自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿

密……封……线

东 南 大 学 考 试 卷 (A 卷)

课程名称＿数学物理方法＿ 考试学期＿13-14-3＿得分＿＿＿＿

适用专业＿面上＿ 考试形式＿闭卷＿考试时间长度＿120分钟＿

题目	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

注意：本份试卷可能会用到以下公式：

1、$\mathscr{L}[\sin\alpha t](p)=\dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$，$\mathscr{L}[\cos\alpha t](p)=\dfrac{p}{p^2+\alpha^2}$，$\mathscr{L}[t^n\mathrm{e}^{at}](p)=\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$；

2、$\mathscr{L}[f(t-t_0)H(t-t_0)](p)=\tilde{f}(p)\mathrm{e}^{-t_0p},\ t_0\geq 0$;

3、$(x^\nu J_\nu(x))'=x^\nu J_{\nu-1}(x),\ (x^{-\nu}J_\nu(x))'=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$.

一 填空题(35分)

1. 记函数$f(x)$的Fourier变换为$\hat{f}(\omega)$, 则函数$f(2-2x)$的Fourier变换为 $\underline{\dfrac{1}{2}\hat{f}(-\dfrac{\omega}{2})\mathrm{e}^{-i\omega}}$.

2. Laplace逆变换$\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{1}{p^2(p^2+1)}]$=$\underline{t-\sin t}$.

3. 长为l的均匀的弦在阻尼介质中振动，单位长度的弦在单位时间内所受阻力为$f=-Ru_t$(R是常数, $u(x,t)$表示弦的振动位移), 则此弦的振动方程为 $\underline{u_{tt}-a^2u_{xx}=-\frac{R}{\rho}u_t}$.

4. 弦的自由振动方程的初值问题
$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u(x,0)=x^2,\ u_t(x,0)=0, & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$
的解 $u(x,t)=\underline{x^2+a^2t^2}$.

5. 特征值问题
$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, & 0<x<l,\\ X'(0)=0,\ X'(l)=0\end{cases}$$
的所有特征值及特征函数是$\underline{\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2,\ X_n(x)=\cos\frac{n\pi x}{l},\ n=0,1,\cdots}$.

6. 在上半空间$R^+=\{(x,y,z)\mid -\infty<x,y<\infty,\ z>0\}$内，Laplace方程第一边值问题的Green函数是 $\underline{\frac{1}{4\pi}[\frac{1}{r_{MM_0}}-\frac{1}{r_{MM_1}}]=\frac{1}{4\pi}[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}]}$.

7. 简述三维波在空间中的传播与二维波在平面上的传播各自的特点: 三维波在传播过程中无后效现象，即传播过程有明晰的前阵面和后阵面；二维波在传播过程中有后效现象，即传播过程有明晰的前阵面，但无后阵面.

二 (10分) 求函数$f(x)=\begin{cases}\sin\pi x, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1\end{cases}$ 的Fourier变换.

解：I. 由定义，有

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[f(x)](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-i\omega x}\mathrm{d}x \\
&= -i\int_{-1}^{1}\sin\pi x\sin\omega x\mathrm{d}x & \cdots\cdots\cdots\ 3\text{分} \\
&= i\int_{0}^{1}[\cos(\pi+\omega)x-\cos(\pi-\omega)x]\mathrm{d}x \\
&= i\Big[\frac{\sin(\pi+\omega)}{\pi+\omega}-\frac{\sin(\pi-\omega)}{\pi-\omega}\Big] \\
&= \frac{2i\pi}{\omega^2-\pi^2}\sin\omega. & \cdots\cdots\cdots\ 10\text{分}
\end{aligned}$$

II. 由定义，有

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[f(x)](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-i\omega x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2i}\int_{-1}^{1}\big(\mathrm{e}^{i\pi x}-\mathrm{e}^{-i\pi x}\big)\mathrm{e}^{-i\omega x}\mathrm{d}x & \cdots\cdots\cdots\ 3\text{分} \\
&= \frac{1}{2i}\Big[\frac{1}{i(\pi-\omega)}\big(\mathrm{e}^{i(\pi-\omega)}-\mathrm{e}^{-i(\pi-\omega)}\big)+\frac{1}{i(\pi+\omega)}\big(\mathrm{e}^{-i(\pi+\omega)}-\mathrm{e}^{i(\pi+\omega)}\big)\Big] \\
&= \frac{1}{2i}\Big[\frac{2}{\pi-\omega}\sin(\pi-\omega)-\frac{2}{\pi+\omega}\sin(\pi+\omega)\Big] \\
&= \frac{2i\pi}{\omega^2-\pi^2}\sin\omega. & \cdots\cdots\cdots\ 10\text{分}
\end{aligned}$$

