东 南 大 学 考 试 卷 （A卷）

课程名称 高等数学A（下)期中　考试学期 12-13-3　得分 __________

适用专业 选学该课程的各类专业　考试形式 闭卷　考试时间长度 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							
评阅人							

一、 填空题（本题共5小题，每小题4分，共20分）

1. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $ze^{xz}+\cos(yz)=2$ 所确定的隐函数，则 $\mathrm{d}z=$__________；

2. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\sin\dfrac{x^3e^y-2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0\ , & x^2+y^2=0\end{cases}$,则 $f_x(0,0)=$______；

3. $\oint_{x^2+y^2=2}(x^2+y^2+2x)\mathrm{d}s=$_______；

4. 交换二次积分次序 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{1-\frac{x^2}{4}}f(x,y)\mathrm{d}y=$________________；

5. 复方程 $e^z=i^i$ 的所有解 $z=$____________________.

二、 单项选择题（本题共4 小题，每小题4分，满分16 分）

1. 已知曲面 $z=1+x^2+2y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $4x+4y-z+5=0$，则点 P 的坐标为　[　]

(A) $(1,2,10)$　(B) $(-1,2,10)$　(C) $(2,-1,7)$　(D) $(2,1,7)$

2. 函数 $u=\ln(z+\sqrt{x^2+y^2})$ 在点 $(3,4,1)$ 处的方向导数的最大值是　[　]

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$　(B) $-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$　(C) $\sqrt{2}$　(D) $-\sqrt{2}$

3. 函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在点 $(0,0)$ 处　[　]

(A) 不连续　(B) 连续但偏导数不存在　(C) 偏导数存在但不可微　(D) 可微

4. 下列哪个复函数在 $z=0$ 处解析　[　]

(A) $x^2+y^2+iy^3$　(B) $\overline{\sin\bar{z}+iz^3}$　(C) $|z|^3e^{i3\arg z}$　(D) $\mathrm{Ln}z$

三、 本题共4小题，每小题8分，满分32分）

1. 设 $z=f(x+2y,x^3y)$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2. 求曲线 $L:\begin{cases} x^2+y^2-2=0 \\ x+z-4=0 \end{cases}$ 过点 $P_0(1,1,3)$ 处的切线方程和法平面方程.

3. 计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}(x+3y)^2\mathrm{d}\sigma$.

4. 计算第一型曲线积分 $\displaystyle\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s$，
其中 L 为曲线 $x=a(\cos t+t\sin t), y=a(\sin t-t\cos t)(0\le t\le 2\pi)$.

四、（本题满分8分）求函数 $f(x,y)=4+xy-x^2-y^2$ 在有界闭区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$ 上的最大值和最小值.

五、（本题满分8分）已知复解析函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 的实部 $u(x,y)=\cos x\cosh y$，求 $f(z)$(用变量 z 表示)以及 $f'(\mathrm{i})$.(注：$\cosh y=\dfrac{\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{-y}}{2}$)

六、（本题满分8分）设 $\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 2z, z\ge\sqrt{3(x^2+y^2)}\}$，密度为常数 μ，求 Ω 的质心.

七、（本题满分8分）计算曲面积分 $\displaystyle\iint\limits_S\frac{1}{z}\mathrm{d}S$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 夹在两平面 $z=\dfrac{h}{3}$ 与 $z=h(0<h<R)$ 之间的部分.

12-13-3 高数 A 期中试卷参考答案

一．填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1．设 $z=z(x,y)$由方程$ze^{xz}+\cos(yz)=2$确定，则 $dz=$ $\underline{\dfrac{-z^2e^{xz}\mathrm{d}x+z\sin(yz)\mathrm{d}y}{e^{xz}+xze^{xz}-y\sin(yz)}}$；

2．设 $f(x,y)=\begin{cases}\sin\dfrac{x^3e^y-2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0\ , & x^2+y^2=0\end{cases}$，则 $f_x(0,0)=$ $\underline{\ 1\ }$；

3．曲线积分 $\oint_{x^2+y^2=2}(x^2+y^2+2x)ds=$ $\underline{\ 4\sqrt{2}\pi\ }$；

4．交换积分次序：$\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{1-\frac{x^2}{4}}f(x,y)\mathrm{d}y=$ $\underline{\int_0^{\frac{3}{4}}\mathrm{d}y\int_{1-y}^{1}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\frac{3}{4}}^{1}\mathrm{d}y\int_{1-y}^{2\sqrt{1-y}}f(x,y)\mathrm{d}x}$

