Exercise 1

（此练习题中不含常规定积分和不定积分的计算）

1. $f''(x_0)=0$是曲线$y=f(x)$以点$(x_0,f(x_0))$为拐点的____________条件。

2. 在$y=\sin x$ 的$2n$阶Maclaurin公式中，Lagrange余项为_______________.

3. 设$f(x)$在区间(a,b)内有定义，右极限$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$存在的Cauchy收敛准则为____________________.

4. 当$x\to 0$时，$f(x)=\sin x-xe^{-\frac{x^2}{6}}$是$x$的_____（填数字）阶无穷小。

5. 微分方程$y''+4y=3x\cos 3x$的特解形式为_________________ 。

6. 若$f(x)=\displaystyle\int_0^{x^2}\frac{t-4}{t^3+2}dt$,则$f(x)$的单增区间为_______________。

7. 曲线$y=xe^{-x}$的拐点为_________________ 。

8. 设函数$f(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{1}{\sqrt{1+t^3}}dt(x>0)$,则当$x=$_____时$f(x)$取得最大值。

9. 已知$y_1=e^{-x}$与$y_2=e^{2x}$分别是微分方程$y''+ay'+by=0$的两个特解，则$a=$_______, $b=$_______。

10. $\displaystyle\int_{-1}^{1}x(1+x^{2019})(e^x-e^{-x})dx=$_______.

11. $\displaystyle\int_0^{2\pi}(\sin^3 x\cdot e^{\cos x}+\sin^4\frac{x}{2})dx=$_______.

12. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\tan^2 x[\sin^2 2x+\ln(x+\sqrt{1+x^2})]dx=$_______.

13. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}x\sin^5 x\arctan e^x dx=$_______.

14. $\displaystyle\int_{-2}^{2}x\ln(e^{2x}+1)dx=$_______.

15. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}dx=$_______.

16. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan^{2n}x}dx=$_______.

17. 设函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}}{\sqrt[3]{2^{3n}+x^{3n}}}(x\geq 0)$，它的间断点是__________，类型分别为____________________。

18. 连续函数$f(x)$满足$f(x)-\cos^2 x=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(2x)dx$，求$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

19. 连续函数$f(x)$满足$f(x)-\dfrac{x}{1+\cos^2 x}=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x dx$，求$f(x)$.

20. 设$f(x)$连续，且$\displaystyle\int_0^x tf(2x-t)dt=\frac{1}{2}\arctan x^2$，已知$f(1)=1$,求$\displaystyle\int_1^2 f(x)dx$
.

21. 求对数螺线$\rho=e^\theta$在$\theta=\dfrac{\pi}{2}$对应的点处的切线方程。

22. 已知$y=y(x)$在任意点x处的增量为$\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}$,当$\Delta x\to 0$时，$\alpha$是$\Delta x$的高阶无穷小，已知$y(0)=\pi$,求$y(1)$.

23. 设可导函数$y=y(x)$由方程$\int_0^{x+y} e^{-t^2}\mathrm{d}x=\int_0^x x\sin t^2\mathrm{d}x$确定，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

24. 求$y=2x+\frac{\ln x}{x-1}+4$的渐近线。

25. 求极限(1)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^2(1-\cos x)}$.

26. 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2020$,计算$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)dx$.

27. 用定积分定义求(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$;　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2^2}{n^2})\cdots(1+\frac{n^2}{n^2})\right]^{\frac{1}{n}}$.

28. 计算定积分$\int_0^1 xf(x)dx$,其中$f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\cos t}{t}dt$.

29. 设$f(x)=\int_{x^2}^{x}\frac{\sin xt}{t}\mathrm{d}t$, 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$.

30. 求下列函数在$x=0$处的2020阶导数$y^{(2020)}(0)$:

(1) $y=\ln(1-2x)$; (2) $y=e^{x^4}$.

31. 求反常积分：(1) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} e^{-x}\cos x dx$; (2) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+x^2)}$.

32. 判别反常积分的敛散性:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^p(x^p+1)}dx(p>0)$; (2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}dx$.

(3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} (\frac{x}{x^2+p}-\frac{p}{x+1})dx(p>0)$; (4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x-1)}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}dx$

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} [\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{\ln(1+\frac{1}{x})}]dx$;

33. 设$f(x)$在区间$[0,1]$上连续可导，且有$f'(x)>0,\ \forall x\in[0,1]$, 讨论反常积分$\int_0^1 \dfrac{f(x)-f(0)}{x^p}dx$的敛散性。

34. 已知方程$\dfrac{x^2}{2}-\ln(1+x^2)=a$在区间$(-1,1)$内存在两个互异的实根，求$a$的取值范围。

35. 设$f(x)=x,\ x\geq 0,\ g(x)=\begin{cases}\sin x, 0\leq x\leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$,分别求$0\leq x\leq \dfrac{\pi}{2}$与$x>\dfrac{\pi}{2}$时积分$\int_0^x f(t)g(x-t)dt$的表达式。

36. 设$f(x)=\min\{\sin x, x-\frac{x^3}{6}\}$, 求$f(x)$在区间$[-5,3]$上的最大值和最小值。

37. 求$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$.

38. 设$|a|\leq 1$,求积分$I(a)=\int_{-1}^{1}|x-a|e^{2x}dx$的最大值.

39. 设$f(x)=a|\cos x|+b|\sin x|$在$x=-\frac{\pi}{3}$处取得极小值，且$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(f(x))^2dx=2(\sqrt{3}+\pi)$,求常数$a,b$.

40. 设$f(x)=\begin{cases} xe^{x^2},\ x\geq 0 \\ x,\ x<0 \end{cases}$, $F(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}e^{x^2},\ x\geq 0 \\ \frac{1}{2}x^2,\ x<0 \end{cases}$.

(1)问$F(x)$是否为$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内的一个原函数？为什么？(2)求$\int f(x)dx$.

41. 在xOy平面上将连接原点和点$A(1,0)$的线段OA作n等分，分点记作$P_k(\dfrac{k}{n},0),k=1,2,\cdots,n-1$. 过$P_k$作抛物线$y=x^2$的切线，切点为$Q_k$.

(1)求三角形ΔP_kQ_kA的面积S_k；(2)求极限$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k$.

42. 求曲线$r^2 = 2\cos 2\theta$外部，$r = 2\cos\theta$ 内部与$r = 1$内部所围图形的面积。

43. 设D是由两条抛物线$y = x^2$与$y = 4 - 3x^2$所围成的平板。

(1) 计算平板D的面积。

(2) 将该平板垂直置于水中，水平面在$y = 4$处，试求平板一侧所受到的水的静压力。

44. (1)求由曲线$y = x^2,\ y = \sin(\frac{\pi}{2}x)$围成的平面图形D的面积；

(2) 求D绕直线$y = 1$旋转而成的旋转体的体积。

45. 设L_1为曲线$y=x^2$在点$A(a,a^2)(a>0)$处的切线，L_2为曲线$y=x^2$的另一条切线，且与直线L_1垂直.

(1)求直线L_1与L_2的交点坐标;

(2)求曲线$y=x^2$与直线L_1与L_2所围成的平面图形的面积，并问a为何值时，该面积为最小？

46. 设质量均匀分布的平面薄板由曲线 $C:\begin{cases} x=5t^2+t \\ y=t^2-2t \end{cases}$与$x$轴所围成，试求其质量$m$.

47. 设$x=x(y)$是函数$y(x)=e^x-e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x$的反函数，求由$x=x(y)$，直线$y=y(\pi)$及$Y$轴所围成的平面图形绕$Y$轴旋转一周而成的旋转体体积。

48. 设函数$f(x)$在区间$[0,+\infty)$上连续，且恒取正值。若对$\forall x \in (0,+\infty)$, f在$[0,x]$上的积分平均值等于$f(0)$与$f(x)$的几何平均值，求$f(x)$的表达式。

49. 设当$x>-1$时，可微函数$f(x)$满足条件

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt=0,$$

且$f(0)=1$, 求证：当$x\geq 0$时，有$e^{-x}\leq f(x)\leq 1$.

50. 求微分方程$y''+y=\cos^2 x$的一个特解$y=y(x)$，使得该特解所表示的曲线$y=y(x)$在原点与$y=x$相切。

51. 设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上非负、连续，且满足$f^2(x) \le 1 + 2\int_0^x f(t)dt$,证明：对$\forall\ x \in [0,1]$, 有$f(x) \le 1 + x$.

