16-17-2工科分析期中试卷参考答案

一、 填空题（本题共9小题，每小题4分，满分36分）

1. $\underline{10!\sin 1}$； 2. $\underline{\mathrm{e}^2}$； 3. $\underline{x^{\cos(1+2x)}(\frac{\cos(1+2x)}{x}-2\ln x\sin(1+2x))\mathrm{d}x}$；

4. $\underline{y=x-1}$； 5. $\underline{\frac{1}{2}}$； 6. $\underline{25},\underline{-20}$； 7. $\underline{\pi}$； 8. $\underline{0},\underline{\mathrm{e}}$； 9. $\underline{x+\frac{1}{2}}$.

二、 计算下列各题（本题共5小题，每小题7分，满分35分）

1. 解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\cos 2t}{t},\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{2t\sin 2t+\cos 2t}{2t^3}$

2. 解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{f'}{1+f'},\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{f''}{(1+f')^3}$

3. 解 $y'=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}, y^{(n)}=(\frac{1}{1+x})^{(n-1)}-(\frac{1}{1-x})^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}-\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$

4. 解 $g(x)=f(f(x))=\begin{cases}\ln\ln x, & x\geq e,\\ 2(\ln x-1), & 1\leq x<e,\\ 4x-6, & x<1\end{cases}$

当 $x>e$ 时，$g'(x)=\frac{1}{x\ln x}$， 当 $1<x<e$ 时，$g'(x)=\frac{2}{x}$， 当 $x<1$ 时，$g'(x)=4$;

因为 $g(1+0)=g(1-0)=-2$， $g'(1+0)=2\neq g'(1-0)=4$，所以 $g(x)$ 在 $x=1$ 处不可导；

$g(e+0)=g(e-0)=0$，$g'(e+0)=\frac{1}{e}\neq g'(e-0)=\frac{2}{e}$，所以 $g(x)$ 在 $x=e$ 处不可导。

5. 解 (1)$a=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x}{\sin x}-\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+x^2-\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+2x-\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2+\sin x}{2}=1$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1+x}{\sin x}-\frac{1}{x}-1}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+x^2-\sin x-x\sin x}{x^{k+2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+2x-\cos x-\sin x-x\cos x}{(k+2)x^{k+1}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2+\sin x-2\cos x+x\sin x}{(k+2)(k+1)x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x+3\sin x+x\cos x}{(k+2)(k+1)kx^{k-1}}=c(c\neq 0)$,所以$k=1$.

三、 （本题满分7分）

解:不妨设$x>0$,则对$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\min(\frac{3\varepsilon}{2},1)$,则当$0<|x-1|<\delta$时，

有$|\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{3}|=\frac{2|x-1|}{3|2x+1|}<\frac{2|x-1|}{3}<\varepsilon$,所以$\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{2x+1}=\frac{1}{3}$.

四、 （本题满分8分）

解 因为 $\frac{1}{2}\leq a_n\leq 1$，且 $a_{n+2}-a_n=\frac{1+a_n}{2+a_n}-\frac{1+a_{n-2}}{2+a_{n-2}}=\frac{a_n-a_{n-2}}{(2+a_n)(2+a_{n-2})}$,

所以数列 $\{a_{2n-1}\}$ $\{a_{2n}\}$ 都单调有界，故均收敛。

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=A$，则 $A=\frac{1+A}{2+A}$，解得 $A=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 同理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n-1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

于是 $\{a_n\}$收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

五、 （本题满分7分） 证明： 对$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$,则$\forall x_1,x_2\in R,|x_1-x_2|<\delta$时，

有$f(x_1)-f(x_2)|=|x_1-x_2+\cos 2x_1-\cos 2x_2|<3|x_1-x_2|<\varepsilon,$

所以 $f(x)=x+\cos 2x$ 在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

六、 （本题满分7分） 证明 (法一) 设 $F(x)=f(x)-2x$，则 $F(x)$ 在$[1,3]$ 上连续，在 $(1,3)$ 内可导。

因为$F(1)=-1,F(2)=1,F(3)=-4$，所以$F(3)<F(1)<F(2)$，由 $F(x)$ 在区间 $[2,3]$ 上连续可得，存在 $\eta\in(2,3)$ 使得 $F(\eta)=F(1)$。于是由罗尔定理可得，存在 $\xi\in(1,\eta)\subset(1,3)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=2$。

(法二) 在区间 $(1,2)$ 和 $(2,3)$ 上分别对 $f(x)$ 用拉格朗日中值定理，存在 $\xi_1\in(1,2)$ 使得 $f'(\xi_1)=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=4$，存在 $\xi_2\in(2,3)$ 使得 $f'(\xi_2)=\dfrac{f(3)-f(2)}{3-2}=-3$。因为 $f'(\xi_2)<2<f'(\xi_1)$，所以由达布定理可得，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(1,3)$ 使得 $f'(\xi)=2$。