东 南 大 学 考 试 卷（A 卷）

课程名称 高等数学A期末 考试学期 08-09-3 得分

适用专业 选学A的各专业 考试形式 闭卷 考试时间长度 150分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

一.填空题(本题共9小题，每小题4分，满分36分)

1.曲面$\cos(\pi x)-x^2y+e^{xz}+yz=4$在点$(0,1,2)$处的法线方程是________；

2.设$u=\sqrt{x^2+2y^2+3z^2}$，则梯度$\mathbf{grad}\ \mu\ |_{(1,2,0)}=$________；

3.设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径是$2$，则幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+1}(x+1)^n$的收敛区间是________；

4.设闭曲线$C:|x|+|y|=1$，取逆时针方向，则曲线积分$\oint_C y\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y$的值是________；

5.设函数$F(x,y)$具有一阶连续偏导数，则曲线积分$\int_{AB}F(x,y)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$与路径无关的充分必要条件是________；

6.将函数$f(x)=\begin{cases}-1,\ 0\le x<1\\ 2x,\ 1\le x<\pi\end{cases}$在$[0,\pi]$上展开为余弦级数，其和函数$S(x)$在点$x=2\pi-1$处的函数值$S(2\pi-1)=$________；

7.设C为圆周$|z|=2$，取逆时针方向，则积分$\oint_C\dfrac{1}{(z-1-\mathrm{i})(z-3)}\mathrm{d}z$是________；

8.留数$\mathrm{Res}\left[z^2\sin\dfrac{1}{z},0\right]=$________；

9.取$a_n=$________（注：答案不唯一），可使得级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n$收敛，且级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n\ln n$发散.

二. 计算下列各题(本题共4小题，满分30分)

10.（本小题满分7分）设$z=f(x\varphi(y),x-y)$，其中f具有连续的二阶偏导数，φ具有连续导数，计算$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

11.（**本小题满分 7 分**）判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{e^{n}-1}$的敛散性，并说明理由.

12.（**本小题满分 8 分**）判别级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{1}{n-2\ln n}$是否收敛，若收敛，判别是绝对收敛，还是条件收敛？并说明理由.

13.（**本小题满分 8 分**） 将函数$f(x)=1-|x|\,(|x|\le 1)$展开为以 2 为周期的Fourier 级数.

三（14）.（本题满分 7 分）求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{2n}$的收敛域与和函数.

四（15）。（本题满分 7 分）将函数$f(z)=\dfrac{1}{z^{2}+4}$在圆环域$1<|z+i|<3$内展开为Laurent 级数.

五（16）.（本题满分 7 分）计算 $I=\int_{C}e^{x}\cos y\,dx+\left(5xy-e^{x}\sin y\right)dy$，其中$C$为曲线$x=\sqrt{2y-y^{2}}$，方向沿$y$增大的方向.

六(17)(本题满分 7 分)计算$I=\iint\limits_{S}\left(y^{2}+xz\right)dy\wedge dz+\left(z^{2}+y\right)dz\wedge dx+(x^{2}-z)dx\wedge dy$ ，

其中S为$z=2-\sqrt{x^{2}+y^{2}}$被$z=0$所截部分，取上侧.

七（18）（本题满分 6 分）设$a_{n}>0,b_{n}>0\,(n=1,2,\cdots)$，若存在常数$\alpha>0$，使得

$\dfrac{b_{n}}{b_{n+1}}a_{n}-a_{n+1}\ge\alpha\,(n=1,2,\cdots)$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_{n}$收敛.

08-09-3 高数 A 期末试卷（A）参考答案

一.填空题(本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 36 分)

1、$\underline{\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{2}=z-2}$　2、$\mathbf{grad}\,u\Big|_{(1,2,0)}=\underline{\left\{\dfrac{1}{3},\dfrac{4}{3},0\right\}}$　3、$\underline{(-3,1)}$　4、$\underline{(-3,1)}$　5、$\underline{xF_x=yF_y}$

6、$S(2\pi-1)=\underline{\dfrac{1}{2}}$　7、$\underline{\dfrac{2}{5}(1-2\,\mathrm{i})\pi}$　8、$\mathrm{Res}\left[z^2\sin\dfrac{1}{z},0\right]=\underline{-\dfrac{1}{6}}$　　9、$a_n=\underline{\dfrac{1}{n\ln^2 n}}$

