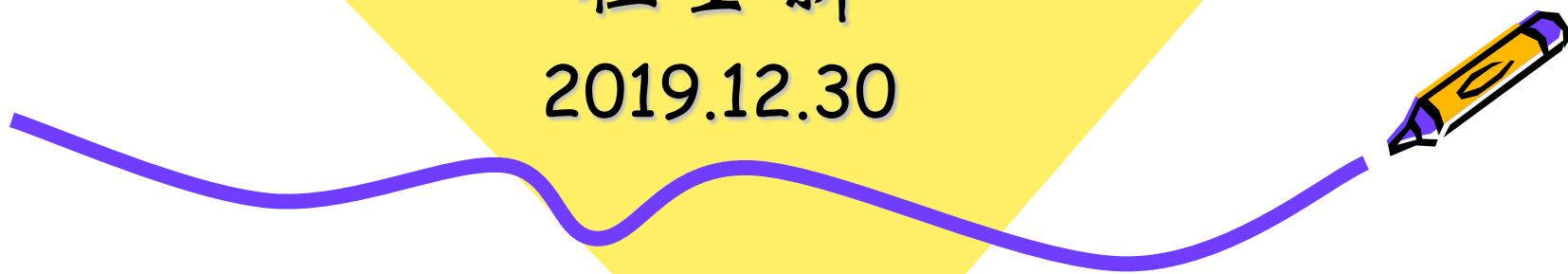


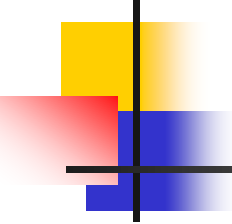


高数期末复习与总结

程全新
2019.12.30



东南大学数学学院



建 议

- 熟悉基本概念、基本性质
- 掌握基本公式、基本方法
- 熟悉一些常用解题技巧
- 提高综合解题能力



一元积分学、微分方程

- 主要内容
- 部分难点
- 难点解析

一元函数积分学主要内容

- 1. 原函数、不定积分的概念；
- 2. 不定积分和定积分的性质；
- 3. 定积分定义及其应用；
- 4. 积分中值定理、微积分基本定理；
- 5. 变限积分函数；
- 6. 积分计算（凑微分法、换元法、分部法）；
- 7. 定积分几何应用（面积、体积、弧长）；
- 8. 定积分物理应用；
- 9. 反常积分。

一元函数积分学难点

- (一) 不定积分计算, 涉及各种技巧;
- (二) 定积分计算,
■ 涉及技巧、特殊换元、特殊公式;
- (三) 定积分定义的使用;
- (四) 变限积分求导, 及各种题型;
- (五) 几何应用、物理应用;
■ (直角坐标、极坐标、参数方程)
- (六) 反常积分的计算。
- (七) 各种证明题。

变限积分求导公式

$$(1) \left[\int_a^x f(t) dt \right]' = f(x);$$

$$(2) \left[\int_x^b f(t) dt \right]' = -f(x);$$

$$(3) \left[\int_a^{\varphi(x)} f(t) dt \right]' = f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x);$$

$$(4) \left[\int_{\psi(x)}^b f(t) dt \right]' = -f[\psi(x)] \cdot \psi'(x);$$

$$(5) \left[\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t) dt \right]' = f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) - f[\psi(x)] \cdot \psi'(x)。$$

(6) 对于 $\int_a^x x f(t) dt$, 应先提取 x , 变成 $x \int_a^x f(t) dt$ 再求导

(7) 对于 $\int_a^x f(t+x) dt$, 应先作换元 $u = t+x$, 再求导

定积分特殊情况

1、对 $\forall f(x) \in C$,
$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)]dx$$

$f(x)$ 为奇,
$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

$f(x)$ 偶,
$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

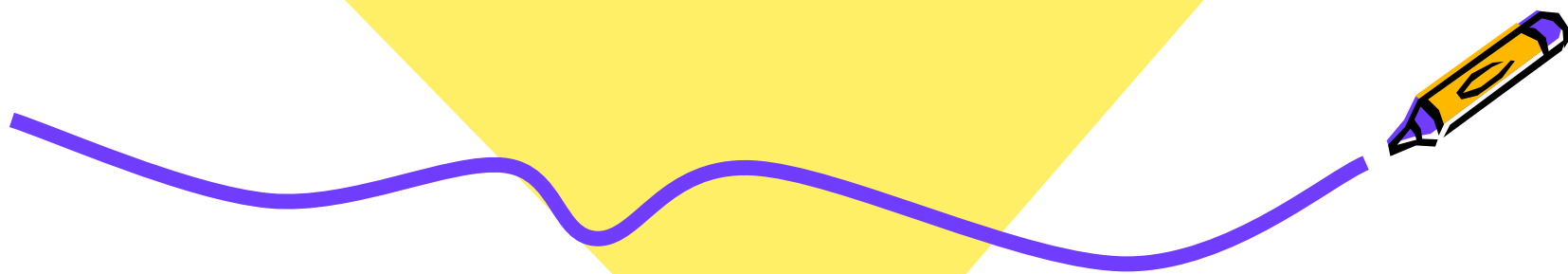
2、 $f(x)$ 以 T 为周期,
$$\int_a^{a+nT} f(x)dx = n\int_0^T f(x)dx$$

3、
$$\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x)dx,$$
 例
$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

4、
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} & (n \text{为偶数}) \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1 & (n \text{为奇数}) \end{cases}$$



