

电磁场作业4

T-3

在半径分别为 a 和 b 的同心导体球壳上, 均匀分布着面电荷密度为 ρ_{s1} 和 ρ_{s2} 的电荷, 求:

- (1) 在空间任意一点的电场强度
- (2) 如果要使 $r > b$ 处的电场强度为0, 则面电荷密度 ρ_{s1} 和 ρ_{s2} 应该满足什么关系?

Solutions:

(1) 我们不妨设 $a < b$, 空间任意一点距离球心的距离为 r
当 $0 \leq r < a < b$ 的时候,

$$\vec{E} = 0$$

当 $a \leq r < b$ 的时候,

$$\vec{E} = \frac{4\pi a^2 \rho_{s1} \vec{r}}{4\pi \epsilon_0 r^3} + 0 = \frac{a^2 \rho_{s1} \vec{r}}{\epsilon_0 r^3}$$

当 $r \geq b$ 的时候,

$$\vec{E} = \frac{a^2 \rho_{s1} \vec{r}}{\epsilon_0 r^3} + \frac{b^2 \rho_{s2} \vec{r}}{\epsilon_0 r^3}$$

(2) 令

$$\vec{E} = \frac{a^2 \rho_{s1} \vec{r}}{\epsilon_0 r^3} + \frac{b^2 \rho_{s2} \vec{r}}{\epsilon_0 r^3} = 0$$

我们可以得到约束关系

$$a^2 \rho_{s1} + b^2 \rho_{s2} = 0$$

在电场中有一个圆形柱区域，其半径为 a 。该区域内外的电位函数为

$$\varphi_1 = 0 \quad (r \leq a)$$

$$\varphi_2 = A\left(r - \frac{a^2}{r}\right) \cos \varphi \quad (r > a)$$

式中 A 为常数。求圆柱面内外的电场强度 \vec{E}_1, \vec{E}_2 以及圆柱面上的电荷面密度。

Solutions:

当 $r \leq a$ 的时候,

$$\vec{E}_1 = -\nabla \varphi_1 = 0$$

当 $r > a$ 的时候,

$$\vec{E}_2 = -\nabla \varphi_2 = -\vec{e}_r A\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \cos \varphi + \vec{e}_\varphi A\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \sin \varphi$$

由 Gauss 定理

$$\frac{2\pi R\sigma h}{\varepsilon_0} = Q = \int_S \vec{E}_2 dS = -2\pi r h A\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \cos \varphi \Big|_{r=a}$$

可以得到

$$\sigma = -2\varepsilon_0 A \cos \varphi$$