东 南 大 学 考 试 卷

课程名称	高等数学（A）期中	考试学期	09-10-3	得分	
适用专业	选学高数（A）的各专业	考试形式	闭卷	考试时间长度	120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六
得分						

一．填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1． 由方程 $xyz+\sin(\pi z)=0$ 确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,1)$ 处的全微分

$\mathrm{d}z=$ ____________；

2． 设 $\ln z=1+\frac{\pi}{3}\mathrm{i}$，则 $\mathrm{Re}\, z=$ ____________，$\mathrm{Im}\, z=$ ______________；

3． 曲线 $x=\sin t, y=1-\cos t, z=t$ 在点 $\left(1,1,\frac{\pi}{2}\right)$ 处的法平面方为 ________________；

4． 设曲线 C 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$ 与平面 $y=x$ 的交线，则曲线积分

$\oint_C\left(\sqrt{2y^2+z^2}+z\right)\mathrm{d}s$ 的值等于 ______________；

5． 设曲面 $S:|x|+|y|+|z|=1$，则 $\oiint_S(x+|y|)\mathrm{d}S=$ ________________.

二．单项选择题（本题共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

6． 已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 在点 P 处的切平面平行于平面 $2x+2y+z-1=0$，则点 P 为

(A) $(1,-1,2)$　　(B) $(-1,1,2)$　　(C) $(1,1,2)$　　(D) $(-1,-1,2)$

7． 设函数 $f(x,y)$ 连续,则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}f(x,y)\mathrm{d}y$ 等于

（A） $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x$　　（B） $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x$

（C） $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arctan y}f(x,y)\mathrm{d}x$　　（D） $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arctan y}f(x,y)\mathrm{d}x$

8. 设 L 是摆线 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ 上从 $t=0$ 到 $t=\pi$ 的弧段，则 L 的形心的横坐标为

(A)1　　(B) $\frac{4}{3}$　　(C) $\frac{3}{4}$　　(D) $\frac{\pi}{2}$

9． 函数 $u=x^2y-y^3z$ 在点 $(1,-1,3)$ 处的方向导数的最大值是

(A) $\sqrt{15}$　　(B) $\sqrt{69}$　　(C) $\sqrt{11}$　　(D) 3

三.计算下列各题(本题共 5 小题，每小题 8 分，满分 40 分)

10. 设$z=f(2x-y,xy^2)$，其中f具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

11. 计算二重积分$\iint\limits_D (3x-2y+1)\mathrm{d}\sigma$，其中$D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 2x+2y-1\right\}$.

12. 设调和函数$u(x,y)=\mathrm{e}^{x-y}\cos(x+y)+y$,求$u(x,y)$的共轭调和函数$v(x,y)$，并求解析函数$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$表达式(**自变量单独用**$z$ **表示**)，且满足$f(0)=1+\mathrm{i}$.

13. 求极限$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{t^5}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2}\sin(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

14. 计算$\iint\limits_S x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，其中$S$为$z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=1$所围成的立体的表面，取外侧.

四（15）（本题满分 8 分）求密度为1，半径为R的上半球面对球心处单位质量质点的引力.

五（16）（本题满分 10 分）平面$x+y+z=1$被抛物面$z=x^2+y^2$截得一椭圆，
（1）求该椭圆到坐标原点的最长距离和最短距离；（2）求该椭圆所围平面区域的面积.

六（17）（本题满分 6 分）证明不等式：$\dfrac{\pi}{2}\le\oint\limits_L -y\sin x^2\mathrm{d}x+x\cos y^2\mathrm{d}y\le\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$，

其中曲线$L: x^2+y^2+x+y=0$，取逆时针方向.

09-10-3 高数 A 期中试卷参考答案

一．填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1、$dz = \dfrac{1}{\pi} dy$　2、$\mathrm{Re}\, z = \dfrac{e}{2}$，$\mathrm{Im}\, z = \dfrac{\sqrt{3}e}{2}$　3、$y + z = 1 + \dfrac{\pi}{2}$

4、$2\pi a^2$　5、$\oiint\limits_S (x + |y|)\, dS = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

二．单项选择题（本题共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

6、C　　7、B　　8、B　　9、B

三.计算下列各题(本题共 5 小题，每小题 8 分，满分 40 分)

10、解：$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2yf_2 - 2f_{11} + (4xy - y^2) f_{12} + 2xy^3 f_{22}$

11、解：

法 1：坐标平移．　$D:(x-1)^2 + (y-1)^2 \le 1$

令 $u = x - 1, v = y - 1$，则 $J = 1, D: u^2 + v^2 \le 1$

原式 $= \iint\limits_D (3u - 2v + 2)\, du dv \underline{\underline{对称性}} \iint\limits_D 2 du dv = 2\pi$

法 2：利用形心坐标．

易知 D 的形心坐标为 $(\bar{x}, \bar{y}) = (1,1)$，则 $\iint\limits_D x dx dy = \bar{x} \iint\limits_D dx dy = \pi$

$\iint\limits_D y dx dy = \bar{y} \iint\limits_D dx dy x = \pi$，

故原式 $= 3\pi - 2\pi + \pi = 2\pi$

法 3：平移极坐标．

令 $x = 1 + \rho\cos\varphi, y = 1 + \rho\sin\varphi$

故原式 $= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (3\rho\cos\varphi - 2\rho\sin\varphi + 2)\rho d\rho = 2\pi$