积分部分难点解析



例1. $\int \frac{\ln x + 1}{(1 + x \ln x)^2} dx$

$$= \int \frac{1}{(1 + x \ln x)^2} d(x \ln x)$$

例2. $\int \frac{x + 1}{x(1 + xe^x)} dx$

$$= \int \frac{1}{xe^x(1 + xe^x)} d(xe^x)$$

例3. $\int \frac{x \ln x}{(1 + x^2)^2} dx$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{\ln x}{1 + x^2} - \ln x + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) \right] + C$$

例4. $\int \frac{x}{(e^x + e^{-x})^2} dx$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{x}{1 + e^{2x}} - x + \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2x}) \right] + C$$

例5. $\int xe^{\sqrt{x-1}} dx$

$$\text{令 } t = \sqrt{x-1}$$



例6. $\int e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} dx$

$$= \frac{1}{2} \left[e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} - \sqrt{e^x - 1} - \frac{1}{3} \sqrt{(e^x - 1)^3} \right] + C$$

例7. $\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} e^x dx$

$$= e^x \tan \frac{x}{2} + C$$

例8. $\int \frac{1}{(1 + 2x)(1 + x^2)} dx$

$$= \frac{2}{5} \ln(1 + 2x) - \frac{1}{5} \ln(1 + x^2) + \frac{1}{5} \arctan x + C$$

例9. $\int_0^2 x^x (\ln x + 1) dx$

$$= 3$$

例10. $\int_{-1}^1 \arccos x \ln(1 + x^2) dx$

$$= \pi \left(\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2} \right)$$

例11. $\int_{-1}^1 x \ln(1 + e^x) dx$

例12. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \arctan e^x dx = \frac{3}{32} \pi^2$

例13. $\int_{-1}^1 \left[1 + \sin^{2019} x + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + e^x - \frac{1}{e^x} \right] \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$

例14. $\int_0^4 x\sqrt{4x-x^2} dx = \underline{4\pi}$

例15. $\int_1^2 \sqrt{\ln x} dx + \int_0^{\sqrt{\ln 2}} e^{x^2} dx = \underline{2\sqrt{\ln 2}}$

例16. 设 $f(x) = \int_{\ln x}^2 e^{t^2} dt$. 求 (1) $f'(e)$; (2) $\int_1^{e^2} \frac{f(x)}{x} dx$

$= -1$
 $= \frac{1}{2}(e^4 - 1)$

例17. 求 $\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt \right) dx$. $= 4(2 - \frac{\pi}{2} - \ln 2)$

例18. 已知 $y'(x) = \arctan(x-1)^2$, $y(0) = 0$, 求 $\int_0^1 y(x) dx$. $= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2$



例19. $\int \arctan \sqrt{x^2 - 1} dx = x \arccos \frac{1}{x} - \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right| + C$
 或 $= x \arctan \sqrt{x^2 - 1} - \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right| + C$

例20. 设 $f''(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) = f(b) = 0$. 证明:

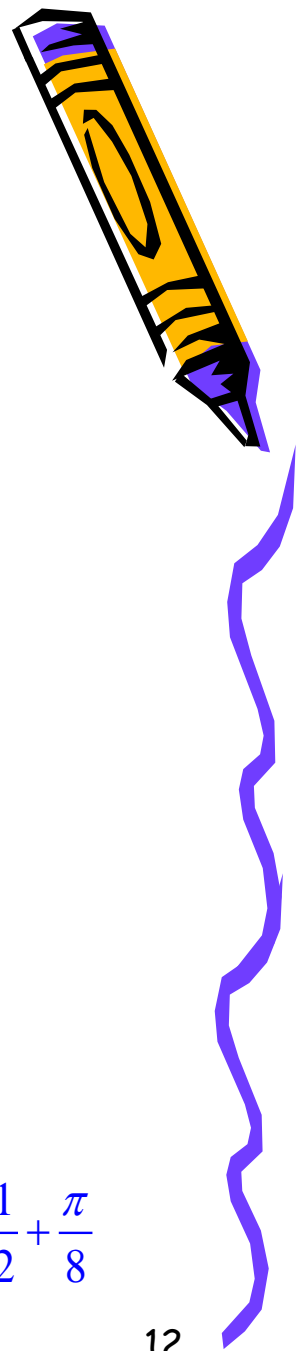
(1) $\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b) dx;$

(2) $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$

例21. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx. = \frac{\pi}{4}, \quad \text{令 } x = \frac{\pi}{2} - t$

例22. 已知 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & x < 0 \\ xe^x, & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $\int_{-1}^0 f(2x+1) dx.$

$= \int_{-1}^1 f(t) dt = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}$



$$\text{例23. } \int_0^{\pi} x \sin^4 x dx = \frac{3}{16} \pi^2$$

$$\text{例24. } \int_0^{2019\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} dx = 2019 \int_0^{\pi} |\sin x - \cos x| = 4038\sqrt{2}$$

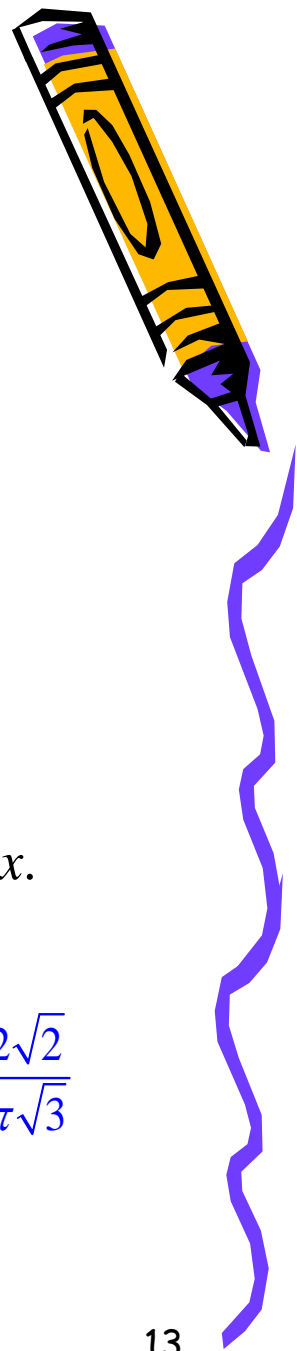
$$\text{例25. } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{x-t} e^t dt}{\sqrt{x} (\sqrt[3]{\cos \sqrt{x}} - 1)} = -4$$

