东 南 大 学 考 试 卷

课程名称 高等数学（A）期中 考试学期 08-09-3 得分

适用专业 选学高数（A）的各专业 考试形式 闭卷 考试时间长度 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

一．填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1．交换积分次序 $\int_{-2}^{0} dy \int_{0}^{y+2} f(x,y)dx + \int_{0}^{4} dy \int_{0}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)dx =$ ________；

2．设 $e^{z}-1+\sqrt{3}\,i=0$，则 $\operatorname{Re} z =$ __________ $\operatorname{Im} z =$ ____________________；

3．设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $y+z=xf(y^2-z^2)$ 所确定的隐函数，其中 f 可微，则全微分

$dz =$ ____________________；

4．设 C 为由 $x+y=\pi$ 与 x 轴, y 轴围成的三角形的边界, $\oint_C e^{x+y} ds =$ __________；

5. 设 $f(x,y)$ 连续，$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, 0\le y\le x^2\}$，且 $f(x,y)=xy+\iint_D f(x,y)dxdy$ 则

$\iint_D f(x,y)dxdy =$ ____________。

二．单项选择题（本题共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

6．函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处

(A)连续且偏导数存在　　(B) 连续但偏导数不存在

(C)不连续但偏导数存在　　(D) 不连续且偏导数不存在

7 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$, D_1 为 D 在第一象限部分,则下列各式中不成立的是

（A）$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy = 4\iint_{D_1}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$　（B）$\iint_D xy\,dxdy = 4\iint_{D_1} xy\,dxdy$

（C）$\iint_D (x+x^3y^2)dxdy = 0$　（D）$\iint_D x^2y^3 dxdy = \iint_D x^3y^2 dxdy$

8 设 $f(t)\in C[0,+\infty)$, $I(R)=\iiint_{x^2+y^2+z^2\le R^2} f(x^2+y^2+z^2)dv$,则当 $R\to 0^+$ 时, $I(R)$

（A）是 R 的一阶无穷小　　（B）是 R 的二阶无穷小

（C）是 R 的三阶无穷小　　（D）至少是 R 的三阶无穷小

9．设 $f(x,y)$ 在原点的某邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{x^2+1-x\sin y-\cos^2 y} = a > 0$ ，则

（A） $f(x,y)$ 在原点处取得极大值

（B） $f(x,y)$ 在原点处取得极小值

（C）不能断定 $f(x,y)$ 在原点处是否取得极值

（D）原点一定不是 $f(x,y)$ 的极值点

三.计算下列各题(本题共 5 小题，每小题 8 分，满分 40 分)

10． 计算二重积分 $\iint\limits_D \dfrac{2x+3y}{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$ ，其中 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 1, x+y\ge 1\right\}$.

11． 计算曲面积分 $\iint\limits_\Sigma (z+y)\mathrm{d}A$ ，其中 Σ 是由 $z=0$, $z=1$ 与 $z^2+1=x^2+y^2$ 所围成的立体的表面.

12． 求 $\iint\limits_\Sigma \dfrac{x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x}{x^2+y^2+z^2}$ ，其中 Σ 为圆柱体 $y^2+z^2\le R^2$， $|x|\le R\ (R>0)$ 的表面，取外侧.

13． 求由曲面 $x^2+z=1$, $y^2+z=1$ 和 $z=0$ 所围成的质量均匀分布的立体的质心坐标.

14. 已知解析函数 $f(z)$ 的实部 $u(x,y)=2xy+\dfrac{x}{x^2+y^2}$,求 $f(z)$ 的表达式（用变量 z 表示）

和 $f'(\mathrm{i})$.

四（15）（本题满分 8 分） 求函数 $u=x^2+2y^2+3z^2$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 和平面

$x+y=0$ 的交线上的最大值与最小值.

五（16）（本题满分 8 分） 试求过直线 $\begin{cases} x+y-2=0 \\ x-5y-z-3=0 \end{cases}$，且与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切的平

面方程.

