东南大学 2012-2013 学年第二学期《高等数学(上)》期中考试试卷

课程名称 高等数学A、B（期中） 考试学期 12-13-2 得分

适用专业 工科类 考试形式 闭卷 考试时间长度 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

一、 填空题（本题共6小题，前5题每题4分，第6题9分,共29分）

1. 设斜率为$-\dfrac{1}{2}$的直线L是曲线$y=\dfrac{2}{x}(x>0)$的切线,则L的方程为__________;

2. 函数$f(x)=\dfrac{3}{2-\frac{2}{x}}$的全部间断点分别是______,它们的类型依次分别为______;

3. 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+2012)$, 则 $f'(-1)=$ ______;

4. 设 $y=f(\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}))$, 其中 $f(u)$ 为可微函数, 则微分$\mathrm{d}y=$ ________;

5. 函数 $f(x)=\mathrm{e}^{\sin x}$ 带Peano余项的 2 阶Maclaurin公式是 ____________;

6. 分别举出符合下列各题要求的一例,并将其填写在横线上:

(1) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|$ 存在, 但极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在的数列 $a_n=$ __________;

(2) 极限 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to0}f(x)g(x)$ 都存在,但极限 $\lim\limits_{x\to0}g(x)$ 不存在的函数

$f(x)=$ __________, $g(x)=$ __________;

(3) 在 $x=0$ 处导数不存在,但 $x=0$ 是极值点的连续函数有__________.

二、 单项选择题（本题共3小题，每小题4分，满分12分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases}(1-x)^{\frac{1}{x}}, & x>0\\ b, & x=0\\ x\sin\frac{1}{x}-a, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 [ ]

(A) $a=b=\mathrm{e}$ (B) $a=b=\mathrm{e}^{-1}$ (C) $a=-b=\mathrm{e}^{-1}$ (D) $a=-b=-\mathrm{e}^{-1}$

2. 设 $f(x)=(x+|\sin x|)\cos x$, 则 [ ]

(A) $f'(0)=2$ (B) $f'(0)=0$ (C) $f'(0)=1$ (D) $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导

3. 下列命题正确的是: [　　]

(A)任何两个无穷小量之比的极限必存在(极限值为有限实数或∞);

(B)若数列 $\{a_{2k-1}\}$ 和 $\{a_{2k}\}$ 都收敛,则数列 $\{a_n\}$ 也收敛;

(C)若数列 $\{a_n\}$ 收敛,数列 $\{b_n\}$ 发散,则数列 $\{a_nb_n\}$ 必发散;

(D)若数列$\{a_n\}$单调增加,数列$\{b_n\}$单调减少,且 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

三、 计算下列各题（本题共5小题，每小题7分，满分35分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^4}-\sqrt[3]{1-2x^4}}{(1-\cos x)\sin^2 x}$.

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^4+4^n}$.

3. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $x+y=\arctan(x-y)$ 所确定的隐函数,求导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

4. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x-2}$, 求 $f^{(n)}(x)$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases} x=\mathrm{e}^{2t}-1 \\ y=t^3+1 \end{cases}$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{t=2}$.

四、 （本题满分8分） 证明：当 $x>0$ 时， $x^2+1>\ln x$.

五、 （本题满分8分） 设函数$f(x)$在闭区间$[0,3a]$ $(a>0)$上连续，在开区间$(0,3a)$内可导，且$f(3a)=f(a)<f(0)<f(2a)$.
证明：至少存在一点 $\xi\in(0,2a)$, 使得 $f'(\xi)=f'(\xi+a)$.

六、 （本题满分8分） (1) 证明不等式： $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$;

(2) 设 $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$, 利用单调有界原理证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

12-13-2 高等数学（A，B）期中试卷参考答案

一、 填空题（本题共6小题，前5题每题4分，第6题9分,共29分）

1. $x+2y-4=0$； 2. $0,1$; 可去,无穷; 3. $-2011!$; 4. $\dfrac{f'(\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}))}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x$;

5. $1+x+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$; 6. (1)$(-1)^n$； (2)$x,\sin\dfrac{1}{x}$; (3)$f(x)=|x|$.

二、 单项选择题（本题共3小题，每小题4分，满分12分）

1. D; 2. D; 3. D

三、 计算下列各题（本题共5小题，每小题7分，满分35分）

1. 解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^4}-\sqrt[3]{1-2x^4}}{(1-\cos x)\sin^2 x}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^4+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)}{x^4}=\dfrac{7}{3}$. (5分+2分)

2. 解 $4\le\sqrt[n]{n^4+4^n}\le4\sqrt[n]{2}$ $(n\ge5)$ (2分), 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$ (2分),
由夹逼定理得, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^4+4^n}=4$. (3分)

3. 解 $1+y'=\dfrac{1-y'}{1+(x-y)^2}$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{(x-y)^2}{2+(x-y)^2}$. (5分+2分)

4. 解 (1分) (3分+3分)

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)^{(n)}=\frac{n!}{3}\left(\frac{(-1)^n}{(x-1)^{n+1}}-\frac{(-1)^n}{(x+2)^{n+1}}\right)$$

5. 解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{3}{2}t^2\mathrm{e}^{-2t}$, (3分) $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{t=2}=\dfrac{3}{2}t(1-t)\mathrm{e}^{-4t}\Big|_{t=2}=-3\mathrm{e}^{-8}$. (4分)

四、 （本题满分8分） 证 设 $f(x)=x^2+1-\ln x$, (2分)

令 $f'(x)=2x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2-1}{x}=0$, 得 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 是 $f(x)$ 唯一的极小值点, 因而是最小值点, (4分) 所以 $f(x)\ge f(\dfrac{1}{\sqrt{2}})=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\ln2>0$, 即 $x^2+1>\ln x$. (2分)

五、 （本题满分8分） 证 设 $F(x)=f(x+a)-f(x)$, (2分)

$F(0)=f(a)-f(0)<0, F(a)=f(2a)-f(a)>0, F(2a)=f(3a)-f(2a)<0$,

由连续函数零点存在定理,知存在$\xi_1\in(0,a),\xi_2\in(a,2a)$,使$F(\xi_1)=F(\xi_2)=0$,
(4分)再由Rolle定理知,存在 $\xi\in(0,2a)$, 使 $F'(\xi)=0$, 即 $f'(\xi)=f'(\xi+a)$.(2分)

六、（本题满分8分） 证 (1) 由Lagrange中值定理知,存在 $\xi \in (n, n+1)$, 使得 $\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{\xi}$, 从而 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ (3分)

(2) $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 0$, 所以 $\{x_n\}$ 单减.(2分)

$$\begin{aligned}
x_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \\
&> \ln(1+1) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{3}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln n \\
&= \ln\left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0
\end{aligned}$$

所以 $\{x_n\}$ 有下界. 由单调有界原理知 $\{x_n\}$ 收敛. (3分)