东 南 大 学 考 试 卷（A 卷）

课程名称 高等数学A期末 考试学期 09-10-3 得分

适用专业 选修高数A的各专业 考试形式 闭卷 考试时间长度 150分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

一.填空题(本题共9小题，每小题4分，满分36分)

1. 将 $\int_{-2}^{2}\mathrm{d}x\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}y\int_{0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}z$ （其中 $f(t)$ 为连续函数）写成球面坐标系下的三次积分_____________________________________；

2. 球面 $x^2+y^2+z^2-3x=0$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切平面方为____________________；

3. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi<x\le 0\\ 2x, & 0<x\le\pi\end{cases}$，且以 2π 为周期，$S(x)$ 为 $f(x)$ 的Fourier级数的和函数，

则 $S(3\pi)=$____________，$S(-2\pi)=$____________；

4. 已知 $(axy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1+by\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$ 为某个二元函数 $f(x,y)$ 的全微分,则

$a=$____ , $b=$____ ；

5. 设 C 为圆周 $|z|=2$，取逆时针方向，则 $\oint_C\frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-4)}\mathrm{d}z=$________________；

6. 留数 $\mathrm{Res}\left[\frac{\ln(1+2z)}{1-\cos z},0\right]=$________________；

7. 设 $\mathbf{r}=\{x,y,z\}$, $r=|\mathbf{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则散度 $\mathrm{div}(\mathrm{e}^r\mathbf{r})=$________________； **8.**设 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\le z\le 1)$ 下侧，则

$\iint\limits_{\Sigma}3x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=$____________；

9. 设 $F(t)=\iint\limits_{x+y\le t}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $f(x,y)=\begin{cases}x, & y\ge x^2 且 x\ge 0\\ 0, & 其它\end{cases}$，则 $F(2)=$_.

二. 计算下列各题(本题共4小题，每小题7分，满分28分)

10. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $ze^z=xe^y+ye^x$ 所确定的隐函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

11．计算 $\int_0^{\sqrt{2}} e^{-y^2}dy\int_0^{y} e^{-x^2}dx+\int_{\sqrt{2}}^{2} e^{-y^2}dy\int_0^{\sqrt{4-y^2}} e^{-x^2}dx$.

12．判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n-1)!}{n^{n-1}}\left(\dfrac{17}{9}\right)^{n-1}$ 的敛散性.

13. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{\ln n}}{n}x^n$ 的收敛域.（**注**：级数若在收敛区间的端点处收敛，须说明是绝对收敛还是条件收敛.）

三（14）.（本题满分 7 分）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0\le x<\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}\le x<\pi\end{cases}$ 在 $[0,\pi]$ 上展开成正弦级数，并写出它的和函数.

四(15)。(本题满分 7 分)将函数 $f(z)=\dfrac{2+z}{(1-z)^2}$ 在圆环域 $2<|z+1|<+\infty$ 内展开为 Laurent 级数.

五（16）（本题满分 7 分）计算 $\oint_C\dfrac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$ ，其中 C 为 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=\left(\dfrac{1}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$ ，方向为逆时针.

六（17）（本题满分 8 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1-\dfrac{1}{n(2n-1)}\right)x^{2n}$ 的收敛域与和函数 $S(x)$ ，并求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1-\dfrac{1}{n(2n-1)}\right)\dfrac{1}{2^n}$ 的和.

七（18）（本题满分 7 分）计算由柱面 $x^2+y^2=2x$ 、锥面 $2z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 xOy 平面所围立体的表面积.

09-10-3 高等数学 A 期末试卷（A）参考答案

一.填空题(本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 36 分)

1、$\underline{\int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \int_0^2 f(r^2) r^2 \mathrm{d}r}$　　2、$\underline{x-2y-2z+3=0}$

3、$S(3\pi) = \underline{\pi + \frac{1}{2}}$，$S(-2\pi) = \underline{\frac{1}{2}}$　　4、$a = \underline{2}$，$b = \underline{-2}$

5、$\oint_C \frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-4)} \mathrm{d}z = \underline{-2\pi \frac{1+4\mathrm{i}}{7}}$　　6、$\mathrm{Res}\left[\frac{\ln(1+2z)}{1-\cos z}, 0\right] = \underline{4}$

