浅谈变换方法在求解数学物理方程中的重要作用

06219109　孙寒石　东南大学　电子科学与工程学院

2021 年 6 月 6 日

摘要

在求解数学物理方程的时候，我们经常为了简化计算，需要通过一些变换将原来的方程化简为简单形式的方程，然后再去求解这些简单容易求解的方程，最后再还原到原方程的解。本文就 Fourier 变换、Laplace 变换、特征线法等变换方法，探究变换方法在求解数学物理方程中的重要意义和作用。

关键词：变换方法　数学物理方程　Fourier 变换　Laplace 变换　特征线法

目录

1 Introduction

本学期学习了对数学物理方程进行求解，在求解的过程中，我们经常为了简化计算或者运用一些微分方程中的定理，就需要通过一些变换将原来的方程化简为特定形式的方程，然后再去求解容易求解的方程，最后运用相应的方法还原到原方程的解。

本文就 Fourier 变换、Laplace 变换、特征线法、欧拉方程和极坐标变换，囊括了积分变换和不是积分变换的变换方法，在文中结合了一些具体的例题，深刻探究变换方法在求解数学物理方程中的重要意义和作用。

2 Fourier transform

2.1 定义描述

傅立叶变换，表示能将满足一定条件的某个函数表示成三角函数（正弦和/或余弦函数）或者它们的积分的线性组合。在不同的研究领域，傅立叶变换具有多种不同的变体形式，如连续傅立叶变换和离散傅立叶变换。最初傅立叶分析是作为热过程的解析分析的工具被提出的 [1]。我们可以它来求解一些无界、半无界的方程初值问题。

定理 1 (Fourier transform) *$f(t)$ 是 t 的周期函数，如果 t 满足 Dirichlet 条件：在一个以 $2T$ 为周期内 $f(x)$ 连续或只有有限个第一类间断点，附 $f(x)$ 单调或可划分成有限个单调区间，则 $f(x)$ 以 $2T$ 为周期的傅里叶级数收敛，和函数 $S(x)$ 也是以 $2T$ 为周期的周期函数，且在这些间断点上，函数是有限值；在一个周期内具有有限个极值点；绝对可积。则有下式成立。称为积分运算 $f(t)$ 的傅立叶变换*

$$F(\omega) = \mathscr{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \tag{1}$$

定理 2 (Inverse Fourier transform) *为了求解微分方程，在对方程两边进行 Fourier 变换进行求解后，需要进行逆变换还原方程的解，所以 Fourier 逆变换也是十分重要的，根据定义容易有下式*

$$f(t) = \mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{2}$$

2.2 利用 Fourier 变换求解一维波动方程的初值问题

这里我们先举个例子来观察一下 Fourier 变换的作用：

例 1. 一维波动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

解 我们对初值问题关于变量 x 进行 Fourier 变换，记 $\hat{u}(\omega,t) = \mathscr{F}[u], \hat{\varphi}(\omega) = \mathscr{F}[\varphi], \hat{\psi}(\omega) = \mathscr{F}[\psi]$，可以得到

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} + a^2\omega^2 \hat{u}_{xx} = 0, & t > 0 \\ \hat{u}(x,0) = \hat{\varphi}(x), \hat{u}_t(x,0) = \hat{\psi}(x) \end{cases}$$

显然，这是一个 ODE 问题，我们容易得到

$$\hat{u}(\omega,t) = \cos(at\omega)\hat{\varphi}(\omega) + \frac{\sin(at\omega)}{a\omega}\hat{\psi}(\omega)$$

再进行 Fourier 逆变换，得到下式[1]

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(y)dy$$

2.3 作用分析

对于一个偏微分方程来说，在计算上假设我们要对空间变量（例如 x）做傅里叶变换，那我们可以将关于空间的偏微分算符转换成简单的系数乘积 $\frac{\partial}{\partial x}\to i\omega$ ，而关于时间的偏微分化为常微分 $\frac{\partial}{\partial t}\to\frac{d}{dt}$ 。同理，对时间变量也是一样的。

