自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

密 封 线

东南大学成贤学院考试卷（A卷）

课程名称 高等数学B(下)期中 适 用 专 业 工科各专业

考试学期 10-11-3 考 试 形 式 闭 卷 考试时间长度 120分钟

学 号 ________ 姓 名 ________ 得 分 ________

题号	一	二	三	四	五
得分					

一、选择题(每题3分,共5题)

1、点$M(-3,-7,-1)$关于（ ）的对称点是$M'(3,7,-1)$。

（A）原点O；（B）Oxy平面；（C）z轴；（D）平面$x+y-z=0$。

2、直线$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z}{1}$与直线$\frac{x}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{-1}$的夹角是（ ）。

（A）$\frac{\pi}{6}$；（B）$\frac{\pi}{4}$；（C）$\frac{\pi}{3}$；（D）$\frac{3\pi}{4}$。

3、为使二元函数$f(x,y)=\frac{x+y}{x-y}$当(x,y)沿着某一特殊路线趋于$(0,0)$时的极限为2，这条路线应选择（ ）。

（A）$y=\frac{x}{4}$；（B）$y=\frac{x}{3}$；（C）$y=\frac{x}{2}$；（D）$y=\frac{2x}{3}$。

4、二元函数$z=3(x+y)-x^3-y^3$的极值点是（ ）

（A）$(1,-1)$；（B）$(-1,1)$；（C）$(-1,-1)$；（D）$(0,0)$。

5、设$D=\{(x,y)\mid 1\le x\le 2,3\le y\le 4\}$，则积分$\iint\limits_D \frac{d\sigma}{(x-y)^2}$的值为（ ）。

（A）$\ln\frac{4}{3}$；（B）$\ln\frac{3}{4}$；（C）$\ln\frac{2}{3}$；（D）$\ln\frac{3}{2}$。

二、填空题(每题3分,共5题)

1、直线$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z}{1}$在$Oxy$平面上的投影直线为________。

2、抛物线$\begin{cases} y^2=-2pz \\ x=0 \end{cases}$绕$z$轴旋转一周所成的旋转曲面为________。

3、$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{2-\sqrt{xy+4}}=$________。

4、设$z=x^y$，则$dz\big|_{(1,1)}=$________。

5、交换积分次序：$\int_0^1 dy\int_y^{2y} f(x,y)dx=$________。

三、计算题(每题7分,共5题)

1、已知某球面的中心在$(3,-5,2)$且与平面$2x-y+3z=3$相切，求球面方程。

2、设$z=e^x\ln\sqrt{1+x^2+y^2}$，求：$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

3、设$z=f(x^2y,\varphi(x+y))$，其中f二阶偏导数连续，φ二阶导数连续，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

4、计算二重积分$\iint\limits_D y\,d\sigma$，其中$D$是由抛物线$y^2=x$及直线$y=x-2$所围成的闭区域。

自觉遵守考场纪律　如考试作弊　此答卷无效

5、计算二重积分$\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2}dxdy$，其中$D$是由曲线$x^2+y^2=2x$所围成的平面闭区域。

四、应用题(每题8分,共3题)

1、求曲线$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2-4=0\\x^2+y^2-2x=0\end{cases}$在点$P(1,1,\sqrt{2})$处的切线方程。

2、求由曲面$\Sigma_1:x^2+y^2+z^2=1$与$\Sigma_2:y^2+z^2=z$所围，含在曲面Σ_1内的立体体积。

3、利用条件极值求$f(x,y)=3x^2+2y^2-2x^3$在 $x^2+y^2=1$上的最大值与最小值。

五、证明题(第一题5分,第二题6分)

1、设向量α、β不平行，并且$|\alpha|=3$，$|\beta|=4$，证明：向量$4\alpha+3\beta$与向量$\frac{\alpha}{3}-\frac{\beta}{4}$垂直。

2、证明函数$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\0, & x^2+y^2=0\end{cases}$在原点$O(0,0)$连续，但函数$f(x,y)$在原点$O(0,0)$不可微。

10-11-3 高数 B 期中试卷参考答案

一．填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1. $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$ ；　2. $(0,1,-1)$ ；　3. $\frac{1}{2}$ ；　4. $\underline{\quad 1 \quad}$ ；　5. $[\frac{1}{2},\frac{3}{2})$.

二．单项选择题（本题共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

6. C　7. B　8. B　9. A

三. 计算下列各题（本题共 5 小题，每小题 8 分，满分 40 分）

10. 解：$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1\cdot(1+\varphi')$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=(-\varphi' f_{11}+f_{12})\cdot(1+\varphi')-f_1\cdot\varphi''$

11. 解：设过定直线的平面束方程为 $3x-2y+2+\lambda(x-2y-z+6)=0$,

$$d=\frac{|(3+\lambda)-(2+2\lambda)\cdot 2-\lambda+2+6\lambda|}{\sqrt{(3+\lambda)^2+(2+2\lambda)^2+\lambda^2}}=1,\ \lambda=-2\text{或}-3\ ,$$

$\therefore$ 所求平面为　$x+2y+2z-10=0$ 或 $4y+3z-16=0$

12. 解：$f(tx,ty)=tf(x,y)$ 两边对 t 求导, 令 t=1，$xf_x+yf_y=f$，$f_x(1,-2)=10$ ，则切平面方程为

$10(x-1)+4(y+2)-(z-2)=0$ 。

13. 解：设直线上点 $M_0(1,y_0,z_0)$ 旋转到曲面上 $M(x,y,z)$,则

$x^2+y^2=1+y_0^2$, $y_0=z_0$, $z=z_0$, $\therefore\ x^2+y^2-z^2=1$ 为旋转曲面方程.

14. 解：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{a^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{a}=\frac{e}{a}\begin{cases}<1, a>e\\>1, a<e\end{cases}$,

当 $a>e$ 时, 级数收敛；当 $a<e$ 时, 级数发散。

四（15）（本题满分 8 分）解：$f(x)$ 为偶函数，傅立叶级数为余弦级数。

$b_n=0$ ，　$a_0=2\int_0^1 x dx=1$ ，

$$a_n=2\int_0^1 x\cos n\pi x dx=\frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Big|_0^1=\frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]=\begin{cases}\frac{-4}{n^2\pi^2}, n\text{为奇数}\\ 0\ \ , n\text{为偶数}\end{cases},$$

$$\therefore f(x)=|x|=1-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\pi x\ ,(-1\le x\le 1)\ 。$$

五（16）（本题满分 8 分）

解：$\frac{1}{1-x}=\sum_1^{\infty}x^n$ ，　$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_1^{\infty}nx^{n-1}$ ，　$\frac{2}{(1-x)^3}=\sum_2^{\infty}n(n-1)x^{n-2}$

$$f(x)=\frac{1+x}{(1-x)^3}=\frac{1}{2}\sum_2^{\infty}n(n-1)x^{n-2}+\frac{1}{2}\sum_2^{\infty}n(n-1)x^{n-1}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^{n}+\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}(n+1)nx^{n}=\sum_{0}^{\infty}(n+1)^{2}x^{n}=\sum_{0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n}, \quad x\in(-1,1)$$

$$(n+1)^{2}=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad f^{(100)}(0)=(101)^{2}100!$$

六（17）（本题满分 8 分）

解：设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}x^{2n-1}, x\in[-1,1]$，则 $\frac{1}{\sqrt{3}}S(\frac{1}{\sqrt{3}})$ 为所求.

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^{2}}, S(x)-S(0)=\arctan x, S(0)=0,$$

$$\therefore S(x)=\arctan x, x\in[-1,1], \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}S(\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}。$$