自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名________ 学号________

密 封 线

东 南 大 学 考 试 卷 (B 卷)

课程名称 __数学物理方法__ 考试学期 __14-15-3__ 得分________

适用专业 __面上__ 考试形式 __闭卷__ 考试时间长度 __120分钟__

题目	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

注意：本份试卷可能会用到以下公式：

1、$\mathscr{L}[\sin\alpha t](p)=\dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$， $\mathscr{L}[\cos\alpha t](p)=\dfrac{p}{p^2+\alpha^2}$， $\mathscr{L}[t^n\mathrm{e}^{at}](p)=\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$；

2、$\mathscr{L}[f(t-t_0)H(t-t_0)](p)=\tilde{f}(p)\mathrm{e}^{-t_0p},\ t_0\geq 0;$

3、$(x^{\nu}J_{\nu}(x))'=x^{\nu}J_{\nu-1}(x),\ (x^{-\nu}J_{\nu}(x))'=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x).$

4、$\mathscr{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-\alpha|\lambda|}](x)=\dfrac{\alpha}{(x^2+\alpha^2)\pi},\ \alpha>0;$

一 填空题(30分)

1. 在研究长为l的均匀的细杆的热传导问题时，如果细杆的两端绝热，则边界条件可表示为________________.

2. 特征值问题
$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, & 0<x<l,\\ X'(0)=0,\ X'(l)=0 \end{cases}$$
的所有特征值及特征函数是________________.

3. 用分离变量法或特征展开法求解热传导方程的初边值问题时，如果边界条件是$u(0,t)=0,\ u(l,t)=\sin\omega t$, 则取$w(x,t)$=________________，再作一个变换$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$化为$v$的方程且此时边界条件是齐次边界条件.

4. Laplace逆变换$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{p(p^2+1)}\right]$=________________.

5. 弦的自由振动方程的初值问题
$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, & x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u(x,0)=\sin x,\ u_t(x,0)=\cos x, & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$
的解为 $u(x,t)=$________________________.

6. 变换$w=\frac{z}{z-1}$把圆$|z|=1$变成(用含w等式表示) ________________.

二 (15分) 用分离变量法求初边值问题（推导出一般解的表达式及系数的计算公式）

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0)| = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

密 ………… 封 ………… 线

三 (10分) 求函数$f(x) = \begin{cases} 1-|x|, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ 的Fourier变换.

四 (12分) 用 Laplace 变换法求解下列半无界问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a u_{xx} = 0, & x > 0,\ t > 0, \\ u(0,t) = t^2,\ \lim\limits_{x\to\infty} |u_x(x,t)| < \infty, & t > 0, \\ u(x,0) = x,\ u_t(x,0) = 0 & x \ge 0. \end{cases}$$

线 封 密

线

封

密

五 (10分) 用 Fourier 变换法推导出下边值问题的求解公式

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x\in R,\ y>0, \\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in R, \\ \lim\limits_{x^2+y^2\to\infty}|u(x,y)|<\infty \end{cases}$$

六 (10分) 记$D=\{z=x+\mathrm{i}y \mid x\in R, 0<y<\pi\}$. (1) 求一个保角变换，使其把区域$D$变成上半平面；(2) 写出此区域$D$上的Green函数.

七 (13分) 用分离变量法和Bessel函数理论求解特征值问题(要求给出特征值和其对应的特征函数)

$$
\begin{cases}
\Delta u + \lambda u = 0, & (x,y) \in D = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 < a^2\}, \\
u(x,y) = 0, & (x,y) \in \partial D = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 = a^2\}.
\end{cases}
$$

注:在极坐标系下$\Delta u = u_{rr} + \dfrac{1}{r} u_r + \dfrac{1}{r^2} u_{\theta\theta}$