六（17）（本题满分 8 分） 设 $ab\neq 0$, $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $a^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+b^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$,

$f(ax,bx)=ax$ ， $f_x(ax,bx)=bx^2$,

求 $f_{xx}(ax,bx)$ ， $f_{xy}(ax,bx)$ ， $f_{yy}(ax,bx)$.

08-09-3 高数 A 期中试卷参考答案

一．填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1、$\int_0^2 dx \int_{x-2}^{4-x^2} f(x,y)dy$ 2、$\mathrm{Re}\, z = \underline{\ln 2}$ ，$\mathrm{Im}\, z = \underline{-\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots}$

3、$\mathrm{d}z = \underline{\dfrac{f}{1 + 2xzf'}\mathrm{d}x + \dfrac{2xyf' - 1}{1 + 2xzf'}\mathrm{d}y}$ 4、$\oint_C \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}s = \underline{\mathrm{e}^{\pi}(\sqrt{2}\pi + 2) - 2}$

5、$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \underline{\dfrac{1}{8}}$

二．单项选择题（本题共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

6、C 7、B 8、D 9、B

三.计算下列各题(本题共 5 小题，每小题 8 分，满分 40 分)

10、**解：** $\iint_D \dfrac{2x + 3y}{x^2 + y^2}\mathrm{d}\sigma = \dfrac{5}{2}\iint_D \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}\mathrm{d}\sigma = \dfrac{5}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi \int_{\frac{1}{\cos\varphi + \sin\varphi}}^{1}(\cos\varphi + \sin\varphi)\mathrm{d}\rho = 5 - \dfrac{5}{4}\pi$

11、**解：**

$\Sigma_1:\begin{cases} x^2 + y^2 \le 1 \\ z = 0 \end{cases}$，$\Sigma_2:\begin{cases} x^2 + y^2 \le 2 \\ z = 1 \end{cases}$，$\Sigma_3:\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 + z^2 \\ 0 \le z \le 1 \end{cases}$，$D:\begin{cases} 1 \le x^2 + y^2 \le 2 \\ z = 0 \end{cases}$

$$\oiint_{\Sigma}(z + y)\mathrm{d}A = \oiint_{\Sigma} z\mathrm{d}A = \iint_{\Sigma_1} z\mathrm{d}A + \iint_{\Sigma_2} z\mathrm{d}A + \iint_{\Sigma_3} z\mathrm{d}A = 2\pi + \iint_D \sqrt{2(x^2 + y^2) - 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\pi + 2\pi\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{2\rho^2 - 1}\,\rho\,\mathrm{d}\rho = \left(\sqrt{3} + \frac{5}{3}\right)\pi$$

12、**解：** $\Sigma_1:\begin{cases} y^2 + z^2 \le R^2 \\ x = -R \end{cases}$ 取后侧，$\Sigma_2:\begin{cases} y^2 + z^2 \le R^2 \\ x = R \end{cases}$ 取前侧，$\Sigma_3:\begin{cases} y^2 + z^2 = R^2 \\ |x| \le R \end{cases}$ 取外侧，

$D_{zx} = \left\{(z,x)\,\middle|\,|z| \le R, |x| \le R\right\}$，

$$\oiint_{\Sigma}\frac{x^2\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x}{x^2 + y^2 + z^2} = \iint_{\Sigma_1}\frac{R^2\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z}{R^2 + y^2 + z^2} + \iint_{\Sigma_2}\frac{R^2\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z}{R^2 + y^2 + z^2} + \iint_{\Sigma_3}\frac{y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x}{x^2 + R^2}$$

$$= 0 + 2\iint_{D_{zx}}\frac{\sqrt{R^2 - z^2}}{x^2 + R^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \frac{R}{2}\pi^2$$

