东 南 大 学 考 试 卷（ A 卷）

课程名称 高等数学（B）期末 考试学期 07-08-3 得分

适用专业 选学高数（B）的各专业 考试形式 闭卷 考试时间长度 150 分钟

题号	一	二	三	四	五	六
得分						

一.填空题(本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 3 6 分)

1. 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$的收敛域为____；

2. 设$z=y^2+f(x^2-y^2)$，其中$f(u)$可微， 则$y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=$____；

3.曲线$\begin{cases}x+y+z=4\\ z=x^2+y^2\end{cases}$在点$(1,1,2)$处的法平面方程是__________；

4.设C为曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4z\\ z=1\end{cases}$，则曲线积分$\oint_C(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=$____；

5.交换二次积分的次序$\int_0^2\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}}f(x,y)\mathrm{d}y=$________；

6.三次积分$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}z$的值是________；

7. 散度$\operatorname{div}\left(x^3\mathbf{i}+y\cos(y-2z)\mathbf{j}+\mathbf{k}\right)\Big|_{(2,0,\pi)}=$____；

8.已知第二型曲线积分$\int_A^B(x^4+4xy^n)\mathrm{d}x+(6x^{n-1}y^2-5y^4)\mathrm{d}y$与路径无关，则$n=$____；

9.平面$5x+4y+3z=1$被椭圆柱面$4x^2+9y^2=1$所截的有限部分的面积为____.

二. 计算下列各题(本题共 4 小题，每小题 7 分，满分 28 分)

10. 设$z=z(x,y)$是由方程$xy+yz+xz=1$所确定的隐函数，$x+y\neq 0$，试求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

11. 计算二重积分$\iint_D(x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中区域$D=\left\{(x,y)\middle|2y\le x^2+y^2\le 4y\right\}$.

12. 设立体Ω由曲面$x^2+y^2-z^2=1$及平面$z=0,z=\sqrt{3}$围成，密度$\rho=1$，求它对z轴的转动惯量.

13. 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}$，$\Sigma$ 为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$上满足$0<h\le z\le R$的部分.

三（14）.（本题满分 8 分）求函数$f(x,y)=x-x^2-y^2$ 在区域$D=\left\{(x,y)\middle|2x^2+y^2\le 1\right\}$上的最大值和最小值.

四（15）。（本题满分 8 分）计算$\iint\limits_{S}(z+1)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$ ，其中S 为圆柱面$x^2+y^2=4$被平面$x+z=2$和$z=0$所截出部分的外侧.

五（16）.（本题满分 7 分）计算 $I=\int_C\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x+y\left(xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)\mathrm{d}y$，

其中C 是由点$B(1+\pi,0)$沿曲线$y=\sin(x-1)$到点$A(1,0)$的一段弧.

六（17）（本题满分 7 分）设$a_1=1,a_2=2$，当$n\ge 3$时，有$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，

（1） 证明不等式$0<\frac{3}{2}a_{n-1}<a_n<2a_{n-1},n\ge 4$；

（2） 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$收敛，且满足不等式$2\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}\le\frac{5}{2}$.

七（18）（本题满分 6 分）设C 是圆周$x^2+y^2=x+y$，取逆时针方向，连续函数$f(u)>0$，

证明：$\oint\limits_{C}xf(y)\mathrm{d}y-\frac{y}{f(x)}\mathrm{d}x\ge\pi$

07-08-3 期末高数 B 参考答案（A）

一.填空题(本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 3 6 分)

1、$\underline{[0,6)}$ 2、$y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=\underline{2xy}$ 3、$\underline{x-y=0}$ 4、$\oint_C (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\underline{8\sqrt{3}\pi}$

5、$\int_0^2 \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)\mathrm{d}y=\underline{\int_{-1}^0 \mathrm{d}y\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_0^2 \mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2}}^{2} f(x,y)\mathrm{d}x}$

6、$\underline{\dfrac{\pi}{10}}$ 7、$\underline{13}$ 8、$n=\underline{3}$ 9、$\underline{\dfrac{5\sqrt{2}\pi}{18}}$

二. 计算下列各题(本题共 4 小题，每小题 7 分，满分 28 分)

10、**解：** $y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+z\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}z=0$，$\mathrm{d}z=-\dfrac{y+z}{x+y}\mathrm{d}x-\dfrac{x+z}{x+y}\mathrm{d}y$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y+z}{x+y}$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x+z}{x+y}\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{y+z}{(x+y)^2}-\frac{1+\frac{\partial z}{\partial y}}{x+y}=\frac{y+z}{(x+y)^2}-\frac{1-\frac{x+z}{x+y}}{x+y}=\frac{2z}{(x+y)^2}$$

