东 南 大 学 考 试 卷

课程名称 高等数学B（期中） 考试学期 11-12-3 得分

适用专业 选学高数B的各专业 考试形式 闭卷 考试时间长度 120分钟

题号	一	二	三	四	五	六
得分						

一．填空题（本题共5小题，每小题4分，满分20分）

1. 设向量 $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4, |\vec{c}|=5$, 且满足 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, 则 $|\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}|=$ ______；

2. 点 $(1,2,3)$ 到直线 $\frac{x}{1}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z-3}{-2}$ 的距离为________；

3. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z=\int_{xy}^{z} f(t)dt$ 确定, 其中 $f(t)$ 可导, 则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ ________；

4. 直线 $2x=3y=z-1$ 平行于平面 $4x+\lambda y+z=0$，则 $\lambda=$ ________；

5. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}=$ ________

二．单项选择题（本题共4小题，每小题4分，满分16分）

6. 下列反常积分中收敛的是

（A）$\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x|\sin x|}dx$ （B）$\int_1^2\left[\frac{1}{x\ln^2 x}-\frac{1}{(x-1)^2}\right]dx$

（C）$\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x-2}}dx$ （D）$\int_0^2\frac{2x}{x^2-1}dx$

7. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=1$ 处条件收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x+2)^{n+1}$ 的收敛半径为

（A）1 （B）2 （C）3 （D）不能确定

8. 设 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是区间 $[-\pi,\pi]$ 上的连续函数,且 $\varphi(-x)=\psi(x)$,则 $\varphi(x)$ 的傅里叶系数

a_n,b_n 与 $\psi(x)$ 的傅里叶系数 α_n,β_n $(n=1,2,\cdots)$ 的关系是

(A) $a_n=\alpha_n, b_n=\beta_n$ (B) $a_n=\alpha_n, b_n=-\beta_n$

(C) $a_n=-\alpha_n, b_n=\beta_n$ (D) $a_n=-\alpha_n, b_n=-\beta_n$.

9. 下列命题正确的是

（A）若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处存在偏导数，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x,y)$ 一定存在.

（B）若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，则 $f(x,y)$ 在该点处必连续.

（C）若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处存在偏导数，则 $f(x,y)$ 在该点处必可微.

（D）以上表述均不正确.

三. 计算下列各题(本题共 5 小题，每小题 8 分，满分 40 分)

1. 求过点 $(0,2,4)$ 且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行的直线方程.

2. 设 $z=f(x^2-y^2,xy)+g(x^2+y^2)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，g 具有二阶连续导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

3. 直线 $l:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$ 在平面 $\pi: x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 l_0 的方程,并求 l_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程.

4. 求点 $(2,3,4)$ 在直线 $l:\frac{x+7}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+2}{3}$ 上的投影.

5. 设方程 $e^{x^2z}+xy^2\ln z=1$ 确定了函数 $z=z(x,y)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$。

四（15）（本题满分 8 分） 将 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}\quad(0\le x\le\pi)$ 展开成正弦级数.

五（16）（本题满分 8 分） 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ 的和函数 $S(x)$，及其在 $x=1$ 处的幂级数展开式.

六（17）（本题满分 8 分） 就参数 k 的不同取值，讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n^k(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1})$ 的敛散性

11-12-3 高数 B 期中试卷参考答案

一 、填空题 （本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1. 设$|\boldsymbol{a}| = 3, |\boldsymbol{b}| = 4, |\boldsymbol{c}| = 5$和$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} = 0$，则$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}| =$________.

解 为了对问题有一个初步的认识，我们首先选取一个特例进行考察。设

$$\boldsymbol{a} = \{4,0,0\}, \boldsymbol{b} = \{0,3,0\}, \boldsymbol{c} = \{-4,-3,0\}$$

经过简单计算可得

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}| = 36.$$

对于一般情形，由条件$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} = 0$可以知道，向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{c}$首尾相接构成三角形，并且由条件$|\boldsymbol{a}| = 3, |\boldsymbol{b}| = 4, |\boldsymbol{c}| = 5$可知是一个直角三角形(勾股弦定理)，其面积为 6 。

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\times(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})+(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$$

而$|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|$为三角形面积的2倍，所以$|3\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}| = 3\times2\times6 = 36$

知识点：向量的代数运算和向量积的概念与几何意义。

2. 点$(1,2,3)$到直线$\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-4}{-3} = \dfrac{z-3}{-2}$的距离为________.

