东 南 大 学 考 试 试 卷 (A)

姓名 ____________ 学号 ____________ 得分 ____________

课程名称：数学物理方法　　适用专业：面上工科　　考试形式：闭卷

考试学期：08–09–3　　考试时间长度：120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
得分										

一 (7 分) 指出定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(0,t) = u_0,\ u_x(l,t) = A\sin\omega t, & t \ge 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le l \end{cases}$$

所描述的物理现象，以及定解条件的物理意义，其中 u_0, A 为常数.

二 (8 分) 求函数 $f(x) = \begin{cases} x, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ 的 Fourier 变换.

三 (10 分) 已知 Fourier 变换公式

$$\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-Ax^2}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{A}}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{4A}}.$$

利用 Fourier 变换法推导出下列初值问题的求解公式

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + 2tu = 0, & x \in \mathbb{R}^1,\, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^1. \end{cases}$$

四 (10 分) 已知下列 Laplace 变换公式

$$\mathscr{L}[\sin\omega x]=\frac{\omega}{p^2+\omega^2},\quad \mathscr{L}[\cos\omega x]=\frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

利用 Laplace 变换法求解微分积分方程的初值问题

$$y'(t)+3\int_0^t\cos(t-\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau=4\sin t,\quad y(0)=0.$$

五 (8 分) 求函数 $w(x)$ ，使得变换 $u(x,t)=v(x,t)+w(x)$ 能将下列非齐次方程非齐次边界条件的初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=6x, & 0<x<l,\ t>0,\\ u_x(0,t)-ku(0,t)=0,\ u_x(l,t)=2, & t\ge 0,\\ u(x,0)=0, u_t(x,0)=0, & 0\le x\le l,\end{cases}$$

同时化为齐次方程齐次边界条件的初边值问题，其中常数 $k>0$. 并写出此时 v 所满足的初边值问题.

六 (15 分) 用分离变量法求解弦振动方程的定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = 3 - 2\cos\dfrac{2\pi x}{l},\ u_t(x,0) = -4 + 3\cos\dfrac{\pi x}{l}, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

七 (12 分) 求解非齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = x \sin t, & x \in \mathbb{R}^1,\ t > 0, \\ u(x,0) = x,\ u_t(x,0) = \sin x, & x \in \mathbb{R}^1. \end{cases}$$

八 (10 分) 求一个分式线性变换，使得它把圆周 $|z| = 1$ 变为圆周 $|w-1| = 1$，且将 $z_1 = 2\mathrm{i}$ 变为 $w_1 = 1$； $z_2 = \mathrm{i}$ 变为 $w_2 = 0$.

九 (10 分) 设有一个无限大的角形区域 $D = \{z|\ \frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{2\pi}{3}\}$.

(1) 求一个保角变换，使得它将区域 D 变为上半平面;

(2) 写出上半平面的 Green 函数的表达式;

(3) 用保角变换方法求角形区域 D 的 Green 函数.

十 (10 分) 求解下面 Bessel 方程的特征值问题 (给出所有特征值和对应的特征函数)

$$\begin{cases} r^2R'' + rR' + (\lambda r^2 - n^2)R = 0, \quad 0 < r < r_0, \\ R(r_0) = 0, \quad |R(0)| < \infty. \end{cases}$$