自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名________ 学号________

……线……封……密……

东 南 大 学 考 试 卷 (A 卷)

课程名称 ___数学物理方法___ 考试学期 ___16-17-3___ 得分________

适用专业 ___面上___ 考试形式 ___闭卷___ 考试时间长度 ___120分钟___

题目	一	二	三	四	五	六	七
得分							

注意：本份试卷可能会用到以下公式：

1、$\mathscr{L}[\sin\alpha t](p)=\dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$，$\mathscr{L}[\cos\alpha t](p)=\dfrac{p}{p^2+\alpha^2}$;

2、$\mathscr{L}[f(t-t_0)H(t-t_0)](p)=\tilde{f}(p)\mathrm{e}^{-t_0p},\ t_0\ge 0$;

3、$(x^\nu J_\nu(x))'=x^\nu J_{\nu-1}(x),\ (x^{-\nu}J_\nu(x))'=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$.

4、$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-Ax^2}](\lambda)=\sqrt{\dfrac{\pi}{A}}\mathrm{e}^{-\lambda^2/(4A)}, A>0$.

一 填空题(每空5分，30分)

1. 给定方程$u_{xx}-6u_{xy}+3u_{yy}=x+y$, 则它是几阶方程？__二阶__；它是那种类型的方程？双曲型方程.

2. 特征值问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, & 0<x<l, \\ X'(0)=0,\ X'(l)=0 \end{cases}$$

的所有特征值及其对应的特征函数是$\lambda_n=\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2, X_n(x)=\cos\dfrac{n\pi x}{l}, n=0,1,\cdots$.

3. 像函数$\tilde{f}(p)=\dfrac{p+3\mathrm{e}^{-2p}}{p^2+9}$的Laplace逆变换$f(t)=\cos 3t+\sin 3(t-2)H(t-2)$.

4. 对于三维波动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})=0, & (x,y,z)\in R^3, t>0, \\ u|_{t=0}=\varphi(x,y,z),\ u_t|_{t=0}=\psi(x,y,x), & (x,y,z)\in R^3, \end{cases}$$

设S_M^{at}是以点$M(x,y,z)$为球心、at为半径的球面，其求解公式为

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\oint_{S_M^{at}}\frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{t}\mathrm{d}S+\oint_{S_M^{at}}\frac{\psi(\xi,\eta,\zeta)}{t}\mathrm{d}S\Big).$$

根据此公式，点$M(0,0,0)$的依赖区域为$S_O^{at}=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=a^2t^2\}$.

5. 积分$\int_0^1 xJ_0(2x)\mathrm{d}x =$ $\underline{\quad \frac{1}{2}J_1(2) \quad}$.

二 (10分) (不需要计算求解)写出求解非齐次方程初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & 0 < x < l, t > 0, \\ u_x(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

的齐次化原理.

解：设$w(x,t;\tau)$是下列齐次方程初边值问题

$$\begin{cases} w_{tt} - a^2 w_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0, \\ w_x(0,t;\tau) = 0,\ w_x(l,t;\tau) = 0, & t \geq 0, \\ w(x,0;\tau) = 0,\ u_t(x,0;\tau) = f(x,\tau), & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$ ………………… 6分

的解，其中$\tau \geq 0$是参数，则原问题的解为

$$u(x,t) = \int_0^t w(x,t-\tau;\tau)\mathrm{d}\tau.$$

………………… 10分

三 (15分) 用分离变量法求初边值问题(其中a, b是常数, $a > 0$)

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + bu = 0, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = x, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

解：设$U(x,t) = X(x)T(t)$是非零特解，将其代入方程，得

$$\frac{T''(t) + bT(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

即$T''(t) + bT(t) + a^2\lambda T(t) = 0,\ \ X''(x) + \lambda X(x) = 0.$

代入边界条件，得$X(0) = X(l) = 0.$ ………………… 4分

求解特征值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < l, \\ X'(0) = 0,\ X'(l) = 0. \end{cases}$$

得特征值和对应的特征函数

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\ X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}, n = 1, 2, \cdots$$ ……………………… 7分

线 封 密

再利用$\lambda=\lambda_n$, 求解方程

$$T_n''(t)+(b+a^2\lambda_n)T_n(t)=0,$$

的通解$T_n(t)=C_n\mathrm{e}^{-(b+a^2\lambda_n)t}$. 于是这些特解为

$$U_n(x,t)=C_n\mathrm{e}^{-(b+a^2\lambda_n)t}\sin\frac{n\pi x}{l}, n=1,2,\cdots.$$