解 直线的方向向量$\boldsymbol{a} = \{1,-3,-2\}$，直线上有一点$M(0,4,3)$，设$(1,2,3)$为$P$点，则点到直线的距离为

$$d = \frac{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{PM}|}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

3. 设$z = z(x,y)$由方程$z = \displaystyle\int_{xy}^{z} f(t)\,dt$确定，其中$f$连续，则$dz =$________.

解 函数$z = z(x,y)$是一个由题设方程给出的隐函数，故利用隐函数的微分法求解本题。又因为确定隐函数的方程中含有变限积分，所以在求解过程中需要利用变限积分的求导法。

法1 设$F(x,y,z) = \displaystyle\int_{xy}^{z} f(t)\,dt - z$，则

$$F_x = -yf(xy),\quad F_y = -xf(xy),\quad F_z = f(z)-1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yf(xy)}{f(z)-1},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{xf(xy)}{f(z)-1}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{f(xy)(ydx+xdy)}{f(z)-1}$$

法2 在方程$z = \displaystyle\int_{xy}^{z} f(t)\,dt$两边求全微分，

$$dz = f(z)dz - f(xy)d(xy)$$

解得

$$dz = \frac{f(xy)d(xy)}{f(z)-1} = \frac{f(xy)(ydx+xdy)}{f(z)-1}$$

知识点：多元隐函数微分法，变限积分求导法。

4.直线的方向向量为 $\vec{v}=(\frac{1}{2},\frac{1}{3},1)$，平面的法向量为 $\vec{n}=(4,\lambda,1)$，

因为直线平行于平面，因此 $\vec{v}\perp\vec{n}$，则 $\vec{v}\times\vec{n}=0$，即 $2+\frac{\lambda}{3}+1=0$，解得 $\lambda=-9$

5. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}=$________.

解 如果极限存在，该极限值是多少呢？我们可以通过考察自变量沿特殊路径趋于无穷大时的情形得到启迪。让 (x,y) 沿 x 轴趋向无穷大，

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y=0}}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+0^2}{x^4+0^4}=0$$

所以，如果极限存在，则极限值为零。下面我们求此极限

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}=\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^4}{x^4+y^4}+\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\frac{1}{y^2}\cdot\frac{y^4}{x^4+y^4}$$

因为

$$|\frac{x^4}{x^4+y^4}|\le 1,\quad \lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\frac{1}{x^2}=0$$

利用有界变量与无穷小量乘积为无穷小量，

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^4}{x^4+y^4}=0$$

类似地

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\frac{1}{y^2}\cdot\frac{y^4}{x^4+y^4}=0$$

故

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}=0$$

知识点: 极限的概念及计算法。

二、单项选择题（本题共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

1. 下列反常积分中收敛的是 [ ]

(A) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x|\sin x|}$　　(B) $\int_1^2\left[\frac{1}{x\ln^2 x}-\frac{1}{(x-1)^2}\right]dx$

(C) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x-2}}$　　(D) $\int_0^2\frac{2x}{x^2-1}\,dx$

解 (A) 对于这个积分，可以看出 $x=+\infty$ 是无穷限，被积函数非负。尝试用常规的比较判别法极限形式判敛，发现该方法不能处理这个问题，改用

比较判别法。因为分母上 x 是一次方，猜想积分发散。通过缩小积分证明猜想。对于任意的正整数 n，

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x|\sin x|}\geq\sum_{k=1}^{n}\int_{2k\pi}^{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+x|\sin x|}\geq\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi/2}{1+2k\pi+\frac{\pi}{2}}$$

因为

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi/2}{1+2k\pi+\frac{\pi}{2}}$$

发散，所以

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi/2}{1+2k\pi+\frac{\pi}{2}}=+\infty$$

反常积分发散。

(B) 本题可以用反常积分定义判敛。$x=1$是瑕点。

$$\begin{aligned}
&\int_1^2[\frac{1}{x\ln^2 x}-\frac{1}{(x-1)^2}]\,dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{1+\varepsilon}^2[\frac{1}{x\ln^2 x}-\frac{1}{(x-1)^2}]\,dx\\
=&\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[-\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{x-1}\right]_{1+\varepsilon}^2=\left[1-\frac{1}{\ln 2}\right]+\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\frac{1}{\ln(1+\varepsilon)}-\frac{1}{\varepsilon}\right]\\
=&\left[1-\frac{1}{\ln 2}\right]+\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{\varepsilon-\ln(1+\varepsilon)}{\varepsilon\ln(1+\varepsilon)}\quad\text{(分母无穷小量替换后用洛必达法则)}\\
=&\frac{3}{2}-\frac{1}{\ln 2}
\end{aligned}$$

