东 南 大 学 考 试 卷

课程名称 高等数学（B）期中　　考试学期 08-09-3　　得分

适用专业 选学高数 B 的各专业　　考试形式 闭卷　　考试时间长度 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六
得分						

一．填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1．设向量 $\mathbf{a}=\{1,1,5\}$，$\mathbf{b}=\{8,-4,1\}$，则 $\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{b}$ 上的投影 $(\mathbf{a})_{\mathbf{b}}=$ __________；

2．曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3 \\ x+y=2 \end{cases}$ 在 yOz 平面上的投影曲线为______________；

3．设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $y+z=xf(y^2-z^2)$ 所确定的隐函数，其中 f 可微，则全微分

$\mathrm{d}z=$ __________________；

4．级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\mathrm{e}^{nx}$ 的收敛域是__________；

5．设 $f(x)=x^3+1\ (0\le x<\pi)$，而 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx\ (-\infty<x<+\infty)$，其中

$b_n=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$，$n=1,2,\cdots$，则 $S\left(-\dfrac{1}{3}\right)=$ __________.

二．单项选择题（本题共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

6．函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0) \\ 0\ , & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处

(A)连续且偏导数存在　　(B) 连续但偏导数不存在

(C)不连续但偏导数存在　　(D) 不连续且偏导数不存在

7．已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$

（A）发散　（B）条件收敛　（C）绝对收敛　（D）可能收敛可能发散

8．下列广义积分中收敛的是

（A）$\int_1^{\mathrm{e}}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$　　（B）$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\ln x}$

（C）$\int_2^{+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^3-1}}\mathrm{d}x$　（D）$\int_0^1\dfrac{\arctan x}{x^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}x$

9．直线$L_1:\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 5 + 4t \end{cases}$与$L_2: x - 1 = \dfrac{y+2}{2} = z$

（A）平行　（B）垂直但不相交　（C）垂直相交　（D）异面且不垂直

三.计算下列各题(本题共 5 小题，每小题 8 分，满分 40 分)

10．一直线过点$M_0(2,-1,3)$且与直线$L: \dfrac{x-1}{2} = -y = z + 2$相交，又平行于平面$\pi: 3x - 2y + z + 5 = 0$，求此直线方程.

11．求两条直线$L_1: \dfrac{x-5}{-4} = y - 1 = z - 2$与$L_2: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-8}{-3}$之间的距离$d$.

12．设$f(x) = \dfrac{1}{2x^2 + 13x + 15}$，求$f^{(n)}(-1)$.

13．试求过直线$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - 5y - z - 3 = 0 \end{cases}$，且与曲面$z = x^2 + y^2$相切的平面方程.

14．将$f(x) = 1 - x$在$[0,\pi]$上展成余弦级数.

四（15）（本题满分 8 分） 设 $ab \neq 0$，$f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $a^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+b^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$，

$f(ax,bx)=ax$， $f_x(ax,bx)=bx^2$，求 $f_{xx}(ax,bx)$， $f_{xy}(ax,bx)$， $f_{yy}(ax,bx)$.

五（16）（本题满分 8 分） 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ 的和函数，并指明收敛域.

六（17）（本题满分 8 分） 设 $a_1=1, a_2=1, a_{n+2}=a_{n+1}+a_n, n=1,2,\cdots$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$ 收敛.

08-09-3 高数 B 期中试卷参考答案

一．填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1、$(\mathbf{a})_{\mathbf{b}}=\underline{1}$　2、$\underline{\begin{cases}2y^2-4y+z^2+1=0\\ x=0\end{cases}}$　3、$\underline{\mathrm{d}z=\dfrac{f}{1+2xzf'}\mathrm{d}x+\dfrac{2xyf'-1}{1+2xzf'}\mathrm{d}y}$

4、$\underline{(-\infty,0]}$　　5、$S\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\underline{-\dfrac{28}{27}}$

二．单项选择题（本题共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

6、C　　7、D　　8、C　　9、B

三.计算下列各题(本题共 5 小题，每小题 8 分，满分 40 分)

10、**解：** 设所求直线方程为$\dfrac{x-2}{l}=\dfrac{y+1}{m}=\dfrac{z-3}{n}$， 由该直线与直线$L$ 共面，得

$4l+9m+n=0$　由该直线与平面π 平行，得$3l-2m+n=0$，

解得$l=-11m$ ，$n=35m$，代入所求直线方程，得$\dfrac{x-2}{11}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{-35}$.

