实验二　利用追赶法解三对角线性方程

孙寒石　06219109　2021 年 4 月 14 日

一、实验目的及原理

编写用追赶法解三对角线性方程的程序，并解下列方程组：

$Ax=b$，其中

$$A_{10\times 10}=\begin{bmatrix} -4 & 1 & & & & \\ 1 & -4 & 1 & & & \\ & 1 & -4 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -4 & 1 \\ & & & & 1 & -4 \end{bmatrix},\qquad b=\begin{bmatrix} -27 \\ -15 \\ -15 \\ \vdots \\ -15 \\ -15 \end{bmatrix}$$

设系数矩阵为三对角矩阵

$$A=\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

则方程组$Ax=f$称为三对角方程组。

设矩阵 A 非奇异，A 分解 A=LU，其中 L 为下三角矩阵，U 为单位上三角矩阵

$$L=\begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \partial_3 & \beta_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \partial_n & \beta_n \end{pmatrix},\qquad U=\begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \gamma_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

可先依次求出 L，U 中的元素后，令$Ux=y$，先求解下三角方程组$Ly=f$ 得出 y，再求解上三角方程组$Ux=y$。

事实上，求解三对角方程组的 2 追赶法将矩阵三角分解的计算与求解两个三角方程组的计算放在一起，使算法更为紧凑。其计算公式为：

$$\begin{cases} \beta_1 = b_{1,} \quad \gamma_1 = \dfrac{c_1}{\beta_1}, \qquad y_1 = \dfrac{f_1}{\beta_1} \\ \text{对} i = 2,3,\cdots,n \\ \alpha_i = a_{i,} \qquad \beta_i = b_i - a_i\gamma_{i-1}, \qquad \gamma_i = \dfrac{c_i}{\beta_i} \\ y_i = \dfrac{f_i - \alpha_i y_{i-1}}{\beta_i} \\ x_n = y_n \\ \text{对} i = n-1, n-2, \cdots, 1 \\ x_i = y_i - \gamma_i x_{i+1} \end{cases}$$

1. 预处理

生成方程组的系数u_i及其除数d_i，事实上，可交替生成d_i与u_i：

$$d_1 \to u_1 \to d_2 \to \cdots \to u_{n-1} \to d_n$$

其计算公式为

$$\begin{cases} d_1 = \mathrm{b}_1 \\ \mathrm{u}_\mathrm{i} = \mathrm{c}_\mathrm{i} / d_i, \qquad i = 1,2,\ldots,n-1 \\ d_{i+1} = b_{i+1} - a_{i+1}u_i, \end{cases}$$

2. 追的过程

顺序生成方程组右端：

$$y_i \to y_2 \to \cdots \to y_n$$

计算公式为

$$\begin{cases} y_1 = f_1 / d_1 \\ y_i = (f_i - a_i y_{i-1}) / d_i, \end{cases} i = 2,3,\ldots,n$$

3. 赶的过程

逆序得出方程组的解x_i：

$$x_n \to x_{n-1} \to \cdots \to x_1$$

其计算公式按式为

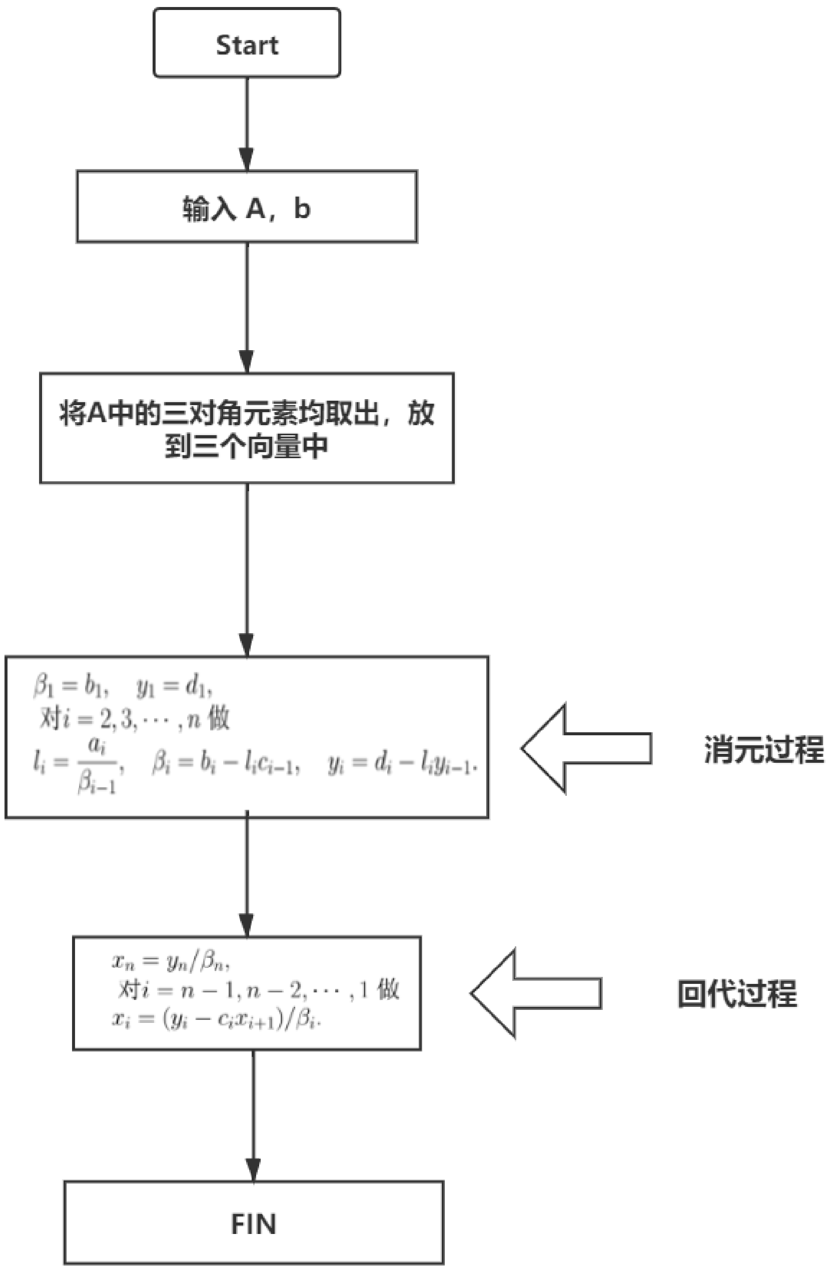
$$\begin{cases} x_n = y_n \\ x_i = y_i - u_i x_{i+1}, \end{cases} i = n-1, n-2, \ldots, 1$$

