东南大学 2009-2010 学年《高等数学(上)》期末考试试卷

课程名称 高等数学　考试学期 09-10　得分 ______

适用专业 选高数 AB 的专业　考试形式 闭卷　考试时间长度 150 分钟

一．填空题

1．函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-[x]}$ 的定义域是　，值域是____；

2．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{1-x}, & x>0,\ x\neq 1\\ a\ , & x=1\end{cases}$，当 $a=$____时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处连续；

3．曲线 $y=\dfrac{x^2}{2(x+1)}$ 的斜渐进线的方程是______；

4．$\int_{-1}^{1}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2\mathrm{d}x=$______；

5．函数 $y=\int_0^{x^2}(t-1)\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$ 的极大值点是 $x=$_____；

6．$\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}=$__________；

7．设 $y=y(x)$ 是由 $x-\int_1^{x+y}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=0$ 所确定的函数，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$_________；

8．曲线族 $xy=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{-x}$（$C_1,C_2$ 为任意常数）所满足的微分方程是__________；

9．$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{k}{n}\pi=$________.

二.按要求计算下列各题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分）

10．$\int\dfrac{\ln\sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$

11．$\int_2^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{(x+7)\sqrt{x-2}}$

12．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^2(1-\cos x)}$

13. $\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos 2x}$

14.设 $f'(x)=\arcsin(x-1)^2$，$f(0)=0$，计算 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

三（15）.（本题满分 8 分）求微分方程 $y''-2y'=x+\mathrm{e}^{2x}$ 满足初始条件 $y(0)=1$，

$y'(0)=\frac{5}{4}$ 的特解.

四（16）.（本题满分 8 分）设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可导，在 $(0,1)$ 内恒取正值，且满足 $xf'(x)=f(x)+3x^2$，又由曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=1,y=0$ 所围成的图形 S 的面积为 2，求函数 $f(x)$ 的表达式，并计算图形 S 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

五（17）.（本题满分 6 分） 已知方程 $\frac{x^2}{2}-\ln(1+x^2)=a$ 在区间 $(-1,1)$ 内存在两个互异的实根，试确定常数 a 的取值范围.

六(18).(本题满分 6 分)设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上非负、连续，且满足 $f^2(x)\le 1+2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$

证明：对 $\forall x\in[0,1]$，有 $f(x)\le 1+x$

七（19）.（本题满分 6 分）设 $f\in C[-l,l]$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)\ne 0$，

（1）求证：$\forall x\in(0,l),\exists\theta\in(0,1)$，使得

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t = x[f(\theta x) - f(-\theta x)]$$

（2）求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+} \theta$.

09-10-2 高等数学（上）期末参考答案

一.填空题（本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 36 分）

1. $R\setminus Z$ ， $(1,+\infty)$ **2.** $a=$ -1 **3.** $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

4. 2 ； **5.** $x=$ 0 ； **6.** $2\arcsin\sqrt{x}+C$ 或 $\arcsin(2x-1)+C$ ；

7. $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} =$ $e-1$ ； **8.** $xy''+2y'-xy=0$ **9.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n}\pi =$ $\frac{2}{\pi}$ 。

二.按要求计算下列各题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分）

10. $\int\frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}dx = -\cot x\ln\sin x - \cot x - x + C$

11. $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}} = \frac{\pi}{3}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos\sin x - \cos x}{x^2(1-\cos x)} = \frac{1}{3}$

13. $\int_0^{\pi}\frac{dx}{2+\cos 2x} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$

14。 $\int_0^1 f(x)dx = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

三（15）.（本题满分 8 分）

$y = C_1 + C_2e^{2x} - \frac{1}{4}(x^2+x) + \frac{1}{2}xe^{2x}$, 特解 $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}(x^2+x) + \frac{1}{2}xe^{2x}$

四（16）.（本题满分 7 分）

$f(x) = 2x+3x^2$ $V = \frac{17}{6}\pi$

五（17）.（本题满分 7 分）

$\frac{1}{2} - \ln 2 < a < 0$

六（18）.（本题满分 6 分）

法一：令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt, \Rightarrow F'(x)=f(x) \Rightarrow F'^2(x)\le 1+2F$

$$\Rightarrow \frac{dF}{dx}\le\sqrt{1+2F} \Rightarrow \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+2F}}dF \le \int_0^x dx$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+2F}-\sqrt{1+2F(0)}\le x \Rightarrow \sqrt{1+2F}\le 1+x$$

$\Rightarrow f^2(x)\le 1+2F\le(1+x)^2 \Rightarrow$ 结论成立.

法二： ……

七（19）.（本题满分 6 分）

（1）证明：令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x} f(t)dt$

对 $F(x)$ 在 $[0,x]$ 上使用 $Lagrange$ 中值定理得：

$F(x)-F(0)=F'(\theta x)x$,

即：$\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x} f(t)dt = x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$

另解： ……

（2）由（1）$\Rightarrow \dfrac{\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x} f(t)dt}{x^2}=\dfrac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{x}$

两边取极限，并由导数的定义得：

$$f'(0)=2f'(0)\lim_{x\to 0^+}\theta$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\theta=\frac{1}{2}$$