东南大学15-16-2学期工科数学分析（上）期中试卷参考答案

一、 填空题（本题共5小题，每小题4分，共20分）

1. 2, 2. $x=0$, 可去间断点， 3. $dy=x^{\tan x}(\sec^2 x\ln x+\frac{\tan x}{x})dx$, 4. 4, 5. 0.

二、 单项选择题（本题共3小题，每小题4分，共12分）

1. C, 2. B, 3. C

三、 计算下列各题（本题共4小题，每小题8分，共32分）

1. 解：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}=\lim\limits_{x\to 0}\left\{(1+\frac{\ln(1+x)-x}{x})^{\frac{x}{\ln(1+x)-x}}\right\}^{\frac{\ln(1+x)-x}{x(e^x-1)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}$
$=e^{\lim\limits_{x\to 0}-\frac{1}{2(x+1)}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

2. 解：由$\lim\limits_{x\to -1}(x^3+ax+b)=0$, 可得$b=1+a$. 因此，$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+ax+a+1}{2x^3+3x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+a+1)}{(x+1)^2(2x-1)}$
$=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x+a+1}{(x+1)(2x-1)}=c$. 同理，由$\lim\limits_{x\to -1}x^2-x+a+1=0$, 可得$a=-3$. 代入可得$b=-2,c=1$.

3. 解：两边关于x求导，$\cos(xy)(y+x\frac{dy}{dx})+\frac{1}{y-x}(\frac{dy}{dx}-1)=1$, 可得$\frac{dy}{dx}=\frac{y-x+1-y(y-x)\cos(xy)}{x(y-x)\cos(xy)+1}$.

4. 解：$y^{(10)}=a^{10}x^2\cos(5\pi+ax)+20a^9x\cos(\frac{9}{2}\pi+ax)+90a^8\cos(4\pi+ax)$.

四、（**本题满分9分**）解：$\left|\frac{n^2+\sin n}{2n^2-1}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{2\sin n+1}{2(2n^2-1)}\right|<\frac{4}{2n^2}=\frac{2}{n^2}$, 对$\forall\varepsilon>0$, 取$N=[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}]+1$, 当$\forall n>N$时，有$\left|\frac{n^2+\sin n}{2n^2-1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$, 所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+\sin n}{2n^2-1}=\frac{1}{2}$.

五、（**本题满分9分**）

解：当$x\neq 0$时，$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(\cos x-1)-x^{\frac{1}{3}}\sin x$;

当$x=0$时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^{\frac{2}{3}}}=0$.

因此，$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(\cos x-1)-x^{\frac{1}{3}}\sin x, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

再由导数定义，$f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}(\cos x-1)-\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}\sin x-x^{\frac{1}{3}}\cos x$;

$f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(\cos x-1)-x^{\frac{1}{3}}\sin x}{x}=0$.

即$f''(x)=\begin{cases}-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}(\cos x-1)-\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}\sin x-x^{\frac{1}{3}}\cos x, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

六、（**本题满分9分**）解：构造辅助函数$F(x)=f(x)-g(x)$, 由题设$F(a)=F(b)=0$. 又$f(x),g(x)$ 在(a,b)内具有相等的最大值, 不妨设存在$x_1\leq x_2, x_1,x_2\in(a,b)$ 使得$f(x_1)=M=\max_{x\in[a,b]}f(x), g(x_2)=M=\max_{x\in[a,b]}g(x)$.

若$x_1=x_2$, 令$c=x_1$, 则$F(c)=0$. 若$x_1\neq x_2$, 因$F(x_1)=f(x_1)-g(x_1)\geq 0, F(x_2)=f(x_2)-g(x_2)\leq 0$, 从而由零点定理，存在$c\in[x_1,x_2]\subset(a,b)$, 使得$F(c)=0$.

在区间$[a,c],[c,b]$上分别利用罗尔定理，存在$\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$, 使得$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$. 再对$F'(x)$ 在区间$[\xi_1,\xi_2]$ 上应用罗尔定理，存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$, 有$F''(\xi)=0$, 即$f''(\xi)=g''(\xi)$.

七、（**本题满分9分**）解：$\left|\frac{\cos(n+1)}{(n+1)!}+\frac{\cos(n+2)}{(n+2)!}+\cdots+\frac{\cos(n+p)}{(n+p)!}\right|<\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots+\frac{1}{(n+p)!}<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}<\frac{1}{n}$, 对$\forall\varepsilon>0$, 取$N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$, 对$\forall n>N$和任意正整数$p$，有$\left|\frac{\cos(n+1)}{(n+1)!}+\frac{\cos(n+2)}{(n+2)!}+\cdots+\frac{\cos(n+p)}{(n+p)!}\right|<\varepsilon$, 所以由Caushy收敛原理知数列$\{x_n\}$ 收敛.