18-19-3高数A期末试卷（A）参考答案与评分标准

一、 填空题（本题共9小题，每小题4分，满分36分）

1. $\underline{-4\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y}$； 2. $\underline{\text{收敛}}$； 3. $S(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x}{3}, & 0<x<6,\\ 0, & x=0,\pm 6,\\ -(1+\dfrac{x}{3}), & -6<x<0.\end{cases}$； 4. $\underline{\displaystyle\int_0^{48}\mathrm{d}y\int_{y/12}^{\sqrt{y/3}}f(x,y)\mathrm{d}x}$；

5. $\underline{xye^{2y}+1}$； 6. $\underline{\dfrac{2\sqrt{6}\pi}{3}}$； 7. $\underline{\pi a^3}$； 8. $\underline{\cos 1+2\sin 1}$； 9. $\underline{0}$.

二、 计算下列各题（本题共5小题，每小题7分，满分35分）

1. 解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+2}{n+1}\right|=1$，而当 $x=\pm1$ 时 $\pm\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)$ 发散, 所以收敛域为 $(-1,1)$. (3')

$$S(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}2(n+1)x^{2n+1}=\frac{1}{2}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+2}\Big)'=\frac{1}{2}\Big(\frac{x^2}{1-x^2}\Big)'=\frac{x}{(1-x^2)^2}. \quad (4')$$

2. 解 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}\mathrm{e}^x+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}\mathrm{e}^x+x^2}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\mathrm{d}x.$ (2')

由 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}\mathrm{e}^x+x^2}=1$, 得 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}\mathrm{e}^x+x^2}\mathrm{d}x$收敛; (2')

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}\mathrm{e}^x+x^2}=0$, 得 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}\mathrm{e}^x+x^2}\mathrm{d}x$ 亦收敛. 所以原级数收敛. (3')

3. 解 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-1}=\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{z+1}\Big)=\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{z-2+1}-\dfrac{1}{z-2+3}\Big)$ (3')

$$=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{(z-2)(1+\frac{1}{z-2})}-\frac{1}{3(1+\frac{z-2}{3})}\Big)=\frac{1}{2}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-2)^n\Big). \quad (4')$$

4. 解 $f(x)=\ln(1-2x)+\ln(1-x)=\ln(3-2(x+1))+\ln(2-(x+1))$ (3')

$$=\ln 3+\ln\Big(1-\frac{2(x+1)}{3}\Big)+\ln 2+\ln\Big(1-\frac{x+1}{2}\Big)=\ln 6-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{2^n}{3^n}+\frac{1}{2^n}\right](x+1)^n,\ -\frac{5}{2}\le x<\frac{1}{2}. \quad (4')$$

5. 解 令 $P=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$, $Q=\dfrac{y-x}{x^2+y^2}$, 则 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{x^2-2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}$，

因此积分在不包含原点的区域内积分与路径无关. (2')

不妨设 $f(0)>0$, 取单位上半圆周 L, 顺时针方向, 则得到

$$\int_C\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_L\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_L(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y,$$

令 $x=\cos t$, $y=\sin t$, $t:\pi\to0$, 得 $I=\displaystyle\int_\pi^0(\cos t+\sin t)(-\sin t)\mathrm{d}t-(\cos t-\sin t)\cos t\mathrm{d}t=\pi.$ (4')

如果 $f(0)<0$，则取下半单位圆周, 逆时针方向, 此时 $I=-\pi$． (1')

三、（本题满分8分） 解 补充曲面 $S_1: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1, z=0$ 取下侧, (1')

则 $\displaystyle\iint_{S+S_1}(x^2-y\sin x)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(y^2-z^2)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}(2x-y\cos x+2y+2z)\mathrm{d}V$ 2' 0

$\displaystyle=\iiint_{\Omega}2z\mathrm{d}V=\int_0^c 2zab\pi(1-z^2/c^2)\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2}abc^2.$ 3' (3')

$\displaystyle\iint_{S_1}(x^2-y\sin x)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(y^2-z^2)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=-\iint_{D}(-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 2'

$\displaystyle=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t\int_0^1 ab\rho(a\rho\cos t)^2\mathrm{d}\rho=\frac{a^3b\pi}{4}.$ (3')

所以 $\displaystyle\iint_{S}(x^2-y\sin x)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(y^2-z^2)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}abc^2-\frac{a^3b\pi}{4}.$ (1')

四、（本题满分8分） 解 由 $\mathrm{d}z=-\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$ 得

$\displaystyle I=\oint_C(y^2-z)\mathrm{d}x+(2z-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)(-\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)$

$\displaystyle\quad=\oint_C(y^2-(2-x-y)-3x^2+y^2)\mathrm{d}x+(2(2-x-y)-x^2-3x^2+y^2)\mathrm{d}y,$ (3')

令 $P=y^2-(2-x-y)-3x^2+y^2,\ Q=2(2-x-y)-x^2-3x^2+y^2$,

于是 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=-3-8x-4y.$ (3')

所以 $\displaystyle I=\iint_{x^2/4+y^2\le 1}(-3-8x-4y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-3*\pi*2=-6\pi.$ (2')

五、（本题满分7分）

解 因为 $\displaystyle\frac{1}{n^4}\iiint_{\Omega_n}[\sqrt{x^2+y^2+z^2}]\mathrm{d}v=\frac{1}{n^4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^n[r]r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{4\pi}{n^4}\int_0^n[r]r^2\mathrm{d}r,$ (3')

而且 $\displaystyle\frac{4\pi}{n^4}\int_0^n[r]r^2\mathrm{d}r\ge\frac{4\pi}{n^4}\int_0^n r^2(r-1)\mathrm{d}r=\frac{4\pi}{n^4}\Big(\frac{n^4}{4}-\frac{n^3}{3}\Big)\to\pi(n\to\infty),$

$\displaystyle\frac{4\pi}{n^4}\int_0^n[r]r^2\mathrm{d}r\le\frac{4\pi}{n^4}\int_0^n r^2r\mathrm{d}r=\pi,$ (3')

故由夹逼定理得 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\iiint_{\Omega_n}[\sqrt{x^2+y^2+z^2}]\mathrm{d}v=\pi.$ (1')

六、（本题满分6分）

解 (1) 因为 $S_{2n}-S_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{n}{2n}=\dfrac{1}{2}$, 所以级数一定发散. (3')

(2) 考虑留下项的分母: 对于 m 位的整数, 它的首次位只能在 $1,2,\cdots,8$ 中选, 其它位数可在 $0,1,\cdots,8$ 中选, 即总个数为 $8\times 9^{m-1}$, 记这部分数的倒数和为 T_m , 则 $T_m\le 8\times 9^{m-1}\times\frac{1}{10^{m-1}}$.

从而 $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}T_m\le 8\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\frac{9}{10}\Big)^{m-1}=80$.

由于要证明的级数是正项级数, 它的部分和总位于某个T_m, T_{m+1}之间, 从而必定有界, 因此该级数收敛. (3')