多元微分学

一、偏导数

1、设函数 $z=(\sin x)^{\cos y}$，则 $dz=$____$\cos y(\sin x)^{\cos y-1}\cos x dx-(\sin x)^{\cos y}\ln\sin x\cdot\sin y dy$____。

2、设 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2-2xyz+e^z=e+1$ 确定，则 $dz\big|_{(1,0)}=$____$-\frac{2}{e}dx+\frac{2}{e}dy$____。

3、设方程 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$ 确定了一个二元隐函数 z=z(x, y)，则 $\mathrm{d}z\big|_{(e,1)}=$____$\frac{1}{2}dx+\frac{e}{2}dy$____.

4、已知 $u=x^3y^2z$，其中 $z=z(x,y)$ 是由 $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$ 所确定的隐函数。

则 $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(-1,1,0)}=$____1____。

5. 由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分

$dz=$____$dx-\sqrt{2}dy$____。

6、设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $xy+y-z=e^z$ 所确定，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(0,1)}=$____$\frac{3}{8}$____。

7、$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)e^{-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)}=$________。

8. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x^2-y^2,y^2-z^2)=0$ 所确定，其中 $F(u,v)$ 是可微函数，

且 $zF_v\neq 0$，则 $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=$____$\frac{xy}{z}$____；

9、设 $u(x,y)$ 具有连续的二阶偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},u(x,3x)=x,u_x(x,3x)=x^2$，

则 $u_{xx}(x,3x)=$____。

10、设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin(x^2y^2)}{xy}, & xy\neq 0\\ x, & xy=0\end{cases}$，则 $f_x(0,2)=$（ C ）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）不存在

11、下列说法正确的是（ D ）.

（A）$z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数 f_x 和 f_y 都存在，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处必连续.

（B）$z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数 f_x 和 f_y 都存在，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处必

可微.

（C） $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的二阶偏导数都存在，则必有 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$.

（D）$u=f(x,y,z)$在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$处的全微分存在，则在点 M_0 处沿任一方向的方向导数都存在.

12. 若二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的两个偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 都存在, 则 [B]

(A) $f(x,y)在P_0点连续$　　(B) $f(x,y_0)在x=x_0点连续$

(C) $dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{P_0}dx+\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{P_0}dy$　　(D) A, B, C 都不对

13. 设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，下列结论不正确的是 [D]

（A） $f(x,y)$ 在点 (x,y) 连续；　（B） $f(x,y)$ 在点 (x,y) 的某邻域内有界；

（C） $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处两个偏导数 $f_x(x,y),f_y(x,y)$ 都存在；

（D） $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处两个偏导数 $f_x(x,y),f_y(x,y)$ 都连续.

14. 设 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数, 且 $f(1,1)=2$，$f_x(m,n)=m+n$，$f_y(m,n)=m\cdot n$，

令 $g(x)=f(x,f(x,x))$，则 $g'(1)=$ [C]

（A）3　（B）6　（C）9　（D）12

15. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,\ 0)$ 点处 [C]

（A）连续且偏导数存在　（B）连续但偏导数不存在

（C）不连续但偏导数存在　（D）不连续且偏导数不存在

16、设 $f(xy,x+y)=x^2+y^2+xy$，则 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=$ ______ $,\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=$ ______ 。

17. 设 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)+3x-2y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，则 $f(x,y)在点(0,0)$处 [***D***]

(A) 不连续　(B) 连续但偏导数不存在　(C) 偏导数存在但不可微　(D) 可微

18、下列条件中，不是“函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微”必要条件的是（　　）

（A） $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的极限存在；　（B） $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续；

（C） $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处偏导数存在；（D） $f(x,y)$ 的偏导数在 (x_0,y_0) 处连续。

19、函数 $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$ 在原点 $O(0,0)$ 处（　　）

（A） $f_x(0,0)$ 存在， $f_y(0,0)$ 也存在；（B） $f_x(0,0)$ 存在， $f_y(0,0)$ 不存在；

（C） $f_x(0,0)$ 不存在， $f_y(0,0)$ 存在；（D） $f_x(0,0)$ 不存在， $f_y(0,0)$ 也不存在。

20、已知 $df(x,y)=(6x-4y-\frac{1}{x})dx-(4x+\frac{1}{y})dy$，则 $f(x,y)=$____。

21、已知函数 $f(x,y)=\begin{cases} y\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$，讨论

（1）函数 $f(x,y)$ 在点 $O(0,0)$ 处是否连续？

（2）函数 $f(x,y)$ 在点 $O(0,0)$ 处的偏导数是否存在？若存在，求出它们的值。

（3）函数 $f(x,y)$ 在点 $O(0,0)$ 处的是否可微？　　（可微）

22、已知函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin\left(x^2+y^2\right), & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$，讨论

