18-19-3高数A期中试卷答案

一、 填空题（本题共8小题，每小题4分，满分32分）

1. $\underline{-25}$； 2. $\underline{\dfrac{1}{3}}$; 3. $\underline{\dfrac{\mathrm{e}}{2}}$； 4. $\underline{\dfrac{1}{2}(x^2y+y^2x)+x^2+y}$； 5. $\underline{\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\mathrm{d}x}$； 6. $\underline{\dfrac{\pi}{2}+1}$；

7. $\underline{x-z=0}$； 8. $\underline{2\pi R^4}$.

二、 计算下列各题（本题共4小题，每小题8分，满分32分）

1. $z_x = f_1\sin y + 2xf_2$,

$z_{xy} = f_1\cos y + x\cos y\sin y f_{11} + (-2y\sin y + 2x^2\cos y)f_{12} - 4xyf_{22}$

2. $$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho^2\mathrm{d}\rho = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta = \frac{16-10\sqrt{2}}{9}.$$

3. $$\iiint\limits_\Omega (2x^2y+z)\mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} r^3\mathrm{d}r$$

$$= \frac{15}{2}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi = \frac{5}{4}\pi.$$

4. **解法1.** 化为无条件极值$f(x,y)=x^2+y^2+2(x-1)^2+(y-1)^2, (x,y)\in\mathbb{R}^2$.

由$\begin{cases} f_x = 2x+4(x-1)=0 \\ f_y = 2y+2(y-1)=0 \end{cases}$ 得唯一驻点$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} \\ y_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$

代入曲面方程得$z=\frac{\sqrt{17}}{6}$（舍去负值）

$A=f_{xx}(x_1,y_1)=6,\ B=f_{xy}(x_1,y_1)=0,\ C=f_{yy}(x_1,y_1)=4$

$AC-B^2=24>0$,且驻点唯一，所以$P_1\left(\frac{2}{3},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{17}}{6}\right)$ 处取得最短距离$d=\frac{\sqrt{42}}{6}$.

曲面在P_1处的法向量为$\{4,3,\sqrt{17}\}$, 所以曲面在P_1处的切平面方程为

$4\left(x-\frac{2}{3}\right)+3\left(y-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{17}\left(z-\frac{\sqrt{17}}{6}\right)=0$, 即$4x+3y+\sqrt{17}z-7=0$.

解法2. 令$L(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+y^2+\lambda\left(2(x-1)^2\right)(y-1)^2-y^2)$,

由$\begin{cases} L_x = 2x+4\lambda(x-1)=0 \\ Ly = 2y+2\lambda(y-1)=0 \\ L_z = 2z-2\lambda z=0 \\ L_\lambda = 2(x-1)^2+(y-1)^2-z^2=0 \end{cases}$ 解出$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} \\ y_1 = \frac{1}{2} \\ z_1 = \frac{\sqrt{17}}{6} \end{cases}$

由于驻点唯一,根据实际意义,点$P_1\left(\frac{2}{3},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{17}}{6}\right)$为所求点,最短距离为$\frac{\sqrt{42}}{6}$.

曲面在P_1处的法向量为$\{4,3,\sqrt{17}\}$, 所以曲面在P_1处的切平面方程为

$4\left(x-\frac{2}{3}\right)+3\left(y-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{17}\left(z-\frac{\sqrt{17}}{6}\right)=0$, 即$4x+3y+\sqrt{17}z-7=0$.

解法3. 由几何意义知,$\overrightarrow{OP_1}\perp$已知曲面,因此$(2\left(x_1-1\right),y_1-1,-z_1)\,//\,(x_1,y_1,z_1)$
$\frac{2x_1-2}{x_1}=\frac{y_1-1}{y_1}=\frac{-z_1}{z_1}=-1,\ x_1=\frac{2}{3},\ y_1=\frac{1}{2},\ z_1=\frac{\sqrt{17}}{6},\ d=\frac{\sqrt{42}}{6}$. 切平面方程为
$4\left(x-\frac{2}{3}\right)+3\left(y-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{17}\left(z-\frac{\sqrt{17}}{6}\right)=0$, 即$4x+3y+\sqrt{17}z-7=0$.

三、 （本题满分10分）

解：根据解析函数的 Cauchy-Riemann 条件, 有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=2(x+1),\ \ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-2(y-1)$$

所以 $v(x,y)=2(x+1)y+\varphi(x)$, 从而

$$-\frac{\partial u}{\partial y}=2(y-1)=\frac{\partial v}{\partial x}=2y+\varphi'(x),\ \ \varphi(x)=-2x+C$$

所以 $v(x,y)=2(x+1)y-2x+C$, 得

$$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)=(x+1)^2-(y-1)^2+\mathrm{i}(2(x+1)y-2x+C),$$

取 $y=0$, 得 $f(x)=(x+1)^2-1+\mathrm{i}(-2x+C)$, 然后将 x 换为 z, 即得

$$f(z)=z^2+2z+\mathrm{i}(-2z+C).$$

四、 （本题满分10分） 解： $\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}S=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\pi a^3$

$$\iint\limits_{\Sigma}|y|\mathrm{d}S=2\iint\limits_{[-a,a]\times[0,1]}\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{1+(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}z=4a^2$$

所以$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+|y|)\mathrm{d}S=\pi a^3+4a^2$.

五、 （本题满分10分）

解：设形心为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, 则$\bar{x}=0$,

$$\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}V=\int_0^1 z\pi(1-z)^2\mathrm{d}z=\frac{\pi}{12},\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V=\int_0^1\pi(1-z)^2\mathrm{d}z=\frac{\pi}{3},\bar{z}=\frac{1}{4}.$$

$$\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}V=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+(y-z)^2\le(1-z)^2}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{1-z}(z+\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$

$=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{1-z}z\rho\mathrm{d}\rho=\int_0^1 z\pi(1-z)^2\mathrm{d}z=\frac{\pi}{12}$, 所以 $\bar{y}=\frac{1}{4}$. (3’)

故 Ω 的形心坐标为 $(0,\frac{1}{4},\frac{1}{4})$.

六、（本题满分6分） 证：(1)若u在D上有正最大值在内部(x_0, y_0)处取到，则在此点$u_{xx}+u_{yy}=-cu>0$，u_{xx}, u_{yy}至少有一个大于0,不妨设$u_{xx}>0$,设$\varphi(x)=u(x, y_0)$，则$\varphi''(x)=u_{xx}>0$,$x=x_0$为$\varphi(x)=u(x, y_0)$极小值点，与最大值点矛盾.所以u在D上的正最大值不能在D的内部取得. 同理可得负最小值也不能在D的内部取得.

(2)若u在D上连续，且在D的边界上$u=0$，则u的最大值若不为零，则此正最大值在内部取到，由(1)知这是不可能的，所以u的最大值为零，同理，u的最小值也为零，所以在D上$u=0$.