故反常积分收敛。

(C) 本题积分中既有无穷积分限又有瑕点 $x=2$。把原积分拆成两个积分

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x-2}}=\int_2^3\frac{dx}{\sqrt{x-2}}+\int_3^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x-2}}$$

判敛。由反常积分的定义，只有当等号右边两个积分都收敛时，原积分收敛。无论用反常积分定义还是判敛法，容易证明：等式右边的第一个积分收敛，第二个积分发散，故原积分发散。

(D) 本题积分中，瑕点 $x=1$ 在积分区间的内部，所以把原积分分成两个积分

$$\int_0^2\frac{2x}{x^2-1}\,dx=\int_0^1\frac{2x}{x^2-1}\,dx+\int_1^2\frac{2x}{x^2-1}\,dx$$

由反常积分的定义，只有当等号右边两个积分都收敛时，原积分收敛。第一个积分的被积函数非正，与 $\int_0^1\frac{2x}{1-x^2}\,dx$同敛散。因为

$$\lim_{x\to1^-}(1-x)\cdot\frac{2x}{1-x^2}=1$$

即 $l=1,\quad q=1$，所以积分 $\int_0^1\frac{2x}{1-x^2}\,dx$发散，原积分发散。

知识点及答案： 反常积分判敛。答案(B)

2. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=1$ 处条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x+2)^{n+1}$ 的收敛半径为 [ ]

(A) 1　　　(B) 2　　　(C) 3　　　(D) 不能确定

解 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x+2)^{n+1}$ 逐项求导数后，得到级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+2)^n$，所以两个级数具有相同的收敛半径。因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=1$ 处条件收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nt^n$ 在 $t=3$ 处条件收敛，由阿贝尔定理，这两个级数的收敛半径都为3，原级数收敛半径为3。

知识点及答案： 幂级数的收敛半径。答案(C)

3. 设 $\varphi(x),\psi(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，且 $\varphi(-x)=\psi(x)$，则 $\varphi(x)$ 的Fourier 系数 a_n,b_n 与 $\psi(x)$ 的Fourier系数 α_n,β_n 的关系是　　[　]

(A) $a_n=\alpha_n,b_n=\beta_n$　　　(B) $a_n=\alpha_n,b_n=-\beta_n$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yf(xy)}{f(z)-1},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xf(xy)}{f(z)-1}$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{f(xy)(ydx+xdy)}{f(z)-1}$$

法2 在方程 $z=\int_{xy}^{z}f(t)\,dt$ 两边求全微分，

$$dz=f(z)dz-f(xy)d(xy)$$

解得

$$dz=\frac{f(xy)d(xy)}{f(z)-1}=\frac{f(xy)(ydx+xdy)}{f(z)-1}$$

知识点： 多元隐函数微分法，变限积分求导法。

3. 点 $(1,2,3)$ 到直线 $\frac{x}{1}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z-3}{-2}$ 的距离为________.

解 直线的方向向量 $\boldsymbol{a}=\{1,-3,-2\}$，直线上有一点 $M(0,4,3)$，设 $(1,2,3)$ 为 P 点，则点到直线的距离为

$$d=\frac{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{PM}|}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

知识点： 点到直线的距离公式。

4. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4} =$ ________.

解 如果极限存在，该极限值是多少呢？我们可以通过考察自变量沿特殊路径趋于无穷大时的情形得到启迪。让 (x,y) 沿 x 轴趋向无穷大，

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y=0}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+0^2}{x^4+0^4} = 0$$

所以，如果极限存在，则极限值为零。下面我们求此极限

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^4}{x^4+y^4} + \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{1}{y^2}\cdot\frac{y^4}{x^4+y^4}$$

因为

$$\left|\frac{x^4}{x^4+y^4}\right| \le 1, \quad \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{1}{x^2} = 0$$

