自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名______ 学号______

密 封 线

东 南 大 学 考 试 卷 (A 卷)

课程名称 <u>数学物理方法</u> 考试学期 <u>15-16-3</u> 得分________

适用专业 <u>面上</u> 考试形式 <u>闭卷</u> 考试时间长度 <u>120分钟</u>

题目	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

注意：本份试卷可能会用到以下公式：

1、$\mathscr{L}[\sin\alpha t](p)=\dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$，$\mathscr{L}[\cos\alpha t](p)=\dfrac{p}{p^2+\alpha^2}$，$\mathscr{L}[t^n\mathrm{e}^{at}](p)=\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$；

2、$\mathscr{L}[f(t-t_0)H(t-t_0)](p)=\tilde{f}(p)\mathrm{e}^{-t_0p},\ t_0\geq 0$;

3、$\mathscr{L}[t^nf(t)](p)=(-1)^n\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}\tilde{f}(p)$;

一 填空题(30分，每空5分)

1. 给定方程$u_{tt}+u_{xxxx}=hu_t^2$, 则此方程是几阶方程? 以及是否是齐次方程?
<u>四阶、齐次方程</u>.

2. 设有初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & 0<x<l,t>0,\\ u(0,t)=A,\ u_x(l,t)=B, & t\geq 0,\\ u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\psi(x), & 0\leq x\leq l,\end{cases}$$

其中A,B是常数，将此问题化为齐次边界条件的初边值问题得到

$$\underline{\begin{cases} v_{tt}-a^2v_{xx}=0, & 0<x<l,t>0,\\ v(0,t)=0,\ v_x(l,t)=0, & t\geq 0,\\ v(x,0)=\varphi(x)-A-Bx,v_t(x,0)=\psi(x), & 0\leq x\leq l,\end{cases}};$$

用分离变量法求解此问题时，所得特征函数系是 $\underline{\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l},n=1,2,\cdots}$.

3. 对于波动方程$u_{tt}-u_{xx}=0,x\in R,t>0$，设区间$[x_1,x_2]$的决定区域是$\{(x,t):-1+t\leq x\leq 3-t,0\leq t\leq 2\}$, 则该区间$[x_1,x_2]=$ $\underline{[-1,3]}$.

4. 设$u(x,y)=x^3y+x\varphi(y)$是调和函数，则$\varphi(y)=$ <u>$-6y^3+Cy+D,C,D$是任意常数</u>.

5. 按镜像法，上半空间$R_+^3=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3):\ x_1,x_2\in R,x_3>0\}$ 的格林函数 $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=\underline{\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}-\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}^*|}\right]}$.

线 封 密

二 (15分) 用分离变量法求解圆外区域$D=\{(x,y)\ :x^2+y^2>a^2\}$上Laplace方程边值问题(推导出解的表达式及计算各系数的公式):

$$\begin{cases}\Delta u:=u_{rr}+\dfrac{1}{r}u_r+\dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0, \quad a<r<\infty, 0\le\theta<2\pi,\\ u(a,\theta)=h(\theta),\ 0\le\theta<2\pi,\\ \lim\limits_{r\to\infty}u(r,\theta)\text{有界}.\end{cases}$$

解 令$U(r,\theta)=R(r)\Phi(\theta)$非平凡特解，将其代入方程，得

$$\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}=-\frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)}=\lambda(\text{常数}).$$

因此，$r^2R''(r)+rR'(r)-\lambda R(r)=0,\ \Phi''(\theta)+\lambda\Phi(\theta)=0.$ 由$U(r,\theta)=U(r,\theta+2\pi)$，得$\Phi(\theta)=\Phi(\theta+2\pi)$; 由$\lim\limits_{r\to\infty}u(r,\theta)$有界, 得$\lim\limits_{r\to\infty}R(r)$ 有界.

求解特征值问题

$$\begin{cases}\Phi''(\theta)+\lambda\Phi(\theta)=0,\\ \Phi(\theta)=\Phi(\theta+2\pi),\end{cases}$$

得特征值$\lambda_n=n^2$,特征函数$\Phi_n(\theta)=C_n\cos n\theta+D_n\sin n\theta,\ n=0,1,\cdots$. 把$\lambda=\lambda_n=n^2$代入$R(r)$所在的方程，得

$$r^2R_n''(r)+rR_n'(r)-n^2R_n(r)=0.$$

求得此方程的通解为

$$R_0(r)=A_0+B_0\ln r,\ R_n(r)=A_nr^{-n}+B_nr^n,\ n=1,2,\cdots.$$

再利用$\lim\limits_{r\to\infty}R(r)$，得$B_n=0,\ n=0,1,2,\cdots$. 所以$R_n(r)=r^{-n},\ n=0,1,2,\cdots$ (取 $A_n=1$). 因此非平凡特解

$$U_n(r,\theta)=(C_n\cos n\theta+D_n\sin n\theta)r^{-n},\ n=0,1,2,\cdots.$$

叠加得一般解

$$u(r,\theta)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cos n\theta+D_n\sin n\theta)r^{-n}.$$

利用边界条件，得

$$C_0+\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cos n\theta+D_n\sin n\theta)a^{-n}=h(\theta),\ 0\le\theta<2\pi.$$

所以

$$C_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(\theta)\mathrm{d}\theta,\ C_n=\frac{a^n}{\pi}\int_0^{2\pi}h(\theta)\cos n\theta\mathrm{d}\theta, D_n=\frac{a^n}{\pi}\int_0^{2\pi}h(\theta)\sin n\theta\mathrm{d}\theta.$$

线 封 密

三 (10分) 求函数$f(t) = t\mathrm{e}^{-t}\cos\omega t,\ t \in [0,\infty)$ 的Laplace变换.

四 (10分) 用 Laplace 变换法求解定解问题

$$\begin{cases} xu_t + u_x = x, & x > 0,\ t > 0, \\ u(0,t) = \sin t, & t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

五 (12分) 用 Fourier 变换法推导出下列边值问题的求解公式

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x\in R,\ y>0, \\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in R, \\ \lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} u(x,y)=0. \end{cases}$$

注：$\mathscr{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-a|\lambda|}](x)=\dfrac{a}{\pi(x^2+a^2)}$,常数$a>0$.

六 (10分) 用降维法及达朗贝尔公式推导下列三维波动方程初值问题的解的表达式

$$
\begin{cases}
u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})=0, & (x,y,z)\in R^3, t>0,\\
u|_{t=0}=zg(y),\ u_t|_{t=0}=h(x), & (x,y,z)\in R^3.
\end{cases}
$$

线

封

密

七 (13分) 用分离变量法及Bessel函数理论推导下列边值问题的解的表达式，并给出有关系数的计算公式

$$\begin{cases} u_{rr}+\dfrac{1}{r}u_r+\dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+u_{zz}=0, & 0<r<1, 0\le\theta<2\pi,\ 0<z<h, \\ |u(0,\theta,z)|<\infty,\ u(1,\theta,z)=0, & 0\le\theta<2\pi, 0\le z\le h, \\ u(r,\theta,0)=0,\ u(r,\theta,h)=\varphi(r)\sin\theta, & 0\le r\le 1, 0\le\theta<2\pi. \end{cases}$$

注：$N_n^2=\displaystyle\int_0^1 xJ_1^2(\alpha_n x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}J_2^2(\alpha_n)$, 其中$\alpha_n$是 $J_1(x)$的第n个正零点.