东　南　大　学　考　试　卷

课程名称　高等数学A期末　考试学期　11-12-3　得分 ______

适用专业　选修高数A的各专业　考试形式　闭卷　考试时间长度　150分钟

题号	一	二	三	四	五	六
得分						

一．填空题（每题4分，共36分）

1． 设函数 $u = xy^2$，则 $dz =$ ______________________。

2． 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x=-2$ 处条件收敛，则该幂级数的收敛半径为 $R =$ ______。

3． 设 C 是正向圆周 $|z|=1$，则积分 $\oint_C \frac{\ln(1+z)}{z^2} dz =$ ______________。

4． 曲面 $2xy + z - e^z = 3$ 上点 $(1,2,0)$ P 处的切平面方程为 ______.

5． 交换积分次序：$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx =$ ______________。

6. 留数 $Res[\frac{\sin z}{1-\cos z}, 0] =$ ______________________。

7. 设圆周 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=1$，取逆时针方向，则曲线积分

$\oint_C \sqrt{x^2+y^2}dx + [5x + y\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]dy =$ ______。

8. 若 $du = (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$，则 $u =$ ______________。

9. 设 $f(x) = x+1 (0 \le x \le \pi)$ 展开为正弦级数的和函数 $S(x) =$ ______。

二．计算下列各题（每题7分，共35分）

1． 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$ 的敛散性。

2． 将 $f(x) = \frac{x}{2x^2+3x-2}$ 展成 $x-2$ 的幂级数。

3． 将函数 $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$ 在圆环域 $3 < |z+2| < +\infty$ 内展开为 **Laurent** 级数。

4． 将函数 $f(x) = \frac{\pi}{2} - x, x \in [0,\pi]$ 展开为余弦级数。

5. 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})\right)$的敛散性，若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

三.（8 分）计算曲线积分$I=\int_C(12xy+e^y)dx-(\cos y-xe^y)dy$，其中曲线$C$由点$A(-1,1)$沿曲线$y=x^2$到点$O(0,0)$，再沿直线$y=0$到点$B(2,0)$的路径。

四.（8 分）计算第二型曲面积分：$I=\iint_{\Sigma}x(2+6z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(3-z^2)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，其中$\Sigma: z=2-x^2-y^2(0<z<2)$，取上侧。

五.（7 分） 求数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(2n-1)}$的和。

六.（6 分）将二重积分$\iint_D f(x,y)dxdy$ 表示为极坐标下的二次积分，其中

$$D=\left\{(x,y)\middle|(x^2+y^2)^2\ge x^2-y^2, 0\le y\le\sqrt{2x-x^2}, 0\le x\le 1\right\}$$

11-12-3 高等数学 A（下）期末考卷参考答案

一．填空题（每题 4 分，共 36 分）

1. $y^2dx + 2xydy$ 。 2. $R = 3$ 。 3. $2\pi i$ 。 4. $2x + y = 4$.

5. $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x,y)dy$ 。 6. 2 。 7. 5π 。

8. $\frac{1}{5}x^5 - y^5 + 2x^2y^3 + C$ 。 9. $\begin{cases} x+1, & 0 < x < \pi \\ 0, & x = 0, \pi \end{cases}$ 。

二．计算下列各题（每题 7 分，共 35 分）

1. $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{3}{e} > 1,$ 故级数发散

2.
$$f(x) = \frac{1}{5}\left(\frac{2}{x+2} - \frac{1}{1-2x}\right) = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x-2}{4}} + \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{2}{3}(x-2)}\right]$$
$$= \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2^n}{3^{n+1}}\right)(x-2)^n, \quad x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

3.
$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{z+2}\left[\frac{1}{1-\frac{3}{z+2}} - \frac{1}{1-\frac{1}{z+2}}\right] = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(3^n - 1)\frac{1}{(z+2)^{n+1}}$$

4.
$$b_n = 0; \qquad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx = 0,$$
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos nx\,dx = \frac{2(1-(-1)^n)}{n^2\pi};$$
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(1-(-1)^n)}{n^2\pi}\cos nx, \qquad x \in [0, \pi]$$

5.
利用极限比较法得：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 同为发散，

利用Leibniz判别法得：原交错级数收敛，故为条件收敛。

三．（8 分）

取点 $D(2,1)$，连接线段 BD 和 DA，则

$$I = \oint_{C+BD+DA} - \int_{BD} - \int_{DA} = \iint_D (-12x)d\sigma + \int_0^1(\cos y - 2e^y)dy - \int_2^{-1}(12x + e)dx$$
$$= e - 1 + \sin 1$$

另解：利用基本算法直接计算。

四．（8 分）

补 Σ_1： $z=0$,取下侧。

$$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=\iiint\limits_{\Omega}2(1+z)dv-(-\iint\limits_{x^2+y^2\le 2}3dxdy)=\frac{20}{3}\pi+6\pi=\frac{38}{3}\pi$$

五.（7 分）

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n(2n-1)}x^{2n}$， $S''(x)=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\dfrac{2}{1+x^2}$，

$\Rightarrow S'(x)=2\arctan x\Rightarrow S(x)=2[x\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)],x\in[-1,1]$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n(2n-1)}=S(1)=\dfrac{\pi}{2}-\ln 2$

六.（6 分）

区域 D 为双纽线 $\rho^2=\cos 2\varphi$ 以外，圆 $\rho=2\cos\varphi$ 以内，相应于 $0\le x\le 1$ 的范围。

$$\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_{\sqrt{\cos 2\varphi}}^{\frac{1}{\cos\varphi}}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\mathrm{d}\rho$$