密……………封……………线

三 (12分) 利用 Laplace 变换法求解波方程的半无界定解问题, 其中常数$k \neq 0$,

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = k \sin \omega t, & x > 0,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0,\quad \lim\limits_{x \to \infty} |u_x(x,t)| < \infty, & t > 0, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

解：记$\tilde{u}(x,p) = \mathcal{L}[u(x,t)]$, 对方程及定解条件关于$t$做Laplace变换，得

$$\begin{cases} p^2 \tilde{u} - pu(x,0) - u_t(x,0) - a^2 \tilde{u}_{xx} = \frac{k\omega}{p^2+\omega^2}, \quad x > 0, \\ \tilde{u}(0,p) = 0, \quad \lim\limits_{x \to \infty} |\tilde{u}_x(x,p)| < \infty. \end{cases} \qquad \cdots\cdots\ 4分$$

即

$$\begin{cases} p^2 \tilde{u} - a^2 \tilde{u}_{xx} = \frac{k\omega}{p^2+\omega^2}, \quad x > 0, \\ \tilde{u}(0,p) = 0, \quad \lim\limits_{x \to \infty} |\tilde{u}_x(x,p)| < \infty. \end{cases}$$

求得像函数

$$\tilde{u}(x,p) = \frac{k\omega}{p^2(p^2+\omega^2)} - \frac{k\omega}{p^2(p^2+\omega^2)} \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}p}. \qquad \cdots\cdots\cdots\ 8分$$

因为

$$\frac{k\omega}{p^2(p^2+\omega^2)} = \frac{k}{\omega}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+\omega^2}\right),$$

所以作逆变换，得

$$u(x,t) = \frac{k}{\omega}t - \frac{k}{\omega^2}\sin \omega t - \frac{k}{\omega}(t - \frac{x}{a})H(t - \frac{x}{a}) - \frac{k}{\omega^2}\sin \omega(t - \frac{x}{a})H(t - \frac{x}{a}). \quad \cdots\cdots\ 12分$$

四 (15分) 用分离变量法求解扇形区域上Laplace方程的边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, & 0 < r < a, 0 < \theta < \beta, \\ u(r,0) = 0,\ u(r,\beta) = 0, & 0 \le r \le a, \\ |u(0,\theta)| < \infty,\ \frac{\partial u}{\partial r}(a,\theta) = h(\theta), & 0 < \theta < \beta. \end{cases}$$

解：设$U(r,\theta) = R(r)\Phi(\theta)$, 代入方程和边界条件，得

$$\frac{r^2R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)} = \lambda,\ |R(0)| < \infty, \Phi(0) = \Phi(\beta) = 0. \cdots\cdots\ 3分$$

由此得，

$$\begin{cases} \Phi''(\theta) + \lambda\Phi(\theta) = 0,\ 0 < \theta < \beta \\ \Phi(0) = \Phi(\beta) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0,\ 0 < r < a, \\ |R(0)| < \infty. \end{cases}$$

解此特征值问题，得

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\beta}\right)^2,\ \Phi_n(\theta) = \sin\frac{n\pi\theta}{\beta},\ n = 1, 2, \cdots. \qquad \cdots\cdots\ 7分$$

把$\lambda = \lambda_n$代入$R(r)$的方程，求得有界解

$$R_n(r) = C_n r^{n\pi/\beta}. \qquad \cdots\cdots\ 11分$$

所以，一般解为

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{n\pi/\beta} \sin\frac{n\pi\theta}{\beta}. \qquad \cdots\cdots\ 13分$$

利用边界条件$\frac{\partial u}{\partial r}(a,\theta) = h(\theta)$知，系数$C_n$满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{\beta} C_n a^{n\pi/\beta - 1} \sin\frac{n\pi\theta}{\beta} = h(\theta),$$

因此

$$C_n = \frac{2}{n\pi} a^{-n\pi/\beta + 1} \int_0^\beta h(\theta) \sin\frac{n\pi\theta}{\beta} \mathrm{d}\theta. \qquad \cdots\cdots\ 15分$$

线 封 密

五 (14分) 求解波方程的半无界定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0,\ t > 0, \\ u(0,t) = t^2, & t \ge 0, \\ u(x,0) = \sin x,\ u_t(x,0) = x, & x \ge 0. \end{cases}$$

解：方程的通解为

$$u(x,t) = f(x+at) + g(x-at). \qquad \cdots\cdots\ 4分$$

利用初边值条件，得

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \sin x, & x \ge 0, \\ af'(x) - ag'(x) = x, & x \ge 0, \\ f(at) + g(-at) = t^2, & t \ge 0. \end{cases} \qquad \cdots\cdots\ 7分 \qquad (1)$$

