东 南 大 学 考 试 试 卷(A)

姓名 ____________ 学号 ____________ 得分 ____________

课程名称：数学物理方法　　适用专业：面上工科　　考试形式：闭卷

考试学期：09–10–3　　考试时间长度：120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九
得分									

一 (5 分) 指出定解问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & (x,y)\in\Omega, \\ u(x,y)=\varphi(x,y), & (x,y)\in\partial\Omega \end{cases}$$

所描述的物理现象，其中 Ω 是平面区域，$\partial\Omega$ 是它的边界，$\varphi(x,y)$ 是已知函数.

二 (10 分) 求解特征值问题

$$\begin{cases} u''+2u'+\lambda u=0, & 0<x<l, \\ u(0)=u(l)=0. \end{cases}$$

三 (15 分) 用分离变量法求解 Laplace 方程的边值问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi, \\ u_y(x,0) = x,\ u(x,\pi) = 0, & 0 \le x \le \pi, \\ u_x(0,y) = 0, \quad u_x(\pi,y) = 0, & 0 \le y \le \pi. \end{cases}$$

四 (8 分) 求函数 $f(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x\le 1, \\ -1, & -1\le x<0, \\ 0, & |x|>1 \end{cases}$ 的 Fourier 变换.

五 (10 分) 已知 Fourier 变换公式 $\mathscr{F}[\mathrm{e}^{-Ax^2}]=\sqrt{\dfrac{\pi}{A}}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{4A}}$, $A>0$. 利用 Fourier 变换法求解初值问题

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=0, & x\in\mathbb{R}^1, t>0, \\ u(x,0)=\delta(x), & x\in\mathbb{R}^1, \end{cases}$$

其中 $\delta(x)$ 是狄拉克函数.

六 (10 分) 已知下列 Laplace 变换公式 $\mathscr{L}[t^n\mathrm{e}^{at}] = \dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$. 利用 Laplace 变换法求解一阶偏微分积分方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t + xu_x = x\mathrm{e}^{-t}, & x > 0, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x > 0. \end{cases}$$

七 (12 分) 用特征线法求解定解问题

$$\begin{cases} u_{xx} - 3u_{xt} + 2u_{tt} = 0, & x \in \mathbb{R}^1,\ t > 0, \\ u(x,0) = x^2,\ u_t(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}^1. \end{cases}$$

八 (18 分) (1) 用镜像法求在上半平面上， Laplace 方程第一边值问题的 Green 函数;

(2) 求一个保角变换，把区域 $D=\{z \mid |z|>1,\ \operatorname{Im} z>0\}$ 变为上半平面.

九 (12 分) 设 $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 0 阶 Bessel 函数 $J_0(x)$ 的正零点，请将函数 $f(x)=x^2$, $x\in[0,1]$ 展开成函数系 $\{J_0(\mu_n x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的 Fourier-Bessel 级数，其中 0 阶 Bessel 函数的模值为

$$N_n^2=\int_0^1 xJ_0^2(\mu_n x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Big(\big[J_0'(\mu_n)\big]^2+\big[J_0(\mu_n)\big]^2\Big).$$