11、$\iint_D (x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}\rho^3\mathrm{d}\rho=120\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta=\dfrac{45}{2}\pi$

12、**解：** $\iiint_\Omega\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}v=\int_0^{\sqrt{3}}\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{1+z^2}}\rho^3\mathrm{d}\rho=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\left(1+z^2\right)^2\mathrm{d}z=\dfrac{12}{5}\sqrt{3}\pi$

13、**解：** Σ 在 xOy 平面上的投影区域为$D:\begin{cases}x^2+y^2\le\sqrt{R^2-h^2}\\ z=0\end{cases}$，

$$\iint_\Sigma\frac{\mathrm{d}S}{z}=R\iint_D\frac{\mathrm{d}\sigma}{R^2-x^2-y^2}=2\pi R\int_0^{\sqrt{R^2-h^2}}\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{R^2-\rho^2}=2\pi R\ln\frac{R}{h}$$

三（14）.（本题满分 8 分）

解： 令 $f_x=1-2x=0,\ f_y=-2y=0$，得$x=\dfrac{1}{2},\ y=0$；在区域D 的边界

$\partial D=\left\{(x,y)\middle|2x^2+y^2=1\right\}$ 上，$g(x)=f\big|_{\partial D}=x^2+x-1$，$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\le x\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，令

$g'(x)=2x+1=0$，得$x=-\dfrac{1}{2}$， $f\left(\dfrac{1}{2},0\right)=\dfrac{1}{4}$，$g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{5}{4}$，

$g\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$g\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{2}$，由比较得 $f_{\max}=\dfrac{1}{4},\ f_{\min}=-\dfrac{5}{4}$

四（15）。（本题满分 8 分）

解： 补两个面，S_1：平面 $x+z=2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=4$ 所截部分，取上侧，在 xOy 平面的投影区域记为 $D:\begin{cases}x^2+y^2\le 4\\ z=0\end{cases}$；$S_2$：$\begin{cases}x^2+y^2\le 4\\ z=0\end{cases}$，取下侧，由曲面 S,S_1,S_2 所围成的内部区域记为 V，由 Gauss 公式得

$$\iint\limits_{S}(z+1)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$$

$$=\iint\limits_{S+S_1+S_2}(z+1)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x-\iint\limits_{S_1}(z+1)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y-\iint\limits_{S_2}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{V}0\,\mathrm{d}v-\iint\limits_{D}(3-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-8\pi$$

五（16）. 补有向直线 $\overline{AB}$，由 C 与 $\overline{AB}$ 所围成的内部区域记为 D，由 Green 公式得

$$I=\int_{C+\overline{AB}}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x+y\left(xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)\mathrm{d}y-\int_{\overline{AB}}x\mathrm{d}x=\iint\limits_{D}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\pi-\frac{1}{2}\pi^2=\frac{4}{9}-\pi-\frac{1}{2}\pi^2$$

六（17）解：（1）首先易见 $\{a_n\}$ 单调递增，所以当 $n\ge 3$ 时，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}<2a_{n-1}$，因而当 $n\ge 4$ 时，$a_{n-2}>\frac{1}{2}a_{n-1}$，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}>\frac{3}{2}a_{n-1}$

（2）$\frac{1}{a_n}<\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{a_{n-1}}<\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{a_{n-2}}<\cdots<\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}\cdot\frac{1}{a_3}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}$，$n\ge 4$

由比较判别法得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛。**（2 分）** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}\le 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\sum\limits_{n=3}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}=\frac{5}{2}$，

$\frac{1}{a_n}>\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_{n-1}}>\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{a_{n-2}}>\cdots>\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\cdot\frac{1}{a_2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，$n\ge 3$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}\ge 1+\frac{1}{2}+\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=1+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2$$

七（18）（本题满分 6 分）证 圆周 C 所围的内部区域记为 D，由 Green 公式得

$\oint\limits_{C}xf(y)\mathrm{d}y-\frac{y}{f(x)}\mathrm{d}x=\iint\limits_{D}\left(f(y)+\frac{1}{f(x)}\right)\mathrm{d}\sigma$，由于区域 D 关于直线 $y=x$ 对称，利用轮换对称性，得 $\iint\limits_{D}f(y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D}f(x)\mathrm{d}\sigma$，于是

$$\oint\limits_{C}xf(y)\mathrm{d}y-\frac{y}{f(x)}\mathrm{d}x=\iint\limits_{D}\left(f(x)+\frac{1}{f(x)}\right)\mathrm{d}\sigma\ge 2\iint\limits_{D}\mathrm{d}\sigma=\pi$$