高数期末复习与总结

程全新

2019.12.30

东南大学数学学院

建　议

- 熟悉基本概念、基本性质
- 掌握基本公式、基本方法
- 熟悉一些常用解题技巧
- 提高综合解题能力

一元积分学、微分方程

- 主要内容
- 部分难点
- 难点解析

一元函数积分学主要内容

- 1. 原函数、不定积分的概念；
- 2. 不定积分和定积分的性质；
- 3. 定积分定义及其应用；
- 4. 积分中值定理、微积分基本定理；
- 5. 变限积分函数；
- 6. 积分计算（凑微分法、换元法、分部法）；
- 7. 定积分几何应用（面积、体积、弧长）；
- 8. 定积分物理应用；
- 9. 反常积分。

一元函数积分学难点

- （一）不定积分计算，涉及各种技巧；
- （二）定积分计算，
- 涉及技巧、特殊换元、特殊公式；
- （三）定积分定义的使用；
- （四）变限积分求导，及各种题型；
- （五）几何应用、物理应用；
- （直角坐标、极坐标、参数方程）
- （六）反常积分的计算。
- （七）各种证明题。

变限积分求导公式

（1） $[\int_a^x f(t)dt]' = f(x)$；

（2） $[\int_x^b f(t)dt]' = -f(x)$；

（3） $[\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt]' = f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$；

（4） $[\int_{\psi(x)}^b f(t)dt]' = -f[\psi(x)]\cdot\psi'(x)$；

（5） $[\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,dt]' = f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x) - f[\psi(x)]\cdot\psi'(x)$。

(6)对于$\int_a^x xf(t)dt$,应先提取x,变成$x\int_a^x f(t)dt$再求导

(7)对于$\int_a^x f(t+x)dt$,应先作换元$u=t+x$,再求导

定积分特殊情况

1、对$\forall f(x)\in C$，$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]dx$

$f(x)$为奇，$\int_{-a}^{a} f(x)dx=0.$

$f(x)$偶，$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx.$

2、$f(x)$以T为周期，$\int_{a}^{a+nT} f(x)dx=n\int_{0}^{T} f(x)dx$

3、$\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx$，　例 $\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$

4、$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} & (n\text{为偶数})\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{2}{3}\cdot 1 & (n\text{为奇数})\end{cases}$$

积分部分难点解析

例1. $\int \frac{\ln x+1}{(1+x\ln x)^2}\mathrm{d}x$ $=\int \frac{1}{(1+x\ln x)^2}d(x\ln x)$

例2. $\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)}\mathrm{d}x$ $=\int \frac{1}{xe^x(1+xe^x)}d(xe^x)$

例3. $\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$ $=-\frac{1}{2}[\frac{\ln x}{1+x^2}-\ln x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)]+C$

例4. $\int \frac{x}{(e^x+e^{-x})^2}\mathrm{d}x$ $=-\frac{1}{2}[\frac{x}{1+e^{2x}}-x+\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})]+C$

例5. $\int xe^{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$ 令$t=\sqrt{x-1}$

例6. $\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{3}\sqrt{(e^x-1)^3}\right]+C$$

例7. $\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x\,\mathrm{d}x$ $\quad=e^x\tan\frac{x}{2}+C$

例8. $\int\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}\mathrm{d}x$ $\quad=\frac{2}{5}\ln(1+2x)-\frac{1}{5}\ln(1+x^2)+\frac{1}{5}\arctan x+C$

例9. $\int_0^2 x^x(\ln x+1)\,\mathrm{d}x$ $\quad=3$

例10. $\int_{-1}^1\arccos x\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$ $\quad=\pi(\ln 2-2+\frac{\pi}{2})$

例11. $\int_{-1}^1 x\ln(1+e^x)\,\mathrm{d}x$ 例12. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\arctan e^x\,\mathrm{d}x=\frac{3}{32}\pi^2$

例13. $\int_{-1}^{1}\left[1+\sin^{2019}x+\ln(x+\sqrt{1+x^2})+e^x-\dfrac{1}{e^x}\right]\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ $=\dfrac{\pi}{2}$

例14. $\int_0^4 x\sqrt{4x-x^2}\mathrm{d}x=$ $\underline{\quad 4\pi \quad}$

例15. $\int_1^2\sqrt{\ln x}\mathrm{d}x+\int_0^{\sqrt{\ln 2}}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=$ $\underline{\quad 2\sqrt{\ln 2}\quad}$

例16. 设$f(x)=\int_{\ln x}^{2}e^{t^2}\mathrm{d}t.$ 求(1) $f'(e)$; (2) $\int_1^{e^2}\dfrac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$

