电磁场理论作业 3

06219109 孙寒石

T-2.2

根据Maxwell方程组，导出点电荷的电场强度公式和泊松方程。

Solution:

由Maxwell方程的积分形式，有

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q$$

利用球的对称性，可以得到

$$\vec{D} = \vec{e}_r \frac{q}{4\pi r^2}$$

进一步我们可以导出电荷的电场强度公式

$$\vec{E} = \vec{e}_r \frac{q}{4\pi \varepsilon r^2}$$

由Maxwell方程的微分形式，有

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

我们知道，电场强度和电势的关系是 $\vec{E} = -\nabla \varphi$，所以

$$\nabla \cdot \vec{D} = \varepsilon \nabla \cdot \vec{E} = -\varepsilon \nabla \cdot \nabla \varphi = -\varepsilon \nabla^2 \varphi = \rho$$

进一步我们可以导出泊松方程

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

T-2.5

已知在无源的空气区域中电场强度为

$$\vec{E} = \vec{a}_y 0.1 \sin(10\pi x) \cos(6\pi \times 10^9 t - \beta z)(V/m)$$

利用Maxwell方程求解磁场强度 $\vec{H}$ 和常数 β 。

Solution:

我们通过波动方程可以求 β

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

代入表达式，可以得到

$$\beta = 54.41 \quad rad/m$$

由Maxwell方程的微分形式，有

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{\mu_0} \left[-\vec{e}_x \frac{\partial \vec{E}_y}{\partial z} + e_z \frac{\partial \vec{E}_y}{\partial x} \right]$$

即

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = & -\frac{1}{\mu_0} [-\vec{e}_x 0.1\beta \sin(10\pi x) \sin(6\pi \times 10^9 t - \beta z) \\ & + e_z 0.1 \times 10\pi \cos(10\pi x) \cos(6\pi \times 10^9 t - \beta z) \partial x] \end{aligned}$$

上式对时间 t 积分，可以得到

$$\begin{aligned} \vec{H} = & -\vec{e}_x 2.3 \times 10^{-4} \sin 10\pi x \sin(6\pi \times 10^9 t - 54.41 z) \\ & -\vec{e}_z 1.33 \times 10^{-4} \cos 10\pi x \sin(6\pi \times 10^9 t - 54.41 z) \end{aligned}$$

T-2.7

在均匀的非导电电媒质（$\sigma = 0$）中，时变电磁场为

$$\vec{E} = \vec{a}_z 300\pi \cos(\omega t - \frac{4}{3}y) \quad (V/m)$$

$$\vec{H} = \vec{a}_x 10\pi \cos(\omega t - \frac{4}{3}y) \quad (A/m)$$

该媒质的相对磁导率 $\mu_r = 1$。求角频率 ω 和相对介电常数 ε_r。

Solution:

将 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 用复数表示，得到

$$\vec{E} = \vec{a}_z 300\pi e^{-j\frac{4}{3}y} \qquad \vec{H} = \vec{a}_x 10\pi e^{-j\frac{4}{3}y}$$

由复数Maxwell，得

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla \times \vec{H} = \vec{a}_z \frac{40\pi}{3\omega\varepsilon} e^{-j\frac{4}{3}y}$$

$$\vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu_0}\nabla \times \vec{E} = \vec{a}_x \frac{400\pi}{\omega\mu_0} e^{-j\frac{4}{3}y}$$

所以

$$\frac{40\pi}{3\omega\varepsilon} = 300\pi \qquad \frac{400\pi}{\omega\mu_0} = 10\pi$$

可以得到

$$\omega = 3.18 \times 10^7 rad/s \qquad \varepsilon_r = 157.7$$

T-ppt

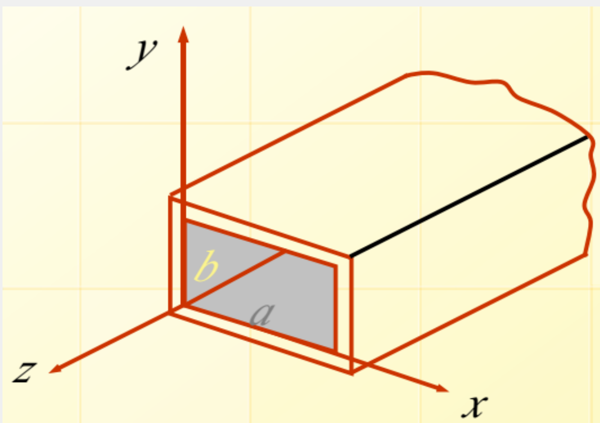
已知内截面为矩形的金属波导中的时变电磁场的各分量为

$$\vec{E}_y = \vec{E}_{y0} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos(\omega t - k_z z)$$

$$\vec{H}_x = \vec{H}_{x0} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos(\omega t - k_z z)$$

$$\vec{H}_z = \vec{H}_{z0} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin(\omega t - k_z z)$$

其坐标如图示。试求波导中的位移电流分布和波导内壁上的电荷及电流分布。波导内部为真空。



Solution:

位移电流

$$\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\vec{e}_y \vec{E}_{y0} \omega \varepsilon \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin(\omega t - k_z z)$$

在 $y = 0$ 的内壁上

$$\rho_S = \vec{n} \cdot \left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right) = \vec{e}_y \cdot (\varepsilon \vec{e}_y E_y) = \varepsilon E_y$$

$$\vec{J}_S = \vec{n} \times \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right) = \vec{e}_y \times (\vec{e}_x H_x + \vec{e}_z H_z) = -\vec{e}_z H_x + \vec{e}_x H_z$$

在 $y = b$ 的内壁上

$$\rho_S = \vec{n} \cdot \left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right) = -\vec{e}_y \cdot \left(\varepsilon \vec{e}_y E_y\right) = -\varepsilon E_y$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{J}}_S = \vec{n} \times \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right) = -\vec{e}_y \times \left(\vec{e}_x H_x + \vec{e}_z H_z\right) = \vec{e}_z H_x - \vec{e}_x H_z$$

在 $x=0$ 的侧壁 上, $H_x = 0$

$$\vec{J}_S = \vec{n} \times \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right) = \vec{e}_x \times \left(\vec{e}_z H_z\right) = -\vec{e}_y H_{z0} \sin\left(\omega t - k_z z\right)$$

在 $x=a$ 的侧壁上, $H_x = 0$

$$\vec{J}_S = \vec{n} \times \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right) = -\vec{e}_x \times \left(\vec{e}_z H_z\right) = -\vec{e}_y H_{z0} \sin\left(\omega t - k_z z\right)$$

在 $x=0$ 及 $x=a$ 的侧壁上, 因 $E_y = 0$, 所以 $\rho_S = 0$ 。