东南大学期终考试试卷（A 卷）

课程名称 线性代数A 考试学期 08-09-3 得分

适用专业 非电类专业 考试形式 闭卷 考试时间长度 120分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名______ 学号______

密 封 线

一. （30%）填空题（E 表示单位矩阵）：

1. 设 $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 3 & b \end{pmatrix}$，如果 $A^{10}=O$，则参数 a,b 满足条件________；

2. 设 $k>0$，向量 $\alpha=(k,0,k)^T$，如果矩阵 $A=E-\alpha\alpha^T$ 是 $B=E+\frac{1}{k}\alpha\alpha^T$ 的逆矩阵，则参数 $k=$________；

3. 若 A,B 都是 n 阶可逆矩阵，则分块矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & E \end{pmatrix}$ 的逆矩阵为________；

4. 若向量组 $(1,2,3)^T,(1,x,3)^T,(1,2,y)^T$ 线性相关，则参数 x,y 满足条件________；

5. R^3 的子空间 $V=\left\{(x,y,z)^T \mid x-y-z=0\right\}$ 的维数是________；

6. 假设 3 阶矩阵 A 的秩是 2，η_1,η_2,η_3 是线性方程组 $Ax=b$ 的解，若 $\eta_1+\eta_2=(2,2,4)^T$，

   $\eta_1-\eta_3=(1,0,1)^T$，则 $Ax=b$ 的通解是________；

7. 如果 2 阶矩阵 A 的特征值是 2 和 3，则 A 的伴随矩阵 A^* 的特征值是________；

8. 若 2 是 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ 的二重特征值，且 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角阵，则 $(x,y)=$________；

9. 如果二次型 $x_1^2+tx_2^2+4tx_1x_2$ 是正定的，则参数 t 满足条件________；

10. 如果线性方程组 $\begin{cases} x+3y-z=1 \\ 2x+ay-2z=2 \\ 3x+9y+bz=3 \end{cases}$ 有 3 个线性无关的解向量，则 $(a,b)=$________。

二. （14%）设 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\2&0&-1\end{pmatrix}$，求矩阵方程 $(AB+B^2)X=B$ 的解。

三. （10%）已知向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ 与向量组 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\m\\0\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\n\end{pmatrix}$ 的秩相同，并且，β_3 可以由 α_1,α_2 线性表示。求参数 m,n 的值。

四．（14%）假设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1+a & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+a & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+a & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+a \end{pmatrix}$。

1. 当参数 a 满足什么条件时，齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解？
2. 当 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解时，求其基础解系。

五．（10%）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-4x_1x_2+3x_2^2+4x_2x_3+kx_3^2$，$g(z_1,z_2,z_3)=z_1z_3$。

1. 求一可逆线性变换 $x=Cy$ 将 f 化成标准型。
2. 问：当参数 k 满足什么条件时，存在可逆线性变换将 f 变成 g？

六. （14%）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&x&0\\1&0&2\end{pmatrix}$ 相似于对角阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}y&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$。求参数 x,y 的值，

并求一正交矩阵 Q 使得 $Q^{T}AQ=\Lambda$。

七. （8%）证明题

1. 假设 $n\times n$ 矩阵 A 的秩为 r。证明：存在秩为 $n-r$ 的 $n\times n$ 矩阵 B，使得 $AB=O$。

2. 假设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是 $n\times n$ 实对称矩阵，$\lambda_i(1\le i\le n)$ 是 A 的特征值。证明：

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2$$ 。