

五.（本题满分 8 分）

方程：$f''(x)+f(x)=-\sin x, f(0)=0, f'(0)=1$

通解为 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{1}{2}x\cos x$

特解为 $f(x)=\dfrac{1}{2}(\sin x+x\cos x)$

六.（本题满分 9 分）

$A=\int_0^1(\sin\dfrac{\pi}{2}x-x^2)dx=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{1}{3}$

$V=V_{大}-V_{小}=\pi\int_0^1(1-x^2)^2dx-\pi\int_0^1(1-\sin\dfrac{\pi}{2}x)^2dx=4-\dfrac{29}{30}\pi$