7、$\mathrm{div}(\mathrm{e}^r \mathbf{r}) = \underline{\mathrm{e}^r (3+r)}$

8、$\iint_{\Sigma} 3x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + 2y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (z-1)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \underline{2\pi}$　　9、$F(2) = \underline{\frac{5}{12}}$

二. 计算下列各题(本题共 4 小题，每小题 7 分，满分 28 分)

10、**解：** $\frac{\partial z}{\partial x}(1+z)\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x$，$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\mathrm{e}^{y-z} + y\mathrm{e}^{x-z}}{1+z}$，$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\mathrm{e}^{x-z} + x\mathrm{e}^{y-z}}{1+z}$

11、**解：** $D = \left\{(x,y) \middle| x^2 + y^2 \le 4, 0 \le x \le y\right\}$，

原式$= \iint_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^2 \mathrm{e}^{-\rho^2} \rho \,\mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{8}\left(1 - \mathrm{e}^{-4}\right)$

12、**解：** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \frac{17}{9} = \frac{17}{9\mathrm{e}} < 1$，由达朗贝尔比值判别法知级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} \left(\frac{17}{9}\right)^{n-1}$ 收敛.

13、**解：** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{\ln(n+1)}}{n+1} \cdot \frac{n}{2^{\ln n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} 2^{\ln(1+\frac{1}{n})} = 1$，所以$R = 1$，$\frac{2^{\ln n}}{n} = \frac{1}{n^{1-\ln 2}}$，

$0 < 1 - \ln 2 < 1$，故当$x = 1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\ln n}}{n}$发散，当$x = -1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{\ln n}}{n}$条件收敛，故收敛域为$[-1,1)$.

三（14）.（本题满分 7 分）

解： $a_n = 0$，$n = 0,1,2,\cdots$，$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin nx \mathrm{d}x = \frac{1}{n\pi}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right)$，$n = 1,2,\cdots$，

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)\sin nx=\begin{cases} f(x), & x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right] \\ \frac{1}{4}, & x=\frac{\pi}{2} \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

四（15）.（本题满分 7 分）

解： $\frac{1}{1-z}=\frac{1}{2-(z+1)}=-\frac{1}{z+1}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z+1}}=-\sum_{n=0}^{\infty}2^{n}(z+1)^{-n-1}$， $2<\left|z+1\right|<+\infty$

$$f(z)=\frac{2+z}{(1-z)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)2^{n}(z+1)^{-n-2}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)2^{n}(z+1)^{-n-1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(3n+2)2^{n-1}(z+1)^{-n-1}\quad 2<\left|z+1\right|<+\infty$$

五（16）（本题满分 7 分）

解： $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$，取正数$\varepsilon$ 很小，使$C_\varepsilon: x^2+y^2=\varepsilon^2$ 含于

$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$ 内，**（1 分）** $\oint_C\frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=2\varepsilon^{-2}\iint_{D_\varepsilon}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi$

六（17）（本题满分 8 分）

解： $S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n}=\frac{x^2}{1+x^2}$， $x\in(-1,1)$

$$S_2'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(2n-1)}x^{2n}\right)'=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}=2\arctan x,\quad x\in[-1,1],$$

$S_2(x)=2x\arctan x-\ln(1+x^2)$， $x\in[-1,1]$，

于是，$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1-\frac{1}{n(2n-1)}\right)x^{2n}=\frac{x^2}{1+x^2}-2x\arctan x+\ln(1+x^2)$， $x\in(-1,1)$

（1 分），$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1-\frac{1}{n(2n-1)}\right)\frac{1}{2^n}=S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{3}-\sqrt{2}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}+\ln\frac{3}{2}$

七（18）（本题满分 7 分）

解： 记S_1为锥面$2z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面$x^2+y^2=2x$ 所截部分，其面积记为A_1，记S_2为柱面$x^2+y^2=2x$ 被锥面$2z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和xOy 平面所截部分，其面积记为A_2，记S_3为

底面，其面积记为A_3，表面积$A = A_1 + A_2 + A_3$

$$A = \iint\limits_{x^2+y^2\le 2x} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\,\mathrm{d}\sigma + \frac{1}{2}\int\limits_{x^2+y^2=2x} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s + \pi = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}+1\right)\pi + 2\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \left(\frac{\sqrt{5}}{2}+1\right)\pi + 4$$ 。