11、**解：** $\left\|\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\-4&1&1\\2&2&-3\end{vmatrix}\right\|=15$，$\begin{vmatrix}5&1&-6\\-4&1&1\\2&2&-3\end{vmatrix}=25$，　$d=\dfrac{5}{3}$

12、**解：** $f(x)=\dfrac{1}{2x^2+13x+15}=\dfrac{1}{7}\left(\dfrac{2}{2x+3}-\dfrac{1}{x+5}\right)=\dfrac{2}{7}\cdot\dfrac{1}{1+2(x+1)}-\dfrac{1}{28}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{x+1}{4}}$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{7}\left(2^{n+1}-\dfrac{1}{4^{n+1}}\right)(x+1)^n$，　$f^{(n)}(-1)=\dfrac{(-1)^n n!}{7}\left(2^{n+1}-\dfrac{1}{4^{n+1}}\right)$

13、**解：** 设过直线$\begin{cases}x+y-2=0\\x-5y-z-3=0\end{cases}$的平面方程为$(1+\lambda)x+(1-5\lambda)y-\lambda z-2-3\lambda=0$，

设切点为(x_0,y_0,z_0)，则

$$\begin{cases}(1+\lambda)x_0+(1-5\lambda)y_0-\lambda z_0-2-3\lambda=0 & (1)\\ \dfrac{2x_0}{1+\lambda}=\dfrac{2y_0}{1-5\lambda}=\dfrac{1}{\lambda} & (2)\\ z_0=x_0^2+y_0^2 & (3)\end{cases}$$

由（2），（3）解得

$x_0=\dfrac{1+\lambda}{2\lambda},y_0=\dfrac{1-5\lambda}{2\lambda}$，$z_0=\dfrac{(1+\lambda)^2+(1-5\lambda)^2}{4\lambda^2}$， 代入（1）得$7\lambda^2-8\lambda+1=0$，解得

$\lambda_1=1,\lambda_2=\dfrac{1}{7}$，从而两切平面方程分别为$2x-4y-z-5=0$ 和$8x+2y-z-17=0$ 。

14、**解：** $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x)\mathrm{d}x=2-\pi$， $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{n^2\pi}(1-(-1)^n)$，

$n=1,2,\cdots$， $1-\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x=1-x$， $x\in[0,\pi]$

四（15）（本题满分 8 分）

解： 对 $f(ax,bx)=ax$ 的等号两端关于 x 求导，得 $af_x+bf_y=a$，（1）

对 $f_x(ax,bx)=bx^2$ 的等号两端关于 x 求导，得 $af_{xx}+bf_{xy}=2bx$，（2）

对（1）式的等号两端关于 x 求导，得 $a^2f_{xx}+2abf_{xy}+b^2f_{yy}=0$，（3）

从（2），（3）及条件 $a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+b^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ 解得

$f_{xy}(ax,bx)=0$， $f_{xx}(ax,bx)=\frac{2b}{a}x$， $f_{yy}(ax,bx)=-\frac{2a}{b}x$

五（16）（本题满分 8 分）

解： $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{x^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)}=0$，收敛域为 $(-\infty,+\infty)$

记幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 的和函数为 $S(x)$， $S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}=S(x)$， $S(0)=1,S'(0)=0$，

$S(x)=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$

六（17）（本题满分 8 分）

证 易知 $\{a_n\}$ 是正数列，且 $a_n-a_{n-1}=a_{n-2}>0$，所以 $\{a_n\}$ 单调递增，

故 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}<2a_{n-1}$，从而 $a_{n-1}>\frac{1}{2}a_n$， 于是 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}>\frac{3}{2}a_{n-1}$，

$0<\frac{1}{a_n}<\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{a_{n-1}}<\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{a_{n-2}}<\cdots<\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\cdot\frac{1}{a_2}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$， $n=3,4,\cdots$，

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$ 收敛，由比较判别法得知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛.