

呼吸

(C)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  不存在, 或  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ;

(D) 若  $f(x)$  在  $x = x_0$  处有定义, 则  $x \rightarrow x_0$  时,  $f(x) - f(x_0)$  不是无穷小.

4. 下列命题正确的是 ( )

(A) 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  均不存在, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$  不存在;

(B)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;

(C) 当  $x \rightarrow \infty$  时, 若  $f(x) = \frac{px^2 - 2}{x^2 + 1} + 3qx + 5$  为无穷大量, 则  $p$  可以为

任意常数,  $q$  为非零常数;

(D) 设函数  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续, 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$  存在, 则  $f'(0)$  存在.

三、 计算下列各题 (本题共4小题, 每小题9分, 满分36分)

1. 求函数极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x) - x^2}{(1 - \cos x) \sin x}$ .

2. 设  $y = y(x)$  是由方程  $\tan y = x + y$  所确定的隐函数, 求  $dy, y', y''$ .

3. 用函数极限的定义证明  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x + 1} = 1$ .

4. 求参数方程  $\begin{cases} x = \frac{t}{1+t^2} \\ y = \frac{t^2}{1+t^2} \end{cases}$  所表示的曲线在  $t = 2$  所对应的点处的切线方程和法线方程.

四、(本题满分8分) 证明方程  $e^x - \frac{1}{x} - x = 0$  在区间  $(0, +\infty)$  上有唯一根.

五、(本题满分8分) 设  $0 < x_1 < 2, x_{n+1} = 2 - \sqrt{2 - x_n} (n = 1, 2, 3, \dots)$ , 证明数列  $\{x_n\}$  收敛, 并求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

六、(本题满分7分) 设  $x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} (n = 1, 2, \dots)$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$ .

七、(本题满分5分) 设  $f(x)$  在  $(0, a]$  上可微, 且  $\sqrt{x}f'(x)$  在  $(0, a]$  上有界, 证明  $f(x)$  在  $(0, a]$  上一致连续.