二、实验环境

- 编程语言：Python
- 编程环境：Jupyter Notebook

三、实验步骤

算法框图：



四、实验代码及结果

• Codes：

```
import numpy as np
# 追赶法求三对角线性方程组
# a 为主对角线元素，bb，c 分别为次对角线元素，x 为解
def solution(A,b):
    n = A.shape[0]
    a = np.array([])
    bb = np.array([])
    c = np.array([])

    a = np.append(a,A[0,0])
    bb = np.append(bb,0)
    c = np.append(c,A[0,1])
    for i in range(n-2):
        a = np.append(a,A[i+1,i+1])
        bb = np.append(bb,A[i+1,i])
        c = np.append(c,A[i+1,i+2])
    a = np.append(a,A[n-1,n-1])
    bb = np.append(bb,A[n-1,n-2])
    c = np.append(c,0)

    l = np.array([])
    beta = np.array([])
    y = np.array([])
    beta = np.append(beta,a[0])
    y = np.append(y,b[0])
    l = np.append(l,0)
    for i in range(n-1):
        l = np.append(l,bb[i+1]/beta[i])
        beta = np.append(beta,a[i+1]-l[i+1]*c[i])
        y = np.append(y,b[i+1]-l[i+1]*y[i])

    x = np.array([])
    for i in range(n):
        x = np.append(x,0)

    x[n-1] = y[n-1]/beta[n-1]
    for i in range(n-1):
        x[n-2-i] = (y[n-2-i] - c[n-2-i]*x[n-2-i+1])/beta[n-2-i]
    return x
```

```
A  =  np.array([[-4,1,0,0,0,0,0,0,0,0],
                 [1,-4,1,0,0,0,0,0,0,0],
                 [0,1,-4,1,0,0,0,0,0,0],
                 [0,0,1,-4,1,0,0,0,0,0],
                 [0,0,0,1,-4,1,0,0,0,0],
                 [0,0,0,0,1,-4,1,0,0,0],
                 [0,0,0,0,0,1,-4,1,0,0],
                 [0,0,0,0,0,0,1,-4,1,0],
                 [0,0,0,0,0,0,0,1,-4,1],
                 [0,0,0,0,0,0,0,0,1,-4]])

b  =  np.array([-27,-15,-15,-15,-15,-15,-15,-15,-15,-15])
x  =  solution(A,b)
```

输出结果：

```
array([8.70575808, 7.82303234, 7.58637127, 7.52245276, 7.50343976,
       7.4913063 , 7.46178542, 7.35583538, 6.9615561 , 5.49038903])
```

所以方程组的解为：

$$x=\begin{bmatrix} 8.70575808 \\ 7.82303234 \\ 7.58637127 \\ 7.52245276 \\ 7.50343976 \\ 7.4913063 \\ 7.46178542 \\ 7.35583538 \\ 6.9615561 \\ 5.49038903 \end{bmatrix}$$

五、分析和讨论

通过程序输出，我们可以得到如下结果：

$$x=\begin{bmatrix} 8.70575808 \\ 7.82303234 \\ 7.58637127 \\ 7.52245276 \\ 7.50343976 \\ 7.4913063 \\ 7.46178542 \\ 7.35583538 \\ 6.9615561 \\ 5.49038903 \end{bmatrix}$$

我们用 matlab 直接求解方程进行验证，结果正确。

在一些实际问题中，例如解常微分方程边值问题，解热传导方程以及船体数学放样中建立三次样条函数等，都会要求解系数矩阵为对角占优的三对角线方程组，此时学会利用编程来解决这个特殊的方程组便显得尤为重要。

六、附件

- exp2.ipynb
- exp2.pdf