13、**解：** 由对称性知 $\overline{x} = \overline{y} = 0$，质量 $m = 8\mu\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x(1 - x^2)\mathrm{d}y = 2\mu$，

对 xOy 平面的静力矩 $M_{xy} = 8\mu\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^{1-x^2}z\mathrm{d}z = \dfrac{2}{3}\mu$，$\overline{z} = \dfrac{M_{xy}}{m} = \dfrac{1}{3}$

另解： $\bar{x}=\bar{y}=0$，

用切片法 $\bar{z}=\dfrac{M_{xy}}{m}=\dfrac{\mu\int_0^1 z\left(2\sqrt{1-z}\right)^2 dz}{\mu\int_0^1\left(2\sqrt{1-z}\right)^2 dz}=\dfrac{1}{3}$

14、**解：** $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=2y-\dfrac{1}{x^2+y^2}+\dfrac{2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$， $v=y^2-\dfrac{y}{x^2+y^2}+\varphi(x)$，

$\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\varphi'(x)=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=-2x+\dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$， $\varphi(x)=-x^2-C$，

$f(z)=\dfrac{1}{z}-\mathrm{i}\left(z^2+C\right)$， $f'(\mathrm{i})=3$

另解： 因为解析，所以 $f'(z)=u_x-iu_y=(2y+\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2})-i(2x-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2})$

从而 $f'(z)=-\dfrac{1}{z^2}-i2z\Rightarrow f(z)=\dfrac{1}{z}-iz^2+C$

四（15）（本题满分 8 分）

解： 首先根据条件得 $u=x^2+2y^2+3z^2=3-y^2-2x^2=3-3x^2\le 3$，且在点 $(0,0,\pm 1)$ 处，$u_{\max}=3$，继续由条件得 $u=3\left(x^2+z^2\right)=3\left(\dfrac{1-z^2}{2}+z^2\right)=\dfrac{3}{2}\left(1+z^2\right)\ge\dfrac{3}{2}$，且在点 $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ 处，$u_{\min}=\dfrac{3}{2}$

五（16）（本题满分 8 分）

解： 设过直线 $\begin{cases}x+y-2=0\\x-5y-z-3=0\end{cases}$ 的平面方程为 $(1+\lambda)x+(1-5\lambda)y-\lambda z-2-3\lambda=0$，

设切点为 (x_0,y_0,z_0)，则 $\begin{cases}(1+\lambda)x_0+(1-5\lambda)y_0-\lambda z_0-2-3\lambda=0 & (1)\\ \dfrac{2x_0}{1+\lambda}=\dfrac{2y_0}{1-5\lambda}=\dfrac{1}{\lambda} & (2)\\ z_0=x_0^2+y_0^2 & (3)\end{cases}$

由（2)，（3）解得 $x_0=\dfrac{1+\lambda}{2\lambda},y_0=\dfrac{1-5\lambda}{2\lambda}$， $z_0=\dfrac{(1+\lambda)^2+(1-5\lambda)^2}{4\lambda^2}$，

代入（1）得 $7\lambda^2-8\lambda+1=0$，解得 $\lambda_1=1,\lambda_2=\dfrac{1}{7}$，从而两切平面方程分别为

$2x-4y-z-5=0$ 和 $8x+2y-z-17=0$ 。

六（17）（本题满分 8 分）

解： 对 $f(ax,bx)=ax$ 的等号两端关于 x 求导，得 $af_x+bf_y=a$，(1)

对 $f_x(ax,bx)=bx^2$ 的等号两端关于 x 求导，得 $af_{xx}+bf_{xy}=2bx$，(2)

对（1）式的等号两端关于 x 求导，得 $a^2f_{xx}+2abf_{xy}+b^2f_{yy}=0$，(3)

从（2），（3）及条件 $a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+b^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ 解得

$f_{xy}(ax,bx)=0$， $f_{xx}(ax,bx)=\frac{2b}{a}x$， $f_{yy}(ax,bx)=-\frac{2a}{b}x$