利用有界变量与无穷小量乘积为无穷小量，

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^4}{x^4+y^4} = 0$$

(C) $a_n = -\alpha_n, b_n = \beta_n$ (D) $a_n = -\alpha_n, b_n = -\beta_n$

解
$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(-x)\cos nx\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\cos nt\,dt = a_n \quad \text{(作积分变换}t=-x\text{)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(-x)\sin nx\,dx \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\sin nt\,dt = -b_n \quad \text{(作积分变换}t=-x\text{)} \end{aligned}$$

知识点及答案： Fourier公式，换元积分法。答案(B)

4. 以下表述正确的是 [ ]

(A) 若$f(x,y)$在点 (x_0,y_0) 处存在偏导数，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 一定存在；

(B) 若$f(x,y)$在点 (x_0,y_0) 处可微，则 $f(x,y)$ 在该点一定连续；

(C) 若$f(x,y)$在点 (x_0,y_0) 处存在偏导数 f_x, f_y，则 $f(x,y)$ 在该点处一定可微；

(D) 以上表述皆不正确。

解 (B)是正确的。

三、计算题（本题共 5 小题，每小题 8 分，满分 40 分）

1. 求过点 $(0,2,4)$ 且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行的直线方程。

解法1 两平面的法向量分别为 $\boldsymbol{n_1}=\{1,0,2\},\{0,1,-3\}$，所求直线的方向向量为

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{n_1}\times\boldsymbol{n_2}=\{-2,3,1\}$$

所求直线方程为

$$\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}$$

解法2 过点 $(0,2,4)$ 分别作与两已知平面平行的平面

$$x+2z-8=0,\quad y-3z+10=0$$

两平面的交线

$$\begin{cases}x+2z-8=0\\ y-3z+10=0\end{cases}$$

即为所求直线

2. 设 $z=f(x^2-y^2,xy)+g(x^2+y^2)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，g 具有二阶导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解
$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=2xf_1+yf_2+2xg',\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=2x(-2yf_{11}+xf_{12})+f_2+y(-2yf_{21}+xf_{22})+2x\cdot 2yg''\\ &=-4xyf_{11}+2(x^2-y^2)f_{12}+xyf_{22}+f_2+4xyg''\end{aligned}$$

3. 求直线 L：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 Π：$x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 L_0 的方程，并求 L_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程。

解 过 L 的平面束方程：$x-y-1+\lambda(y+z-1)=0$，若平面垂直于 Π，则

$$\{1,\lambda-1,\lambda\}\cdot\{1,-1,2\}=0$$

解得$\lambda=-2$，过直线 L 垂直于平面 Π的平面方程为：$x-3y-2z+1=0$。
投影直线 L_0 的方程：

$$\begin{cases}x-3y-2z+1=0\\ x-y+2z-1=0\end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{cases}x=2y\\ z=-\dfrac{1}{2}(y-1)\end{cases}$$

若 (x,y,z) 是旋转曲面上点，由直线上点 (x_0,y_0,z_0) 旋转而得，则

$$\begin{cases} y=y_0 \\ x_0^2+z_0^2=x^2+z^2 \\ x_0=2y_0 \\ z_0=-\dfrac{1}{2}(y_0-1) \end{cases}$$

消去x_0,y_0,z_0得到旋转曲面方程: $4y^2+\frac{1}{4}(y-1)^2=x^2+z^2$，即

$$4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0$$

4. 求点 $(2,3,1)$ 在直线 $\dfrac{x+7}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+2}{3}$ 上的投影。

解法1 设 $(2,3,1)$ 为 P 点。因为其投影点 P'在直线上，所以可以假设 $P'(-7+t,-2+2t,-2+3t)$。由于向量 PP'垂直于直线，

$$\{1,2,3\}\cdot\{-9+t,-5+2t,-3+3t\}=0$$

解得 $t=2$。投影点坐标 $P'(-5,2,4)$。

解法2 过点 $(2,3,1)$ 垂直于直线的方面为：$x+2y+3z-11=0$。

直线的参数方程为：$\begin{cases} x=-7+t \\ y=-2+2t \\ z=-2-3t \end{cases}$，代入平面方程，得到直线与平面的交点对应 $t=2$，投影点坐标 $P'(-5,2,4)$。

5. 设方程 $e^{x^2z}+xy^2\ln z=1$ 确定了函数 $z=f(x,y)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

解法1 设 $F(x,y,z)=e^{x^2z}+xy^2\ln z-1$，则

$$F_x(x,y,z)=2xze^{x^2z}+y^2\ln z,\quad F_z=x^2e^{x^2z}+\frac{xy^2}{z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{2xz^2e^{x^2z}+y^2z\ln z}{x^2ze^{x^2z}+xy^2}$$

四、(本题 8 分)将 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}\quad(0\le x\le\pi)$ 展开成正弦级数.