$=-1$

$=\dfrac{1}{2}(e^4-1)$

例17. 求$\int_0^1\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\int_1^x\dfrac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x.$ $=4(2-\dfrac{\pi}{2}-\ln 2)$

例18. 已知$y'(x)=\arctan(x-1)^2, y(0)=0,$ 求$\int_0^1 y(x)\mathrm{d}x.$ $=\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{4}\ln 2$

例19. $\int \arctan\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x$

$$= x\arccos\frac{1}{x} - \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C$$

或 $= x\arctan\sqrt{x^2-1} - \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C$

例20. 设$f''(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(a)=f(b)=0$。证明：

(1)$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx$;

(2)$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{(b-a)^3}{12}\max\limits_{a\le x\le b}\left|f''(x)\right|$

例21. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x}\mathrm{d}x.$ $\quad = \frac{\pi}{4}$， 令$x = \frac{\pi}{2} - t$

例22. 已知$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & x<0 \\ xe^x, & x \ge 0 \end{cases}$，求$\int_{-1}^{0} f(2x+1)\mathrm{d}x.$

$$= \int_{-1}^{1} f(t)dt = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}$$

例23. $\int_0^{\pi} x\sin^4 x\mathrm{d}x$ $=\dfrac{3}{16}\pi^2$

例24. $\int_0^{2019\pi}\sqrt{1-\sin 2x}\mathrm{d}x$ $=2019\int_0^{\pi}\left|\sin x-\cos x\right|=4038\sqrt{2}$

例25. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x\sqrt{x-t}e^t dt}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{\cos\sqrt{x}}-1)}$ $=-4$

法1.令$u=x-t$ 或 $u=\sqrt{x-t}$; 法2.积分中值定理

例26. 设$f(x)$在$[0,\pi]$非负且连续，且满足：$f(x)\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=\sin^3 x.$

求$f(x)$在$[0,\pi]$上的积分平均值。

$=\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi\sqrt{3}}$

例27. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^t \cos t \ \ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}-1)$$

例28. 设$f(x)=\displaystyle\int_{x^2}^{x}\frac{\sin(xt)}{t}\mathrm{d}t$，求$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$

$$=1$$

例29. 证明：$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\sin t^2\mathrm{d}t=0$

$$=\int_x^{x+1}\sin t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u=-\frac{1}{2}\frac{\cos u}{\sqrt{u}}\Bigg|_{x^2}^{(x+1)^2}-\frac{1}{4}\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{\cos u}{u\sqrt{u}}\mathrm{d}u=0$$

例30. 求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{1}{n+1}+\sin\frac{1}{n+2}+\cdots+\sin\frac{1}{n+n}\right)$

提示：利用*Taylor*公式$\sin x = x-\dfrac{1}{3!}x^3+o(x^3)$

例31. $\int_1^2 \left(\frac{1}{x\ln^2 x}-\frac{1}{(x-1)^2}\right)\mathrm{d}x$ $=\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right]\Bigg|_1^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{\ln 2}$

例32. $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$$

其中$\int_0^1\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\left[-\frac{\ln x}{1+x}+\int\frac{1}{(1+x)x}dx\right]\Bigg|_1^2=\left[-\frac{\ln x}{1+x}+\ln x-\ln(1+x)\right]\Bigg|_1^2$

$$=\left[\frac{x\ln x}{1+x}-\ln(1+x)\right]\Bigg|_0^1 \quad =-\ln 2$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\left[-\frac{\ln x}{1+x}+\ln x-\ln(1+x)\right]\Bigg|_1^{+\infty}=\left[-\frac{\ln x}{1+x}+\ln\frac{x}{(1+x)}\right]\Bigg|_1^{+\infty}=\ln 2$$

$\therefore$ 原式$=-\ln 2+\ln 2=0$

例33. 已知$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$, 求$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x.$ $=\frac{\pi}{2}$

例34. 证明$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\mathrm{d}x$与$\alpha$无关，并求其值。 $=\frac{\pi}{4}$

例35. 设$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1<x<e\\ \frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, & x\ge e\end{cases}$,若反常积分$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛，则（　）。

$(A)\alpha<-2$; $(B)-2<\alpha<0$; $(C)0<\alpha<2$; $(D)\alpha>2$

例36. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

$$x_n=\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}}\to e^{-1}$$

例37. 设$f(x)$在$[1,+\infty)$上连续，且满足关系式$f(x)=1+\int_1^x \frac{dt}{t^2+f^4(t)}$，

令$x_n = f(n),(n=1,2,\cdots)$，证明：数列$\{x_n\}$收敛。

提示：利用“单调有界准则”

例38. 设$f(x)$ 在 (a,b)内二阶可导，$f'(x)$ 在 $[a,b]$上连续，

$f(a)=f(b)=0,\int_a^b f(x)dx=0$. 证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得$f''(\xi)=f(\xi)$。

例39. 设$f(x)$ 在 $[a,b]$上连续，在 (a,b)内可导，

且$f(a)=a$，$\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$.

