东 南 大 学 考 试 试 卷 (A 卷)

课程名称 数学物理方法 考试学期 10-11-3 得分________

适用专业 面上 考试形式 闭卷 考试时间长度 120分钟

题目	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一 (15分) 求函数$f(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1\end{cases}$ 的Fourier变换，并证明恒等式

$$\int_0^\infty \frac{(1-\cos\omega)\cos\omega x}{\omega^2}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}(1-|x|), & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

二 (15分) 用Fourier变换法推导出定解问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & -\infty<x<\infty,\ 0<y<\pi, \\ u(x,0)=0,\ u(x,\pi)=f(x), & -\infty<x<\infty \end{cases}$$

的求解公式，其中可能会用到下列Fourier变换公式：

$$(1)\quad \mathscr{F}\left[\frac{\sin a}{2\pi(\cosh x+\cos a)}\right](\omega)=\frac{\sinh a\omega}{\sinh \pi\omega},\quad a\in(-\pi,\pi),$$

$$(2)\quad \mathscr{F}\left[\frac{\cos\frac{a}{2}\cosh\frac{x}{2}}{\pi(\cosh x-\cos a)}\right](\omega)=\frac{\cosh a\omega}{\cosh \pi\omega},\quad a\in(-\pi,\pi).$$

三 (10分) 求函数$f(t)=\mathrm{e}^{-at}\sin\omega t$ 的 Laplace 变换(常数$\omega\neq 0$).

四 (15分) 已知下列 Laplace 变换公式: $\mathscr{L}[t^n\mathrm{e}^{at}]=\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$, $\mathscr{L}[\sin\alpha t]=\dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$, $\mathscr{L}[\cos\alpha t]=\dfrac{p}{p^2+\alpha^2}$, $\mathscr{L}[f(t-a)H(t-a)]=\tilde{f}(p)\mathrm{e}^{-pa},(a>0)$. 利用 Laplace 变换法求解微分积分方程的定解问题(其中$t_0>0$是常数)

$$\begin{cases} y'(t)+3\displaystyle\int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\mathrm{d}\tau=H(t-t_0), \quad t>0, \\ y(0)=0. \end{cases}$$

五 (15分) 用分离变量法求解初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = 0,\ u_x(\pi,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = x,\ u_t(x,0) = \cos x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

六 (15分) 用分离变量法求解Laplace方程边值问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<a,\ 0<y<b, \\ u(0,y)=0,\ u(a,y)=0, & 0<y<b, \\ u_y(x,0)=0,\ u(x,b)=x, & 0<x<a. \end{cases}$$

七 (15分) 设 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Bessel 函数$J_0(x)$的所有正零点，将函数 $f(x)=1-x^2$, $x\in[0,1]$ 展开成 Bessel 函数系 $\{J_0(\alpha_n x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的级数, 其中

$$[N_n^{(0)}]^2=\int_0^1 xJ_0^2(\alpha_n x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}J_1^2(\alpha_n),\ 1,2,\cdots.$$