由(1)的第二式得$f(x) - g(x) = \dfrac{x^2}{2a} + C$. 此式与第一式联立，求出当$x \ge 0$时，

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{x^2}{4a} + \dfrac{C}{2}, & x \ge 0, \\ g(x) = \dfrac{1}{2}\sin x - \dfrac{x^2}{4a} - \dfrac{C}{2}, & x \ge 0. \end{cases} \qquad \cdots\cdots\ 9分$$

在(1)的第三式中令$x = -at \le 0$, 求得

$$g(x) = \frac{x^2}{a^2} - f(-x) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{x^2}{4a} - \frac{C}{2},\ x \le 0. \qquad \cdots\cdots\ 11分$$

故

$$\begin{aligned} f(x+at) &= \frac{1}{2}\sin(x+at) + \frac{(x+at)^2}{4a} + \frac{C}{2}, \\ g(x-at) &= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\sin(x-at) - \dfrac{(x-at)^2}{4a} - \dfrac{C}{2}, & x \ge at, \\ \dfrac{(x-at)^2}{a^2} + \dfrac{1}{2}\sin(x-at) - \dfrac{(x-at)^2}{4a} - \dfrac{C}{2}, & 0 \le x < at. \end{cases} \end{aligned}$$

于是所求的解

$$u(x,t) = \begin{cases} \sin x \cos at + xt, & x \ge at, \\ \dfrac{(x-at)^2}{a^2} + \sin x \cos at + xt, & 0 \le x < at. \end{cases} \qquad \cdots\cdots\ 14分$$

六 (14分) (1) 求解Bessel方程的特征值问题

$$\begin{cases} r^2R''(r)+rR'(r)+\lambda r^2R(r)=0, \quad 0<r<a, \\ |R(0)|<\infty,\ R(a)=0. \end{cases}$$

(2) 将函数$f(x)=x^2$ $(0<x<a)$ 按问题(1)所得的特征函数系展开成级数形式.

注：$\displaystyle\int_0^a xJ_0^2(\alpha_k x/a)\mathrm{d}x=\begin{cases} \dfrac{a^2}{2}J_1^2(\alpha_k),\ \text{如果 } \alpha_k \text{ 是 } J_0(x) \text{ 的第 } k \text{ 个正零点}, \\ \dfrac{a^2}{2}J_0^2(\alpha_k),\ \text{如果 } \alpha_k \text{ 是 } J_0'(x) \text{ 的第 } k \text{ 个正零点}. \end{cases}$

解：(1) $\lambda\le 0$ 不是特征值，因此考虑$\lambda>0$. 此时Bessel方程的通解

$$R(r)=CJ_0(\sqrt{\lambda}r)+DY_0(\sqrt{\lambda}r).$$

利用条件$|R(0)|<\infty$, 推得$D=0$. 由于方程是线性的，可取$C=1$, 故方程的有界解

$$R(r)=J_0(\sqrt{\lambda}r).$$

再由边界条件, 得$J_0(\sqrt{\lambda}a)=0$. 记α_k是$J_0(x)$的第k个正零点，并令$\sqrt{\lambda_k}a=\alpha_k$, 由此求得特征值及对应的特征函数为

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \left(\frac{\alpha_k}{a}\right)^2,\ k=1,2,\cdots. \\ R_k(r) &= J_0(\alpha_k r/a),\ k=1,2,\cdots. \end{aligned}$$

…… 6分

(2) $f(x)$的Bessel级数为

$$x^2=\sum_{k=1}^{\infty}A_kJ_0(\alpha_k x/a),\ 0<x<a,$$

其中

$$A_k=\frac{\displaystyle\int_0^a xf(x)J_0(\alpha_k x/a)\mathrm{d}x}{[N_k^{(0)}]^2}.$$

…… 9分

因为

$$\begin{aligned} \int_0^a xf(x)J_0(\alpha_k x/a)\mathrm{d}x &= \frac{a^4}{\alpha_k^4}\int_0^{\alpha_k}s^3J_0(s)\mathrm{d}s=\frac{a^4}{\alpha_k^4}\left[s^3J_1(s)\Big|_0^{\alpha_k}-2s^2J_2(s)\Big|_0^{\alpha_k}\right] \\ &= \frac{a^4}{\alpha_k^2}[\alpha_kJ_1(\alpha_k)-2J_2(\alpha_k)]. \end{aligned}$$

…… 13分

从而求得

$$A_k=\frac{2a^2[\alpha_kJ_1(\alpha_k)-2J_2(\alpha_k)]}{\alpha_k^2J_1^2(\alpha_k)}.$$

因此所求的Bessel级数为

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2a^2[\alpha_kJ_1(\alpha_k)-2J_2(\alpha_k)]}{\alpha_k^2J_1^2(\alpha_k)}J_0(\alpha_k x/a)=x^2,\ 0<x<a.$$

…… 14分