法1. 令 $u = x - t$ 或 $u = \sqrt{x - t}$; 法2. 积分中值定理

例26. 设 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 非负且连续, 且满足: $f(x) \int_0^x f(x-t) dt = \sin^3 x$.

求 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的积分平均值。

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\pi\sqrt{3}}$$



例27. $\int_0^1 \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^t \cos t \, dt = \frac{1}{2}(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}} - 1)$

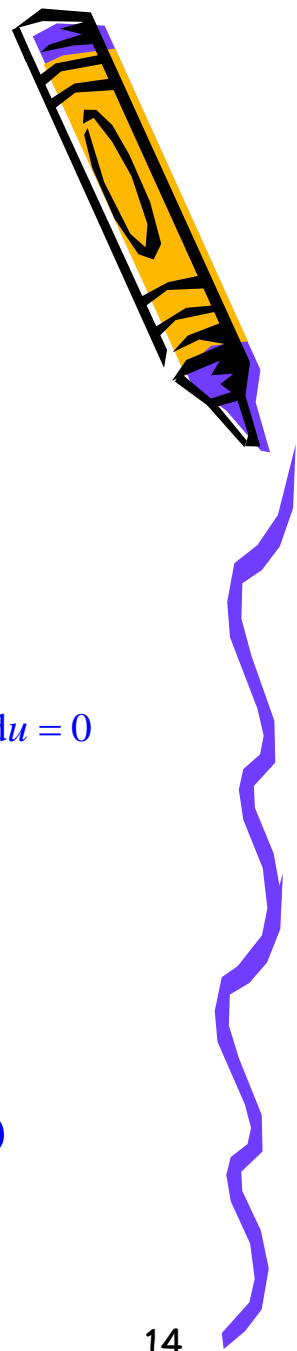
例28. 设 $f(x) = \int_{x^2}^x \frac{\sin(xt)}{t} dt$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 1$

例29. 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} \sin t^2 dt = 0$

$$= \int_x^{x+1} \sin t^2 dt = \frac{1}{2} \int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du = -\frac{1}{2} \frac{\cos u}{\sqrt{u}} \Big|_{x^2}^{(x+1)^2} - \frac{1}{4} \int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{\cos u}{u\sqrt{u}} du = 0$$

例30. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{n+1} + \sin \frac{1}{n+2} + \cdots + \sin \frac{1}{n+n} \right)$

提示: 利用 *Taylor* 公式 $\sin x = x - \frac{1}{3!} x^3 + o(x^3)$



例31. $\int_1^2 \left(\frac{1}{x \ln^2 x} - \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx = \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right]_1^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\ln 2}$

例32. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx$

$$= \int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx$$

$$\text{其中} \int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{1+x} + \int \frac{1}{(1+x)x} dx \right]_1^2 = \left[-\frac{\ln x}{1+x} + \ln x - \ln(1+x) \right]_1^2$$

$$= \left[\frac{x \ln x}{1+x} - \ln(1+x) \right]_0^1 = -\ln 2$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{1+x} + \ln x - \ln(1+x) \right]_1^{+\infty} = \left[-\frac{\ln x}{1+x} + \ln \frac{x}{(1+x)} \right]_1^{+\infty} = \ln 2$$

$$\therefore \text{原式} = -\ln 2 + \ln 2 = 0$$



例33. 已知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$, 求 $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$

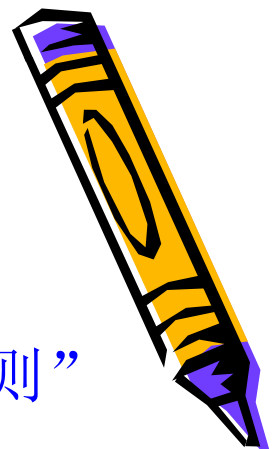
例34. 证明 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} dx$ 与 α 无关, 并求其值。 $= \frac{\pi}{4}$

例35. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1 < x < e \\ \frac{1}{x \ln^{\alpha+1} x}, & x \geq e \end{cases}$, 若反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则 ()。

(A) $\alpha < -2$; (B) $-2 < \alpha < 0$; (C) $0 < \alpha < 2$; (D) $\alpha > 2$

例36. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

$$x_n = \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n}{n} \right)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n}} \rightarrow e^{-1}$$



例37. 设 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上连续, 且满足关系式 $f(x) = 1 + \int_1^x \frac{dt}{t^2 + f^4(t)}$,

令 $x_n = f(n), (n = 1, 2, \dots)$, 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛。

提示: 利用“单调有界准则”

例38. 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内二阶可导, $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,

$f(a) = f(b) = 0, \int_a^b f(x)dx = 0$. 证明: $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = f(\xi)$ 。

例39. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导,

且 $f(a) = a, \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$.