我们可以从这里看到傅里叶变换的优势是如何体现出来的：**将关于空间的多次偏微分直接提了出来，而关于时间的偏微分化为常微分**。最终，经过以上处理后，已经把一个 PDE 问题转化为 ODE 问题。

2.4 Fourier 变换的局限性

在以上处理中，我们应该注意到的是，x 的范围为 $-\infty<x<\infty$ 。这个要求是很苛刻的，这里是傅里叶变换的局限性之一。

最近专业课学到了信号与系统，也有讲到傅里叶变换在信号与系统中的运用。在信号与系统中，傅里叶变换的分析思路是将时域特征和频域特征完全分离开来处理的。做完变换之后，频域内不包含任何时域信息。同样的，时域中也没有关于频率的信息。

对于频谱当中的某一特定频率信号。我们不知道这一频率究竟是何时产生的。我们对频域的良好定位是以时域的全部信号分析为代价的。这就是傅里叶变换最大的局限，即无法同时在时域和频域都具有良好的定位的能力，进而我们说这一方法无法处理非平稳信号 [2]。

3 Laplace transform

3.1 定义描述

拉普拉斯变换是求解数学物理方程中常用的另外一种积分变换，又名拉氏变换。Laplace 变换是一个线性变换，可将一个有参数实数 $t(t\geq 0)$ 的函数转换为一个参数为复数 s 的函数。

Laplace 变换在许多工程技术和科学研究领域中有着广泛的应用，特别是在力学系统、电学系统、自动控制系统、可靠性系统以及随机服务系统等系统科学中都起着重要作用 [3]。

定理 3 (Laplace transform) *记函数集 $E=\{f\in PC[0,\infty)|\exists 常数C>0,a\geq 0使得|f(t)|\leq Ce^{at}\}$，即函数集中的函数当 $t\to\infty$ 时，其趋于无穷大的速度不超过某一指数函数。设 $f\in E$，p 为复数，$Rep>a$，称下式为 f 的 Laplace 变换*

$$\mathscr{L}[f](p)=\widetilde{f}(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt \tag{3}$$

定理 4 (Inverse Laplace transform) *拉普拉斯变换是对于 $x\geq 0$ 函数值不为零的连续函数通过关系式变换为复变量 p 的函数，下面是它的逆变换*

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[\widetilde{f}(p)] \tag{4}$$

[1]这个求解公式也被称为达朗贝尔公式。

3.2 利用 Laplace 变换求解半无界热方程初边值问题

这里我们先举个例子来观察一下 Laplace 变换的作用：

例 2. 半无界热方程初边值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < \infty, t > 0 \\ u(0,t) = f(t), u(\infty,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = 0 & 0 \leq x < \infty \end{cases}$$

解 我们可以对方程及其边界条件两边对 t 做 Laplace 变换，得到

$$p\widetilde{u}(x,p) = a^2 \widetilde{u}_{xx}, \qquad \widetilde{u}(0,p) = \widetilde{f}(p), \widetilde{u}(\infty,p) = 0$$

求解此 ODE 问题，我们可以得到

$$\widetilde{u}(x,p) = \widetilde{f}(p) e^{-\frac{x}{a}\sqrt{p}}$$

再进行 Laplace 逆变换，结合卷积性质，可以得到下式

$$u(x,t) = f(t) * \mathscr{L}^{-1}[e^{-\frac{x}{a}\sqrt{p}}]$$

我们知道

$$\mathscr{L}^{-1}[e^{-\frac{x}{a}\sqrt{p}}] = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$$

进一步，最后我们可以解得

$$u(x,t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} * f(t) = \int_0^t \frac{x}{2a\sqrt{\pi}(t-s)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-s)}} f(s) ds$$