二. 计算下列各题(本题共 4 小题，满分 30 分)

10、**解：** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\varphi f_1+f_2$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\varphi' f_1+x\varphi\varphi' f_{11}+(x\varphi'-\varphi)f_{12}-f_{22}$

11.（本小题满分 7 分）解： $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{\mathrm{e}^n-1}{\mathrm{e}^{n+1}-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}}\cdot\dfrac{1-\dfrac{1}{\mathrm{e}^n}}{1-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{n+1}}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}<1$，由比值法得知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{\mathrm{e}^n-1}$收敛。

12.（本小题满分 8 分）

解： 显然$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n-2\ln n}=0$，记$f(x)=x-2\ln x$，令$f'(x)=1-\dfrac{2}{x}>0$，得$x>2$，当$n\geq 3$时，$\left\{\dfrac{1}{n-2\ln n}\right\}$单调递减，由Leibniz 判别法得知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n-2\ln n}$收敛，且

$\dfrac{1}{n-2\ln n}>\dfrac{1}{n}$，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，由比较判别法得知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n-2\ln n}$发散，故

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n-2\ln n}$条件收敛。

13. （本小题满分 8 分）

解： $b_n=0,n=1,2,\cdots$，$a_0=2\int_0^1(1-x)\mathrm{d}x=1$，)

$a_n=2\int_0^1(1-x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{n^2\pi^2}(1-(-1)^n),n=1,2,\cdots$，于是由Dirichlet 收敛定理得：

$$\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\pi x=1-|x|,|x|\leq 1$$

三（14）.（本题满分 7 分）

解： 收敛域为$(-1,1)$，令$t=y^2$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} nt^{n} = t\left(\sum_{n=1}^{\infty} t^{n}\right)' = \frac{t}{(1-t)^2} = \frac{x^2}{(1-x^2)^2}$$

四（15）。（本题满分 7 分）

解： $$f(z) = \frac{\mathrm{i}}{4}\left(\frac{1}{z+2\mathrm{i}} - \frac{1}{z-2\mathrm{i}}\right) = \frac{\mathrm{i}}{4(z+\mathrm{i})}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}} + \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{\mathrm{i}(z+\mathrm{i})}{3}}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \mathrm{i}^{n+1}(z+\mathrm{i})^{-n-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \mathrm{i}^n}{3^{n+1}}(z+\mathrm{i})^n\right)$$

五（16）．（本题满分 7 分）

解： 记$O(0,0), A(0,2), D = \left\{(x,y)\,\middle|\, 0 \le x \le \sqrt{2y-y^2}\right\}$，由Green 公式得

$$I = 5\iint_D y\,\mathrm{d}\sigma + \int_{\overline{AO}} \sin y\,\mathrm{d}y = \frac{5}{2}\pi - 1 + \cos 2$$

六（17）（本题满分 7 分）

解： 补一个面$\Sigma:\begin{cases} x^2+y^2 \le 4 \\ z = 0 \end{cases}$，取下侧，由$S$ 和Σ 所围成的区域记为Ω，由Gauss 公式

得$I = \iiint_\Omega z\,\mathrm{d}v - \iint_\Sigma x^2\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \pi\int_0^2 (2-z)^2 z\,\mathrm{d}z + 4\pi = \frac{4}{3}\pi + 4\pi = \frac{16}{3}\pi$

七（18）（本题满分 6 分）

证 由于$b_n a_n - a_{n+1}b_{n+1} \ge \alpha b_{n+1} > 0\ (n = 1, 2, \cdots)$，故正数列$\{a_n b_n\}$单调递减且有下界，数列$\{a_n b_n\}$收敛，从而得正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n a_n - a_{n+1}b_{n+1})$的部分和收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n a_n - a_{n+1}b_{n+1})$收敛，再由比较判别法得$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛.

或证 由$b_n a_n - a_{n+1}b_{n+1} \ge \alpha b_{n+1} > 0\ (n = 1, 2, \cdots)$，得正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n a_n - a_{n+1}b_{n+1})$的部分和$S_n = a_1 b_1 - a_{n+1}b_{n+1} \le a_1 b_1$有上界，即得$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n a_n - a_{n+1}b_{n+1})$收敛，再由比较判别法得$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛.