东 南 大 学 考 试 卷 （A卷）

课程名称 高等数学A（下)期中　考试学期 13-14-3　得分 ________

适用专业 选学高数A的各类专业　考试形式 闭 卷　考试时间长度 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六
得分						
评阅人						

一、 填空题（本题共6小题，每小题4分，共24分）

1. 设 $f(x,y)=y^2\mathrm{e}^{2x}+(x-1)\arctan\dfrac{\mathrm{e}^y}{x}$，则 $f_y(1,1)=$________；

2. 设 $z=x\mathrm{e}^{xy}$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________；

3. 曲面 $z-\mathrm{e}^z+2xy=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程是________；

4. $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1|x-y|\mathrm{d}y=$________；

5. 设 $z=x^2-xy+y^2$在点 $(1,1)$ 处沿方向 $\mathbf{a}$ 的方向导数取到最大值，且 $|\mathbf{a}|=1$，则 $\mathbf{a}=$________；

6. 复数 $(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}}$ 的主值是________.

二、 单项选择题（本题共4小题，每小题4分，共16分）

1. 设函数 $f(u)$ 连续，则 $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y}f(x^2+y^2)\mathrm{d}x=$　[　　]

(A) $\displaystyle\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x^2+y^2)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x-1}f(x^2+y^2)\mathrm{d}y$

(B) $\displaystyle\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0f(x^2+y^2)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}f(x^2+y^2)\mathrm{d}y$

(C) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}}f(\rho^2)\mathrm{d}\rho+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1f(\rho^2)\mathrm{d}\rho$

(D) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}}f(\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1f(\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho$

2. 设 $\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leq 1\}$, Ω_1 为 Ω 在第一卦限的部分，则下列等式成立的是 [ ]

(A) $\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}v = 8\iiint\limits_{\Omega_1} x\mathrm{d}v$ (B) $\iiint\limits_{\Omega} x^2y\mathrm{d}v = 8\iiint\limits_{\Omega_1} x^2y\mathrm{d}v$

(C) $\iiint\limits_{\Omega} (z^2+\sin x)\mathrm{d}v = 8\iiint\limits_{\Omega_1} (z^2+\sin x)\mathrm{d}v$

(D) $\iiint\limits_{\Omega} (z^2+\cos x)\mathrm{d}v = 8\iiint\limits_{\Omega_1} (z^2+\cos x)\mathrm{d}v$

3. 设 C 为曲线 $x=\mathrm{e}^t\cos t, y=\mathrm{e}^t\sin t, z=\mathrm{e}^t$ 上对应于 t 从 0 变到 2 的一段弧，则曲线积分 $\int_C \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s=$ [ ]

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\mathrm{e}^{-2})$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}(\mathrm{e}^{-2}-1)$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\mathrm{e}^{2})$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}(\mathrm{e}^{2}-1)$

4. 设 $\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leq 1\}$，则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{e}^{|z|}\mathrm{d}v=$ [ ]

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) π (C) $\frac{3}{2}\pi$ (D) 2π.

三、 计算下列各题（本题共5小题，每小题8分，满分40分）

1. 设 $z=x^2f(xy,\frac{y}{x})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，计算 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2. 计算二次积分 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^1\frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}y$.

3. 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3-3x^2+3y-9x$ 的极值.

4. 设上半球面 $\Sigma=\{(x,y,z)|z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}, R>0\}$，面密度为常数 μ，求 Σ 的质心坐标.

5. 已知函数 $u=f(x,y,z,t)$ 关于各变量都具有一阶连续偏导数，其中函数 $z=z(y)$ 和 $t=t(y)$ 由方程组 $\begin{cases} y^2+yz-zt^2=0 \\ t+2z=0 \end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

四、（本题满分8分）设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 是解析函数，其中实部 $u(x,y)=\mathrm{e}^{-y}\cos x+xy$，求虚部 $v(x,y)$，并求 $f(z)$ 的表达式.

(自变量单独用 z 表示)

五、（本题满分6分）计算三次积分

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{1}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}z.$$

六、（本题满分6分）设函数 $f(u)$ 满足：$f(0)=0,f'(0)=1$，$\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 2tz\}$，计算

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\displaystyle\iiint_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v}{t^5}.$$

13-14-3 高数 A 期中试卷参考答案

一. 填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. 设 $f(x,y)=y^2e^{2x}+(x-1)\arctan\dfrac{e^y}{x}$，则 $f_y(1,1)=$ __$2e^2$__；

2. 设 $z=xe^{xy}$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ __xe^{xy}__；

3. 曲面 $z-e^z+2xy=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程为 __$2x+y=4$__ 设；

4. $\int_0^1 dx\int_0^1|x-y|dy=$ __$\dfrac{1}{3}$__；

5. 设 $z=x^2-xy+y^2$ 在点 $(1,1)$ 处沿方向 $\mathbf{a}$ 的方向导数取得最大值，且 $|\mathbf{a}|=1$，则 $\mathbf{a}=$ __$\{\dfrac{\sqrt2}{2},\dfrac{\sqrt2}{2}\}$__；

