东 南 大 学 考 试 卷

课程名称 工科数分(上)期中 考试学期 18-19-2 得分 ____________

适用专业 选学工科数分各类专业 考试形式 闭 卷 考试时间长度 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六
得分						
评阅人						

自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

学号________ 姓名________

密 封 线

一、 填空题（本题共8小题，每小题4分，共32分）

1. 当 $x \to 0$ 时, $x - \sin ax$ 与 $x^2 \ln(1-bx)$ 是等价无穷小, 则 $a =$_____, $b =$_____;

2. 曲线 $y = \ln x$ 上与直线 $x + y = 1$ 垂直的切线方程为________________;

3. 设 $f(x) = \begin{cases} ax+b, & x<0 \\ \ln(1+e^x), & x \geq 0 \end{cases}$, 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 则常数

$a =$ _____, $b =$_____;

4. 设 $y = x^{f(-x)}$, 其中 f 可微, 则微分 $\mathrm{d}y =$ ____________;

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[4]{1+\cos x \sin x} - 1}{2^x - 1} =$__________;

6. 设 $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$, 则 $f^{(n)}(x) =$ ____________;

7. 设 $x \neq 0$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1-\cos\frac{x}{n})(n^2+1)}{\arctan(nx)} =$ ____________;

8. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x-b)}\right]^x =$ ____________;

二、 计算下列各题（本题共5小题，每小题8分，满分40分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right) \arctan\dfrac{1}{x}$.

2. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的邻域内有定义, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+f(x)}{x^2}=2$,

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x^2}-1+xf(x)}{x^3}$.

3. 求函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<-1 \\ x^2+\dfrac{x}{e}-1, & -1\le x\le 1 \\ e^{-x}, & x>1 \end{cases}$ 的导函数.

4. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $\mathrm{e}^{x+y}+\cos(xy)=0$ 所确定的隐函数, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

5. 设 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$ ，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

三、（**本题满分7分**）已知 $f(x) = \left[\dfrac{1}{1+[x]}\right]$，（其中$[t]$为取整函数, 表示不超过$t$的最大的整数.）在区间 $[0, 2]$ 上讨论 $f(x)$ 的连续性(即指出连续区间、间断点及其类型).

四、（**本题满分7分**）已知函数 $f(x)$在$x=1$处连续, 且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-5x+2}{\ln x} = 2$, 试证$f(x)$在$x=1$处可导, 并求$f'(1)$的值.

五、（**本题满分7分**）设 $x_n = \dfrac{\cos 2}{1!} + \dfrac{\cos 3}{2!} + \cdots + \dfrac{\cos(n+1)}{n!}$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

六、（**本题满分7分**）设$f(x)$在区间$[0,\,1]$上二阶可导, 且$f(0) = f(1) = 0$. 证明:

(1) 至少存在一点 $c \in (0,\,1)$, 使得 $f'(c) = -\dfrac{2}{c} f(c)$;

(2) 至少存在一点 $\xi \in (0,\,1)$, 使得 $\xi^2 f''(\xi) + 4\xi f'(\xi) + 2f(\xi) = 0$.