东 南 大 学 考 试 卷（A 卷）

课程名称 高等数学A期末　考试学期 06-07-3　得分

适用专业 选学A的各专业　考试形式 闭卷　考试时间长度 150分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

一、填空题(本题共10小题，每小题3分，满分30分)

1．已知曲面 $z=xy$ 上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$，则

$x_0=$______，$y_0=$______，$z_0=$______；

2．交换积分次序 $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2}f(x,y)\mathrm{d}y=$______________________________；

3．设 $\mathbf{r}=\{x,y,z\},r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $\operatorname{div}\dfrac{\mathbf{r}}{r^3}=$______；

4．设正向闭曲线 C：$|x|+|y|=1$，则曲线积分 $\oint_C x^2y\mathrm{d}x+xy^2\mathrm{d}y=$________；

5.设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为3，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为________；

6．设 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，则 $f^{(2n)}(0)=$__________；

7．设 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x\le 0\\ 1+x, & 0<x\le\pi\end{cases}$，其以 2π 为周期的Fourier级数的和函数记为 $S(x)$，则

$S(3\pi)=$____________；

8.设正向圆周 $C:|z|=1$，则 $\oint_C\dfrac{\cos z}{z}\mathrm{d}z=$__________；

9．函数 $f(z)=z\cos\dfrac{1}{z}$ 的孤立奇点 $z=0$ 的类型是_________（如为极点，应指明是几级极点），$\operatorname{Res}[f(z),0]=$____________；

10．使二重积分 $\iint\limits_D(4-4x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma$ 的值达到最大的平面闭区域 D 为____________.

二．(本题共2小题，每小题8分，满分16分)

11．判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{4^n-2^n}$ 的敛散性.

12．求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n n}{n+1}x^{n+1}$的收敛域与和函数.

三．（本题共 2 小题，每小题 9 分，满分 18 分）

13．将函数 $f(x)=x+|x|$ 在$(-1,1]$上展开为以 2 为周期的Fourier 级数.

14．将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-4z+3}$ 在圆环域$1<|z|<3$内展开为Laurent 级数.

四．（15）(本题满分 9 分)验证表达式 $(\cos x+2xy+1)\mathrm{d}x+(x^2-y^2+3)\mathrm{d}y$ 为某一函数的全微分，并求其原函数.

五．（16）(本题满分 9 分)利用留数计算反常积分$\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

六．（17）(本题满分 10 分)已知流体的流速函数 $\mathbf{v}(x,y,z)=\{y^3-z^3,z^3-x^3,2z^3\}$，求该流体流过由上半球面$z=1+\sqrt{1-x^2-y^2}$与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围立体表面的外侧的流量.

七．（18）(本题满分 8 分) 设函数$f\in C([0,1])$，且$0\le f(x)<1$，利用二重积分证明不等式：$\int_0^1\dfrac{f(x)}{1-f(x)}\mathrm{d}x\ge\dfrac{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}{1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$

06-07-3 高数 A 期末试卷参考答案（A）

一、填空题(本题共 10 小题，每小题 3 分，满分 30 分)

1、$x_0 = \underline{-3}$， $y_0 = \underline{-1}$， $z_0 = \underline{3}$

2、$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dy = \underline{\int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)dx}$

3、$\mathrm{div}\dfrac{\mathbf{r}}{r^3} = \underline{0}$ 4、$\oint_c x^2 y dx + xy^2 dy = \underline{0}$ 5、$\underline{(-2,4)}$ 6、$f^{(2n)}(0) = \underline{\dfrac{(2n)!}{n!}}$

7、$S(3\pi) = \underline{\dfrac{1+\pi}{2}}$ 8、$\oint_c \dfrac{\cos z}{z} dz = \underline{2\pi i}$ 9、$\mathrm{Res}[f(z),0] = \underline{-\dfrac{1}{2}}$ 10、$\underline{\left\{(x,y)\middle| x^2 + \dfrac{1}{4}y^2 \le 1\right\}}$

二.(本题共 2 小题，每小题 8 分，满分 16 分)

11、记 $a_n = \dfrac{3^n}{4^n - 2^n}$，$b_n = \dfrac{3^n}{4^n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = 1$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{4^n - 2^n}$ 收敛.**(8 分)**

12、**解：** 记 $a_n = \dfrac{2^n n}{n+1}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 2$，$R = \dfrac{1}{2}$，收敛区间为 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，在收敛区间的两端点处，级数都发散，故收敛域为 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ **(2 分)**

