自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名______ 学号______

线 封 密

东 南 大 学 考 试 卷 (A 卷)

课程名称 <u>数学物理方法</u> 考试学期 <u>14-15-3</u> 得分________

适用专业 <u>面上</u> 考试形式 <u>闭卷</u> 考试时间长度 <u>120分钟</u>

题目	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

注意：本份试卷可能会用到以下公式：

1、$\mathscr{L}[\sin\alpha t](p)=\dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$，$\mathscr{L}[\cos\alpha t](p)=\dfrac{p}{p^2+\alpha^2}$，$\mathscr{L}[t^n\mathrm{e}^{at}](p)=\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$；

2、$\mathscr{L}[f(t-t_0)H(t-t_0)](p)=\tilde{f}(p)\mathrm{e}^{-t_0p},\ t_0\ge 0$;

3、$(x^\nu J_\nu(x))'=x^\nu J_{\nu-1}(x),\ (x^{-\nu}J_\nu(x))'=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$.

4、$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-Ax^2}](\lambda)=\sqrt{\dfrac{\pi}{A}}\mathrm{e}^{-\lambda^2/(4A)},A>0$.

一 填空题(30分)

1. 在研究长为l的均匀的弦作微小横振动的问题时，如果此弦两端固定，则边界条件可表示为 <u>$u(0,t)=u(l,t)=0$</u>.

2. 特征值问题
$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0, & 0<x<l,\\ X(0)=0,\ X(l)=0\end{cases}$$
的所有特征值及特征函数是 <u>$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,X_n=\sin\frac{n\pi x}{l},\ n=1,2,\cdots$</u>.

3. 用分离变量法或特征展开法求解弦振动方程的初边值问题时，如果边界条件是$u(0,t)=\alpha(t),\ u_x(l,t)=\beta(t)$, 则取 $w(x,t)=$ <u>$w(x,t)=\beta(t)x+\alpha(t)$</u>，再作一个变换$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$化为$v$ 的方程且此时边界条件是齐次边界条件.

4. 求解弦的自由振动方程的初值问题
$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x), & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$
的d'Alembert公式为 $u(x,t)=$ <u>$\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi$</u>.

5. 对波动方程$u_{tt}-4u_{xx}=0,-\infty<x<\infty,t>0$, 点$M(-1,3)$的依赖区间是 <u>$[-7,5]$</u>.

6. 变换$w=\frac{1}{z-2}$把圆$|z|=1$变成(用含w等式表示) <u>$|w+2/3|=1/3$ OR $|2+1/w|=1$</u>.

二 (15分) 用分离变量法求初边值问题（推导出一般解的表达式及求系数的计算公式）

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0, \\ u_x(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), & 0 < x < l. \end{cases}$$

解：设$U(x,t) = X(x)T(t)$是非零特解，代入方程及边界条件，得

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,\ X'(0) = X(l) = 0,$$

即$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$ 和特征值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ 0 < x < l, \\ X'(0) = X(l) = 0. \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 5分$$

求解此特征值问题的

$$\lambda_n = \Big(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\Big)^2,\quad X_n(x) = \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l},\ n = 1, 2, \cdots. \qquad \cdots\cdots\cdots 7分$$

把$\lambda = \lambda_n$代入$T(t)$的方程求得通解

$$T_n(t) = C_n \cos\frac{(2n-1)\pi at}{2l} + D_n \sin\frac{(2n-1)\pi at}{2l}. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 9分$$

所以一般解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big[C_n \cos\frac{(2n-1)\pi at}{2l} + D_n \sin\frac{(2n-1)\pi at}{2l}\Big]\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}. \qquad \cdots\cdots 11分$$

利用初始条件，得

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l} = \varphi(x),\ 0 < x < l,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{(2n-1)\pi a}{2l}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l} = \psi(x),\ 0 < x < l.$$

故

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\mathrm{d}x,\quad n = 1, 2, \cdots,$$
$$D_n = \frac{4}{(2n-1)\pi a}\int_0^l \psi(x)\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\mathrm{d}x,\quad n = 1, 2, \cdots. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 15分$$

密 封 线

三 (10分) 求函数$f(x)=\begin{cases}1-x^2, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1\end{cases}$ 的Fourier变换.

解：由定义，得

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(x)](\lambda) &= \int_{-1}^{1}(1-x^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 4分\\ &= \int_{-1}^{1}(1-x^2)\cos(\lambda x)\mathrm{d}x\\ &= -\frac{4}{\lambda^3}(\lambda\cos\lambda-\sin\lambda) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 10分\end{aligned}$$

四 (12分) 用 Laplace 变换法推导出下列半无界定解问题的求解公式, 其中常数$a\neq 0$,

$$\begin{cases}u_t+au_x=f(x,t), & x>0,\ t>0,\\ u(0,t)=0, & t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\ge 0.\end{cases}$$

解：对方程及定解条件关于x做Laplace变换，并记$\mathcal{L}[u(x,t)]=\tilde{u}(p,t)$,得

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}t}+ap\tilde{u}=\tilde{f}(p,t),\ t>0,\\ \tilde{u}(p,0)=\tilde{\varphi}(p).\end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 4分$$