3.3 作用分析

可以看到，Laplace 在解微分方程上是有一定优势的，通过 Laplace 变换的性质，辅以卷积可以比经典方法更快地求解出问题的解。在信号与系统的层面上来讲，Laplace 变换跟 Fourier 变换相比，对信号的适用范围广，不用引入奇异函数可以自动引入初始条件，求系统的全响应变微分方程为代数方程，计算过程也简化了。也可以说，傅里叶变换是拉普拉斯变换的特例；拉氏变换是傅氏变换的推广。在运用 Laplace 变换的时候，和运用 Fourier 变换类似的，要注意变量的范围。

3.4 Laplace 变换的局限性

显然，Laplace 变换的物理概念不如 Fourier 变换那样清楚。

4 Method of characteristics

4.1 定义描述

定理 5 (Method of characteristics) 数学中的特征线法（特征变换）是求解偏微分方程的一种方法，适用于准线性偏微分方程的求解。只要初始值不是沿着特征线给定，即可通过特征线法获得偏微分方程的精确解。其基本思想是通过把双曲线型的准线性偏微分方程转化为两组常微分方程，再对常微分方程进行求解。两组常微分方程中的一组用于定义特征线，另一组用以描述解沿给定特征线变化。特征线法主要适用于一阶 PDE，以及二阶的双曲型 PDE。在推导达朗贝尔公式时，我们就可以用特征线法。下面通过一维波动方程的初值问题来说明这个方法：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

我们利用特征变换

$$\xi = x - at, \qquad \eta = x + at$$

代入，容易得到解的形式

$$u(x,t) = f(x - at) + g(x + at)$$

之后我们将其代入原来的条件，就可以得到达朗贝尔公式

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(y)dy$$

特征线法的基本思想是：通过自变量变换，将方程化简求解。将 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 得出 $x^2 - a^2 t^2 = 0$，令

$$\xi = x - at \qquad \eta = x + at$$

称为方程的特征变换，而直线族 $x \pm at = C$ 称为特征线，$u(x,t) = f(\xi) + g(\eta)$ 这样的求解方法叫特征线法。

一般情况：

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1 u_x + b_2 u_y + cu = f(x,y)$$

其中 $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ ，我们就可以得到：

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dydx + a_{22}dx^2 = 0$$

从而进一步解出它的特征线。

4.2 利用特征线法求解双曲型方程的定解问题

例 3. 双曲型方程的定解问题

$$\begin{cases} u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0, & x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ u(x,0) = 3x^2, \quad u_y(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

解 首先，写出该定解问题对应的特征方程

$$dy^2 - 2dxdy - 3dx^2 = 0$$

解得特征线为 $3x - y = C_1, \quad x + y = C_2$，做变换

$$\xi = 3x - y, \quad \eta = x + y$$

则原方程就被化为 $u_{\xi\eta}=0$，其通解为 $u=f(\xi)+g(\eta)$，即

$$u(x,y)=f(3x-y)+g(x+y)$$

进一步，我们利用定解条件，可以得到

$$f(3x)+g(x)=3x^2, \qquad -f'(3x)+g'(x)=0$$

求得

$$f(x)=\frac{1}{4}x^2-C, \qquad g(x)=\frac{3}{4}x^2+C$$

最后将上式代入表达式中，可以得到

$$u(x,y)=\frac{1}{4}(3x-y)^2+\frac{3}{4}(x+y)^2=3x^2+y^2$$

4.3 利用特征线法求解半无界波动方程初边值问题

例 4. 半无界波动方程初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & x>0,t>0 \\ u(0,t)=h(t), \quad h(0)=0 & x\geq 0 \\ u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=0 & x\geq 0 \end{cases}$$

解 首先，写出该定解问题对应的特征方程

$$dx^2-a^2dt^2=0$$

则原方程就被化为

$$u(x,y)=f(x-at)+g(x+at)$$

由边值条件和初值条件，我们可以得到

$$\begin{cases} f(-at)+g(at)=h(t), & t\geq 0 \\ f(x)+g(x)=0, & x\geq 0 \\ -af'(x)+ag'(x)=0, & x\geq 0 \end{cases}$$

