自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名________ 学号________

线 封 密

东 南 大 学 考 试 卷 (A)

课程名称___数学物理方法___ 考试学期___17-18-3___得分________

适用专业___面上___ 考试形式___闭卷___考试时间长度___120分钟___

题目	一	二	三	四	五
得分					

注意：本份试卷可能会用到以下公式：

1、$\mathscr{L}[\sin\alpha t](p)=\dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$，$\mathscr{L}[\cos\alpha t](p)=\dfrac{p}{p^2+\alpha^2}$，$\mathscr{L}[t^n \mathrm{e}^{at}](p)=\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$；

2、$\mathscr{L}[f(t-t_0)H(t-t_0)](p)=\tilde{f}(p)\mathrm{e}^{-t_0p},\ t_0\geq 0$;

3、$\mathscr{L}[\delta(t-t_0)](p)=\mathrm{e}^{-t_0p},\ t_0\geq 0$;

4、$\mathscr{F}[f(x-b)](\lambda)=\mathrm{e}^{-i\lambda b}\hat{f}(\lambda)$;　$\mathscr{F}[\mathrm{e}^{-Ax^2}](\lambda)=\sqrt{\dfrac{\pi}{A}}\mathrm{e}^{-\lambda^2/(4A)}, A>0$;

5、$(x^\nu J_\nu(x))'=x^\nu J_{\nu-1}(x),\ (x^{-\nu}J_\nu(x))'=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$.

一 填空题(每题5分，共30分)

1. 有长为l的细弦做微小横振动，弦的一端固定，另一端无外力作用可自由滑动，则此弦振动方程的边界条件为________________.

2. 特征值问题
$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, & 0<x<l,\\ X'(0)=0,\ X'(l)=0 \end{cases}$$
的所有特征值及其对应的特征函数是________________________.

3. 给定初边值问题
$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=\cos x, & 0<x<\pi, t>0,\\ u_x(0,t)=0,\ u(\pi,t)=A, & t>0,\\ u(x,0)=0, & 0\leq x\leq\pi, \end{cases}$$
其中$A\neq 0$为常数，则当$w(x)=$______________时, 利用变换$u(x,t)=v(x,t)+w(x)$, 可把此问题化为齐次方程齐次边界条件的初边值问题.

4. 像函数$\dfrac{1}{(p^2+1)(p+1)}$ 的Laplace逆变换为__________________.

5. 对于一维波动方程$u_{tt}-u_{xx}=0,-\infty<x<\infty,t>0$, 区间$[1,2]$的决定区域是________________.

6. 给定一维波动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & x\in R, t>0, \\ u|_{t=0}=\sin x,\ u_t|_{t=0}=\cos x, & x\in R, \end{cases}$$

它的解为____________________.

二 简单计算题(32分)

1. 求函数$f(x)=\begin{cases} 1-|x|, & |x|\le 1, \\ 0, & |x|>1 \end{cases}$ 的Fourier变换.

2. 用Laplace变换法求解下列方程

$$\begin{cases} y''+y=-\delta(t-\pi)+\delta(t-2\pi), & t>0, \\ y(0)=0,\ y'(0)=1. \end{cases}$$

线

封

密

3. 利用特征线方法求解下列问题

$$\begin{cases} u_{xx}+4u_{xy}+3u_{yy}=0, & x\in R, y>0, \\ u|_{y=0}=\cos x,\ u_y|_{y=0}=x, & x\in R. \end{cases}$$

线

封

4. 给定边值问题

$$\begin{cases} u_{rr}+\dfrac{1}{r}u_r+k^2u=0, & 0<r<1, \\ |u(0)|<\infty,\ u(1)=A, \end{cases}$$

其中k, A是常数，且$k>0, A\neq 0$. 记α_n为$J_0(x)$的第n个正零点.

利用Bessel函数理论证明：(1) 若$k=\alpha_n$, $n=1,2,\cdots$, 则上述边值问题无解；(2)若$k\neq\alpha_n$, $n=1,2,\cdots$, 则上述边值问题有唯一解，并求此解.

密

三 (13分) 用分离变量法求解下列在弹性力作用下的弦振动模型

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}+bu=0, & 0<x<l, t>0, \\ u(0,t)=0,\ u(l,t)=0, & t>0, \\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x), & 0\le x\le l, \end{cases}$$

其中a,b是正常数.

线

封

密

四 (12分) 用Fourier变换法推导出定解问题

$$\begin{cases} u_t + au_x + bu = h(x,t), & -\infty < x < \infty,\ t > 0, \\ u(x,0) = g(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

的求解公式, 其中a, b是常数.

五 (13分) 利用Bessel级数及分离变量法理论求解下列半圆形薄膜的振动问题

$$
\begin{cases}
u_{tt} - a^2\left(u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\right) = 0, & 0 < r < b,\ 0 < \theta < \pi, t > 0 \\
|u(0,\theta,t)| < \infty,\ u(b,\theta,t) = 0, & 0 < \theta < \pi, t > 0, \\
u(r,0,t) = u(r,\pi,t) = 0, & 0 \le r \le b, t > 0 \\
u(r,\theta,t) = 0, u_t(r,\theta,0) = r\sin\theta, & 0 \le r \le b, t \ge 0.
\end{cases}
$$

记$N_{nk}^2 = \int_0^b xJ_n^2(\alpha_k^{(n)}x/b)\mathrm{d}x = \dfrac{b^2}{2}J_{n+1}^2(\alpha_k^{(n)})$, $\alpha_k^{(n)}$是Bessel函数$J_n(x)$ 的第k个正零点.