（1）函数 $f(x,y)$ 在点 $O(0,0)$ 处是否连续？

（2）函数 $f(x,y)$ 在点 $O(0,0)$ 处的偏导数是否存在？若存在，求出它们的值。

（3）函数 $f(x,y)$ 在点 $O(0,0)$ 处的是否可微？　　（不可微）

23、设 $z=2yf(\frac{x^2}{y},3y)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$， $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

$z_x=4xf_1$;　　$z_{xy}=4x(-\frac{x^2}{y^2}f_{11}+3f_{12})$

24、设 $z=f(3x-y,y\cos x)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial y}$， $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$。

$z_y=-f_1+\cos xf_2$;　　$z_{yx}=-(3f_{11}-y\sin xf_{12})-\sin xf_2+\cos x(3f_{21}-y\sin xf_{22})$

25、设 $z=xf(xy,e^{xy})$，其中 $f(u,v)$ 有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$。

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2xf_1 + (2x + x^2 y)e^{xy} f_2 + x^2 y f_{11} + 2x^2 y e^{xy} f_{12} + x^2 y e^{2xy} f_{22}$$

26. 设 $f(x,y), g(x,y)$ 有连续的二阶偏导数，令 $\varphi(x) = f(x, g(x, x^2))$，求 $\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}$.

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = f_1 + f_2 \cdot (g_1 + 2xg_2)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2} = f_{11} + 2f_{12} \cdot (g_1 + 2xg_2) + f_{22} \cdot (g_1 + 2xg_2)^2 + f_2 \cdot (g_{11} + 4xg_{12} + 4x^2 g_{22} + 2g_2)$$

27. 设 $f(t)$在$[1,+\infty)$上有二阶连续导数,且$f(1)=0, f'(1)=1$，而$z=(x^2+y^2)f(x^2+y^2)$

满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$．求 $f(t)$ 的表达式.　　　　$f(t) = \frac{\ln t}{t}$

28、函数 $u = ze^{xy}$ 在点 $M(1,0,1)$处沿向量 $\vec{l} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ 的方向导数为__$\frac{4}{3}$__，在点 $M(1,0,1)$

处的方向导数的最大值为____$\sqrt{2}$________.

29. $u = \ln(\sqrt{x^2 - y^2} + z)$ 在点 $M(1,0,2)$ 沿方向 $\boldsymbol{l}$ =__$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$___,方向导数取最大值;

30、设函数 $u = 2xy - z^2$，则 u 在点（2，－1，1）处方向导数的最小值为（　*A*　）

（A）$-2\sqrt{6}$　　（B）-4　　（C）-2　　（D）-6

31. 求函数 $u(x,y,z) = \int_z^{xy} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$ 在点 $P(1,1,1)$ 处沿曲面 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{6} = 1$ 在该点处的法线

方向的方向导数.　　　　$= \pm\frac{4}{\sqrt{14\mathrm{e}}}$

32、函数 $u = z\sqrt{x^2 + y^2}$ 在点 $\boldsymbol{M}(-1,1,-1)$ 沿曲线 $x = -t, y = t^2, z = -t^3$ 在该点切线方向的

方向导数______$-\frac{9}{2\sqrt{7}}$______。

33、函数 $u = xyz$ 在点（1，－1，1）处沿曲线 $\begin{cases} z = \frac{x^2+y^2}{2} \\ x+y+z=1 \end{cases}$ 在该点切线方向上的方向导数为__$-\sqrt{2}$__。

34. 设 $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$，证明函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续

且可微，但其偏导函数在点 $(0,0)$ 处不连续。

几何应用

1. 曲线$\begin{cases} y^2 = x-1, \\ z = x^2+y^2, \end{cases}$在点$(1,0,1)$处的切线方程为$\underline{\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{0}}$；

2、若曲面$z=4-x^2-y^2$上点 P 处的切平面平行于平面$\pi: x-y+2z-1=0$，则点 P 的坐标为（ ***C*** ）

（A）$(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{31}{8})$ （B）$(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{31}{8})$ （C）$(\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{31}{8})$ （D）$(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{31}{8})$

3、设函数$f(x,y)$在点$(0,0)$附近有定义，且$f_x(0,0)=2$，$f_y(0,0)=1$，则（ ***B*** ）

（A）曲面$z=f(x,y)$在点$(0,0,f(0,0))$的法向量为$\{2,1,1\}$

（B）曲线$\begin{cases} z=f(x,y) \\ x=0 \end{cases}$在点$(0,0,f(0,0))$的切向量为$\{0,1,1\}$

（C）曲线$\begin{cases} z=f(x,y) \\ x=0 \end{cases}$在点$(0,0,f(0,0))$的切向量为$\{1,0,2\}$

（D）$dz|_{(0,0)}=2dx+dy$

4. 曲线$\begin{cases} z=\dfrac{x^2+y^2}{4} \\ y=4 \end{cases}$在点$(2,4,5)$处的切线与$x$轴的正向所成的角度是 [C]

