



三、 计算下列各题（本题共4小题，每小题8分，共32分）

1. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x-1}}$ .

2. 已知  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + ax + b}{2x^3 + 3x^2 - 1} = c$ , 求  $a, b, c$ .

3. 设函数  $y = y(x)$  由方程  $\sin(xy) + \ln(y-x) = x$  所确定, 求  $\frac{dy}{dx}$ .

4. 设  $y = x^2 \cos(ax)$ , 其中  $a$  为非零常数, 求  $y^{(10)}(x)$ .

四、(本题满分9分) 用定义证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sin n}{2n^2 - 1} = \frac{1}{2}$ .

五、(本题满分9分) 设  $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(\cos x - 1)$ , 求  $f''(x)$ .

六、(本题满分9分) 设函数 $f(x), g(x)$  在 $[a, b]$  上连续, 在 $(a, b)$  内具有二阶导数且存在相等的最大值, 且 $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$ , 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$ , 使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$ .

七、(本题满分9分) 设 $x_n = \frac{\cos 1}{1!} + \frac{\cos 2}{2!} + \cdots + \frac{\cos n}{n!}$ , 证明数列 $\{x_n\}$  收敛.