52. 设$f(x)$为连续函数，且$f(x) \le \displaystyle\int_0^x f(t)dt$, 证明：当$x \ge 0$时，$f(x) \le 0$。

53. 设函数$y = y(x)$由参数方程$\begin{cases} x = 2t + t^2, \\ y = \phi(t), \end{cases}$ $(t > -1)$所确定，其中$\phi(t)$具有二阶导数，且$\phi(1) = \frac{5}{2}, \phi'(1) = 6$,已知$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{3}{4(1+t)}$,求函数$\phi(t)$.

54. 已知$y_1=x$是微分方程$(x^2+4)y''-2xy'+2y=0$的一个解，求该方程的通解.

55. 求一阶方程$f'(x)=f(1-x)$的通解.

56. 设二阶方程$y''+P(x)y'-y\cos^2 x=0$有两个互为倒数的解，求$P(x)$及方程的通解.

57. 设函数f在$[0,1]$上存在二阶连续导数，且满足$f(0) = f(1) = 0$,证明：
(1)$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x(x-1)f''(x)dx$, (2) $|\int_0^1 f(x)dx| \leq \frac{1}{12}\max\limits_{0\leq x\leq 1}|f''(x)|$.

58. 若$f(x)$在$[a,b]$上连续，$g(x)$在该区间单调且$g'(x)$连续，试证：至少存在一点$\xi \in [a,b]$，使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

59. 求$\lim\limits_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{n})\sin\frac{\pi}{n^2} + (1+\frac{2}{n})\sin\frac{2\pi}{n^2} + \cdots + (1+\frac{n}{n})\sin\frac{n\pi}{n^2}]$.

60. 已知$2f(x)+x^2f(\frac{1}{x})=\frac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}$，求$f(x)$，并求直线$y=\frac{1}{2}$，$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$y$轴与$y=f(x)$绕$x$轴旋转一周而成的旋转体的体积。

以下题目选做：

61. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f'(x)$单调递减，证明

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\leq f(\frac{a+b}{2})$$

62. 证明不等式:$\ln\sqrt{2n+1}<1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}<1+\ln\sqrt{2n-1}$,其中$n$是大于1的正整数。

63. 设$\alpha > 1$，证明：当$x > -1$时成立$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$, 且等号成立的充要条件是$x = 0$.

64. 设$f(x)$在$[0,1]$上具有二阶导数，且满足$|f(x)| \leq a, \quad |f''(x)| \leq b, \quad x \in [0,1]$. 证明$|f'(c)| \leq 2a + \dfrac{b}{2}, \quad c \in [0,1]$.

65. 设$f(x)$在区间$[-1,1]$上连续，且有$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)\tan x dx = 0$,证明在区间$(-1,1)$内至少存在互异的两点$\xi_1, \xi_2$,使得$f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

66. 设$f(x)$在$[a,+\infty)$上满足Lipschitz条件，即存在$L > 0$，对任意$x,y \in [a,+\infty)$，恒有$|f(x)-f(y)| \leq L|x-y|$，其中$a > 0$，证明：$\dfrac{f(x)}{x}$在$[a,+\infty)$ 上一致连续。

67. 设$f(x)=\displaystyle\int_x^{x+1} \sin t^2 dt$, 求证:当$x>0$时，$|f(x)|<\dfrac{1}{x}$.

68. 设$f(x)$在区间$[0,2]$上连续可导，$f(0)=f(2)=0$，求证：$|\displaystyle\int_0^2 f(x)dx| \leq \max_{0\leq x\leq 2}|f'(x)|$.

69. 设$f\in C[-l,l]$，$f(x)$在$x=0$可导，且$f'(0)\neq 0$,

(1) 求证：$\forall x\in(0,l), \exists\theta\in(0,1)$, 使得$\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x} f(t)dt = x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$; (2)求$\lim\limits_{x\to 0^+}\theta$.

70. 设$f\in C[a,b]$，M,m分别是$f(x)$在$[a,b]$上的最大值和最小值。证明：至少存在一点$\xi\in[a,b]$，使得$\int_a^b f(x)dx = M(\xi-a)+m(b-\xi)$.

71. 设$f\in C[0,+\infty)$，$F(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$，对$\forall a>0,b>0$,满足$f(\dfrac{a+b}{2})\leq \dfrac{1}{2}(f(a)+f(b))$，证明：对$\forall a>0,b>0$，成立不等式$F(\dfrac{a+b}{2})\leq \dfrac{1}{2}(F(a)+F(b))$.