(A) $\dfrac{\pi}{2}$ (B) $\dfrac{\pi}{3}$ (C) $\dfrac{\pi}{4}$ (D) $\dfrac{\pi}{6}$

5. 曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$在点$(1,-2,1)$处的切线必定平行于平面 [A]

(A) $y=0$ (B) $x=0$ (C) $z=0$ (D) $x+y-z=0$

6. 设直线$L:\begin{cases} x+y+b=0 \\ x+ay-z-3=0 \end{cases}$在平面$\Pi$上，且平面$\Pi$与曲面$z=x^2+y^2$相切于点$(1,-2,5)$，则$a=$ $\underline{\quad -5 \quad}$，$b=$ $\underline{\quad -2 \quad}$；

7、曲面$z=xf(\frac{y}{x})$（其中f可微）的所有切平面（ ）。

（A）都相交于原点； （B）都相交于一点，但不是原点；

（C）无法都相交于一点； （D）位置无法判断。

8、求曲线$\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=7 \\ x+y+z=4 \end{cases}$在点（1，1，2）处的切线方程。

$$\begin{cases}2x+y+2z=7\\ x+y+z=4\end{cases} \text{或} \frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-2}{1}$$

9.求曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=14\\ z=x^2+\frac{1}{2}y^2\end{cases}$ 在点$(-1,-2,3)$处的切线方程和法平面方程。

10、试求过直线$\begin{cases}x+y-2=0\\ x-5y-z-3=0\end{cases}$，且与曲面$z=x^2+y^2$相切的平面方程.

二、极值

1、设$F(x,y)$具有二阶连续偏导数，$F(x_0,y_0)=0, F_x(x_0,y_0)=0, F_y(x_0,y_0)>0,$ 若$y=y(x)$是由方程$F(x,y)=0$所确定的在点(x_0,y_0)附近的隐函数，则x_0是$y=y(x)$的极小值的一个充分条件为（　　）。

（A）$F_{xx}(x_0,y_0)>0$；　　（B）$F_{xx}(x_0,y_0)<0$；

（C）$F_{yy}(x_0,y_0)>0$；　　（D）$F_{yy}(x_0,y_0)<0$。

2、设函数$f(x,y),\varphi(x,y)$均为可微函数，且$\varphi_y(x,y)\neq 0$，已知点(x_0,y_0)是$f(x,y)$在约束条件$\varphi(x,y)=0$下的一个极值点，下列选项正确的是（　　）。

（A）若$f_x(x_0,y_0)=0$，则$f_y(x_0,y_0)=0$；　（B）若$f_x(x_0,y_0)=0$，则$f_y(x_0,y_0)\neq 0$；

（C）若$f_x(x_0,y_0)\neq 0$，则$f_y(x_0,y_0)\neq 0$；（D）若$f_x(x_0,y_0)\neq 0$，则$f_y(x_0,y_0)=0$。

3、设函数$z=f(x,y)$的全微分为$dz=xdx+ydy$，则点$(0,0)$（　　）

（A）不是$f(x,y)$的连续点；　　（B）不是$f(x,y)$的极值点；

（C）是$f(x,y)$的极大值点；　　（D）是$f(x,y)$的极小值点。

4、设函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内具有连续二阶偏导数，且$f_{xy}^2(x_0,y_0)-f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)<0$，则$f(x_0,y_0)$（　　）

（A）必为$z=f(x,y)$的极小值；　　（B）必为$z=f(x,y)$的极大值；

（C）必为$z=f(x,y)$的极值；　　（D）不一定为$z=f(x,y)$的极值。

5、在抛物面$z=x^2+y^2$与平面 z=1 所围成的空间区域内作底面平行于 xoy 坐标面的长方体，

求此长方体体积的最大值. 驻点:$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$;最大体积:$V=\frac{1}{2}$

6、求原点到曲面$(x-y)^2-z^2=1$的最短距离。

极值点:$\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$ 或 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$

由问题的实际意义知原点到曲面存在最短距离, 故$\boldsymbol{d}_{\min}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

7. 在曲面$\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=1\,(x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0)$上求一点$P$，使过点$P$的切平面与三个坐标平面所围成的四面体的体积最小，并求最小体积。$a=\frac{2}{\sqrt{3}},b=\frac{1}{\sqrt{3}},c=\sqrt{3}$, $V_{\min}=3\sqrt{3}$

8. 已知曲线$C:\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x+y+z=4 \end{cases}$，求$C$上距离原点最远的点和最近的点，并求最远距离和最近距离. $M_1(-2,-2,8),M_2(1,1,2)$，$d_{\max}=6\sqrt{2}$, $d_{\min}=\sqrt{6}$

9、求曲面$4z=3x^2-2xy+3y^2$与平面$x+y-4z-1=0$之间的最短距离。 $=\frac{\sqrt{2}}{8}$

10、求曲面$\Sigma:\sqrt{x}+2\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$的切平面，使其在三个坐标轴上的截距的乘积为最大。