东 南 大 学 考 试 试 卷 (B 卷)

课程名称 数学物理方法 考试学期 10-11-3 得分____

适用专业 面上 考试形式 闭卷 考试时间长度 120分钟

题目	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一 (15分) 求函数$f(x)=\begin{cases}\sin x, & |x|\le\pi,\\ 0, & |x|>\pi\end{cases}$ 的Fourier变换，并证明恒等式,

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega\pi\sin\omega x}{1-\omega^2}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\sin x, & |x|\le\pi\\ 0, & |x|>\pi.\end{cases}$$

二 (15分) 用Fourier变换法推导出初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} - b u_x - c u = f(x,t), & -\infty < x < \infty,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

的求解公式，其中a, b, c是常数且$a \neq 0$，需要用到Fourier变换公式：

(1) $\mathscr{F}\left[\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\right](\omega) = \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}, \quad \alpha > 0,$

(2) $\mathscr{F}\left[f(x - x_0)\right](\omega) = \hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega x_0}.$

三 (10分) 求函数$f(t) = t\sin\omega(t-\pi)$ 的 Laplace 变换(常数$\omega \neq 0$).

四 (15分) 已知下列 Laplace 变换公式: $\mathscr{L}[t^n \mathrm{e}^{at}] = \dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$, $\mathscr{L}[\sin\alpha t] = \dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$, $\mathscr{L}[\cos\alpha t] = \dfrac{p}{p^2+\alpha^2}$, $\mathscr{L}[f(t-a)H(t-a)] = \tilde{f}(p)\mathrm{e}^{-pa}, (a>0)$. 利用 Laplace 变换法求解积分方程的定解问题(其中$t_0 > 0$是常数)

$$y(t) + 3\int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\mathrm{d}\tau = (t-t_0)H(t-t_0), \quad t>0.$$

五 (15分) 用分离变量法求解初边值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = l - x, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

六 (15分) 用分离变量法求解Laplace方程边值问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<a,\ 0<y<b, \\ u_y(x,0)=0,\ u_y(x,b)=0, & 0<x<a, \\ u(0,y)=0,\ u_x(a,y)=y, & 0<y<b. \end{cases}$$

七 (15分) 设 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Bessel 函数$J_1(x)$的所有正零点，将函数 $f(x)=x^3, x\in[0,2]$ 展开成 Bessel 函数系 $\{J_1(\alpha_n x/2)\}_{n=1}^{\infty}$ 的级数, 其中

$$[N_n^{(1)}]^2=\int_0^2 xJ_1^2(\alpha_n x/2)\mathrm{d}x=2J_2^2(\alpha_n)=2J_0^2(\alpha_n), n=1,2,\cdots.$$