自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名________ 学号________

……线……封……密……

东 南 大 学 考 试 卷 (A 卷)

课程名称 数学物理方法 考试学期 13-14-3 得分________

适用专业 面上 考试形式 闭卷 考试时间长度 120分钟

题目	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

注意：本份试卷可能会用到以下公式：

1、$\mathscr{L}[\sin\alpha t](p)=\dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$，$\mathscr{L}[\cos\alpha t](p)=\dfrac{p}{p^2+\alpha^2}$，$\mathscr{L}[t^n\mathrm{e}^{at}](p)=\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$;

2、$\mathscr{L}[f(t-t_0)H(t-t_0)](p)=\tilde{f}(p)\mathrm{e}^{-t_0p},\ t_0\geq 0$;

3、$(x^{\nu}J_{\nu}(x))'=x^{\nu}J_{\nu-1}(x),\ (x^{-\nu}J_{\nu}(x))'=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$.

一 填空题(35分)

1. 记函数$f(x)$的Fourier变换为$\hat{f}(\omega)$, 则函数$f(2-2x)$的Fourier变换为 ________________.

2. Laplace逆变换$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{p^2(p^2+1)}\right]=$________________.

3. 长为l的均匀的弦在阻尼介质中振动，单位长度的弦在单位时间内所受阻力为$f=-Ru_t$(R是常数, $u(x,t)$表示弦的振动位移), 则此弦的振动方程为 ________________.

4. 弦的自由振动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u(x,0)=x^2,\ u_t(x,0)=0, & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

的解 $u(x,t)=$ ________________.

5. 特征值问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, & 0<x<l,\\ X'(0)=0,\ X'(l)=0\end{cases}$$

的所有特征值及特征函数是________________.

6. 在上半空间$R^+=\{(x,y,z)\mid -\infty<x,y<\infty,\ z>0\}$内，Laplace方程第一边值问题的Green函数是 ________________.

7. 简述三维波在空间中的传播与二维波在平面上的传播各自的特点: ________________

____.

二 (10分) 求函数$f(x)=\begin{cases}\sin\pi x, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1\end{cases}$ 的Fourier变换.

三 (12分) 利用 Laplace 变换法求解波方程的半无界定解问题, 其中常数$k \neq 0$,

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = k \sin \omega t, & x > 0,\ t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad \lim\limits_{x \to \infty} |u_x(x,t)| < \infty, & t > 0, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

密……封……线

四 (15分) 用分离变量法求解扇形区域上Laplace方程的边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, & 0 < r < a, 0 < \theta < \beta, \\ u(r,0) = 0,\ u(r,\beta) = 0, & 0 \le r \le a, \\ |u(0,\theta)| < \infty,\ \dfrac{\partial u}{\partial r}(a,\theta) = h(\theta), & 0 < \theta < \beta. \end{cases}$$

线

封

密

五 (14分) 求解波方程的半无界定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0,\ t > 0, \\ u(0,t) = t^2, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \sin x,\ u_t(x,0) = x, & x \geq 0. \end{cases}$$

六　(14分) (1) 求解Bessel方程的特征值问题

$$\begin{cases} r^2R''(r)+rR'(r)+\lambda r^2R(r)=0, \quad 0<r<a, \\ |R(0)|<\infty,\ R(a)=0. \end{cases}$$

(2) 将函数$f(x)=x^2\ (0<x<a)$ 按问题(1)所得的特征函数系展开成级数形式.

注：$\displaystyle\int_0^a xJ_0^2(\alpha_k x/a)\mathrm{d}x=\begin{cases} \dfrac{a^2}{2}J_1^2(\alpha_k),\ \text{如果 } \alpha_k \text{ 是 } J_0(x) \text{ 的第 } k \text{ 个正零点}, \\ \dfrac{a^2}{2}J_0^2(\alpha_k),\ \text{如果 } \alpha_k \text{ 是 } J_0'(x) \text{ 的第 } k \text{ 个正零点}. \end{cases}$

线

封

密