东 南 大 学 考 试 卷（ A 卷）

课程名称 高等数学（B）期中 考试学期 07-08-3 得分

适用专业 选学高数（B）的各专业 考试形式 闭卷 考试时间长度 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六
得分						

一.单项选择题(本题共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分)

1. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{a}{\sqrt{n^3}}\right)$ （常数$a>0$）

(A) 绝对收敛 (B) 条件收敛 (C) 发散 (D) 敛散性与a的取值有关

2. 下列反常积分发散的是

(A)$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\arctan x}{1+x^3}\mathrm{d}x$ (B) $\displaystyle\int_1^{2}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$ (C)$\displaystyle\int_2^{3}\frac{1}{\ln(x-1)}\mathrm{d}x$ (D) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$

3. 已知直线$L_1:\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+2}{5}$与$L_2:\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{4}$，则$L_1$与$L_2$

(A)相交 (B) 异面 (C) 平行但不重合 (D) 重合

4. 设函数$f(x)=\begin{cases}1+x^2, & 0\le x<1\\ 0, & -1\le x<0\end{cases}$，$S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\pi x+b_n\sin n\pi x)$，

$-\infty<x<+\infty$，其中$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x$ $(n=0,1,2,\cdots)$，

$b_n=\int_{-1}^{1}f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x$ $(n=1,2,\cdots)$，则$S(3)=$

(A)$\dfrac{1}{2}$ (B) 1 (C) 0 (D) 2

二．填空题(本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分)

5.若$2\mathbf{a}-3\mathbf{b}$垂直于$\mathbf{a}+\mathbf{b}$，且$|\mathbf{a}|=\sqrt{2}|\mathbf{b}|$，则$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$的夹角为____；

6.曲线$\begin{cases}2x^2+3y^2=4\\ z=0\end{cases}$绕$y$轴旋转一周所成的曲面方程是_____________；

7.曲线$\begin{cases}2x^2+3y^2+z^2=5\\ x^2-y^2-2z^2=0\end{cases}$在$yOz$面上的投影曲线方程是_______________；

8.设幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$在$x=4$处条件收敛，则该幂级数的收敛半径为___；

9.幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}(x-2)^{2n+1}$的收敛域为________.

三. 计算下列各题(本题共 4 小题，每小题 9 分，满分 36 分)

10. 求过点 $(1,2,1)$ 且与直线 $\begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$ 及直线 $\dfrac{x}{0}=\dfrac{y+2}{-1}=-z$ 都平行的平面方程.

11. 求过点 $(-4,6,-2)$，与平面 $6x-2y-3z+1=0$ 平行，且与直线 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-5}$ 相交的直线方程.

12. 将函数 $f(x)=\ln\left(2x^2+x-3\right)$ 展开为 $x-3$ 的幂级数，并求收敛域.

13. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{2n}$ 的和函数，并指明收敛域.

四（14）.（本题满分 9 分） 求母线平行于向量 $\mathbf{j}+\mathbf{k}$ ，准线为 $\begin{cases} 4x^2-y^2=1 \\ z=1 \end{cases}$ 的柱面方程.

五（15）。（本题满分 9 分） 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

六（16）.（本题满分 10 分） 将函数 $f(x)=\dfrac{\pi-2x}{4}\ (0\le x\le\pi)$ 展开成正弦级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 的和.

07-08-3 高数 B 期中试卷参考答案

一.单项选择题(本题共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分)

1、A　　2、C　　3、B　　4、B

二．填空题(本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分)

5、$\underline{\dfrac{\pi}{4}}$　　6、$\underline{2x^2+3y^2+2z^2=4}$　　7、$\underline{\begin{cases} y^2+z^2=1 \\ x=0 \end{cases}}$　　8、$\underline{3}$　　9、$\underline{[1,3]}$

三. 计算下列各题(本题共 4 小题，每小题 9 分，满分 36 分)

10、**解**：$s_1=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(1,-2,-3)$，平面方程为$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0$，

即 $x-y+z=0$

11、**解**：设所求直线与直线$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-5}$的交点为$(x_0,y_0,z_0)$，$x_0=1+3t_0$，

$y_0=-1+2t_0$，$z_0=3-5t_0$，于是

$6(x_0+4)-2(y_0-6)-3(z_0+2)=6(5+3t_0)-2(-7+2t_0)-3(5-5t_0)=29(t_0+1)=0$

得$t_0=-1$，交点为$(-2,-3,8)$，所求直线方程为$\dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y-6}{-9}=\dfrac{z+2}{10}$

12、**解**：

$$f(x)=\ln\left(2x^2+x-3\right)=\ln(x-1)(2x+3)=\ln 18+\ln\left(1+\frac{x-3}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{9}(x-3)\right)$$

$$=\ln 18+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{1}{2^n}+\left(\frac{2}{9}\right)^n\right)(x-3)^n，\quad 1<x\le 5$$

13、**解**： 令 $y=x^2$，

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}ny^n=y\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}y^n\right)'=y\left(\frac{y}{1+y}\right)'=\frac{y}{(1+y)^2}=\frac{x^2}{(1+x^2)^2}，$$

$-1<x<1$

四（14）.（本题满分 9 分）

解：设$M_0(x_0,y_0,1)$是准线上一点，则$\dfrac{x-x_0}{0}=y-y_0=z-1$，则$x_0=x$，

$y_0=y-z+1$，代入准线方程即得所求的柱面方程$4x^2-(y-z+1)^2=1$

五（15）。（本题满分 9 分）

解： $\int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx \le e^{-\sqrt{n}} \le \frac{24}{n^2}$，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，由比较判别法得知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx$收敛

六（16）.（本题满分 10 分）

解： 由题设知$a_n = 0, n = 0,1,2,\cdots$，$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi - 2x}{4}\sin nx dx = \frac{1+(-1)^n}{2n}$，$n = 1,2,\cdots$，

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{2n}\sin nx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\sin 2nx, \quad x \in (0,\pi)，$$

取$x = \frac{\pi}{4}$，得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n}{2}\pi = \frac{\pi}{4}$，即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$