5．复方程 $e^z=\mathrm{i}^{\mathrm{i}}$ 的所有解为 $z=$ $\underline{-(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi)+\mathrm{i}\cdot 2n\pi}$；

二．单项选择题（本题共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

1．已知曲面 $z=1+x^2+2y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $4x+4y-z+5=0$，则点 P 的坐标为 [**D**]

(A) $(1,2,10)$　(B) $(-1,2,10)$　(C) $(2,-1,7)$　(D) $(2,1,7)$

2．函数 $u=\ln(z+\sqrt{x^2+y^2})$在点$(3,4,1)$处的方向导数最大值是 [*A*]

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$　(B) $-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$　(C) $\sqrt{2}$　(D) $-\sqrt{2}$

3．函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$在点$(0,0)$处 [**C**]

(A) 不连续　(B) 连续但偏导数不存在　(C) 偏导数存在但不可微　(D) 可微

4．下列哪个复函数在 $z=0$ 处解析 [**C**]

(A) $x^2+y^2+iy^3$；　(B) $\overline{\sin\bar{z}+\mathrm{i}z^3}$；　(C) $|z|^3\ e^{\mathrm{i}3\arg z}$；　(D) $\mathrm{Ln}z$

三. 计算下列各题（本题共 4 小题，每小题 8 分，满分 32 分）

1．设 $z=f(x+2y,x^3y)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2f_{11}+(x^3+6x^2y)f_{12}+3x^5yf_{22}+3x^2f_2$$

2．求曲线 $L:\begin{cases}x^2+y^2-2=0\\ x+z-4=0\end{cases}$ 过点 $P(1,1,3)$ 处的切线方程和法平面方程。

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{1}, \qquad x-y-z+3=0$$

3. 求二重积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}(x+3y)^2\mathrm{d}\sigma$ 　　40π

4. 计算第一型曲线积分 $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s$，其中$L$为曲线$\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases},(0\le t\le 2\pi).$

$$2a^3\pi^2(1+2\pi^2)$$

四（本题满分 8 分） 求函数 $f(x,y)=4+xy-x^2-y^2$ 在有界闭区域 $D=\{(x,y)\ |x^2+y^2\le 1\}$ 上的最大值和最小值。

$$\text{驻点}:(0,0),(\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2}),(-\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2}), \qquad M=4,\ m=\frac{5}{2}$$

五（本题满分 8 分） 已知复解析函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 的实部 $u=\cos x\cosh y$，求 $f(z)$ 的表达式(**单独用 z 表示**)以及 $f'(\mathrm{i})$.（注：$\cosh y=\frac{e^y+e^{-y}}{2}$）

$$v=-\frac{1}{2}(e^y-e^{-y})\sin x+C, \qquad f(z)=\cos z+C, \qquad f'(\mathrm{i})=-\sin\mathrm{i}=\frac{1}{2}(e^{-1}-e)\mathrm{i}$$

六（本题满分 8 分） 设 $\Omega=\{(x,y,z)\ |x^2+y^2+z^2\le 2z, z\ge\sqrt{3(x^2+y^2)}\}$，密度为常数 μ，求 Ω 的质心。

解： 由对称性知：$\bar{x}=0,\ \bar{y}=0,$

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}zdV}{\iiint\limits_{\Omega}dV}=\frac{\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r\cos\theta\cdot r^2\sin\theta dr}{\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^2\sin\theta dr}=\frac{\frac{37}{48}\pi}{\frac{7}{12}\pi}=\frac{37}{28},$$

故知心坐标为 $(0,0,\frac{37}{28})$

七（本题满分 8 分） 计算曲面积分 $\iint\limits_S\frac{1}{z}dS$，其中$S$是球面$x^2+y^2+z^2=R^2$夹在两平面$z=\frac{h}{3}$和$z=h(0<h<R)$之间的部分。

$$\text{原式}=\iint\limits_D\frac{R}{R^2-x^2-y^2}dxdy=R\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{\sqrt{R^2-h^2}}^{\sqrt{R^2-\frac{h^2}{9}}}\frac{\rho}{R^2-\rho^2}d\rho=2\pi R\ln 3$$