一、填空题（每空 2 分，共 26 分）

1. $x_1=0.0712$, $x_2=1.45$, $|e(x_1x_2)|\leqslant$ $\underline{4.285\times10^{-4}}$。

解答：

$|e(x_1x_2)|=|x_2e(x_1)+x_1e(x_2)|=x_2|e(x_1)|+x_1|e(x_2)|=1.45\times\frac{1}{2}\times10^{-4}+0.0712\times\frac{1}{2}\times10^{-2}=4.285\times10^{-4}$

2. 计算$\ln(2017-\sqrt{2017^2-1})$，为避免损失精度，应使用算法____________________。

解答：

$$ln(\frac{1}{(2017+\sqrt{2017^2-1})})$$

3. 改写 $y=10+3x^2+4x^3-6x^4$，使乘法次数尽可能少 $\underline{\quad y=10+x^2(3+x(4-6x))\quad}$。

解答：

利用秦九韶公式，得到：$y=10+x^2(3+x(4-6x))$

4. 方程 $x^2-x-1=0$ 在$[0,2]$上进行二分，精度为 6 位有效数字，至少需要分$\underline{\quad 18 \quad}$次。

解答：

设需要分 k 次，$k\in N$。$\varepsilon=\frac{1}{2}\times10^{-5}$

则$|x^*-x|=\frac{2-0}{2^{k+1}}\leq\frac{1}{2}\times10^{-5}$，

解得 $k\geqslant18$，至少需要分 18 次

5. $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，$||A||_\infty=$$\underline{\quad 3 \quad}$，$||A||_2=$$\underline{\sqrt{\frac{7+\sqrt{13}}{2}}}$。

解答：

$||A||_\infty=\max\{2+1,1+1\}=3$

$$A^TA=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$|\lambda E-A^TA|=\begin{pmatrix}\lambda-5 & 1\\ 1 & \lambda-2\end{pmatrix}=(\lambda-5)(\lambda-2)-1=\lambda^2-7\lambda+9=0$$

$\lambda_1=\frac{7+\sqrt{13}}{2}$，$\lambda_2=\frac{7-\sqrt{13}}{2}$

$||A||_2=\sqrt{\lambda\max}=\sqrt{\frac{7+\sqrt{13}}{2}}$

6. $f(x)=10x^3+9x^2+8x+3$，$f[-1,0,1]=$__9__，$f[-1,0,1,2]=$__10__。

解答：

x	-1	0	1	2
f(x)	-6	3	30	135

$f[-1,0]=9$，$f[0,1]=27$，$f[1,2]=105$,

$f[-1,0,1]=9$，$f[0,1,2]=39$，

$f[-1,0,1,2]=10$

7. 方程$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 3\\ 2\end{bmatrix}$的最小二乘解为 $x_1=$__$-\frac{5}{6}$__，$x_2=$__$-\frac{2}{3}$__。

解答：

$$A^TA=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}$$

$$A^T\begin{bmatrix}-1\\ 3\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 3\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\ -5\end{bmatrix}$$

$$\therefore\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\ -5\end{bmatrix}$$

得到最小二乘解 $x_1=-\frac{5}{6}$，$x_2=-\frac{2}{3}$

8. $\begin{cases}y'=-y+x\\ y(0)=1\end{cases}$，步长 h=0.2，用梯形公式导出 $y_{i+1}=$______________。

9. $\begin{cases}y'=f(x,y),\ a\le x\le b\\ y(a)=\xi\end{cases}$，取步长 h，改进 Euler 公式为____________，它是___阶公式。

二、用迭代法求方程 $x^3-2x^2+x+1=0$，分析该方程有几个实根，并用迭代法求根，精确至 4 位有效数字。

三、用列主元 Gauss 消去法求解矩阵方程$\begin{bmatrix}2 & 4 & 3\\1 & -1 & 2\\4 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-1\\3\end{bmatrix}$。

四、给定$\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$

（1）求此线性方程组的 Gauss-Seidel 迭代格式。

（2）分析此迭代格式的敛散性。

五、设$f(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$，f(1)=0.7468, f(1.5)=0.8562, f(2)=0.8821，试建立 f(x)以 1, 1.5, 2 为插值节点的分段线性插值多项式，求 f(1.75)的近似值并分析误差。

六、给定

x	1	2	3	4
y	1.2	1.5	2	3

用最小二乘法求形如 $y=\ln(ax^2+b)$的经验公式。

七、利用复化梯形公式(n=4)按 5 位小数计算积分$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}dx$，并与精确值比较，指出具有几位有效数字。