东南大学 2006-2007 学年《高等数学(上)》期末考试试卷

课程名称 高等数学 **考试学期** 06-07 **得分** ______

适用专业 ______ **考试形式** 闭卷 **考试时间长度** 150 分钟

题号	一	二	三	四	五	六
得分						

一.填空题（本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 36 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\int_0^x e^{t^2}\,dt}{x(\cos x-1)}=$ ______;

2. 曲线 $\begin{cases} x=1+t^2 \\ y=t^3 \end{cases}$ 在 $t=2$ 对应的点处的切线方程为______;

3. 函数 $f(x)=x-\ln(1+x)$ 在区间______内严格单调递减;

4. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $xy-\ln y=1$ 所确定的隐函数，则 $y'(0)=$ ______;

5. $\int_{-1}^{1}\left(\dfrac{x^5}{1+x^2+x^4}-x\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)dx=$ ______;

6. 设 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^x tf(2x-t)\,dt=\dfrac{1}{2}\arctan x^2$，已知 $f(1)=1$，则 $\int_1^2 f(x)\,dx=$ ___;

7. 已知 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$，当 $\Delta x\to 0$ 时，α 是 Δx 的高阶无穷小，已知 $y(0)=\pi$，则 $y(1)=$ ______ ;

8. 曲线 $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$ 的斜渐近线方程是______;

9. 若二阶线性常系数齐次微分方程有两个特解 $y_1=e^{3x}, y_2=e^{x}$，则该方程为______.

二.计算题（本题共 4 小题，每小题 7 分，满分 28 分）

1. 计算不定积分 $\int\dfrac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{x-x^2}}\,dx$

2. 计算定积分 $\int_0^{2\pi} x\left|\sin x\right|\mathrm{d}x$

3. 计算反常积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x\left(x^2+1\right)}\mathrm{d}x$

4. 设 $G(x)=\int_1^x\dfrac{t}{\sqrt{1+t^3}}\mathrm{d}t$，求 $\int_0^1 G(x)\mathrm{d}x$

三.（本题满分 7 分） 求曲线 $\begin{cases} x=\ln\cos t \\ y=\dfrac{1}{2}\sin t \end{cases}$ 自 $t=0$ 到 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 一段弧的长度。

四.（本题共 2 小题，第 1 小题 7 分，第 2 小题 9 分，满分 16 分）

1. 求微分方程 $yy'=\left(\sin x-y^2\right)\cot x$ 的通解。

2. 求微分方程 $y''+y=x+\sin x$ 的特解，使得该特解在原点处与直线 $y=\dfrac{3}{2}x$ 相切。

五.（本题满分 7 分） 设 $\left|a\right|\le 1$，求积分 $I(a)=\int_{-1}^1\left|x-a\right|e^{2x}\mathrm{d}x$ 的最大值。

六.（本题满分 6 分） 设函数 $f(x)$ 在 $[2,4]$ 上存在二阶连续导数，且 $f(3)=0$，证明：至少存在一点 $\xi\in[2,4]$，使得

$$f''(\xi)=3\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x\text{。}$$

06-07-2 高等数学（上）期末参考答案

一.填空题（本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 36 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\int_0^x e^{t^2}dt}{x(\cos x-1)}=\underline{\dfrac{2}{3}}$；

2. 曲线$\begin{cases}x=1+t^2\\ y=t^3\end{cases}$在$t=2$对应的点处的切线方程为$\underline{y=3x-7}$；

3. 函数$f(x)=x-\ln(1+x)$在区间$\underline{(-1,0)}$内严格单调递减；

4. 设$y=y(x)$是由方程$xy-\ln y=1$所确定的隐函数，则$y'(0)=\underline{e^{-2}}$；

5. $\int_{-1}^{1}\left(\dfrac{x^5}{1+x^2+x^4}-x\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)dx=\underline{\dfrac{\pi}{2}}$；

6. 设$f(x)$连续，且$\int_0^x tf(2x-t)dt=\dfrac{1}{2}\arctan x^2$，已知$f(1)=1$,则$\int_1^2 f(x)dx=\underline{\dfrac{3}{4}}$；

7. 已知$y=y(x)$在任意点x处的增量$\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$，当$\Delta x\to 0$时，$\alpha$ 是Δx 的高阶无穷小，已知$y(0)=\pi$，则$y(1)=\underline{\pi e^{\frac{\pi}{4}}}$；

8. 曲线$y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$的斜渐近线方程是$\underline{y=x+\dfrac{1}{e}}$；

9. 若二阶线性常系数齐次微分方程有两个特解$y_1=e^{3x},y_2=e^x$，则该方程为$\underline{y''-4y'+3y=0}$

二.计算题（本题共 4 小题，每小题 7 分，满分 28 分）

1. 计算不定积分 $\int\dfrac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{x-x^2}}dx$

解： $\int\dfrac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{x-x^2}}dx=2\int\dfrac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}d\sqrt{x}=-2\int\arccos\sqrt{x}d\arccos\sqrt{x}$