叠加得一般解

$$u(x,t)=\mathrm{e}^{-bt}\sum_{n=1}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{-a^2\lambda_n t}\sin\frac{n\pi x}{l}.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ 11分$$

由初始条件，系数C_n满足

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{l}=x,$$

于是

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{2l}{n\pi}(-1)^{n-1}.$$

因此，所求的解是

$$u(x,t)=\mathrm{e}^{-bt}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2l}{n\pi}(-1)^{n-1}\mathrm{e}^{-a^2\lambda_n t}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 15分

四 (12分) 利用 Fourier 变换法推导下列问题的求解公式, 其中常数$a>0$,

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}+u_x=0, & x\in R,\ t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in R.\end{cases}$$

解：对u关于x做Fourier变换，记$\hat{u}(\lambda,t)=\mathcal{F}[u]$, 得

$$\begin{cases} \hat{u}_t+(a^2\lambda^2+\mathrm{i}\lambda)\hat{u}=0, & t>0,\\ \hat{u}(\lambda,0)=\hat{\varphi}(\lambda).\end{cases}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ 4分$$

求得像函数

$$\hat{u}(\lambda,t)=\hat{\varphi}(\lambda)\mathrm{e}^{-(a^2\lambda^2+\mathrm{i}\lambda)t}.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ 6分$$

因为

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-(a^2\lambda^2+\mathrm{i}\lambda)t}](x) &= \mathcal{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}](x-t)\\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-t)^2}{4a^2t}},\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ 10分\end{aligned}$$

作逆变换，求得解

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \varphi(x) * \mathcal{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-(a^2\lambda^2+\mathrm{i}\lambda)t}](x) \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_R \varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi-t)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ 12分 \end{aligned}$$

五 (10分) 用特征线方法求解半无界问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x > 0,\ t > 0, \\ u(0,t) = \sin t, & t > 0, \\ u(x,0) = \sin x,\ u_t(x,0) = 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

解：做特征变换$\xi = x - t,\ \eta = x + t$, 方程可化为$u_{\xi\eta} = 0$, 从而得到方程的通解

$$u(x,t) = f(x-t) + g(x+t), \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ 2分$$

再利用定解条件，得

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \sin x, & x > 0, \\ -f'(x) + g'(x) = 0, & x > 0, \\ f(-t) + g(t) = \sin t, & t > 0. \end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ 5分$$

由前两式，求得

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin x - C,\ g(x) = \frac{1}{2}\sin x + C,\ x \geq 0.$$

在第三式中，令$x = -t < 0$得,

$$f(x) = \sin(-x) - g(-x) = -\frac{1}{2}\sin x - C,\ x < 0. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ 8分$$

故

$$g(x+t) = \frac{1}{2}\sin(x+t) + C,\ f(x-t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(x-t) - C,\ x \geq t, \\ -\frac{1}{2}\sin(x+t) - C,\ x < t. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= f(x-t) + g(x+t) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}[\sin(x+t) + \sin(x-t)],\ x \geq t, \\ \frac{1}{2}[\sin(x+t) - \sin(x-t)],\ x < t. \end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ 10分 \end{aligned}$$

密 封 线

线 封 密

六 (10分) 用镜像法求球型区域$\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le R^2\}$ 上的Green 函数.

解：在球内任取一点$\boldsymbol{x}$ 并在这一点放置一单位正电荷，则它在空间任意点$\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^3$ $(\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{\xi})$处的电位是$\dfrac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}$. 这是空间$\mathbb{R}^3$中的基本解. ·················· 4分

在点$\boldsymbol{x}$关于球面的反演点$\boldsymbol{x}^*=\frac{R^2}{|\boldsymbol{x}|^2}\boldsymbol{x}$处放置$q=R^2/|\boldsymbol{x}|$单位的负电荷，它所产生的静电场在任意点$\boldsymbol{\xi}$点的电位

$$v(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=-\frac{R^2/|\boldsymbol{x}|}{4\pi|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x}^*|},\quad \boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{x}^*. \cdots\cdots\cdots\cdots\ 8分$$

