东 南 大 学 考 试 卷（A 卷）

课程名称　高等数学B期末　考试学期　08-09-3　得分

适用专业　选修高数B的各专业　考试形式　闭卷　考试时间长度　150分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

一.填空题(本题共9小题，每小题4分，满分36分)

1.曲面 $\cos(\pi x)-x^2y+e^{xz}+yz=4$ 在点 $(0,1,2)$ 处的法线方程是__________；

2.设 $u=\sqrt{x^2+2y^2+3z^2}$，则梯度 $\mathbf{grad}\,u\big|_{(1,2,0)}=$____________________；

3.已知 $\mathbf{A}=\{-2,-1,2\},\mathbf{B}=\{1,-3,2\}$，则 $\mathbf{A}$ 在 $\mathbf{B}$ 方向的投影 $(\mathbf{A})_{\mathbf{B}}=$______；

4.设闭曲线 $C:|x|+|y|=1$，取逆时针方向，则曲线积分 $\oint_C y\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y$ 是_____；

5.设函数 $F(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，则曲线积分 $\int_{AB}F(x,y)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$ 与路径无关的充分必要条件是_________________________；

6.二重积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left(e^{|x|}+\cos y^2\right)xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值是__________；

7.设 S 为球面：$x^2+y^2+z^2=R^2$，则曲面积分 $\oiint\limits_S\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}S$ 的是____；

8.设 C 是折线 $y=1-|1-x|\ (0\le x\le 2)$，则曲线积分 $\int_C y\mathrm{d}s$ 的值是_________；

9.取 $a_n=$__________，可使得级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n$ 收敛，且级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n\ln n$ 发散.

二. 计算下列各题(本题共4小题，满分30分)

10.（本小题满分7分）设 $z=f(x\varphi(y),x-y)$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，φ 具有连续导数，计算 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

11（本小题满分7分）计算 $\iint\limits_D(x^2+xy+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\le 1,x\ge 0\right\}$.

12.（本小题满分 8 分）计算二次积分$\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{2}}^{1-x} \frac{1}{y^3} \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} \mathrm{d}y$.

13. （本小题满分 8 分）求密度均匀分布的立体

$\Omega = \left\{ (x, y, z) \middle| z \ge \sqrt{1 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 + z^2 \le 2z, z \ge \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$ 的质心坐标.

三（14).（本题满分 7 分）试求过点 $A(3, -1, 2)$ 且与 z 轴相交，又与直线 $L_1 : x = 2y = 3z$ 垂直的直线方程.

四（15)。（本题满分 7 分）计算 $\iint_S \frac{|x|}{z} \mathrm{d}S$ ，其中 S 是柱面 $x^2 + y^2 = 2ay\ (a > 0)$ 被锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和平面 $z = 2a$ 所截下的部分.

五（16)．（本题满分 7 分）计算 $I = \int_C \mathrm{e}^x \cos y \mathrm{d}x + \left(5xy - \mathrm{e}^x \sin y\right) \mathrm{d}y$，其中 C 为曲线 $x = \sqrt{2y - y^2}$，方向沿 y 增大的方向.

六(17)(本题满分 7 分)计算 $I = \iint_S \left(y^2 + xz\right) \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(z^2 + y\right) \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (x^2 - z) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ ，其中 S 为 $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ 被 $z = 0$ 所截部分，取上侧.

七（18)（本题满分 6 分）证明不等式 $yx^y(1 - x) < \frac{1}{\mathrm{e}}$， $0 < x < 1$， $0 < y < +\infty$.

