东南大学 2004-2005 学年《高等数学(上)》期末考试试卷

课程名称 **高等数学** 考试学期 **04-05** 得分

适用专业 考试形式 **闭卷** 考试时间长度 **150 分钟**

一. 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 函数 $f(x)=\left[\dfrac{1}{1+|x|}\right]$ 的间断点______是第_____类间断点.

2. 已知 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,且 $f(x)=\dfrac{xF(x)}{1+x^2}$,则 $f(x)=$______________.

3. $\int_{-1}^{1} x\left(1+x^{2005}\right)\left(e^{x}-e^{-x}\right)dx=$________.

4. 设 $f(x)=\int_0^x\left(\int_1^{\sin t}\sqrt{1+u^4}\,du\right)dt$,则 $f''(0)=$_______.

5. 设函数 $f(x)=\int_x^{2x}\dfrac{dt}{\sqrt{1+t^3}}\ (x>0)$,则当 $x=$______时, $f(x)$ 取得最大值.

二. 单项选择题(每小题 4 分,共 16 分)

1. 设当 $x\to x_0$ 时, $\alpha(x),\beta(x)$ 都是无穷小 $(\beta(x)\neq 0)$,则当 $x\to x_0$ 时,下列表达式中不一定为无穷小的是 [ ]

(A) $\dfrac{\alpha^2(x)}{\beta(x)}$ (B) $\alpha^2(x)+\beta^2(x)\sin\dfrac{1}{x}$ (C) $\ln\left(1+\alpha(x)\cdot\beta(x)\right)$ (D) $|\alpha(x)|+|\beta(x)|$

2. 曲线 $y=e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$ 的渐近线共有 [ ]

(A) 1 条 (B) 2 条 (C) 3 条 (D) 4 条

3. 下列级数中收敛的级数是 [ ]

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}$ (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ (C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$ (D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^4}dx$

4. 下列结论正确的是 [ ]

(A) 若 $[c,d]\subseteq[a,b]$,则必有 $\int_c^d f(x)dx\le\int_a^b f(x)dx$.

(B) 若 $|f(x)|$ 在区间 $[a,b]$ 上可积,则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积.

(C) 若 $f(x)$ 是周期为 T 的连续函数,则对任意常数 a 都有 $\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$.

(D) 若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内必有原函数.

三. (每小题 7 分,共 35 分)

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x \left(\ln(\cos t) + t^2\right) \mathrm{d}t}{x^3}$.

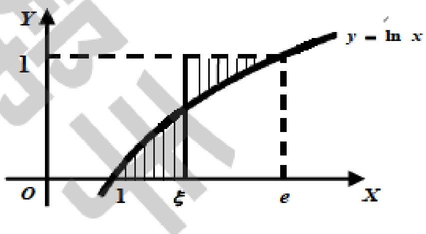
2. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^n}{5^n - 3^n}$ 的敛散性.

3. $\int_0^{\pi} x\sqrt{\cos^2 x - \cos^4 x}\,\mathrm{d}x$.

4. $\int_1^{+\infty} \dfrac{\arctan x}{x^3}\,\mathrm{d}x$.

5. 求初值问题 $\begin{cases} y'' + y = x + \sin x \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ 的解.

四.(8 分) 在区间$[1, \mathrm{e}]$上求一点ξ,使得图中所示阴影部分绕x轴旋转所得旋转体的体积最小.



五.(7 分) 设 $0 < a < b$,求证 $\ln\dfrac{b}{a} > \dfrac{2(b-a)}{a+b}$.

六.(7 分) 设当$x > -1$时,可微函数$f(x)$满足条件

$$f'(x) + f(x) - \frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

且$f(0) = 1$,试证:当$x \geq 0$时,有 $\mathrm{e}^{-x} \leq f(x) \leq 1$ 成立.

七.(7 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续,且 $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f(x)\tan x\mathrm{d}x = 0$,

证明在区间 $(-1,1)$ 内至少存在互异的两点 ξ_1,ξ_2,使 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

04-05-2 高等数学(上)期末试卷参考答案

一. 填空题(每小题 4 分,共 20 分)

1. 0,—; **2.** $\dfrac{Cx}{\sqrt{1+x^2}}$; **3.** $4e^{-1}$; **4.** 1; **5.** $\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}$.

一. 单项选择题(每小题 4 分,共 16 分)

1. A; **2.**B; **3.** D; **4.**C.

二. **(每小题 7 分,共 35 分)**

1. 原式=

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)+x^2}{3x^2}\quad(\cdots\cdots 3\text{分}) = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}\quad(\cdots\cdots 2\text{分}) = \frac{1}{6}\qquad\cdots\cdots 2\text{分}$$

2. $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{4^{n+1}}{5^{n+1}-3^{n+1}}}{\dfrac{4^n}{5^n-3^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{5}\cdot\frac{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n}{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n+1}} = \frac{4}{5}<1\qquad\cdots\cdots 5\text{分}$$

由比值法知原级数收敛. $\cdots\cdots$ 2分

3. 原式 $=\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin x\left|\cos x\right|\mathrm{d}x(\cdots\cdots 3\text{分}) = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\mathrm{d}x(\cdots\cdots 2\text{分}) = \frac{\pi}{2}\qquad\cdots\cdots 2\text{分}$