它在此球域上是调和函数，并且这两个点电荷在球面上任意点处的电位之和为零. 于是球域上的Green函数为

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\ =\ \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x}|}-\frac{R^2/|\boldsymbol{x}|}{|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x}^*|}\right). \cdots\cdots\cdots\cdots\ 10分$$

七 (13分) 用分离变量法推导下列圆形薄膜振动方程初边值问题的求解公式

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2(u_{rr}+\dfrac{1}{r}u_r+\dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta})=0, & 0<r<b,\ 0\le\theta\le 2\pi, t>0,\\ |u(0,\theta,t)|<\infty,\ u(b,\theta,t)=0, & 0\le\theta\le 2\pi, t>0,\\ u(r,\theta,0)=\varphi(r)\sin\theta,\ u_t(r,\theta,0)=0, & 0\le r\le b, 0\le\theta\le 2\pi. \end{cases}$$

注：$N_n^2=\displaystyle\int_0^b xJ_1^2(\alpha_n x/b)\mathrm{d}x=\frac{b^2}{2}J_2^2(\alpha_n)$, 其中$\alpha_n$是 $J_1(x)$的第n个正零点.

解 设$U(r,\theta,t)=R(r)\Phi(\theta)T(t)$是非平凡特解，将其代人方程，得

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{1}{r^2R(r)}[r^2R''(r)+rR'(r)]+\frac{1}{r^2}\frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)}=-\lambda,$$

于是得常微分方程

$$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0,\ \Phi''(\theta)+\nu\Phi(\theta)=0,\ r^2R''(r)+rR'(r)+(\lambda r^2-\nu)R(r)=0.$$

代入边界条件，得$|R(0)|<\infty,\ R(b)=0.$ ·················· 4分

因为问题关于θ以2π为周期，所以得特征值问题

$$\begin{cases} \Phi''(\theta)+\nu\Phi(\theta)=0,\\ \Phi(\theta)=\Phi(\theta+2\pi), \end{cases}$$

这个特征值问题的特征值$\nu_n=n^2$, 对应的特征函数$\Phi_n(\theta)=\{\cos n\theta,\sin n\theta\}$, $n=0,1,2,\cdots$. 因为定解条件只与$\sin\theta$有关，及特征函数的正交性，所以只需取特征值$\nu=1$, 对应的特征函数$\Phi_1(\theta)=\sin\theta$. ················ 6分

以$\nu=1$代入前面得到的Bessel方程，解特征值问题

$$\begin{cases} r^2R''(r)+rR'(r)+(\lambda r^2-1)R(r)=0,\ 0<r<b,\\ |R(0)|<\infty,\ R(b)=0, \end{cases}$$

得特征值和对于的特征函数

$$\lambda_n = \left(\frac{\alpha_n}{b}\right)^2,\ R_n(r) = J_1(\alpha_n r/b),\ n = 1, 2, \cdots,$$

其中α_n是Bessel函数$J_1(x)$的第n个正零点. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 9分

再把$\lambda = \lambda_n$代人$T(t)$所在的方程，得$T_n''(t) + (\alpha_n a/b)^2 T_n(t) = 0$, 得出通解

$$T_n(t) = C_n \cos\frac{\alpha_n at}{b} + D_n \sin\frac{\alpha_n at}{b},\ n = 1, 2, \cdots.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 11分

于是非平凡特解为

$$U_n(r, \theta, t) = \left[C_n \cos\frac{\alpha_n at}{b} + D_n \sin\frac{\alpha_n at}{b}\right] J_1(\alpha_n r/b) \sin\theta,\ n = 1, 2, \cdots.$$

叠加得一般解

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \cos\frac{\alpha_n at}{b} + D_n \sin\frac{\alpha_n at}{b}\right] J_1(\alpha_n r/b) \sin\theta.$$

最后，利用初始条件得

$$u(r, \theta, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_1(\alpha_n r/b) \sin\theta = \varphi(r) \sin\theta,$$
$$u_t(r, \theta, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{\alpha_n a}{b} J_1(\alpha_n r/b) \sin\theta = 0,$$

得$D_n = 0,\ n = 1, 2, \cdots,$

$$C_n = \frac{\int_0^b r\varphi(r) J_1(\alpha_n r/b)\mathrm{d}r}{N_n^2} = \frac{2}{b^2 J_2^2(\alpha_n)} \int_0^b r\varphi(r) J_1(\alpha_n r/b)\mathrm{d}r,\ n = 1, 2, \cdots.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 13分