东南大学 2011-2012 学年第二学期《高等数学(上)》期中考试试卷

课程名称 高等数学AB（上)期中　考试学期 11-12-2　得分 ________

适用专业 选学高数AB的各类专业　考试形式 闭卷　考试时间长度 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六
得分						
评阅人						

一、 填空题（本题共8小题，每小题4分，共32分）

1. 设当 $x\to 0$ 时，$\sin(2x)-2\sin x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 $n=$ ______；

2. 函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+1}{x^{2n}+1}\,(n\in N_+)$ 的间断点的坐标是 $x=$ ______，是第 ____类间断点；

3.

设 $f(x)=\begin{cases} ae^x, & x<0 \\ b+\ln(1+x), & x\geq 0 \end{cases}$，若 $f(x)$在 $x=0$处可导,则常数 $a=$ ___，常数 $b=$ ___；

4. 设函数 f 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2\sin x}=-1$，则 $f'(1)=$ ________；

5. 曲线 $y=\ln(1+e^{\cos x})$在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程为________________；

6. 设 $f(x)=xe^{2x}$，则 $f^{(10)}(0)=$____________；

7. 设 $y=f(\ln x)e^{f(x)},(x>0)$，其中 f 可微，则微分 $dy=$ ________________；

8. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1-5\tan^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=$ ________________.

二、 计算下列各题（本题共5小题，每小题8分，满分40分）

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)$.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{1-\cos x+\sin^2 x}$.

3. 求函数 $y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$ 的导数 $\dfrac{dy}{dx}$.

4. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $2^x-\csc y+y^3=0$ 所确定的隐函数，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

5.

设 $\begin{cases} x=t-\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$,求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$及 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}|_{t=-1}$.

三、（本题满分7分）证明多项式 $f(x)=x^3-3x+a$ 在区间 $[0,1]$ 上不可能有两个零点，为使 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上存在零点，a 应当满足怎样的条件？

四、（本题满分7分）设 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_{n+1}=\frac{1+x_n^2}{2},(n=1,2,\cdots)$，利用单调有界收敛准则证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

五、（本题满分7分）试证：当 $x\geq 0$ 时，$\ln(1+x)\leq\frac{x}{\sqrt{1+x}}$.

六、（本题满分7分）设函数 f 在 $[a,b]$ 上存在三阶导数，且满足 $f(a)=f(b)=f'(a)=f'(b)=f''(a)=f''(b)=0$，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=f'''(\xi)$.

10-11-2 高等数学（A，B）期中试卷参考答案

一. 填空题（每小题 4 分，本题满分 32 分）

1. 3；2. $1, 1$；3. $1, 1$（或跳跃）；4. -2；5. $y=\ln 2-\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$；6. $5\cdot 2^{10}=5120$；

7. $\left(\dfrac{f'(\ln x)}{x}+f(\ln x)f'(x)\right)e^{f(x)}dx$；8. e^{-5}.

二. 计算题（每小题 8 分，本题满分 40 分）

1. 解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(e^{\frac{\ln n}{n}}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}=0$（2+3+3 分）

2. 解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{1-\cos x+\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^2}{1-\cos x+\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{\dfrac{1-\cos x}{x^2}+\dfrac{\sin^2 x}{x^2}}=-\dfrac{2}{3}$

（3 分）（2 分）（3 分）

3. 解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^x+\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}}=\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$（8 分）

4. 解 $2^x\ln 2+y'\cot y\csc y+3y^2y'=0$，$y'=-\dfrac{2^x\ln 2}{\cot y\csc y+3y^2}$（8 分）

5. 解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{1}{1+t^2}}{1-\dfrac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{1}{(1-t)^2}$，（3 分）$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{2(1+t^2)}{(1-t)^5}$，（4 分）$\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=-1}=\dfrac{1}{8}$（1 分）

三（7 分）. 解 $f'(x)=3(x^2-1)<0$，$x\in(0,1)$，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上严格单减，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不可能有两个零点（4 分），$f(0)=a$，$f(1)=a-2$，故必须满足 $a(a-2)\le 0$，即 $0\le a\le 2$（3 分）（注：若缺了等号，扣1分）

四.（7 分）解 已知 $x_1=\dfrac{1}{2}<1$，设 $x_k<1$，则 $x_{k+1}=\dfrac{1+x_k^2}{2}<1$，由归纳法知

$x_n<1, n=1,2,\cdots$，且显见 $x_n>0$，于是 $x_{n+1}=\dfrac{1+x_n^2}{2}\ge\sqrt{x_n^2}=x_n$，$\{x_n\}$ 单增且有上界，

故$\{x_n\}$收敛，（5 分）令$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$，得$l=\dfrac{1+l^2}{2}$，解得$l=1$，即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$（2 分）

五(7 分)证设$f(x)=\sqrt{1+x}\ln(1+x)-x, x\ge 0$（1 分）

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}\left(\ln(1+x)+\dfrac{2}{1+x}-2\sqrt{1+x}\right)$（2 分）

设$g(x)=\ln(1+x)+\dfrac{2}{1+x}-2\sqrt{1+x}$，$g'(x)=\dfrac{x-1-(1+x)^{3/2}}{(1+x)^2}<0$，$x\ge 0$，故$g(x)$单减，而$g(0)=0$，故当$x>0$时，$g(x)<0$（2 分），即$f'(x)<0$，从而$f(x)$单减，故当$x\ge 0$时，$f(x)\le f(0)=0$，即$\ln(1+x)\le \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}, x\ge 0$（2 分）

六(7 分) 证设$g(x)=\mathrm{e}^{-x}(f(x)+f'(x)+f''(x))$，（4 分）

$g(x)$在$[a,b]$上连续且可导，$g(a)=g(b)=0$，由 Rolle 定理知存在$\xi\in(a,b)$，使得$g'(\xi)=0$，即$\mathrm{e}^{-\xi}(f'''(\xi)-f(\xi))=0$，而$\mathrm{e}^{-\xi}\ne 0$，所以$f'''(\xi)=f(\xi)$（3 分）