15-16-3工科数分期末试卷(A)卷参考答案

一、 填空题（本题共8小题，每小题4分，满分36分）

1. $\underline{(3,-1)}$；2. $\underline{4\pi}$；3. $\underline{2\pi}$; 4. $\underline{[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}]}$；5. $\underline{6}$；6. $\underline{x\sin y+3x^2y^2+C}$；
7. $\underline{3}$; 8. $\underline{4\pi i\mathrm{e}^2}$；9. $\underline{-(\frac{\pi}{4}+2)}$;

二、 计算下列各题（本题共5小题，每小题7分，满分35分）

1. $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}dv=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^4\mathrm{d}\rho\int_0^{4-\rho\sin\varphi}\rho^2\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^4(4\rho^2-\rho^3\sin\varphi)\mathrm{d}\rho$

$=\int_0^{2\pi}(\frac{256}{3}-64\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi=\frac{512\pi}{3}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n}{n+1}x^n$ 的收敛域为$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n}{n+1}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^nx^n-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n+1}x^n$, 设$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n+1}x^n$,

则$(xS(x))'=(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n+1}x^{n+1})'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^nx^n=\frac{2x}{1-2x}$,

所以$xS(x)=\int_0^x\frac{2x}{1-2x}\mathrm{d}x=-x-\frac{\ln(1-2x)}{2}$,

$S(x)=-1-\frac{\ln(1-2x)}{2x}(-\frac{1}{2}<x<0,0<x<\frac{1}{2}),\ S(0)=0$,

因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n}{n+1}x^n=\begin{cases}\frac{1}{1-2x}+\frac{\ln(1-2x)}{2x} & (x\neq0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$.

3. $f(x)=\ln(6+x-x^2)=\ln(3-x)+\ln(2+x)$

$=\ln6+\ln(1-\frac{x-1}{2})+\ln(1+\frac{x-1}{3})$

$=\ln6+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-(x-1)^n}{2^n n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{3^n n}$

$=\ln6+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}-\frac{1}{2^n})\frac{(x-1)^n}{n},\quad -2\le x-1<2$

4. $f(z)=\frac{3z}{(z-i)(z+2i)}=\frac{2}{z+2i}+\frac{1}{z-i}=\frac{2}{z+i}\frac{1}{1+\frac{i}{z+i}}-\frac{1}{2i}\frac{1}{1-\frac{z+i}{2i}}$

$$= \frac{2}{z+i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{i}{z+i})^n - \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z+i}{2i})^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2i^n}{(z+i)^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{(2i)^{n+1}} \quad 1 < |z+i| < 2$$

5. 设$P = \dfrac{2x+y}{x^2+y^2}, Q = \dfrac{-(x-2y)}{x^2+y^2}$,则$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{x^2-y^2-4xy}{(x^2+y^2)^2}$

所以积分在不包含原点的单连通区域内与路径无关.

从而取曲线$L_1 : x^2+y^2 = \pi^2 (x \geq 0, y \geq 0)$,方向为从$A(\pi, 0)$到$B(0, \pi)$点,所以

$$\int_L \frac{(2x+y)\mathrm{d}x - (x-2y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \frac{1}{\pi^2}\int_{L_1}(2x+y)\mathrm{d}x - (x-2y)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\pi\cos t + \pi\sin t)(-\pi\sin t) - (\pi\cos t - 2\pi\sin t)\pi\cos t\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}.$$

三、（本题满分8分） 记$\Sigma : y - z = 1 (x^2+y^2 \leq 2y)$取上侧，则

$$\oint_L yz\mathrm{d}x + 3zx\mathrm{d}y - xy\mathrm{d}z = \iint_\Sigma (-4x)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + 2y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + 2z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$= \iint_\Sigma (2y(-\frac{1}{\sqrt{2}}) + 2z\frac{1}{\sqrt{2}})\mathrm{d}S = -\sqrt{2}\iint_\Sigma \mathrm{d}S = -2\iint_{x^2+y^2\leq 2y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -2\pi$$

或$L : \begin{cases} x = \cos t \\ y = 1+\sin t \quad t : 0 \to 2\pi \\ z = \sin t \end{cases}$,所以$\oint_L yz\mathrm{d}x + 3zx\mathrm{d}y - xy\mathrm{d}z$

$$= \int_0^{2\pi}(-(1+\sin t)\sin^2 t + 2\sin t\cos^2 t - \cos^2 t(1+\sin t))\mathrm{d}t = -2\pi$$

四、（本题满分8分）

记$\Sigma_1 : z = 2 (x^2+y^2 \leq 1)$,取上侧，$\Omega : x^2+y^2+1 \leq z \leq 2$,则

$$\iint_\Sigma = \iint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} = \iiint_\Omega (4xz - z - 2yz + 2z + x)\mathrm{d}v - \iint_{x^2+y^2\leq 1}(4+2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$\iiint_\Omega z\mathrm{d}v - \iint_{x^2+y^2\leq 1}4\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 \pi z(z-1)\mathrm{d}z - 4\pi = -\frac{19\pi}{6}.$$

五、（本题满分7分）

证明： 因为$\left|\sin\dfrac{n!x^n}{x^2+n^n}\right| \leq \dfrac{n!2^n}{n^n}(-2 \leq x \leq 2)$,而

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!2^{n+1}n^n}{(n+1)^{n+1}2^n n!} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{(1+\frac{1}{n})^n} = \dfrac{2}{\mathrm{e}} < 1$, 所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!2^n}{n^n}$ 收敛，从而

函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{n!x^n}{x^2+n^n}$ 在区间$[-2,2]$上一致收敛.

六、 （本题满分6分）

证明：(1)设$a_n=u_{(n-1)^2+1}+\cdots+u_{n^2}$,则$a_n>0$,且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$收敛，设其和为$S$,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

令级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{[\sqrt{n-1}]}u_n$前$n$项部分和为$S_n$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$前$n$项部分和为$\tilde{S}_n$,

则当$(n-1)^2+1\le k\le n^2$时，设$b_k=u_{(n-1)^2+1}+\cdots+u_k$,则$S_k=\tilde{S}_{n-1}+(-1)^{[\sqrt{k-1}]}b_k$,又$\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{S}_{n-1}=S,0\le b_k\le a_n,\lim\limits_{k\to\infty}b_k=0,\lim\limits_{k\to\infty}(-1)^{[\sqrt{k-1}]}b_k=0$

所以$\lim\limits_{k\to\infty}S_k=\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{S}_{n-1}+\lim\limits_{k\to\infty}(-1)^{[\sqrt{k-1}]}b_k=S$，

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{[\sqrt{n-1}]}u_n$收敛.

(2)设$a_n=\dfrac{1}{(n-1)^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$,

则$a_n-a_{n+1}=\dfrac{1}{(n-1)^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}-(\dfrac{1}{n^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{(n+1)^2}$

$=\dfrac{2n-1}{((n-1)^2+1)(n^2+1)}+\cdots+\dfrac{2n-1}{n^2(n^2+2n-1)}-\dfrac{1}{n^2+2n}-\dfrac{1}{(n+1)^2}$

$\ge\dfrac{(2n-1)^2}{n^2(n^2+2n)}-\dfrac{(n+1)^2+n^2+2n}{(n^2+2n)(n+1)^2}\ge\dfrac{2n^2-8n}{(n^2+2n)(n+1)^2}\ge 0\ \ (n\ge 4)$,

又$a_n\le\dfrac{2n-1}{(n-1)^2+1}$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$收敛，再由(1)得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{[\sqrt{n-1}]}\dfrac{1}{n}$收敛.