证明: $\exists \xi \in (a, b), \exists f'(\xi) = f(\xi) - \xi + 1$ 。



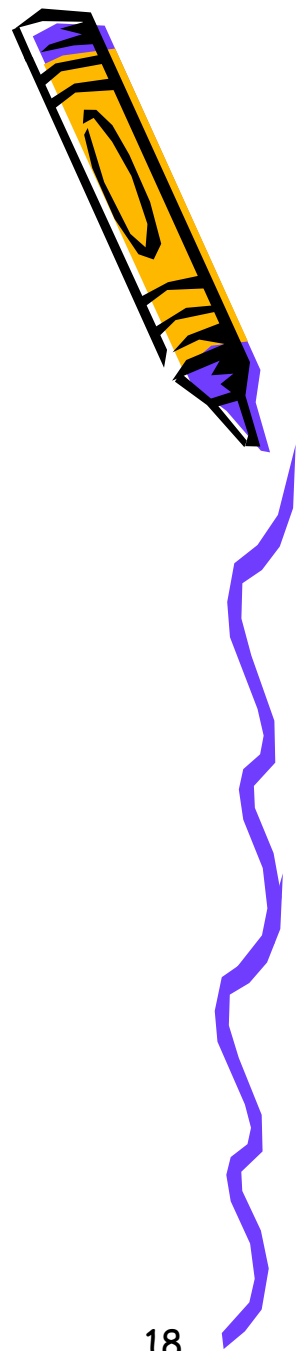
例40. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明: $\left(\int_a^b f(t)dt\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b f^2(t)dt$

b 换 x , 令 $F(x) = \left(\int_a^x f(t)dt\right)^2 - (x-a)\int_a^x f^2(t)dt$

$$F'(x) = -\int_a^x [f(t) - f(x)]^2 dt \leq 0$$

例41. 设 $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} \int_0^x \sin t^2 dt, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$,

求 $f'(x)$, 并讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。



例42. $x \rightarrow 0^+$ 时, 下列无穷小中最高阶是()

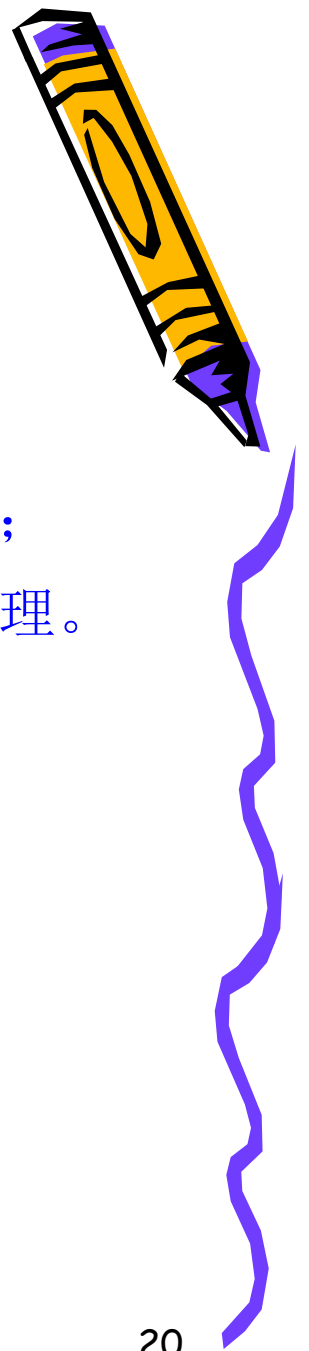
(A). $\int_0^x (e^{t^2} - 1)dt$; (B). $\int_0^x \ln(1 + \sqrt{t^3})dt$;

(C). $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$; (D). $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t} dt$

例43. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上可导, 且 $f'(x) > f(x) > 0$, 则().

(A). $\frac{f(-2)}{f(-1)} > 1$ (B). $\frac{f(0)}{f(-1)} > e$ (C). $\frac{f(1)}{f(-1)} < e^2$ (D). $\frac{f(2)}{f(-1)} < e^3$.





例45. 设函数 $f(x) = \int_1^x e^{t^2} dt$,

证明: (1) $\exists \xi \in (1, 2), \exists f(\xi) = (2 - \xi)e^{\xi^2}; ?$

(2) $\exists \eta \in (1, 2), \exists f(2) = \ln 2 \cdot \eta e^{\eta^2}.$

(1) $F(x) = (2 - x)f(x)$, 在 $[1, 2]$ 上使用 *Rolle* 中值定理;

(2) 对 $f(x)$, $g(x) = \ln x$ 在 $[1, 2]$ 上使用 *Cauchy* 中值定理。

例46. 设函数 $f(x)$ 连续, 下列必为奇函数的是 ()

(A) $\int_a^x f(t^2) dt$

(B) $\int_0^x f^2(t) dt?$

(C) $\int_0^x [f(t) - f(-t)] dt$

(D) $\int_0^x [f(t) + f(-t)] dt.$



例47. 设由半圆 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 与直线 $y = x$ 所围图形为 D . 求

(1) D 绕 x 轴旋转一周的体积。

(2) D 绕 x 轴旋转一周的体积。

(3) D 绕直线 $x = 2$ 旋转一周的体积。

$$(1) V_x = \pi \int_0^1 (\sqrt{2x - x^2})^2 dx - \pi \int_0^1 (x)^2 dx$$

$$\text{或 } V_x = V_{\text{半球}} - V_{\text{圆锥}} = \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi$$

$$(2) V_y = \pi \int_0^1 (y)^2 dy - \pi \int_0^1 (1 - \sqrt{1 - y^2})^2 dy = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}\right)\pi$$

$$\text{或 } V_y = 2\pi \int_0^1 x[f(x) - g(x)]dx = 2\pi \int_0^1 x[\sqrt{2x - x^2} - x]dx$$

$$(3) \text{截面积函数 } A(y) = \pi[2 - x_1(y)]^2 - \pi[2 - x_2(y)]^2 = \pi[2 - (1 - \sqrt{1 - y^2})]^2 - \pi[2 - y]^2$$

$$= \pi(4y + 2\sqrt{1 - y^2} - 2y^2 - 2), \quad \text{则 } V = \pi \int_0^1 A(y)dy = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)\pi$$

$$\text{或 } V_y = 2\pi \int_0^1 (2 - x)[f(x) - g(x)]dx = 2\pi \int_0^1 (2 - x)[\sqrt{2x - x^2} - x]dx = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)\pi$$