08-09-3 高数 B 期末试卷（A）参考答案

一.填空题(本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 36 分)

1、$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{2}=z-2$　2、$\mathbf{grad}\,u\big|_{(1,2,0)}=\left\{\frac{1}{3},\frac{4}{3},0\right\}$　3、$(\mathrm{A})_{\mathrm{B}}=\frac{5}{\sqrt{14}}$　4、-2　5、$xF_x=yF_y$　6、0　7、$4\pi R^4$　8、$\sqrt{2}$　9、$a_n=\frac{1}{n\ln^2 n}$

二. 计算下列各题(本题共 4 小题，满分 30 分)

10、**解：** $\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi f_1+f_2$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\varphi' f_1+x\varphi\varphi' f_{11}+(x\varphi'-\varphi)f_{12}-f_{22}$

11、**解：** $\iint\limits_D (x^2+xy+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}+0+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{3}{4}\pi$

12、**解:：** $\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}}^{1-x}\frac{1}{y^3}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_0^{1-y}\frac{1}{y^3}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{y^2}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{y}-1}-1\right)\mathrm{d}y=\mathrm{e}-2$

13、**解：** $\bar{x}=\bar{y}=0$　$\bar{z}=\dfrac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_1^{2\cos\theta}r^3\mathrm{d}r}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_1^{2\cos\theta}r^2\mathrm{d}r}=\dfrac{\frac{25}{24}\pi}{\frac{1+\sqrt{2}}{3}\pi}=\frac{25}{8}\left(\sqrt{2}-1\right)$

三（14）.（本题满分 7 分）

解： 设$\frac{x-3}{l}=\frac{y+1}{m}=\frac{z-2}{n}$为所求直线$L$ 的方程，由于直线L 与z 轴相交，所以三个向量

$s=\{l,m,n\}$，OA 及k 共面，从而$\begin{vmatrix} l & m & n \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$，即$-l-3m=0$　(1)，又由于L 与L_1

互相垂直，得$l+\frac{1}{2}m+\frac{1}{3}n=0$，即$6l+3m+2n=0$　(2) 联立 (1)，(2) 解得$l=-3m$，

$n=\frac{15}{2}m$，所求直线L 的方程为$\frac{x-3}{6}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{-15}$

四（15）（本题满分 7 分）

解： $\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{2ay-y^2}}$

$$\iint\limits_S\frac{|x|}{z}\mathrm{d}S=2\iint\limits_{D_{yz}}\frac{a}{z\sqrt{2ay-y^2}}\sqrt{2ay-y^2}\,\mathrm{d}\sigma=2a\int_0^{2a}\frac{1}{z}\mathrm{d}z\int_0^{\frac{z^2}{2a}}\mathrm{d}y=2a^2$$

五（16）.（本题满分 7 分）

解： 记 $O(0,0), A(0,2), D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le\sqrt{2y-y^2}\right\}$，由Green 公式得

$$I=5\iint\limits_{D} y\,\mathrm{d}\sigma+\int_{\overline{AO}}\sin y\,\mathrm{d}y=\frac{5}{2}\pi-1+\cos 2$$

六（17）（本题满分 7 分）

解： 补一个面 $\Sigma:\begin{cases}x^2+y^2\le 4\\ z=0\end{cases}$，取下侧，由 S 和 Σ 所围成的区域记为 Ω，由Gauss 公式

得 $I=\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v-\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\pi\int_0^2(2-z)^2z\mathrm{d}z+4\pi=\frac{4}{3}\pi+4\pi=\frac{16}{3}\pi$

七（18）（本题满分 6 分）

证 设 $f(x,y)=yx^y(1-x)$，$f(x,y)$ 在区域 $0<x<1, 0<y<+\infty$ 的边界上恒为 0，而在内部恒为正，故 f 的最大值只能在区域内部达到，令 $f_x=yx^y(y-xy-x)=0$，

$f_y=x^y(1-x)(1+y\ln x)=0$，在区域 $0<x<1, 0<y<+\infty$ 内求驻点，得 $y(1-x)=x$（1）及 $x^y=\mathrm{e}^{-1}$（2），这表明 $f(x,y)$ 在区域 $0<x<1, 0<y<+\infty$ 内的最大值点应满足方程（1）（2），然而在（1）（2）所确定的点上 $f(x,y)=yx^y(1-x)=x\mathrm{e}^{-1}<\mathrm{e}^{-1}$，所以

$$f(x,y)=yx^y(1-x)<\frac{1}{\mathrm{e}},\quad 0<x<1,\quad 0<y<+\infty.$$