求得像函数

$$\tilde{u}(p,t)=\tilde{\varphi}(p)\mathrm{e}^{-atp}+\int_0^t\tilde{f}(p,s)\mathrm{e}^{-a(t-s)p}\mathrm{d}s. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 8分$$

最后，做逆变换，得

$$u(x,t)=\varphi(x-at)H(x-at)+\int_0^t f(x-a(t-s),s)H(x-a(t-s))\mathrm{d}s. \qquad \cdots\cdots 12分$$

五 (10分) 用 Fourier 变换法推导出下列初值问题的求解公式

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + u = f(x,t), & x \in R,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in R. \end{cases}$$

解：对方程及定解条件关于x做Fourier变换，并记$\mathcal{F}[u(x,t)] = \hat{u}(\lambda,t)$,得

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}t} + (a^2\lambda^2 + 1)\hat{u} = \hat{f}(\lambda,t),\ t > 0, \\ \hat{u}(\lambda,0) = \hat{\varphi}(\lambda). \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 4分$$

求得像函数

$$\hat{u}(\lambda,t) = \hat{\varphi}(\lambda)\mathrm{e}^{-(1+a^2\lambda^2)t} + \int_0^t \hat{f}(\lambda,s)\mathrm{e}^{-(1+a^2\lambda^2)(t-s)}\mathrm{d}s. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 6分$$

最后，做逆变换，得

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi \\ &\quad + \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t+s}}{2a\sqrt{\pi(t-s)}}f(\xi,s)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-s)}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s. \qquad \cdots\cdots 10分 \end{aligned}$$

六 (10分) 记$D = \{z = x + \mathrm{i}y \mid x > 0, y > 0\}$. (1) 求一个保角变换，使其把区域$D$变成上半平面；(2) 写出区域$D$上的Green函数.

解：(1) $w = z^2$. $\cdots\cdots\cdots\cdots$5分

(2) 记$\bar{z}_0$ 是z_0的共轭复数，$z, z_0 \in D$, 则D上的Green函数为

$$\begin{aligned} G(z,z_0) &= \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{w-\bar{w}_0}{w-w_0}\right| \\ &= \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{z^2-\bar{z}_0^2}{z^2-z_0^2}\right|. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 10分 \end{aligned}$$

七 (13分) 用分离变量法求解下列边值问题

$$\begin{cases} (u_{rr}+\frac{1}{r}u_r)+u_{zz}=0, & 0<r<1,\ 0<z<h, \\ |u(0,z)|<\infty,\ u(1,z)=0, & 0\le z\le h, \\ u(r,0)=0,\ u(r,h)=1-r^2, & 0\le r\le 1. \end{cases}$$

注：$\int_0^b xJ_0^2(\alpha_k x/b)\mathrm{d}x=\frac{b^2}{2}J_1^2(\alpha_k)$, 其中$\alpha_k$是 $J_0(x)$的第k个正零点.

解：设$U(r,z)=R(r)\Phi(z)$是非零特解，将其代入方程及定解条件，得特征值问题

$$\begin{cases} R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)+\lambda R(r)=0,\ 0<r<1, \\ |R(0)|<\infty,\ R(1)=0 \end{cases}$$

和$\Phi''(z)-\lambda\Phi(z)=0.$ ··········4分

解此特征值问题，得

$$\lambda_n=\alpha_n^2,\ R_n(r)=J_0(\alpha_n r),\ n=1,2,\cdots.$$

其中α_n是Bessel函数$J_0(x)$的第n个正零点. 再把$\lambda=\lambda_n$代入Φ的方程，得$\Phi_n''(z)-\alpha_n^2\Phi_n(z)=0$,它的通解为

$$\Phi_n(z)=C_n\cosh(\alpha_n z)+D_n\sinh(\alpha_n z),\ n=1,2,\cdots.$$ ··········8分

因此，一般解为

$$u(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}[C_n\cosh(\alpha_n z)+D_n\sinh(\alpha_n z)]J_0(\alpha_n r).$$

由边界条件，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_nJ_0(\alpha_n r)=u(r,0)=0,\ 0<r<1,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}[C_n\cosh(\alpha_n h)+D_n\sinh(\alpha_n h)]J_0(\alpha_n r)=u(r,h)=1-r^2,\ 0<r<1.$$

因此$C_n=0,\ n=1,2,\cdots,$

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{1}{\sinh(\alpha_n h)N_n^2}\int_0^1 r(1-r^2)J_0(\alpha_n r)\mathrm{d}r=\frac{2}{\sinh(\alpha_n h)J_1^2(\alpha_n)}\int_0^1 r(1-r^2)J_0(\alpha_n r)\mathrm{d}r \\ &= \frac{4J_2(\alpha_n)}{\alpha_n^2J_1^2(\alpha_n)\sinh(\alpha_n h)}. \end{aligned}$$ ··········12分

最后求得解

$$u(r,z)=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_2(\alpha_n)}{\alpha_n^2J_1^2(\alpha_n)\sinh(\alpha_n h)}\sinh(\alpha_n z)J_0(\alpha_n r).$$ ··········13分