微分方程主要内容

■ (一) 一阶方程:

■ 1. 可分离变量方程

$$y' = f(x)g(y)$$

■ 2. 一阶线性方程

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

■ 3. 齐次方程

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

■ 4. 贝努利方程

$$y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha$$

■ 5. 其它方程

一般使用换元法:

设 $z = (\text{方程中与} y \text{有关的一部分表达式})$

微分方程主要内容

- (二) 可降阶的高阶方程:

- 1. $y^{(n)} = f(x)$

- 2. $y'' = f(x, y')$ 缺 y

- 3. $y'' = f(y, y')$ 缺 x

- (三) 高阶 (二阶) 常系数齐次线性方程

$$ay'' + by' + cy = 0$$

- (四) 高阶 (二阶) 常系数非齐次线性方程

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

- (五) 欧拉方程

$$ax^2 y'' + bxy' + cy = f(x)$$

微分方程主要内容

■ (六) 线性方程解的结构 (四个定理)

$$(I) ay'' + by' + cy = 0$$

$$(II) ay'' + by' + cy = f(x)$$

Th1. 设 y_1, y_2 是 (I) 的两个线性无关解, 则 $Y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ 是其通解。

Th2. 设 y^* 是 (II) 的一个特解, 则 $y = Y + y^*$ 是 (II) 的通解。

Th3. 设 y_1^* 和 y_2^* 是 (II) 的两个特解, 则 $y = y_1^* - y_2^*$ 是 (I) 的一个解。

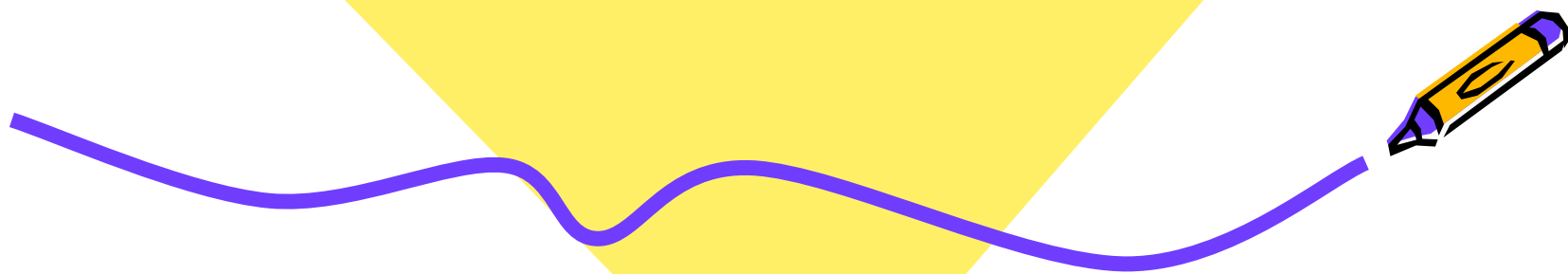
Th4. (叠加原理) $ay'' + by' + cy = f_1(x) + f_2(x)$, 则 $y^* = y_1^* + y_2^*$

微分方程难点

- (1) 方程类型的判定
- (2) 各种方程的解法
- (3) 非典型种类方程的解法
- (4) 线性方程解的结构定理的使用
- (5) 微分方程的建立！
- (6) 与方程有关的综合应用



方程部分难点解析



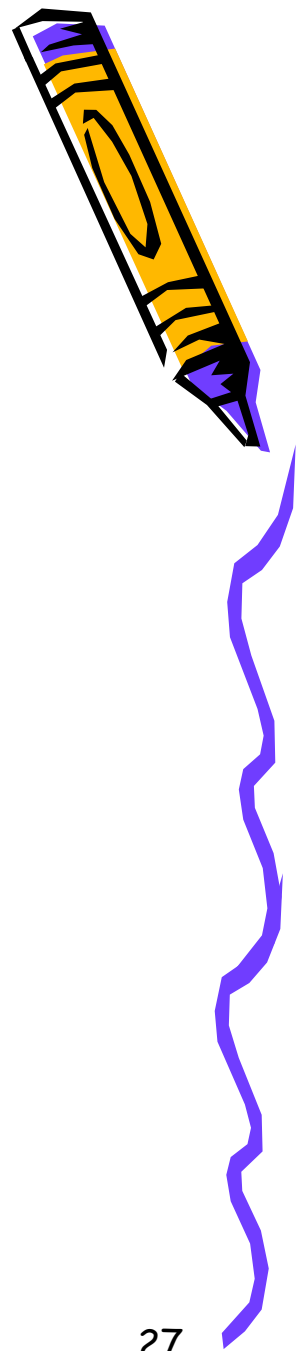
例1. $ydx + (y - x)dy = 0$

$$y' = \frac{y}{x - y} = \frac{\frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}} \quad \text{或} \quad x' = \frac{x - y}{y} = \frac{1}{y}x - 1$$

