东 南 大 学 考 试 卷

课程名称 工科数学分析(上)期中 考试学期 13-14-2 得分 ________

适用专业 选学工科数分的各类专业 考试形式 闭 卷 考试时间长度 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							
评阅人							

自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

学号________ 姓名________

密 封 线

一、 填空题（本题共7小题，第1小题8分，其余各题每小题4分，共32分）

1. $f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{x-1}{x}}-1}$的间断点分别是____ 和____，它们分别是______间断点和______间断点；

2. 已知$f(x)=\begin{cases}(1+3x)^{\frac{2}{\ln(1+x)}}, & x>0\\ a\cos x, & x\le 0\end{cases}$ 在$x=0$处连续，则$a=$______；

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{2x+\sqrt{3x}}}-\sqrt{x}\right)=$______；

4. 设 $y=\arcsin e^{2x}$，则微分$\mathrm{d}y=$________________；

5. 当$x\to 0$ 时，$e^x-e^{\sin x}$与ax^n是等价无穷小，则$n=$______，$a=$______；

6. 设$f(x)=x^2\ln(1+x)$，则$f^{(5)}(0)=$ ____________；

7. 设$y=y(x)$是由方程$y=-ye^x+2e^y\sin x-7x+2$所确定的隐函数，则$y'(0)=$__________.

二、 计算下列各题（本题共4小题，每小题8分，满分32分）

1. 用定义验证 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-x}=2$.

2. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x + x^3\cos\frac{1}{x}}{(1+x\sin x)(1-\cos x)}$.

3. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n^2+n\sin 1}+\dfrac{n+2}{n^2+n\sin 2}+\cdots+\dfrac{n+n}{n^2+n\sin n}\right)$.

4. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}, & x\neq 0\\ \frac{1}{2}, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性和可导性；若可导，求 $f'(0)$.

三、 (**本题满分8分**) 曲线 L 的参数方程为$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t+t\cos t \end{cases}$，

(1) 求曲线 L 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 所对应的点处的切线方程；(2) 计算 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

四、 (**本题满分7分**) 证明函数 $f(x)=\sqrt{a^2+x^2}+\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})\ (a\neq 0)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

五、 (**本题满分8分**)(1)叙述Cauchy中值定理；(2)证明Cauchy中值定理.

六、 (**本题满分7分**) 设

$$x_n=\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)}+\cdots+\frac{a_n}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}(a_i>0,i=1,\cdots,n),$$

证明数列 $\{x_n\}$收敛.

七、 (**本题满分6分**)设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，且 $f(a)f(b)<0,f'(c)=0,a<c<b$, 证明：当 $f(c)<0$ 时，存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f''(\xi)>0$.