

# 东南大学考试卷(A 卷)

课程名称	线性代数		考试学期	09-10-3		得分	
适用专业	非电类专业		考试形式	闭 卷		考试时间长度	120 分钟
题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

一. (30%) 填空题 ( $E$  表示  $n$  阶单位矩阵,  $O$  表示  $n$  阶零矩阵):

1. 若对任意 3 维列向量  $\eta = (x, y, z)^T$ , 矩阵  $A$  满足  $A\eta = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-3z \end{pmatrix}$ , 则  $A =$ \_\_\_\_\_。

2. 假设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & x \\ x & 4 \end{pmatrix}$ , 且  $AB$  是对称矩阵, 则  $x$  满足条件\_\_\_\_\_。

3. 若  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ , 则  $A$  的伴随矩阵  $A^*$  的逆矩阵  $(A^*)^{-1} =$ \_\_\_\_\_。

4. 如果向量组  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ k \end{pmatrix}$  线性相关, 则参数  $k =$ \_\_\_\_\_。

5. 假设  $n$  阶方阵  $A$  满足  $A^2 + 3A - 2E = O$ , 则  $A^{-1} =$ \_\_\_\_\_。

6. 向量空间  $V = \{(x, y, z) | x - y - z = 0\}$  的一组基是\_\_\_\_\_。

7. 若  $3 \times 3$  矩阵  $A$  的特征值是  $-1, 1, 2$ , 则行列式  $|A^2 - A - 2E| =$ \_\_\_\_\_。

8. 如果矩阵  $A = \begin{pmatrix} a & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$  的特征值都大于零, 则参数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_。

9. 若矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  与  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & k \end{pmatrix}$  合同, 则参数  $k$  的取值范围是\_\_\_\_\_。

10. 已知  $2 \times 2$  矩阵  $A, P$  满足  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 。若  $P = (\alpha, \beta), Q = (\alpha - \beta, \alpha)$ , 则

$$Q^{-1}AQ = \text{_____}。$$

二. (12%) 已知  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ , 求矩阵  $X$  使得  $XA - B = 2X$ 。

三. (12%) 根据参数  $a$  的值, 讨论矩阵  $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 1 & 2a & -3 \\ 1 & -2 & 3a \end{pmatrix}$  的秩。

四. (14%)若方程组(I):  $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 = 4 \end{cases}$  的每个解都满足方程(II):  $x_1 + 2x_2 = b$ 。

求参数  $a, b$  的值, 并求线性方程组(I)的通解。

五. (14%)设在正交变换  $x = Qy$  下, 二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + ax_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3$  变成标准形  $g(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 + by_2^2 + 2y_3^2$ , 求参数  $a, b$  的值, 并求一个正交矩阵  $Q$ 。

六. (9%) 假设  $A$  是  $3 \times 3$  矩阵,  $2$  是  $A$  的特征值, 并且  $E - A$  的秩为  $1$ 。

1. 证明  $A$  相似于对角阵。
2. 举出一个矩阵, 使之与  $A$  有相同的特征值, 但不与  $A$  相似 (必须说明理由)。

七. (9%) 假设  $A$  是  $3 \times 3$  矩阵,  $\eta$  是  $3$  维列向量, 并且  $A^2\eta \neq 0$  但  $A^3\eta = 0$ 。

1. 证明:  $\eta, A\eta, A^2\eta$  线性无关;
2. 证明:  $A$  不与任何对角阵相似。