例2. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2 y^2 - x}$

$$x' + \frac{1}{y}x = yx^2 \quad (x \text{ 的不努力方程})$$

$$z = x^{1-2} = x^{-1} \Rightarrow z' - \frac{1}{y}z = -y \Rightarrow z = Cy - y^2 \Rightarrow x = \frac{1}{Cy - y^2}$$



例3. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x+y)^2}$

令 $z = x + y \Rightarrow z' = 1 + y' \Rightarrow z' = 1 + \frac{1}{z^2}$ (分离变量)

例4. $\frac{dy}{dx} = \frac{x - y^2}{2y(x + y^2)}$

$z = y^2 \Rightarrow z' = 2yy' \Rightarrow z' = \frac{x - z}{x + z} = \frac{1 - \frac{z}{x}}{1 + \frac{z}{x}}$ (齐次方程)

例5. $x + yy' = (\sqrt{x^2 + y^2} - 1) \tan x$



例6. 设 $f(x)$ 为连续偶函数,

且 $f'(x)+2f(x)-3\int_0^x f(t-x)dt=2-3x$, 求 $f(x)$.

$$f''(x)+2f'(x)-3f(x)=-3$$

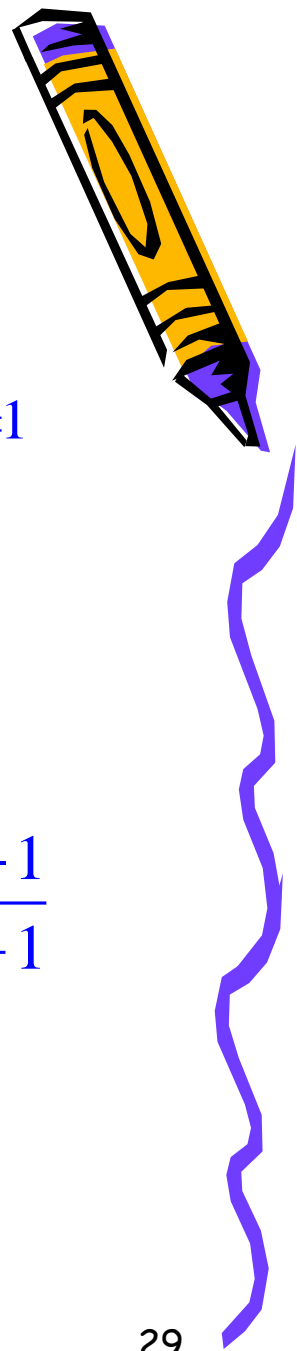
$f'(x)$ 为奇函数, $\Rightarrow f'(0)=0$, 且 $f'(0)+2f(0)=2 \Rightarrow f(0)=1$

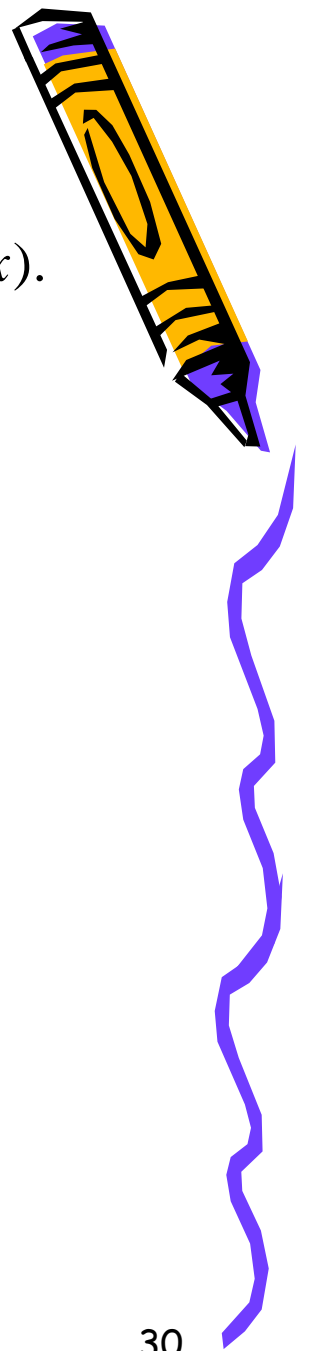
解得: $f(x)=1$

例7. 设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 可导, 且 $f'(x)=g(x)$, $g'(x)=f(x)$

$f(0)=0, g(x) \neq 0$, 令 $\varphi(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, 求 $\varphi(x)$.

$$\varphi(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$





例8. 设 $f(x)$ 为连续函数, $f(1) = 3$,

对于 $\forall x, y > 0$, 满足 $\int_1^{xy} f(t)dt = x \int_1^y f(t)dt + y \int_1^x f(t)dt$, 求 $f(x)$.

$$\text{对}y\text{求导: } xf(xy) = xf(y) + \int_0^x f(t)dt$$

$$\text{令}y=1: \quad xf(x) = xf(1) + \int_0^x f(t)dt$$

$$\text{再对}x\text{求导: } f'(x) = \frac{3}{x}, \quad \text{解得 } f(x) = 3\ln x + 3$$

例9. 设 $f(x)$ 为连续函数, $f'(0) = 2$

对于 $\forall x, y \in R$, 满足 $f(x+y) = e^y f(x) + e^x f(y)$, 求 $f(x)$.

$$f(x) = 2xe^x$$



例10. 已知 $f'(0) = 1$, 且 $f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)}$. 求 $f(x)$.

