19-20-2工科数分测验（一）参考答案

一、 填空题（本题共6小题，每小题5分，满分30分）

1. $\underline{-\frac{1}{2}}$；　2. $\underline{\frac{1}{2}}$；　3. $\underline{2}$；　4. $\underline{-\frac{1}{2}}$；　5. $\underline{-3}$　6. $\underline{6}$.

二、 计算下列各题（本题共4小题，每小题10分，满分40分）

1. **解** 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)=0$，且$\{\sin n\}$有界，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)\sin n=0$.

2. **解** 因为 $\sqrt[n]{3}\le\sqrt[n]{3+\cos^2 n}\le\sqrt[n]{4}$，

   $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1, \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4}=1$，由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3+\cos^2 n}=1$.

3. **解** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n+n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-\frac{2}{3})^n+1+\frac{n}{3^n}}{(-2)(-\frac{2}{3})^n+3}=\dfrac{1}{3}$.

4. **解** $x=2$ 是无穷间断点，$x=1$ 是可去间断点.

三、 （本题满分10分）

证明 首先观察到 $0<x_n<3\ (\forall n)$.

由 $x_{n+1}-x_n=\sqrt{3+2x_n}-\sqrt{3+2x_{n-1}}=\dfrac{2(x_n-x_{n-1})}{\sqrt{3+2x_n}+\sqrt{3+2x_{n-1}}}$ 知 $\{x_n-x_{n-1}\}$ 同号，

即数列 $\{x_n\}$ 单调.

于是由单调有界定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设其为 a.

等式 $x_n=\sqrt{3+2x_{n-1}}$ 两边求极限得 $a=\sqrt{3+2a}$，所以 $a=-1$（舍）, $a=3$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

四、 （本题满分10分）

证明 $\left|\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{|x-1|}{2|x+1|}$，当$|x-1|<1$时，$|x+1|>1$, 此时$\left|\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{2}|x-1|$,
于是对$\forall\varepsilon>0$, 取$\delta=\min\{1,2\varepsilon\}>0$, 当$0<1-x<\delta$时，有$\left|\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$, 即$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$.

五、 （本题满分10分）

证明 $|x_m-x_n|=\dfrac{1}{(n+1)!}+\cdots+\dfrac{1}{m!}<\dfrac{1}{n(n+1)}+\cdots+\dfrac{1}{(m-1)m}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{m}<\dfrac{1}{n}$,
于是对$\forall\varepsilon>0$, 取$N=[\frac{1}{\varepsilon}]$, 则对$\forall m,n>N$, 有$|x_m-x_n|<\varepsilon$, 所以由Cauchy 收敛原理得数列$\{x_n\}$收敛.