线

封

密

姓名________

学号________

自觉遵守考场纪律

如考试作弊

此答卷无效

东 南 大 学 考 试 卷 (A 卷)

课程名称 数学物理方法 考试学期 16-17-3 得分________

适用专业 面上 考试形式 闭卷 考试时间长度 120分钟

题目	一	二	三	四	五	六	七
得分							

注意：本份试卷可能会用到以下公式：

1、$\mathscr{L}[\sin\alpha t](p) = \dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$，$\mathscr{L}[\cos\alpha t](p) = \dfrac{p}{p^2+\alpha^2}$；

2、$\mathscr{L}[f(t-t_0)H(t-t_0)](p) = \tilde{f}(p)\mathrm{e}^{-t_0 p},\ t_0 \geq 0$;

3、$(x^{\nu}J_{\nu}(x))' = x^{\nu}J_{\nu-1}(x),\ (x^{-\nu}J_{\nu}(x))' = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$.

4、$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-Ax^2}](\lambda) = \sqrt{\dfrac{\pi}{A}}\mathrm{e}^{-\lambda^2/(4A)}, A > 0$.

一 填空题(每空5分，共30分)

1. 给定方程$u_{xx} - 6u_{xy} + 3u_{yy} = x + y$, 则它是几阶方程？________；它是那种类型的方程？________________.

2. 特征值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \\ X'(0) = 0,\ X'(l) = 0 \end{cases}$$

的所有特征值及其对应的特征函数是________________________________.

3. 像函数$\tilde{f}(p) = \dfrac{p + 3\mathrm{e}^{-2p}}{p^2+9}$的Laplace逆变换$f(t) =$________________.

4. 对于三维波动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0, & (x,y,z) \in R^3, t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x,y,z),\ u_t|_{t=0} = \psi(x,y,x), & (x,y,z) \in R^3, \end{cases}$$

设S_M^{at}是以点$M(x,y,z)$为球心、at为半径的球面，其求解公式为

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\oint_{S_M^{at}} \frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta)}{t}\mathrm{d}S + \oint_{S_M^{at}} \frac{\psi(\xi,\eta,\zeta)}{t}\mathrm{d}S\Big).$$

根据此公式，点$M(0,0,0)$的依赖区域为________________.

5. 积分$\displaystyle\int_0^1 xJ_0(2x)\mathrm{d}x =$________________.

二 (10分) (不需要计算求解)写出求解非齐次方程初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & 0 < x < l, t > 0, \\ u_x(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0, & 0 < x < l \end{cases}$$

的齐次化原理.

三 (15分) 用分离变量法求初边值问题(其中a, b是常数, $a > 0$)

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + bu = 0, & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = x, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

密 封 线

四 (12分) 利用 Fourier 变换法推导下列问题的求解公式, 其中常数$a \neq 0$,

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + u_x = 0, & x \in R,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in R. \end{cases}$$

五 (10分) 用特征线方法求解半无界问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x > 0,\ t > 0, \\ u(0,t) = \sin t, & t > 0, \\ u(x,0) = \sin x,\ u_t(x,0) = 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

线

封

密

六 (10分) 用镜像法求球型区域$\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ 上的Green 函数.

七 (13分) 用分离变量法推导下列圆形薄膜振动方程初边值问题的求解公式

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}) = 0, & 0 < r < b,\ 0 \le \theta \le 2\pi, t > 0, \\ |u(0,\theta,t)| < \infty,\ u(b,\theta,t) = 0, & 0 \le \theta \le 2\pi, t > 0, \\ u(r,\theta,0) = \varphi(r)\sin\theta,\ u_t(r,\theta,0) = 0, & 0 \le r \le b, 0 \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$$

注：$N_n^2 = \int_0^b xJ_1^2(\alpha_n x/b)\mathrm{d}x = \frac{b^2}{2}J_2^2(\alpha_n)$, 其中$\alpha_n$是 $J_1(x)$的第n个正零点.

密 封 线