利用导数定义得: $f'(x) = 1 + f^2(x)$

$$\text{即 } \frac{dy}{dx} = 1 + y^2 \quad (\text{分离变量})$$

$$\Rightarrow y = \tan x$$

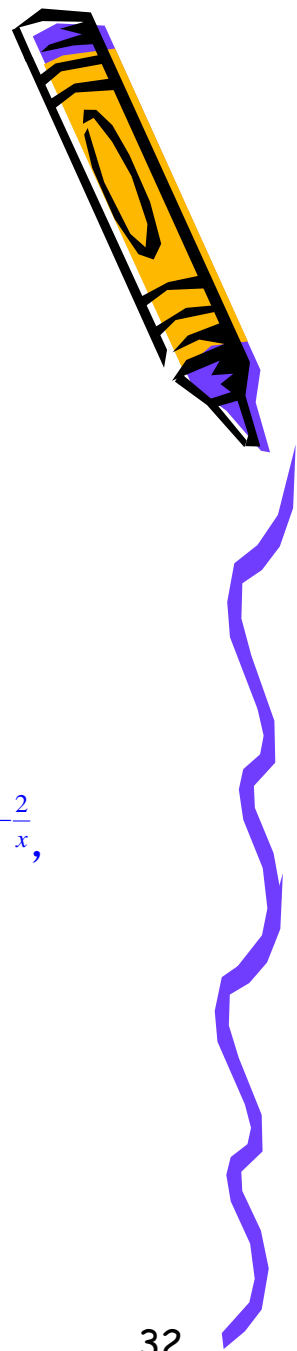
例11. 设 $f(x) > 0$, 连续, 且满足 $f(x) = e^{x^2} + \int_0^x e^{x^2-t^2} f(t) dt$.
求 $f(x)$.

$$\text{先变形: } e^{-x^2} f(x) = 1 + \int_0^x e^{-t^2} f(t) dt.$$



例12. 解方程 $yy'' + yy' + y'^2 + x + 1 = 0$

$$x^2 + y^2 = C_1 e^{-x} + C_2$$



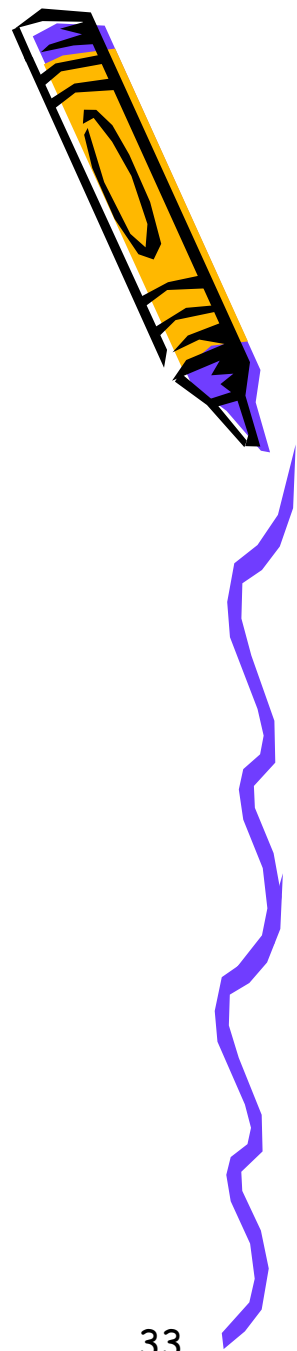
例13. 解方程 $x^3 y'' - 2xy' + 2y = 0$

利用解的结构理论。 $y_1 = x$,

令 $y_2 = xu(x)$, 求得 $u(x)$ 可以取 $u = \frac{1}{2}e^{-\frac{2}{x}}$,

则 $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 x + \frac{1}{2} C_2 x e^{-\frac{2}{x}}$.





例14. 设 $F(x) = f(x)g(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, 且 $f(x), g(x)$ 满足:

$$f'(x) = g(x), g'(x) = f(x), f(0) = 0, f(x) + g(x) = 2e^x$$

(1) 求 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程;

(2) 求 $F(x)$ 的表达式.

$$\begin{aligned}\text{解法: } F'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ &= g^2(x) + f^2(x) \\ &= (g(x) + f(x))^2 - 2g(x)f(x) \\ &= 4e^{2x} - 2F(x)\end{aligned}$$

$$\text{即: } F'(x) + 2F(x) = 4e^{2x}$$

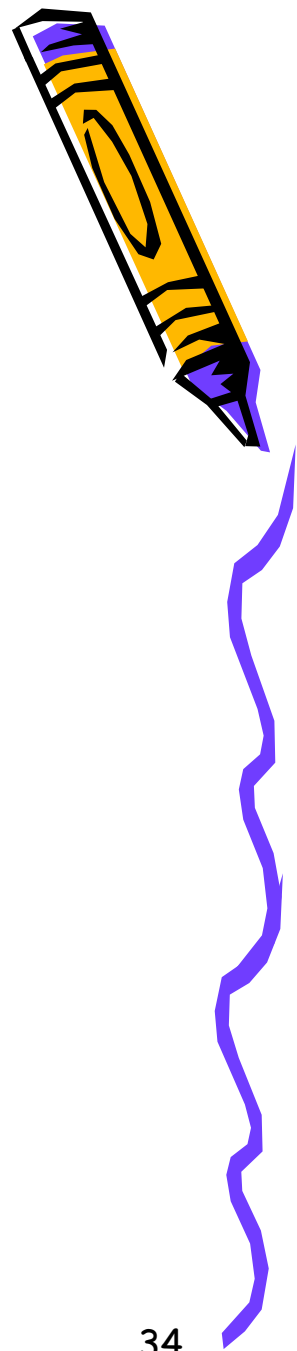
$$\text{解得: } F(x) = e^{2x} - e^{-2x}.$$



例15. 已知 $f'(x) = f(1-x)$. 求 $f(x)$.