进一步求得

$$f(x)=h(-\frac{x}{a})+C, \quad x\leq 0$$

于是，最后问题的解为：

$$u(x,t)=\begin{cases} 0, & x\geq at \\ h(-\frac{x}{a}), & 0<x\leq at \end{cases}$$

4.4 作用分析

从上面的例子我们可以清楚地看出，在求解此类双曲型方程时，利用特征变换可以很好地化简方程。尤其是在一维波动方程中，它是具有很鲜明的物理意义的。

5 Cauchy-Euler equation

5.1 定义描述

定理 6 (Cauchy-Euler equation) 我们将形如：

$$x^n y^{(n)} + P_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1} x y^{'} + P_n y = f(x)$$

(其中 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 为常数)，被称为欧拉方程。为了解这个方程，此处令 $x = e^t$，再将自变量 x 换成 t，此时有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt}$$

如果此时用记号 D 表示对 t 求导的运算，即 D 表示 $\frac{d}{dt}$。那么上面的式子就可以变化为

$$xy' = Dy, x^2 y'' = D(D-1)y, x^3 y''' = D(D-1)(D-2)y$$

利用微积分的知识，我们可以得到

$$x^k y^{(k)} = D(D-1)(D-2)\cdots(D-k+1)y$$

我们将此式代入原方程，就可以得到一个以 t 为自变量的常系数线性微分方程，最终再用 $t = lnx$ 反代就可得到方程的解。很显然，这种变换方法大大简化了求解方程的运算，为我们提供了一个全新的方法求解此类特殊的变系数线性微分方程。

5.2 求解欧拉方程

例 5. 欧拉方程问题 求欧拉方程 $x^3 y''' + x^2 y'' - 4xy' = 3x^2$ 的通解。

解 作变换 $x = e^t$，那么原式就变为

$$D(D-1)(D-2)y + D(D-1)y + 4Dy = 3e^{2t}$$

将此方程化简则有

$$D^3 y - 2D^2 y - 3Dy = 3e^{2t}$$

此时方程对应的齐次方程为

$$\frac{d^3 y}{dt^3} - 2\frac{d^2 y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} = 0$$

其特征方程为

$$r^3 - 2r^2 - 3r = 0$$

我们容易得到它有三个解

$$r_1 = 0, r_2 = -1, r_3 = 3$$

那么齐次方程的通解为

$$y = C_1 + C_2 e^{-t} + C_3 e^{3t}$$

进一步得到答案：

$$y = C_1 + C_2 x^{-1} + C_3 x^3 - \frac{1}{2}x^2$$

5.3 作用分析

利用对自变量的变换，解决了一类特殊的变系数微分方程，同时为我们提供了解决其他数理方程的一个工具。只要将某数理方程化归到这一类特殊的变系数微分方程，那么问题就可以很好地解决了。

6 Polar coordinate system

6.1 定义描述

定理 7 (Polar coordinate system) 要将直角坐标转换为极坐标，我们将使用其他两个熟悉的关系。从直角坐标转换为极坐标需要使用以下式子所示的关系。

$$\begin{gathered}\cos\theta = \tfrac{x}{r} \ \ or\ x = r\cos\theta \\ \sin\theta = \tfrac{y}{r} \ \ or\ y = r\sin\theta \\ r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan\theta = \tfrac{y}{x}\end{gathered} \tag{5}$$

利用直角坐标转换为极坐标的方法，许多微分方程都可以得到进一步简化，下面我们来一个例子。

6.2 求解圆环内泊松方程边值问题

例 6. 圆环内泊松方程边值问题

$$\begin{cases}\Delta u = 12\left(x^2 - y^2\right), & 0 < a^2 < x^2 + y^2 < b^2 < \infty \\ u(x,y) = 1, & x^2 + y^2 = a^2 \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x,y) = 0, & x^2 + y^2 = b^2\end{cases}$$

其中 n 为边界 $x^2 + y^2 = b^2$ 的单位外法向量.

