东 南 大 学 考 试 试 卷 (B)

姓名 ____________ 学号 ____________ 得分 ____________

课程名称：数学物理方法　　适用专业：面上工科　　考试形式：闭卷

考试学期：09–10–3　　考试时间长度：120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
得分										

一 (7 分) 指出定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & 0<x<l,\ t>0, \\ u(0,t)=0,\ u_x(l,t)=A\sin\omega t, & t\geq 0, \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0, & 0\leq x\leq l \end{cases}$$

所描述的物理现象，以及定解条件的物理意义，其中 A 是常数.

二 (10 分) 求解特征值问题 (求出所有特征值和对应的特征函数)

$$\begin{cases} r^2R''(r)+rR'(r)+\lambda R=0, & 1<r<\mathrm{e}, \\ R(1)=R(\mathrm{e})=0. \end{cases}$$

三 (15 分) 求解弦振动方程的初边值问题

$$
\begin{cases}
u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l,\ t > 0, \\
u(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0, & t \geq 0, \\
u(x,0) = -2\sin\dfrac{3\pi x}{2l},\ u_t(x,0) = 3\sin\dfrac{\pi x}{2l},\ 0 \leq x \leq l.
\end{cases}
$$

四 (8 分) 求函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-2|x|}$ 的 Fourier 变换.

五 (10 分) 利用 Fourier 变换法推导出一阶偏微分积分方程初值问题的求解公式

$$\begin{cases} u_t - t u_x = 0, & x \in \mathbb{R}^1,\ t>0, \\ u(x,0)=\varphi(x), & x \in \mathbb{R}^1. \end{cases}$$

六 (8 分) 已知 Laplace 变换公式 $\mathscr{L}[\sin \omega t] = \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$. 利用 Laplace 变换求函数 $f(t) = \sin t$ 与 $g(t) = \sin 2t$ 的卷积.

七 (10 分) 求解二维波动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{xx}+u_{yy}) = 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ u(x,y,0) = y^2,\ u_t(x,y,0) = x^2, & (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

八 (10 分) 设有 Laplace 方程边值问题

$$\begin{cases} -(u_{xx}+u_{yy})=0, \quad (x,y)\in\Omega, \\ u|_{\partial\Omega}=\varphi(x,y), \end{cases}$$

其中 $\partial\Omega$ 是区域 Ω 的边界. 用 Green 函数推导上述 Laplace 方程边值问题的解的表达式.

九 (10 分) 求一个保角变换，使它把区域 $D = \{z \mid \ |z| < 1,\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}\}$ 变为上半平面.

十 (12 分) 设 μ_n 是 $J_0(x)$ 的第 n 个正零点，将函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \le 1, \\ -1, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

展成 $J_0(\mu_n x/2)$ 的 Fourier–Bessel 级数，其中 0 阶 Bessel 函数的模值为

$$N_n^2 = \int_0^b x J_0^2(\mu_n x/b)\mathrm{d}x = \frac{b^2}{2}\Big(\big[J_0'(\mu_n)\big]^2 + \big[J_0(\mu_n)\big]^2\Big).$$