6. 复数 $(1+i)^i$ 的主值是 __$e^{-\frac{\pi}{4}+i\ln\sqrt2}$__

二. 单项选择题（本题共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

1. 设函数 $f(u)$ 连续，则 $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y}f(x^2+y^2)dx=$ [D]

(A) $\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x^2+y^2)dy+\int_0^1 dx\int_0^{1-x}f(x^2+y^2)dy$

(B) $\int_{-1}^0 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x^2+y^2)dy+\int_0^1 dx\int_0^{1-x}f(x^2+y^2)dy$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}}f(\rho^2)d\rho+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi\int_0^1 f(\rho^2)d\rho$

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}}f(\rho^2)\rho d\rho+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi\int_0^1 f(\rho^2)\rho d\rho$

2. 设 $\Omega=\{(x,y,z)\ |x^2+y^2+z^2\le1\}$，$\Omega_1$ 为 Ω 在第一象限的部分，则下列等式成立的是 [D]

(A) $\iiint\limits_{\Omega}xdv=8\iiint\limits_{\Omega_1}xdv$ (B) $\iiint\limits_{\Omega}x^2ydv=8\iiint\limits_{\Omega_1}x^2ydv$

(C) $\iiint\limits_{\Omega}(z^2+\sin x)dv=8\iiint\limits_{\Omega_1}(z^2+\sin x)dv$

(D) $\iiint\limits_{\Omega}(z^2+\cos x)dv=8\iiint\limits_{\Omega_1}(z^2+\cos x)dv$

3. 设曲线 C 为 $x=e^t\cos t,y=e^t\sin t,z=e^t$ 上对应于 t 从0到2 的一段弧，则曲线积分

$\int_C \frac{1}{x^2+y^2+z^2} ds =$ [A]

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}(1-e^{-2})$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}(e^{-2}-1)$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}(1+e^{2})$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}(e^{2}-1)$

4. 设$\Omega=\{(x,y,z)\ |x^2+y^2+z^2\le 1\}$，则三重积分$\iiint\limits_{\Omega} e^{|z|}dv =$ [D]

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) π (C) $\frac{3}{2}\pi$ (D) 2π

三. 计算下列各题(本题共 5 小题，每小题 8 分，满分 40 分)

1. 设$z=x^3 f(xy,\frac{y}{x})$，其中f具有二阶连续偏导数，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解： $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=3x^2 f_1+f_2+x^3 yf_{11}-\frac{y}{x}f_{22}$

2. 计算二次积分$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^1 \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}y$ $=\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$

3. 求函数$f(x,y)=x^3-y^3-x^2+3y-9x$的极值。

解： 极大值 $f(-1,1)=7$， 极小值 $f(3,-1)=-29$

4. 设上半球面$\Sigma=\{(x,y,z)\ |z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}, R>0\}$，面密度为常数$\mu$，求$\Sigma$的质心坐标。

解： $(0,0,\frac{R}{2})$

5. 已知函数$u=f(x,y,z,t)$关于各变量都具有一阶连续偏导数，其中函数$z=z(y)$和$t=t(y)$由方程组$\begin{cases} y^2+yz-zt^2=0 \\ t+2z=0 \end{cases}$确定，求$\frac{\partial u}{\partial y}$。

解： $\frac{\partial u}{\partial y}=f_2+\frac{2y+z}{t^2-4zt-y}(f_3-2f_4)$

四（本题满分 8 分）设$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$是解析函数，已知实部$u=e^{-y}\cos x+xy$，求虚部$v(x,y)$， 并求$f(z)$的表达式(**单独用 z 表示**)。

$$v = e^{-y}\sin x + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$f(z) = \cos z + i(\sin z - \frac{1}{2}z^2 + C) \quad 或 \quad e^{iz} + i(C - \frac{1}{2}z^2)$$

五（本题满分 6 分）计算三次积分 $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{1}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}z$。

解：

$$原式 = \int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{2\cos\theta}r\sin\theta dr = \frac{7-4\sqrt{2}}{6}\pi$$

六（本题满分 6 分）设函数 $f(u)$ 满足：$f(0)=0, f'(0)=1$，$\Omega=\{(x,y,z)\ |x^2+y^2+z^2\le 2tz\}$，

计算 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\iiint\limits_{\Omega}f(x^2+y^2+z^2)dv}{t^5}$。

解：$\iiint\limits_{\Omega} = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2t\cos\theta}f(r^2)r^2\sin\theta dr = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2t\cos\theta}f(r^2)r^2\sin\theta dr$

$= 2\pi\int_0^{2t}f(r^2)r^2dr\int_0^{\arccos\frac{r}{2t}}\sin\theta d\theta = 2\pi\int_0^{2t}f(r^2)r^2dr - \frac{\pi}{t}\int_0^{2t}f(r^2)r^3dr$

$\therefore 原式 = 2\pi\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\int_0^{2t}f(r^2)r^2dr}{t^5} - \pi\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\int_0^{2t}f(r^2)r^3dr}{t^6} = \frac{64}{5}\pi - \frac{32}{3}\pi = \frac{32}{15}\pi$