求导得: $f''(x) = -f'(1-x)$
 $= -f(1-(1-x)) = -f(x)$

即 $y'' + y = 0$



例 16 设过点 $M_0(2,0)$ 的曲线 L 的极坐标方程为
 $r = r(\theta)$, $M(r, \theta)$ 为 L 上任一点, 若极径 OM_0 ,
 OM 与曲线 L 围成的曲边扇形的面积等于 L 上
两点间弧长的一半, 求 L 的方程.

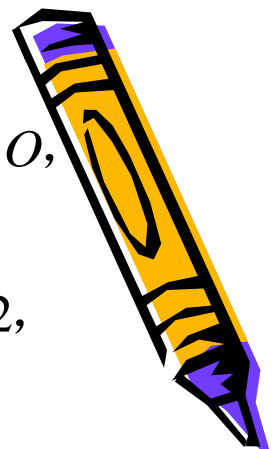
解
$$\frac{1}{2} \int_0^\theta r^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\theta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta$$

$$\Rightarrow r^2(\theta) = \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}$$

$$\Rightarrow r' = \pm \sqrt{r^4 - r^2} = \pm r \sqrt{r^2 - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{r\sqrt{r^2 - 1}} = \pm d\theta \Rightarrow -\arcsin \frac{1}{r} = \pm \theta + C$$

$$r(0) = 2 \Rightarrow C = \frac{\pi}{6} \therefore L: r \sin\left(\frac{\pi}{6} \pm \theta\right) = 1$$



例17. 设函数 $y = f(x)$ 可导, 且 $f'(x) > 0 (x \geq 0)$, 曲线 $y = f(x)$ 过原点 O , 曲线上任一点 M 的切线与 x 轴交于 T , 过点 M 作 MP 垂直于 x 轴于点 P , 且曲线 $y = f(x)$, 直线 MP , x 轴围成图形的面积与 $\triangle MTP$ 面积比恒为 $3:2$, 求曲线的方程。

设点 $M(x, f(x))$,

由题意得:
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\int_0^x f(t) dt}{\frac{1}{2} \cdot \frac{f(x)}{f'(x)} \cdot f(x)} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow f(x)f''(x) = \frac{2}{3} f'^2(x), \text{ 即 } yy'' = \frac{2}{3} y'^2$$

解得 $y = (C_1x + C_2)^3$, 过原点, 则 $y = Cx^3$

其中, 常数 $C > 0$





例18. 若函数 $f(x)$ 满足 $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0$,

且 $f(0) = 0, f'(0) = 1$,

求 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

$= 1$

例19. 若函数 $f(x)$ 满足 $f''(x) + af'(x) + f(x) = 0$ ($a > 0$),

且 $f(0) = m, f'(0) = n$,

求 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

$= am + n$



20. 给定微分方程 $y'' + (\sin y - x)(y')^3 = 0$,

(1) 证明 $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{d^2 x}{dy^2} / \left(\frac{dx}{dy} \right)^3$,

并将方程化为以 x 为未知函数, 以 y 为自变量的方程形式;

(2) 求该方程的通解。

(1) 由 $y'' = -x'' \cdot (y')^3$, 代入 $\Rightarrow x'' + x = \sin y$

(2) 通解 $x = C_1 \cos y + C_2 \sin y - \frac{1}{2} y \cos y$



21. 已知某二阶微分方程的通解为 $y = \frac{(C_1 + C_2 x)e^{-x}}{x}$, 求该微分方程。

$$xy'' + 2(x+1)y' + (2+x)y = 0$$

法一, 法二

22. 已知微分方程: $y''' + 2y'' = x + \cos^2 x$,
其特解 y^* 可设为 _____.

$$y^* = (ax + b)x^2 + A \cos 2x + B \sin 2x$$



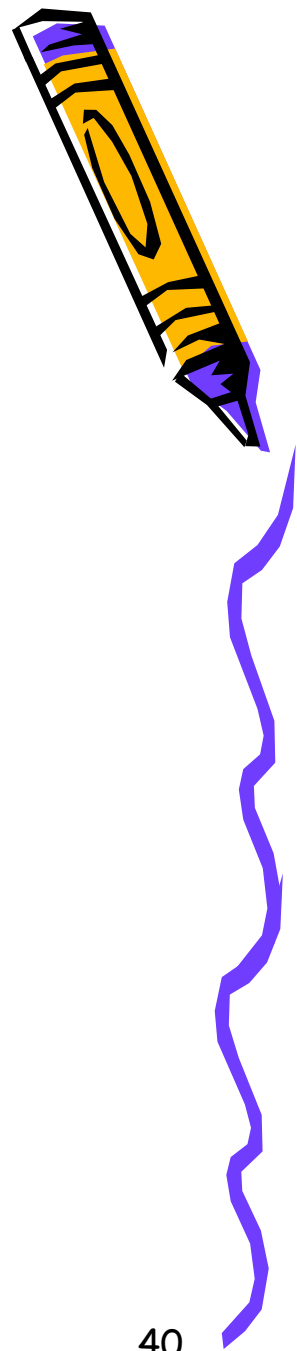
23. 若 $y = f(x)$ 为方程 $y'' - y' = e^{\sin x}$ 的解, $f'(x_0) = 0$,
则 $f(x)$ 在 x_0 处 ()

(A) 某邻域内单调

(B) 取得拐点

(C) 取极小值

(D) 取极大值





谢谢各位同学！

2019.12.30

东南大学数学学院·程全新