线

封

密

自觉遵守考场纪律

如考试作弊

此答卷无效

姓名______

学号______

东 南 大 学 考 试 卷 (A 卷)

课程名称 数学物理方法 考试学期 14-15-3 得分________

适用专业 面上 考试形式 闭卷 考试时间长度 120分钟

题目	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

注意：本份试卷可能会用到以下公式：

1、$\mathscr{L}[\sin\alpha t](p)=\dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$，$\mathscr{L}[\cos\alpha t](p)=\dfrac{p}{p^2+\alpha^2}$，$\mathscr{L}[t^n\mathrm{e}^{at}](p)=\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$；

2、$\mathscr{L}[f(t-t_0)H(t-t_0)](p)=\tilde{f}(p)\mathrm{e}^{-t_0p},\ t_0\geq 0;$

3、$(x^{\nu}J_{\nu}(x))'=x^{\nu}J_{\nu-1}(x),\ (x^{-\nu}J_{\nu}(x))'=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x).$

4、$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-Ax^2}](\lambda)=\sqrt{\dfrac{\pi}{A}}\mathrm{e}^{-\lambda^2/(4A)}, A>0.$

一 填空题(30分)

1. 在研究长为l的均匀的弦作微小横振动的问题时，如果此弦两端固定，则边界条件可表示为________________.

2. 特征值问题
$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, & 0<x<l,\\ X(0)=0,\ X(l)=0 \end{cases}$$
的所有特征值及特征函数是________________.

3. 用分离变量法或特征展开法求解弦振动方程的初边值问题时，如果边界条件是$u(0,t)=\alpha(t)$，$u_x(l,t)=\beta(t)$，则取$w(x,t)=$________________，再作一个变换$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$化为v的方程且此时边界条件是齐次边界条件.

4. 求解弦的自由振动方程的初值问题
$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x), & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$
的d'Alembert公式为 $u(x,t)=$________________________.

5. 对波动方程$u_{tt}-4u_{xx}=0,-\infty<x<\infty,t>0$，点$M(-1,3)$的依赖区间是__________.

6. 变换$w=\frac{1}{z-2}$把圆$|z|=1$变成(用含w等式表示) ________________.

二 (15分) 用分离变量法求初边值问题（推导出一般解的表达式及求系数的计算公式）

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0, \\ u_x(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), & 0 < x < l. \end{cases}$$

线

封

密

线

封

密

三 (10分) 求函数$f(x)=\begin{cases} 1-x^2, & |x|\le 1, \\ 0, & |x|>1 \end{cases}$ 的Fourier变换.

四 (12分) 用 Laplace 变换法推导出下列半无界定解问题的求解公式, 其中常数$a\neq 0$,

$$\begin{cases} u_t+au_x=f(x,t), & x>0,\ t>0, \\ u(0,t)=0, & t>0, \\ u(x,0)=\varphi(x), & x\ge 0. \end{cases}$$

五 (10分) 用 Fourier 变换法推导出下列初值问题的求解公式

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + u = f(x,t), & x \in R,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in R. \end{cases}$$

线

封

六 (10分) 记$D = \{z = x + \mathrm{i}y \mid x > 0, y > 0\}$. (1) 求一个保角变换，使其把区域$D$变成上半平面；(2) 写出区域$D$上的Green函数.

密

线

封

密

七 (13分) 用分离变量法求解下列边值问题

$$\begin{cases} (u_{rr} + \dfrac{1}{r} u_r) + u_{zz} = 0, & 0 < r < 1,\ 0 < z < h, \\ |u(0,z)| < \infty,\ u(1,z) = 0, & 0 \le z \le h, \\ u(r,0) = 0,\ u(r,h) = 1 - r^2, & 0 \le r \le 1. \end{cases}$$

注：$\int_0^b x J_0^2(\alpha_k x/b)\mathrm{d}x = \dfrac{b^2}{2} J_1^2(\alpha_k)$, 其中$\alpha_k$是 $J_0(x)$的第k个正零点.