4. 原式 $= -\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\arctan x}{x^2}\Big|_1^{+\infty} - \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x^2)}\right]\qquad\cdots\cdots 3\text{分}$

$=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\quad(\cdots\cdots 2\text{分}) = \frac{1}{2}\qquad\cdots\cdots 2\text{分}$

5. 对应的齐次方程的通解为 $\overline{y} = C_1\cos x + C_2\sin x$ $\cdots\cdots$ 2分

非齐次方程 $y''+y=x$ 的一个特解为 $y_1 = x(\cdots\cdots 1\text{分})$,非齐次方程 $y''+y=\sin x$ 的一个特

解为 $y_2 = -\dfrac{x}{2}\cos x(\cdots\cdots 1\text{分})$,原方程的通解为

$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x - \frac{x}{2} \cos x$

(⋯ ⋯ 1分) ,利用初值条件可求得 $C_1 = 1$, $C_2 = -1$, 原问题的解为

$$y = \cos x - \sin x + x - \frac{x}{2} \cos x \qquad \cdots\cdots 2分$$

四.(8 分)

$V(t) = \pi \int_1^t (\ln x)^2 \mathrm{d}x (\cdots\cdots 2分) + \pi \int_t^e (1 - (\ln x)^2) \mathrm{d}x (\cdots\cdots 2分)$

$= \pi \left[\left(x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x \right) \Big|_1^t - \left(x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x \right) \Big|_t^e + e - t \right]$

$= \pi \left(2t(\ln t)^2 - 4t \ln t + 3t - 2 \right)$

令 $V'(t) = \pi \left(2(\ln t)^2 - 1 \right) = 0, \cdots\cdots 2分$ 得 $t = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ $(\cdots\cdots 1分)$, 且 $V''\left(e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right) > 0$

因此 $t = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ 是 $V(t)$ 在 $[1, e]$ 上的唯一的极小值点,再由问题的实际意义知必存在最小体积,故 $\xi = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ 是最小值点. ⋯ ⋯ 1分

五.(7 分) 设 $\frac{b}{a} = t$,原不等式等价于 $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}$, $t > 1$, 即等价于

$$f(t) = (t+1)\ln t - 2(t-1) > 0, \quad t > 1 \qquad \cdots\cdots 3分$$

$$f(1) = 0, \quad f'(t) = \ln t + \frac{1}{t} - 1, \quad f'(1) = 0 \qquad \cdots\cdots 1分$$

$f''(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \ge 0$, $t \ge 1$,且等号当且仅当 $t = 1$ 时成立 ⋯ ⋯ 1分

因此 $f'(t)$ 单增, $f'(t) > f'(1) = 0$, $t > 1$ 从而 $f(t)$ 单增, $f(t) > f(1) = 0$, $t > 1$,原不等式得证. ⋯ ⋯ 2分

六.(7 分)由题设知 $f'(0) = -1$, ⋯ ⋯ 1分

所给方程可变形 $(x+1)f'(x) + (x+1)f(x) - \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 0$

两端对 x 求导并整理得 $(x+1)f''(x) + (x+2)f'(x) = 0$ ⋯ ⋯ 1分

这是一个可降阶的二阶微分方程,可用分离变量法求得 $f'(x) = \frac{Ce^{-x}}{1+x}$ ⋯ ⋯ 2分

由于 $f'(0)=-1$，得 $C=-1$， $f'(x)=-\dfrac{e^{-x}}{1+x}<0$， $f(x)$ 单减，而 $f(0)=1$，所以当 $x\ge 0$ 时，

$f(x)\le 1$（⋯⋯1分），对 $f'(x)=-\dfrac{e^{-x}}{1+x}<0$ 在 $[0,x]$ 上进行积分

$$f(x)=f(0)-\int_0^x\frac{e^{-t}}{1+t}dt\ge 1-\int_0^x e^{-t}dt=e^{-x}$$ ⋯⋯2分

七.(7分) 记 $F(x)=\int_{-1}^x f(t)dt$，则 $F(x)$ 在 $[-1,1]$ 上可导，且 $F(-1)=F(1)=0$ ⋯⋯2分

若 $F(x)$ 在 $(-1,1)$ 内无零点，不妨设 $F(x)>0,x\in(-1,1)$

$$0=\int_{-1}^1 f(x)\tan x\,dx=\int_{-1}^1\tan x\,dF(x)=F(x)\tan x\Big|_{-1}^1-\int_{-1}^1 F(x)\sec^2 x\,dx=-\int_{-1}^1 F(x)\sec^2 x\,dx<0$$

此矛盾说明 $F(x)$ 在 $(-1,1)$ 内至少存在一个零点 x_0， ⋯⋯2分

对 $F(x)$ 在 $[-1,x_0]$，$[x_0,1]$ 上分别使用 Rolle 定理知存在 $\xi_1\in(-1,x_0)$， $\xi_2\in(x_0,1)$，使得

$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$，即 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$ ⋯⋯3分