12、解：

法 1：先求 v．

$v_y = u_x = e^{x-y}\cos(x+y) - e^{x-y}\sin(x+y)$

$\Rightarrow v = e^{x-y}\sin(x+y) + \varphi(x)$

$\Rightarrow v_x = e^{x-y}\sin(x+y) + e^{x-y}\cos(x+y) + \varphi'(x)$

又 $v_x = -u_y = e^{x-y}\cos(x+y) + e^{x-y}\sin(x+y) - 1$

$\Rightarrow \varphi'(x) = -1 \Rightarrow \varphi(x) = -x + C$

$\Rightarrow v = e^{x-y}\sin(x+y) - x + C$

则 $f(z) = u + iv = (e^{x-y}\cos(x+y) + y) + i(e^{x-y}\sin(x+y) - x + C)$

$= e^z\cos z + i(e^z\sin z - z + C) = e^{(1+i)z} + i(C - z)$

由 $f(0) = 1 + i \Rightarrow f(z) = e^{(1+i)z} + i(1 - z)$

法 2：先求 $f'(z)$.

$f'(z) = u_x + iv_x = u_x - iu_y$

$= (e^{x-y}\cos(x+y) - e^{x-y}\sin(x+y)) + i(e^{x-y}\cos(x+y) + e^{x-y}\sin(x+y) - 1)$

$= (e^z\cos z - e^z\sin z) + i(e^z\cos z + e^z\sin z - 1)$

$= e^z e^{iz} - e^z e^{i(z-\frac{\pi}{2})} - i = e^{(1+i)z} - e^{(1+i)z - i\frac{\pi}{2}} - i = e^{(1+i)z}(1+i) - i$

故 $f(z) = e^{(1+i)z} - iz + C$，　由 $f(0) = 1 + i \Rightarrow C = i$

$\Rightarrow\ f(z) = e^{(1+i)z} + i(1-z)$

再从中给出　　$v = e^{x-y}\sin(x+y) - x + C$

13、**解：**

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} \sin(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^t \sin r^2 \cdot r^2 \sin\theta\, dr$$

$$= 4\pi \int_0^t \sin r^2 \cdot r^2 dr$$

$$\text{故原式} = 4\pi \lim_{t\to 0^+} \frac{\int_0^t \sin r^2 \cdot r^2 dr}{t^5} = 4\pi \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin t^2 \cdot t^2}{5t^4} = \frac{4\pi}{5}.$$

14、**解：**

法 1：直接计算. $\iint\limits_S x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \iint\limits_S x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \iint\limits_S z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$

$$\underline{\underline{\text{对称性}}}\ 2\iint\limits_{S1_{前}} x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + 0 + \iint\limits_{S1} z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + \iint\limits_{S2} z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint\limits_{\substack{-z\le y\le z\\ 0\le z\le 1}} \sqrt{z^2-y^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_0^1 dz \int_{-z}^{z}\sqrt{z^2-y^2}\,\mathrm{d}y - \frac{\pi}{2} + \pi = 2\int_0^1 \frac{\pi z^2}{2}dz + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$$

法 2：Gauss 公式.

$$\iint\limits_S x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \iiint\limits_{\Omega}(1+2z)dv$$

$$= \int_0^1 dz \iint\limits_{D(z)}(1+2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 (1+2z)\pi z^2 dz = \frac{5\pi}{6}.$$

$$\text{或} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_\rho^1 (1+2z)\rho\, dz = \frac{5\pi}{6}.$$

四（15）（本题满分 8 分）

解：

设 $\Sigma: z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}, D: x^2+y^2 \le R^2$，引力 $F = \{F_x, F_y, F_z\}$

由对称性知：$F_x = F_y = 0$

$$dF_z = k\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dA$$

$$F_z = k\iint\limits_{\Sigma}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dA = \frac{k}{R^3}\iint\limits_{\Sigma} z\,dA$$

$$= \frac{k}{R^3}\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dA = k\pi \quad (k\text{为引力常数})$$

五（16）（本题满分 10 分）

解：

$(1)d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

令 $F=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-1)$

令 $F_x=0,F_y=0,F_z=0,F_\lambda=0,F_\mu=0$， 解得：

$$x=y=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2},z=2\mp\sqrt{3}$$

计算得 $d_{\min}=\sqrt{9-5\sqrt{3}}$， $d_{\max}=\sqrt{9+5\sqrt{3}}$

(2)该椭圆在 xoy 面上的投影区域为 $(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{3}{2}$

则椭圆面积 $A=\dfrac{\sigma}{\cos\gamma}=\dfrac{\frac{3}{2}\pi}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\pi$

六（17）（本题满分 6 分）

解：

$D:(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2\le\frac{1}{2}$ 关于 $y=x$ 对称，$\sigma=\frac{\pi}{2}$

$$I=\oint_L -y\sin x^2dx+x\cos y^2dy=\iint_D(\cos y^2+\sin x^2)d\sigma$$

$$\underline{\underline{\text{轮换对称}}}\iint_D(\cos x^2+\sin x^2)d\sigma=\sqrt{2}\iint_D\sin(x^2+\frac{\pi}{4})d\sigma$$

而 $\frac{\pi}{4}\le x^2+\frac{\pi}{4}\le\pi\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin(x^2+\frac{\pi}{4})\le 1$

$\Rightarrow\frac{\pi}{2}\le I\le\frac{\pi}{\sqrt{2}}$