东南大学 2007-2008 学年《高等数学(上)》期末考试试卷

课程名称	**高等数学**	考试学期	**07-08**	得分	
适用专业	**选高数 AB 的专业**	考试形式	**闭卷**	考试时间长度	**150 分钟**

一.填空题（本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 36 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{x}-x\right)^{\frac{1}{x^{2}}}=$ ____________;

2. 设 $y=x^{\sin\frac{1}{x}}$，则 $dy=$ _；

3. 已知 $f'(3)=2$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{\sin 2h}=$ _；

4. 对数螺线 $\rho=e^{\theta}$ 在 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 对应的点处的切线方程是 ____ ；

5. 设 $y=y(x)\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}<x<\sqrt{\dfrac{5\pi}{2}}\right)$ 是由方程 $\int_0^y e^{t^2}dt-\int_0^x \cos t^2 dt=0$ 确定的隐函数，则 $y(x)$ 的单调增加区间是 _，单调减少区间是 _____ ；

6. 曲线 $y=xe^{-2x}$ 的拐点坐标是 _，渐进线方程是 _；

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+3}+\dfrac{n}{n^2+12}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+3n^2}\right)=$ ____________;

8. $\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sqrt{1+\cos 2x}+\cos x^2\sin^3 x\right)dx=$ _；

9. 二阶常系数线性非齐次微分方程 $y''+y=2\sin x$ 的特解形式为 $y^*=$ _.

二.计算下列积分（本题共 3 小题，每小题 7 分，满分 21 分）

10. $\int_0^2 x^2\sqrt{2x-x^2}\,dx$

11. $\int \arctan\left(1+\sqrt{x}\right)dx$

12. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} e^{-x}\cos x\,dx$

三（13）.（本题满分 8 分） 设 $f(x)=\begin{cases} xe^{x^2}, & x\ge 0 \\ x, & x<0 \end{cases}$，$F(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}e^{x^2}, & x\ge 0 \\ \frac{1}{2}x^2, & x<0 \end{cases}$

（1） 问 $F(x)$ 是否为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的一个原函数？为什么？

（2） （2）求 $\int f(x)\,dx$

四（14）.（本题满分 7 分） 设 $f(x)=\int_{x^2}^{x}\frac{\sin(xt)}{t}dt$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$.

五（15）.（本题满分 6 分） 求微分方程 $(y\cos x+\sin 2x)dx-dy=0$ 的通解.

六（16）.（本题满分 8 分） 设 $f(x)$、$g(x)$ 满足 $f'(x)=g(x)$，$g'(x)=2e^x-f(x)$，且 $f(0)=0$，$g(0)=2$，求 $\int_0^{\pi}\left(\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right)dx$.

七（17）.（本题满分 8 分） 设直线 $y=ax$ $(0<a<1)$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围成的图形面积为 S_1，它们与直线 $x=1$ 所围成的图形面积为 S_2 （1）试确定 a 的值，使 S_1+S_2 达到最小，并求出最小值 （2）求该最小值所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积

八（18）.（本题满分 6 分） 设 $f(x)=\int_x^{x+1}\sin t^2\,dt$，求证：当 $x>0$ 时，$|f(x)|<\frac{1}{x}$.

07-08-2 高等数学（上）期末参考答案

一. 填空题（本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 36 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{x}-x\right)^{\frac{1}{x^{2}}}=\underline{e^{\frac{1}{2}}}$；

2. 设 $y=x^{\sin\frac{1}{x}}$，则 $dy=\underline{x^{\sin\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x^{2}}\cos\frac{1}{x}\cdot\ln x\right)dx}$；

3. 已知 $f'(3)=2$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{\sin 2h}=\underline{-1}$；

4. 对数螺线 $\rho=e^{\theta}$ 在 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 对应的点处的切线方程是 $\underline{x+y=e^{\frac{\pi}{2}}}$；

5. 设 $y=y(x)\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}<x<\sqrt{\dfrac{5\pi}{2}}\right)$ 是由方程 $\int_{0}^{y}e^{t^{2}}dt-\int_{0}^{x}\cos t^{2}dt=0$ 确定的隐函数，则 $y(x)$ 的单调增加区间是 $\underline{\left(\sqrt{\dfrac{3\pi}{2}},\sqrt{\dfrac{5\pi}{2}}\right)}$，单调减少区间是 $\underline{\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}},\sqrt{\dfrac{3\pi}{2}}\right)}$；

6. 曲线 $y=xe^{-2x}$ 的拐点坐标是 $\underline{\left(1,e^{-2}\right)}$，渐进线方程是 $\underline{y=0}$；

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^{2}+3}+\dfrac{n}{n^{2}+12}+\cdots+\dfrac{n}{n^{2}+3n^{2}}\right)=\underline{\dfrac{\sqrt{3}\pi}{9}}$；

8. $\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sqrt{1+\cos 2x}+\cos x^{2}\sin^{3}x\right)dx=\underline{4\sqrt{2}}$；

9. 二阶常系数线性非齐次微分方程 $y''+y=2\sin x$ 的特解形式为 $y^{*}=\underline{Ax\cos x+Bx\sin x}$.