解 先求解关于极坐标变量 θ 的周期特征值问题，再利用特征函数展开法求解圆环内的泊松方程边值问题 [4]。先将问题写成**极坐标形式**

$$\begin{cases}u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 12r^2\cos 2\theta, & a < r < b, 0 \le \theta < 2\pi, \\ u(a,\theta) = 1, & 0 \le \theta < 2\pi \\ u_r(b,\theta) = 0, & 0 \le \theta < 2\pi\end{cases}$$

考虑关于变量 θ 的特征值问题

$$\begin{cases}T''(\theta) + \lambda T(\theta) = 0 \\ T(\theta) = T(\theta + 2\pi)\end{cases}$$

解出该特征值问题

$$\text{e.v. } \lambda_0 = 0, \lambda_n = n^2, \quad \text{e.f. } T_0 = 1, T_n = A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

用此特征函数系将 $u(r,\theta)$ 展开，即

$$u(r,\theta) = A_0(r) + \sum_1^\infty A_n(r)\cos n\theta + B_n(r)\sin n\theta$$

代入方程得

$$
\begin{gathered}
r^2\left[A_0''(r)+\sum_1^\infty\left(A_n''(r)\cos n\theta+B_n''(r)\sin n\theta\right)\right]+r\left[A_0'(r)+\sum_1^\infty\left(A_n'(r)\cos n\theta+B_n'(r)\sin n\theta\right)\right] \\
-\sum_1^\infty n^2\left(A_n(r)\cos n\theta+B_n(r)\sin n\theta\right)=12r^4\cos 2\theta
\end{gathered}
$$

代入边界条件得

$$
\begin{gathered}
A_0(a)+\sum_1^\infty A_n(a)\cos n\theta+B_n(a)\sin n\theta=1 \\
A_0'(b)+\sum_1^\infty A_n'(b)\cos n\theta+B_n'(b)\sin n\theta=0
\end{gathered}
$$

比较特征函数的系数得

$$
\begin{cases}
r^2A_0''(r)+rA_0'(r)=0, & a<r<b \\
A_0(a)=1, \quad A_0'(b)=0
\end{cases}
$$

解得 $A_0(r)=1$.

$$
\begin{cases}
r^2A_2''(r)+rA_2'(r)-4A_2(r)=12r^4, & a<r<b \\
A_2(a)=0, \quad A_2'(b)=0
\end{cases}
$$

此为欧拉方程，解得

$$
A_2(r)=-\frac{a^6+2b^6}{a^4+b^4}r^2-\frac{a^4b^4\left(a^2-2b^2\right)}{a^4+b^4}r^{-2}+r^4.
$$

同样方法可解得其余系数

$$
A_n(r)=0(n\neq 0,2), \quad B_n(r)=0
$$

综上所述

$$
u(r,\theta)=1-\left[\frac{a^6+2b^6}{a^4+b^4}r^2+\frac{a^4b^4\left(a^2-2b^2\right)}{a^4+b^4}r^{-2}-r^4\right]\cos 2\theta.
$$

6.3 作用分析

从上个例子我们可以看出，在没有进行极坐标变换的时候，我们是无法直接使用特征函数展开法。但是在进行了极坐标变换后，我们可以很容易地使用特征函数展开法，由此看出，本题在利用极坐标变换法之后，大大简化了方程的形式。

7 Conclusion

经过了一个学期的学习，对如何求解数学物理方程有了更加深刻的理解。在求解过程中，就像本文论述的那样，有很多种变换方法，例如 Fourier 变换、Laplace 变换等，这些变换无疑都对求解数理方程有着巨大的作用。有的是简化计算，有的则是提出新的思考问题的方式。同时，这些方法对我们思维境界的提高也是大有裨益的。

参考文献

[1] Lin C C. L. A. SEGEL, Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural[J]. Sciences, 1974.

[2] The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing. 1997-09-09

[3] 张元林. 工程数学积分变换 (第五版) 习题全解指南 [M]. 高等教育出版社, 2012.

[4] 杨明，石佩虎. 数学物理方法讲义 [M]. 东南大学出版社，2018