# 电磁场理论作业3

# 06219109 孙寒石

## **√** T-2.2

根据Maxwell方程组,导出点电荷的电场强度公式和泊松方程。

#### Solution:

由Maxwell方程的积分形式,有

$$\oint_S ec{D} \cdot dec{S} = q$$

利用球的对称性,可以得到

$$ec{D}=ec{e}_rrac{q}{4\pi r^2}$$

进一步我们可以导出电荷的电场强度公式

$$ec{E}=ec{e}_rrac{q}{4\piarepsilon r^2}$$

由Maxwell方程的微分形式,有

$$abla \cdot \vec{D} = 
ho$$

我们知道,电场强度和电势的关系是  $ec{E} = abla arphi$ ,所以

$$abla \cdot ec{D} = arepsilon 
abla \cdot ec{E} = -arepsilon 
abla \cdot 
abla ec{arphi} = -arepsilon 
abla \cdot ec{D} = -arepsilon 
abla^2 arphi = 
ho$$

进一步我们可以导出泊松方程

$$abla^2arphi=-rac{
ho}{arepsilon}$$

已知在无源的空气区域中电场强度为

$$ec{E}=ec{a}_y 0.1\sin(10\pi x)\cos(6\pi imes10^9 t-eta z)(V/m)$$

利用Maxwell方程求解磁场强度  $ec{H}$  和常数 eta 。

#### Solution:

我们通过波动方程可以求  $\beta$ 

$$abla^2ec E - \mu_0arepsilon_0rac{\partial^2ec E}{\partial t^2} = 0$$

代入表达式,可以得到

$$\beta = 54.41 \quad rad/m$$

由Maxwell方程的微分形式,有

$$abla imes ec{E} = -\mu_0 rac{\partial ec{H}}{\partial t}$$
  $rac{\partial ec{H}}{\partial t} = -rac{1}{\mu_0} 
abla imes ec{E} = -rac{1}{\mu_0} iggl[ -ec{e}_x rac{\partial ec{E}_y}{\partial z} + e_z rac{\partial ec{E}_y}{\partial x} iggr]$ 

即

$$egin{aligned} rac{\partial ec{H}}{\partial t} &= -rac{1}{\mu_0} [-ec{e}_x 0.1 eta \sin(10\pi x) \sin(6\pi imes 10^9 t - eta z) \ &+ e_z 0.1 imes 10\pi \cos(10\pi x) \cos(6\pi imes 10^9 t - eta z) \partial x ] \end{aligned}$$

上式对时间 t 积分,可以得到

$$egin{aligned} ec{H} = & -ec{e}_x 2.3 imes 10^{-4} \sin 10\pi x \sin (6\pi imes 10^9 t - 54.41z) \ & -ec{e}_z 1.33 imes 10^{-4} \cos 10\pi x \sin (6\pi imes 10^9 t - 54.41z) \end{aligned}$$

在均匀的非导电电媒质 ( $\sigma=0$ ) 中,时变电磁场为

$$ec{E}=ec{a}_z 300\pi\cos(\omega t-rac{4}{3}y) \quad (V/m)$$

$$ec{H}=ec{a}_x 10\pi\cos(\omega t-rac{4}{3}y) \quad (A/m)$$

该媒质的相对磁导率  $\mu_r=1$ 。求角频率  $\omega$  和相对介电常数  $\varepsilon_r$ 。

## Solution:

将  $\vec{E}$  和  $\vec{H}$  用复数表示,得到

$$ec{E} = ec{a}_z 300 \pi e^{-jrac{4}{3}y} \qquad ec{H} = ec{a}_x 10 \pi e^{-jrac{4}{3}y}$$

由复数Maxwell, 得

$$ec{E}=rac{1}{j\omegaarepsilon}
abla imes ec{H}=ec{a}_zrac{40\pi}{3\omegaarepsilon}e^{-jrac{4}{3}y}$$

$$ec{H}=-rac{1}{j\omega\mu_0}
abla imesec{E}=ec{a}_xrac{400\pi}{\omega\mu_0}e^{-jrac{4}{3}y}$$

所以

$$rac{40\pi}{3\omegaarepsilon}=300\pi \qquad rac{400\pi}{\omega\mu_0}=10\pi$$

可以得到

$$\omega = 3.18 imes 10^7 rad/s \qquad arepsilon_r = 157.7$$

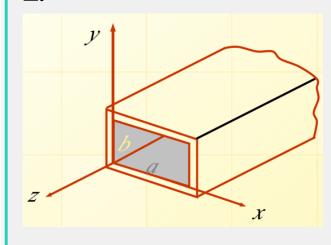
已知内截面为矩形的金属波导中的时变电磁场的各分量为

$$ec{E}_y = ec{E}_{y0} \sin\left(rac{\pi}{a}x
ight) \cos(\omega t - k_z z)$$

$$ec{H}_x = ec{H}_{x0} \sin\left(rac{\pi}{a}x
ight) \cos(\omega t - k_z z)$$

$$ec{H}_z = ec{H}_{z0} \cos \left(rac{\pi}{a}x
ight) \sin (\omega t - k_z z)$$

其坐标如图示。试求波导中的位移电流分布和波导内壁上的电荷及电流分布。波导内部为真空。



#### Solution:

位移电流

$$ec{J}_d = rac{\partial ec{D}}{\partial t} = -ec{e}_y ec{E}_{y0} \omega arepsilon \sin\left(rac{\pi}{a}x
ight) \sin(\omega t - k_z z)$$

在y=0的内壁上

$$egin{aligned} 
ho_S &= ec{n} \cdot \left(ec{D}_1 - ec{D}_2
ight) = ec{e}_y \cdot \left(arepsilon ec{e}_y E_y
ight) = arepsilon E_y \ ec{J}_S &= ec{n} imes \left(ec{H}_1 - ec{H}_2
ight) = ec{e}_y imes \left(ec{e}_x H_x + ec{e}_z H_z
ight) = -ec{e}_z H_x + ec{e}_x H_z \end{aligned}$$

在y = b的内壁上

$$egin{aligned} 
ho_S &= ec{n} \cdot \left(ec{D}_1 - ec{D}_2
ight) = -ec{e}_y \cdot \left(arepsilon ec{e}_y E_y
ight) = -arepsilon E_y \ ec{oldsymbol{J}}_S &= ec{n} imes \left(ec{H}_1 - ec{H}_2
ight) = -ec{e}_y imes \left(ec{e}_x H_x + ec{e}_z H_z
ight) = ec{e}_z H_x - ec{e}_x H_z \end{aligned}$$

在 x=0 的侧壁 上,  $H_x=0$ 

$$ec{J}_S = ec{n} imes \left(ec{H}_1 - ec{H}_2
ight) = ec{e}_x imes \left(ec{e}_z H_z
ight) = -ec{e}_y H_{z0} \sin\left(\omega t - k_z z
ight)$$

在 x=a 的侧壁上,  $H_x=0$ 

$$ec{J}_S = ec{n} imes \left(ec{H}_1 - ec{H}_2
ight) = -ec{e}_x imes \left(ec{e}_z H_z
ight) = -ec{e}_y H_{z0} \sin\left(\omega t - k_z z
ight)$$

在 x=0 及 x=a 的侧壁上, 因  $E_y=0$ , 所以  $ho_S=0$  。