证明：$\exists\xi\in(a,b),\ni f'(\xi)=f(\xi)-\xi+1$。

例40. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，证明：$\left(\int_a^b f(t)dt\right)^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(t)dt$

b换x，令$F(x)=\left(\int_a^x f(t)dt\right)^2-(x-a)\int_a^x f^2(t)dt$

$F'(x)=-\int_a^x [f(t)-f(x)]^2 dt \le 0$

例41. 设$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}\int_0^x \sin t^2 dt, & x\ne 0\\ 0\ , & x=0\end{cases}$，

求$f'(x)$，并讨论$f'(x)$在$x=0$处的连续性。

例42. $x\to 0^+$时，下列无穷小中最高阶是（　　）

$(A).\int_0^x (e^{t^2}-1)dt;$ $(B).\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})dt;$

$(C).\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt;$ $(D).\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}\,dt$

例43. 设函数$f(x)$在区间$[-2,2]$上可导，且$f'(x)>f(x)>0$,则（　　）.

$(A).\dfrac{f(-2)}{f(-1)}>1$ $(B).\dfrac{f(0)}{f(-1)}>e$ $(C).\dfrac{f(1)}{f(-1)}<e^2$ $(D).\dfrac{f(2)}{f(-1)}<e^3.$

例45. 设函数$f(x)=\int_1^x e^{t^2}dt$,

证明：（1）$\exists\xi\in(1,2)$, $\ni$ $f(\xi)=(2-\xi)e^{\xi^2}$;?

（2）$\exists\eta\in(1,2)$, $\ni$ $f(2)=\ln 2\cdot\eta e^{\eta^2}$.

(1)$F(x)=(2-x)f(x)$,在$[1,2]$上使用$Rolle$中值定理；

(2)对$f(x)$, $g(x)=\ln x$在$[1,2]$上使用$Cauchy$中值定理。

例46. 设函数$f(x)$连续，下列必为奇函数的是（　　）

$(A)\int_a^x f(t^2)dt$　　$(B)\int_0^x f^2(t)dt$?

$(C)\int_0^x[f(t)-f(-t)]dt$　　$(D)\int_0^x[f(t)+f(-t)]dt$.

例47.设由半圆$y=\sqrt{2x-x^2}$与直线$y=x$所围图形为D. 求

(1)D绕x轴旋转一周的体积。

(2)D绕x轴旋转一周的体积。

(3)D绕直线$x=2$旋转一周的体积。

$$(1)V_x=\pi\int_0^1(\sqrt{2x-x^2})^2dx-\pi\int_0^1(x)^2dx$$

或 $V_x=V_{半球}-V_{圆锥}=\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{3}\pi=\frac{1}{3}\pi$

$$(2)V_y=\pi\int_0^1(y)^2dy-\pi\int_0^1(1-\sqrt{1-y^2})^2dy=(\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3})\pi$$

或 $V_y=2\pi\int_0^1 x[f(x)-g(x)]dx=2\pi\int_0^1 x[\sqrt{2x-x^2}-x]dx$

(3)截面积函数$A(y)=\pi[2-x_1(y)]^2-\pi[2-x_2(y)]^2=\pi[2-(1-\sqrt{1-y^2})]^2-\pi[2-y]^2$

$=\pi(4y+2\sqrt{1-y^2}-2y^2-2)$ ，　　　则 $V=\pi\int_0^1 A(y)dy=(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3})\pi$

或 $V_y=2\pi\int_0^1(2-x)[f(x)-g(x)]dx=2\pi\int_0^1(2-x)[\sqrt{2x-x^2}-x]dx=(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3})\pi$

微分方程主要内容

- （一）一阶方程：
- 1.可分离变量方程 $y' = f(x)g(y)$
- 2.一阶线性方程 $y' + P(x)y = Q(x)$
- 3.齐次方程 $y' = \varphi(\frac{y}{x})$
- 4.贝努利方程 $y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}$
- 5.其它方程