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n}{n+1}x^{n+1} = x\sum_{n=1}^{\infty}(2x)^n - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}(2x)^{n+1} = \frac{2x^2}{1-2x} - \frac{1}{2}P(2x) \ \textbf{(3 分)}$$

$$P'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t} - 1，\quad P(2x) = -\ln(1-2x) - 2x，\quad S(x) = \frac{x}{1-2x} + \frac{1}{2}\ln(1-2x) \ \textbf{(3 分)}$$

三.(本题共 2 小题，每小题 9 分，满分 18 分)

13、**解：** $a_0 = 2\int_0^1 x dx = 1, a_n = 2\int_0^1 x\cos n\pi x dx = \dfrac{2}{(n\pi)^2}((-1)^n - 1)$，**(1+3 分)**

$$b_n = 2\int_0^1 x\sin n\pi x dx = \frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n\pi}, n = 1,2,\cdots \ \textbf{(3 分)}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\pi x + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi x = \begin{cases} f(x), -1 < x < 1 \\ 1, \quad x = \pm 1 \end{cases} \ \textbf{(2 分)}$$

14、**解：** $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 4z + 3} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{z-3} - \dfrac{1}{z-1}\right) = -\dfrac{1}{2z}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{z}} - \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^{n+1}} - \dfrac{1}{6}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{3^n}$

四．（15）(本题满分 9 分)

解： $\dfrac{\partial(x^2-y^2+3)}{\partial x}=\dfrac{\partial(\cos x+2xy+1)}{\partial y}=2x$，所验证的表达式确是某一函数的全微分.

(3 分) 采用凑微分法

$$(\cos x+2xy+1)\mathrm{d}x+(x^2-y^2+3)\mathrm{d}y=(\cos x+1)\mathrm{d}x+(-y^2+3)\mathrm{d}y+2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$$

$=\mathrm{d}(\sin x+x+x^2y-\dfrac{1}{3}y^3+3y)=\mathrm{d}u$,故原函数为 $u=\sin x+x+x^2y-\dfrac{1}{3}y^3+3y+C$.

五．（16）(本题满分 9 分)

解： $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x=\pi\mathrm{i}\left(\mathrm{Res}\left[\frac{1}{1+z^4},\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{1}{1+z^4},\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}\right]\right)$ **(2+2 分)**

$=\pi\mathrm{i}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}(\mathrm{i}-1)}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}(1+\mathrm{i})}\right)=-\pi\mathrm{i}\cdot\dfrac{\mathrm{i}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}$ **(2+2 分)+(1 分)**

六．（17）(本题满分 10 分)

解： $\displaystyle\Phi=\iint_S\mathbf{V}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\iint_S(y^3-z^3)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(z^3-x^3)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+2z^3\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ **(2 分)**

$\displaystyle=6\iiint_\Omega z^2\mathrm{d}v=6\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^4\mathrm{d}\rho=9\pi$ **(3+3+2 分)**

七．（18）(本题满分 8 分)

证明 所证不等式等价于不等式：$\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)}{1-f(x)}\mathrm{d}x\int_0^1(1-f(x))\mathrm{d}x\ge\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，**(2 分)**而

$$\int_0^1\frac{f(x)}{1-f(x)}\mathrm{d}x\int_0^1(1-f(x))\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{f(x)}{1-f(x)}\mathrm{d}x\int_0^1(1-f(y))\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\frac{f(y)}{1-f(y)}\mathrm{d}y\int_0^1(1-f(x))\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\iint_D\left(\frac{f(x)-f(x)f(y)}{1-f(x)}+\frac{f(y)-f(x)f(y)}{1-f(y)}\right)\mathrm{d}\sigma$$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\iint_D\frac{(f(x)+f(y))(1+f(x)f(y))-4f(x)f(y)}{(1-f(x))(1-f(y))}\mathrm{d}\sigma$ **(2 分)**

$$\ge\frac{1}{2}\iint_D\frac{(f(x)+f(y))(1+f(x)f(y))-(f(x)+f(y))^2}{(1-f(x))(1-f(y))}\mathrm{d}\sigma$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D\frac{(f(x)+f(y))(1-f(x))(1-f(y))}{(1-f(x))(1-f(y))}\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\iint_D(f(x)+f(y))\mathrm{d}\sigma=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

其中 $D=[0,1]\times[0,1]$ **(4 分)**