东南大学 2008-2009 学年《高等数学(上)》期末考试试卷

课程名称	高等数学	考试学期	08-09	得分	
适用专业	选高数 AB 的专业	考试形式	闭卷	考试时间长度	150 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

一.填空题（本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 36 分）

1. 函数 $F(x)=\int_1^x\left(\frac{1}{\sqrt{t}}-2\right)dt\ (x>0)$ 的单调增加区间为____________；

2. 已知 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\int_0^{t^2}x\arctan(ax)dx}{t^6}=1$，则 $a=$______；

3. 曲线 $y=x^3-6x^2+3x+5$ 的拐点是____________；

4. 曲线 $y=\frac{x^3}{3(2+x)^2}$ 的斜渐近线的方程是________________________；

5. 二阶常系数线性非齐次微分方程 $y''+y'-6y=5e^{2x}$ 的特解形式是 $y^*=$____________；

6. 设 θ 是常数，若对 $\forall x>0$，有 $\int_0^x \ln t\,dt=x\ln\left(\frac{\theta x}{2}\right)$，则 $\theta=$____________；

7. $\int_0^{2\pi}\sin^4 x\,dx=$________________；

8. 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x)=\sin x+\int_0^{\pi}f(x)dx$，则 $\int_0^{\pi}f(x)dx=$__________；

9. 设 $f(x)=\int_1^x\cos t^2dt$，则 $\int_0^1 f(x)dx=$____________.

二.按要求计算下列各题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分） 10 .

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\frac{\sin t^3}{t}dt}{x(1-\cos x)}$$

11. $\int_0^2\left(x^2\sqrt{4-x^2}+(x-1)^4\sin(x-1)\right)dx$

12. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $(1+\sin x)\ln x$，求 $\int xf'(x)dx$

13. 设 $f(x)=2+\int_0^x\frac{x+\sin t}{1+t^2}dt$, $p(x)=ax^2+bx+c$，求常数 a 、b 、c ，使得

$p(0)=f(0)$, $p'(0)=f'(0)$, $p''(0)=f''(0)$。

五（17）.（本题满分 7 分） 在 xOy 平面上将连接原点 $O(0,0)$ 和点 $A(1,0)$ 的线段 OA（即区间 $[0,1]$）作 n 等分，分点记作 $P_k\left(\frac{k}{n},0\right)$，$k=1,2,\cdots,n-1$，过 P_k 作抛物线 $y=x^2$ 的切线，切点为 Q_k，**（1）**设三角形 ΔP_kQ_kA 的面积为 S_k，求 S_k；**（2）**求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}S_k$

14。 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}}dx$

三（15）.（本题满分 8 分） 求微分方程 $y''+y=\sin x+2e^{x}$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1$，$y'\big|_{x=0}=0$ 的特解.

四(16).(本题满分 7 分) 设函数 f 在区间 $[0,+\infty)$ 上连续,且恒取正值,若对 $\forall x\in(0,+\infty)$，f 在 $[0,x]$ 上的积分（平）均值等于 $f(0)$ 与 $f(x)$ 的几何平均值，试求 $f(x)$ 的表达式.

六（18）.（本题满分 6 分） 试比较 $\sqrt{2}-1$ 与 $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ 的大小，并给出证明.**（注：若通过比较这两个数的近似值确定大小关系，则不得分）**

七（19）.（本题满分 6 分） 设 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上连续可导，$f(0)=f(2)=0$，求证：$\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|\le\max\limits_{0\le x\le 2}\left|f'(x)\right|$.

08-09-2 高等数学（上）期末参考答案

一.填空题（本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 36 分）

1. $\left(0,\frac{1}{4}\right)$； **2.** $a=$ $\underline{\ 3\ }$； **3.** $\underline{(2,-5)}$； **4.** $y=\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}$；

5. Axe^{2x}； **6.** $\theta=\frac{2}{e}$； **7.** $\frac{3\pi}{4}$； **8.** $\frac{2}{1-\pi}$； **9.** $-\frac{1}{2}\sin 1$.

二.按要求计算下列各题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分）

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \frac{\sin t^3}{t}dt}{x(1-\cos x)}=\dfrac{2}{3}$ **11.** $\int_0^2\left(x^2\sqrt{4-x^2}+(x-1)^4\sin(x-1)\right)dx=\pi$

12. $\int xf'(x)dx=x\cos x\ln x+(1+\sin x)(1-\ln x)$

13. $a=\frac{3}{2},b=0,c=2$ **14.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\dfrac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}}dx=\frac{1}{2}\ln 2$

三（15）.（本题满分 8 分）

（答案略）

四（16）.（本题满分 7 分）

记 $y_0=f(0),y=f(x)$，则有 $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\sqrt{f(0)f(x)}$，

$$\Rightarrow\ y'+\frac{2}{x}y=\frac{2}{x\sqrt{y_0}}y^{\frac{3}{2}}\qquad\Rightarrow\ y=\left(\frac{1}{\sqrt{y_0}}+cx\right)^{-2}$$

五（17）.（本题满分 7 分） $S_k=\frac{1}{2}(1-\frac{k}{n})\square\frac{4k^2}{n^2}$， $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}S_k=2\int_0^1(1-x)x^2dx$

六（18）.（本题满分 6 分）

令 $f(x)=x-1-\ln(1+x)$，在 $[0,+\infty)$ 单增，

故 $f(\sqrt{2})<f(2)=1-\ln 3<0$，即 $\sqrt{2}-1<\ln(1+\sqrt{2})$.

另解：用积分中值定理

七（19）.（本题满分 6 分）

设 $M=\max\limits_{0\le x\le 2}|f'(x)|$，即要证 $\left|\int_0^2 f(x)dx\right|\le M$

$$\left|\int_0^2 f(x)dx\right|=\left|\int_0^2 f(x)d(x-1)\right|=\left|(x-1)f(x)\Big|_0^2-\int_0^2(x-1)f'(x)dx\right|$$

$$\le\int_0^2|x-1||f'(x)|dx\le M\left|\int_0^2|x-1|dx\right|=M$$