一般使用换元法：

设 $z =$（方程中与y有关的一部分表达式）

微分方程主要内容

- （二）可降阶的高阶方程：
- 1. $y^{(n)} = f(x)$
- 2. $y'' = f(x, y')$ 缺y
- 3. $y'' = f(y, y')$ 缺x
- （三）高阶（二阶）常系数齐次线性方程

$$ay'' + by' + cy = 0$$

- （四）高阶（二阶）常系数非齐次线性方程

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

- （五）欧拉方程

$$ax^2y'' + bxy' + cy = f(x)$$

微分方程主要内容

- （六）线性方程解的结构（四个定理）

$$(\mathrm{I})\, ay'' + by' + cy = 0$$

$$(\mathrm{II})\, ay'' + by' + cy = f(x)$$

$Th1.$设y_1, y_2是(I)的两个线性无关解，则$Y = C_1 y_1 + C_2 y_2$是其通解。

$Th2.$设y^*是(II)的一个特解，则$y = Y + y^*$是(II)的通解。

$Th3.$设y_1^*和y_2^*是(II)的两个特解，则$y = y_1^* - y_2^*$是(I)的一个解。

$Th4.$(叠加原理)$ay'' + by' + cy = f_1(x) + f_2(x)$，则$y^* = y_1^* + y_2^*$

微分方程难点

- （1）方程类型的判定
- （2）各种方程的解法
- （3）非典型种类方程的解法
- （4）线性方程解的结构定理的使用
- （5）微分方程的建立！
- （6）与方程有关的综合应用

方程部分难点解析

例1. $ydx+(y-x)dy=0$

$$y'=\frac{y}{x-y}=\frac{\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}\qquad \text{或}\qquad x'=\frac{x-y}{y}=\frac{1}{y}x-1$$

例2. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x^2y^2-x}$

$$x'+\frac{1}{y}x=yx^2 \qquad (x\text{的不努力方程})$$

$$z=x^{1-2}=x^{-1}\Rightarrow z'-\frac{1}{y}z=-y\Rightarrow z=Cy-y^2\Rightarrow x=\frac{1}{Cy-y^2}$$

例3. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{(x+y)^2}$

令$z=x+y \Rightarrow z'=1+y' \Rightarrow z'=1+\dfrac{1}{z^2}$ （分离变量）

例4. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y^2}{2y(x+y^2)}$

$$z=y^2 \Rightarrow z'=2yy' \Rightarrow z'=\frac{x-z}{x+z}=\frac{1-\dfrac{z}{x}}{1+\dfrac{z}{x}}$$ (齐次方程)

例5. $x+yy'=(\sqrt{x^2+y^2}-1)\tan x$

例6. 设$f(x)$为连续偶函数，

且$f'(x)+2f(x)-3\int_0^x f(t-x)dt=2-3x$，求$f(x)$.

$$f''(x)+2f'(x)-3f(x)=-3$$

$f'(x)$为奇函数，$\Rightarrow f'(0)=0$，且$f'(0)+2f(0)=2\Rightarrow f(0)=1$

解得：$f(x)=1$

例7. 设$f(x)$、$g(x)$可导，且$f'(x)=g(x)$，$g'(x)=f(x)$

$f(0)=0, g(x)\neq 0$，令$\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，求$\varphi(x)$.

$$\varphi(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

例8. 设$f(x)$为连续函数，$f(1)=3$,

对于$\forall x, y>0$, 满足$\int_1^{xy} f(t)dt = x\int_1^{y} f(t)dt + y\int_1^{x} f(t)dt$, 求$f(x)$.

对y求导：$xf(xy) = xf(y) + \int_0^x f(t)dt$

令$y=1$：$xf(x) = xf(1) + \int_0^x f(t)dt$

再对x求导：$f'(x) = \dfrac{3}{x}$ ， 解得 $f(x)=3\ln x + 3$

例9. 设$f(x)$为连续函数，$f'(0)=2$

对于$\forall x, y \in R$, 满足$f(x+y) = e^y f(x) + e^x f(y)$, 求$f(x)$.

$$f(x) = 2xe^x$$

例10. 已知$f'(0)=1$,且$f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$. 求$f(x)$.

利用导数定义得：$f'(x)=1+f^2(x)$

即 $\dfrac{dy}{dx}=1+y^2$ （分离变量）

$\Rightarrow y=\tan x$

例11. 设$f(x)>0$,连续,且满足 $f(x)=e^{x^2}+\int_0^x e^{x^2-t^2}f(t)dt.$

求$f(x)$.