解 做奇延拓和周期延拓.

$$\begin{aligned} a_n=&\ 0\quad(n=0,1,2,\ldots) \\ b_n=&\ \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx dx \end{aligned}$$

四、(本题 8 分)将 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}\quad(0\le x\le\pi)$ 展开成正弦级数.

解 做奇延拓和周期延拓.

$$
\begin{aligned}
a_n &= 0 \quad (n=0,1,2,\ldots)\\
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi-x}{2}\sin nx dx\\
&= -\frac{2}{n\pi}\left[\frac{\pi-x}{2}\cos nx|_0^\pi+\frac{1}{2}\int_0^\pi \cos nx dx\right]\\
&= \frac{1}{n} \quad (n=1,2,\ldots)
\end{aligned}
$$

$f(x)$的正弦级数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx \quad (0<x\le\pi)$$

当 $x=0$ 时，级数收敛到 0，不等于 $f(0)=\pi/2$.

五、(本题 8 分)求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}\cdot(2n-1)!}x^{2n-1}$ 的和函数 $S(x)$，并求 $S(x)$ 在 $x=1$ 处的幂级数展开式。

解 幂级数的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$。可以用两种方法求和函数. 第一种方法，直接利用 $\sin x$ 的Taylor级数，

$$
\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}\cdot(2n-1)!}x^{2n-1}=\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1}\\
&= \sqrt{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}, \quad x\in(-\infty,+\infty)
\end{aligned}
$$

第二种方法：

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}\cdot(2n-1)!}x^{2n-1}$$

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}\cdot(2(n-1))!}x^{2(n-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2^{n}\cdot(2n)!}x^{2n}$$

$$S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2^{n}\cdot(2n-1)!}x^{2n-1}=-\frac{1}{2}S(x)$$

得到微分方程

$$\begin{cases} S''(x)+\dfrac{1}{2}S(x)=0,\\ S(0)=0,\quad S'(0)=1\end{cases}$$

解得

$$S(x)=\sqrt{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

下面把 $S(x)$ 展成 $x-1$ 的幂级数

$$\begin{aligned}S(x)&=\sqrt{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\sin\frac{1+(x-1)}{\sqrt{2}}\\&=\sqrt{2}\left[\sin\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x-1}{\sqrt{2}}+\cos\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right]\\&=\sqrt{2}\left[\sin\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n(2n)!}(x-1)^{2n}+\cos\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2}^{2n+1}(2n+1)!}(x-1)^{2n+1}\right],\end{aligned}$$

$x\in(-\infty,+\infty)$

六、(本题 8 分)就参数 k 的不同取值，讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^k(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1})$$

的敛散性。

解法1 因为

$$a_n=\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}<0$$

所以该级数是负项级数。

考虑正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$，其中

$$|a_n|=-n^k(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1})=n^{k-\frac{1}{2}}\left(2-\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)$$

由

$$\begin{aligned}&2-\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\\=&\ 2-[1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)x^2+o(x^2)]\\&-[1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)x^2+o(x^2)]\\=&\ \frac{1}{4}x^2+o(x^2)\end{aligned}$$

得到

$$\left(2-\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)\sim\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^2}$$

$$|a_n| = n^{k-\frac{1}{2}}\left(2-\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right) \sim \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^{3/2-k}}$$

当 $3/2-k>1$ ，即 $k<1/2$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，原级数收敛。

当 $3/2-k\le 1$ ，即 $k\ge 1/2$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散，原级数发散。

解法2 因为

$$\begin{aligned}
a_n = & \; n^k\left(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right) \\
= & \; n^k\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\right) \\
= & \; n^k\left(\frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}\right) \\
= & \; n^k\frac{-2}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1})} \\
= & \; n^{k-3/2}\frac{-2}{(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}})(\sqrt{1-\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}})} \\
< & \; 0
\end{aligned}$$

所以$|a_n|\sim\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^{3/2-k}}$，当 $k<1/2$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，原级数收敛。当 $k\ge 1/2$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散，原级数发散。