$=-\left(\arccos\sqrt{x}\right)^2+C$

2. 计算定积分 $\int_0^{2\pi}x|\sin x|dx$

解：$\int_0^{2\pi} x\left|\sin x\right|\mathrm{d}x \underset{}{\underline{\underline{x=t+\pi}}} \int_{-\pi}^{\pi}(t+\pi)\left|\sin t\right|\mathrm{d}t = 2\pi\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t = 4\pi$

3．计算反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}\mathrm{d}x$

解：$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2\left(x^2+1\right)}\mathrm{d}(x^2) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)\Bigg|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}\ln 2$

4．设 $G(x)=\int_1^x\frac{t}{\sqrt{1+t^3}}\mathrm{d}t$，求 $\int_0^1 G(x)\mathrm{d}x$

解：$\int_0^1 G(x)\mathrm{d}x = xG(x)\big|_0^1 - \int_0^1 xG'(x)\mathrm{d}x = -\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)$

三．（本题满分 7 分）求曲线$\begin{cases} x=\ln\cos t \\ y=\frac{1}{2}\sin t\end{cases}$自 $t=0$ 到 $t=\frac{\pi}{4}$ 一段弧的长度。

解：$S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\tan^2 t+\frac{1}{4}\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2-\cos^2 t}{\cos t}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec t\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos t\mathrm{d}t$

$=\left(\ln(\sec t+\tan t)-\frac{1}{2}\sin t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{4}$

四．（本题共 2 小题，第 1 小题 7 分，第 2 小题 9 分，满分 16 分）

1．求微分方程 $yy'=\left(\sin x-y^2\right)\cot x$ 的通解。

解：$\left(y^2\right)'+2\cot x\left(y^2\right)=2\cos x$

$y^2=\mathrm{e}^{-2\int\cot x\mathrm{d}x}\left(2\int\cos x\mathrm{e}^{2\int\cot x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=C\csc^2 x+\frac{2}{3}\sin x$

2．求微分方程 $y''+y=x+\sin x$ 的特解，使得该特解在原点处与直线 $y=\frac{3}{2}x$ 相切。

解：$y=C_1\cos x+C_2\sin x+x-\frac{x}{2}\cos x$，　由题设条件得

$y(0)=0, y'(0)=\frac{3}{2}$，求得 $C_1=0, C_2=1$，于是 $y=\sin x+x-\frac{x}{2}\cos x$

五．（本题满分 7 分）设 $|a|\le 1$，求积分 $I(a)=\int_{-1}^{1}|x-a|\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$ 的最大值。

解：$I(a)=\int_{-1}^{1}|x-a|\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{a}(a-x)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x+\int_a^1(x-a)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$

$=a\int_{-1}^{a}\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x-\int_{-1}^{a}x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x+\int_a^1 x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x-a\int_a^1\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$

令 $I'(a)=\int_{-1}^{a}\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x+a\mathrm{e}^{2a}-a\mathrm{e}^{2a}-a\mathrm{e}^{2a}-\int_a^1\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x+a\mathrm{e}^{2a}=\int_{-1}^{a}\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x-\int_a^1\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$

$= e^{2a} - \frac{1}{2}\left(e^{2} + e^{-2}\right) = e^{2a} - \operatorname{ch} 2 = 0$，得 $a = \ln\sqrt{\operatorname{ch} 2}$ 为唯一驻点， $I''(a) = 2e^{2a} > 0$，

$I\left(\ln\sqrt{\operatorname{ch} a}\right)$ 为 $I(a)$ 在 $[-1,1]$ 上的最小值，而最大值只能在端点 $x=-1, x=1$ 取得。

$I(-1) = \frac{3}{4}e^{2} + \frac{1}{4}e^{-2}$， $I(1) = \frac{1}{4}e^{2} - \frac{5}{4}e^{-2}$，所以 $I_{\max} = I(-1) = \frac{3}{4}e^{2} + \frac{1}{4}e^{-2}$

六.（本题满分 6 分） 设函数 $f(x)$ 在 $[2,4]$ 上存在二阶连续导数，且 $f(3)=0$，证明：至少存在一点 $\xi \in [2,4]$，使得 $f''(\xi) = 3\int_{2}^{4} f(x)\mathrm{d}x$。

证： $f(3)=0$， $f(x) = f'(3)(x-3) + \frac{f''(\eta)}{2}(x-3)^{2}$， $\eta \in (2,4)$，

由于 $f''(x)$ 在 $[2,4]$ 上连续， $f''(x)$ 在 $[2,4]$ 上存在最大值 M 和最小值 m，故

$\frac{m}{2}(x-3)^{2} \le \frac{f''(\eta)}{2}(x-3)^{2} \le \frac{M}{2}(x-3)^{2}$，

$\frac{m}{3} \le \int_{2}^{4} f(x)\mathrm{d}x = f'(3)\int_{2}^{4}(x-3)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{2}^{4} f''(\eta)(x-3)^{2}\mathrm{d}x \le \frac{M}{3}$，

即 $m \le 3\int_{2}^{4} f(x)\mathrm{d}x \le M$，由介值定理知至少存在一点 $\xi \in [2,4]$，使得

$$f''(\xi) = 3\int_{2}^{4} f(x)\mathrm{d}x$$