二. 计算下列积分（本题共 3 小题，每小题 7 分，满分 21 分）

10. $\int_{0}^{2}x^{2}\sqrt{2x-x^{2}}dx$

解 $\int_{0}^{2}x^{2}\sqrt{2x-x^{2}}dx=\int_{0}^{2}(x-1+1)^{2}\sqrt{1-(x-1)^{2}}dx$

$=\int_{0}^{2}(x-1)^{2}\sqrt{1-(x-1)^{2}}dx+2\int_{0}^{2}(x-1)\sqrt{1-(x-1)^{2}}dx+\int_{0}^{2}\sqrt{1-(x-1)^{2}}dx$ **（2 分）**

$=2\int_{0}^{1}t^{2}\sqrt{1-t^{2}}dt+0+\dfrac{\pi}{2}$ （$x-1=t$, $t=\sin\theta$, $dt=\cos\theta d\theta$）**（1+1 分）**

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta \mathrm{d}\theta + \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4\theta)\mathrm{d}\theta + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{8}$ **（3 分）**

11． $\int \arctan\left(1+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$

解： $\int \arctan\left(1+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = x\arctan\left(1+\sqrt{x}\right) - \frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{x}}{2+2\sqrt{x}+x}\mathrm{d}x$，**（2 分）**

令 $x=t^2, \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$，$\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{x}}{2+2\sqrt{x}+x}\mathrm{d}x = \int\frac{t^2}{2+2t+t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{x} - \ln(x+2\sqrt{x}+2) + C_1$，

（1+3 分） 原式 $= x\arctan\left(1+\sqrt{x}\right) - \sqrt{x} + \ln\left(x+2\sqrt{x}+2\right) + C$ **（1 分）**

12． $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x$

解 $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-x}\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} - \mathrm{e}^{-x}\cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} - I$ **（3+3 分）**

$I = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$ **（1 分）**

三（13）．（本题满分 8 分）设 （1）问 $F(x)$ 是否为 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的一个原函数？为什么？（2）求 $\int f(x)\mathrm{d}x$

解 （1）$F(x)$ 不是 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的一个原函数，因为 $F(0) = \frac{1}{2} \neq F(0-0) = 0$，$F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内不连续. **（1+2 分）**

（2）$\int f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} + C, & x \geq 0 \\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} + C, & x < 0 \end{cases}$ **（2+3 分）**

四（14）．（本题满分 7 分） 设 $f(x) = \int_{x^2}^{x}\frac{\sin(xt)}{t}\mathrm{d}t$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$.

解 令 $xt=u$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{x^3}^{x^2}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x^2 - 3\sin x^3}{2x^2} = 1$ **（2+3+2 分）**

五（15）．（本题满分 6 分） 求微分方程 $(y\cos x + \sin 2x)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$ 的通解.

解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y\cos x=2\sin x\cos x$，**（1 分）**

$y=\mathrm{e}^{\int\cos x\mathrm{d}x}\left(C+2\int\sin x\cos x\mathrm{e}^{-\int\cos x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)=\mathrm{e}^{\sin x}\left(C-2\int\sin x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\sin x}\right)$ **（2+1 分）**

$=C\mathrm{e}^{\sin x}-2(1+\sin x)$ **（2 分）**

六（16）.（本题满分 8 分）设 $f(x)$、$g(x)$ 满足 $f'(x)=g(x)$，$g'(x)=2\mathrm{e}^{x}-f(x)$，且 $f(0)=0$，$g(0)=2$，求 $\int_0^{\pi}\left(\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right)\mathrm{d}x$.

解 由已知条件得 $f''(x)+f(x)=2\mathrm{e}^{x}$，**（1 分）** $f(x)=\sin x-\cos x+\mathrm{e}^{x}$，**（3 分）**

$\int_0^{\pi}\left(\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{g(x)}{1+x}\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}\frac{1}{1+x}$

$=\left.\frac{f(x)}{1+x}\right|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{g(x)}{1+x}\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}\frac{f'(x)}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{f(\pi)}{1+\pi}=\frac{1+\mathrm{e}^{\pi}}{1+\pi}$ **（4 分）**

七（17）.（本题满分 8 分）

解 (1) $S(a)=S_1(a)+S_2(a)=\int_0^{a}(ax-x^2)\mathrm{d}x+\int_a^{1}(x^2-ax)\mathrm{d}x$

$=\left.\left(\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^a+\left.\left(\frac{x^3}{3}-\frac{ax^2}{2}\right)\right|_a^1=\frac{a^3}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}$ **（3 分）**

令 $S'(a)=a^2-\frac{1}{2}=0$，得 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$，又 $S''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}>0$，则

$S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{6\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3}=\frac{2-\sqrt{2}}{6}$ 是唯一的极小值即最小值　　**（2 分）**

（2）$V_x=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{2}x^2-x^4\right)\mathrm{d}x+\pi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\left(x^4-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x$

$\pi\left.\left(\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{5}x^5\right)\right|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}+\pi\left.\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{6}x^3\right)\right|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\quad\frac{\sqrt{2}+1}{30}\pi$ **（3 分）**

八（18）.（本题满分 6 分）设 $f(x)=\int_x^{x+1}\sin t^2\mathrm{d}t$，求证：当 $x>0$ 时，$\left|f(x)\right|<\frac{1}{x}$.

证 令$u = t^2, \mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u$，

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos u}{\sqrt{u}}\bigg|_{x^2}^{(x+1)^2} + \frac{1}{2}\int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{\cos u}{\sqrt{u^3}}\mathrm{d}u \right)$$ （1+1 分）

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\cos x^2}{x} - \frac{\cos(x+1)^2}{x+1} \right) - \frac{1}{4}\int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{\cos u}{\sqrt{u^3}}\mathrm{d}u$$ （1 分）

$$\left|f(x)\right| < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \right) + \frac{1}{4}\int_{x^2}^{(x+1)^2} \frac{1}{\sqrt{u^3}}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{1}{x}$$