先变形： $e^{-x^2}f(x)=1+\int_0^x e^{-t^2}f(t)dt.$

例12. 解方程 $yy'' + yy' + y'^2 + x + 1 = 0$

$$x^2 + y^2 = C_1 e^{-x} + C_2$$

例13. 解方程 $x^3 y'' - 2xy' + 2y = 0$

利用解的结构理论。$y_1 = x,$

令$y_2 = xu(x),$ 求得$u(x)$可以取 $u = \frac{1}{2} e^{-\frac{2}{x}},$

则$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 x + \frac{1}{2} C_2 x e^{-\frac{2}{x}}.$

例14. 设$F(x)=f(x)g(x), x\in(-\infty,+\infty)$,且$f(x), g(x)$满足:

$$f'(x)=g(x), g'(x)=f(x), f(0)=0, f(x)+g(x)=2e^{x}$$

(1)求$F(x)$所满足的一阶微分方程;

(2)求$F(x)$的表达式.

解法: $F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$$=g^{2}(x)+f^{2}(x)$$

$$=(g(x)+f(x))^{2}-2g(x)f(x)$$

$$=4e^{2x}-2F(x)$$

即: $F'(x)+2F(x)=4e^{2x}$

解得: $F(x)=e^{2x}-e^{-2x}$.

例15. 已知$f'(x) = f(1-x)$. 求$f(x)$.

求导得： $f''(x) = -f'(1-x)$

$$= -f(1-(1-x)) = -f(x)$$

即 $y'' + y = 0$

例 16 设过点$M_0(2,0)$的曲线L的极坐标方程为 $r=r(\theta)$，$M(r,\theta)$为L上任一点，若极径OM_0，OM与曲线L围成的曲边扇形的面积等于L上两点间弧长的一半，求L的方程.

解 $$\frac{1}{2}\int_0^\theta r^2(\theta)d\theta=\frac{1}{2}\int_0^\theta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta$$

$$\Rightarrow r^2(\theta)=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}$$

$$\Rightarrow r'=\pm\sqrt{r^4-r^2}=\pm r\sqrt{r^2-1}$$

$$\Rightarrow\frac{dr}{r\sqrt{r^2-1}}=\pm d\theta\Rightarrow-\arcsin\frac{1}{r}=\pm\theta+C$$

$$r(0)=2\Rightarrow C=\frac{\pi}{6}\ \therefore\quad L: r\sin\left(\frac{\pi}{6}\pm\theta\right)=1$$

例17. 设函数$y=f(x)$可导，且$f'(x)>0(x\geq 0)$，曲线$y=f(x)$过原点O，曲线上任一点M的切线与x轴交于T，过点M作MP垂直于x轴于点P，且曲线$y=f(x)$，直线MP，x轴围成图形的面积与ΔMTP面积比恒为$3:2$，求曲线的方程。

设点$M(x, f(x))$，

由题意得：$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\int_0^x f(t)dt}{\frac{1}{2}\cdot\frac{f(x)}{f'(x)}\cdot f(x)}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow f(x)f''(x)=\frac{2}{3}f'^2(x),\ \text{即}\quad yy''=\frac{2}{3}y'^2$$

解得 $y=(C_1x+C_2)^3$，过原点，则$y=Cx^3$

其中，常数$C>0$

例18. 若函数$f(x)$满足$f''(x)+2f(x)'+f(x)=0$ ，

且$f(0)=0,\ f'(0)=1,$ 求$\int_0^{+\infty} f(x)dx.$

$=1$

例19. 若函数$f(x)$满足$f''(x)+af'(x)+f(x)=0\ \ (a>0),$

且$f(0)=m,\ f'(0)=n,$ 求$\int_0^{+\infty} f(x)dx.$ $=am+n$

20. 给定微分方程 $y'' + (\sin y - x)(y')^3 = 0$,

（1）证明 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{d^2x}{dy^2}\Big/\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3$,

并将方程化为以x为未知函数，以y为自变量的方程形式；

（2）求该方程的通解。

(1) 由$y'' = -x''\bullet(y')^3$，代入 $\Rightarrow x'' + x = \sin y$

(2)通解 $x = C_1\cos y + C_2\sin y - \dfrac{1}{2}y\cos y$

21. 已知某二阶微分方程的通解为 $y=\dfrac{(C_1+C_2x)e^{-x}}{x}$，求该微分方程。

$$xy''+2(x+1)y'+(2+x)y=0$$

法一，　　　法二

22. 已知微分方程：$y'''+2y''=x+\cos^2 x$,

其特解$y*$可设为________________.

$$y*=(ax+b)x^2+A\cos 2x+B\sin 2x$$

23. 若 $y=f(x)$为方程 $y''-y'=e^{\sin x}$ 的解，$f'(x_0)=0$,
则$f(x)$在x_0处（　　　　）

(A) 某邻域内单调　　　　(B)取得拐点

(C)取极小值　　　　(D) 取极大值

谢谢各位同学！