自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名________ 学号________

线 封 密

东 南 大 学 考 试 卷 (B 卷)

课程名称 数学物理方法 考试学期 15-16-3 得分________

适用专业 面上 考试形式 闭卷 考试时间长度 120分钟

题目	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

注意：本份试卷可能会用到以下公式：

1、$\mathscr{L}[\sin\alpha t](p)=\dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$，$\mathscr{L}[\cos\alpha t](p)=\dfrac{p}{p^2+\alpha^2}$，$\mathscr{L}[t^n\mathrm{e}^{at}](p)=\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$；

2、$\mathscr{L}[f(t-t_0)H(t-t_0)](p)=\tilde{f}(p)\mathrm{e}^{-t_0p},\ t_0\ge 0$；

3、$\mathscr{L}[t^nf(t)](p)=(-1)^n\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}\tilde{f}(p)$；

一 填空题(30分，每空5分)

1. 给定方程$u_{xx}+u_{yy}-u^2=0$, 则此方程是线性方程? 以及是否是齐次方程?
________.

2. 设有初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & 0<x<l, t>0, \\ u(0,t)=2,\ u(l,t)=3-t, & t\ge 0, \\ u(x,0)=\varphi(x), u_t(x,0)=\psi(x), & 0\le x\le l, \end{cases}$$

将此问题化为齐次边界条件的初边值问题得到

________________;

用分离变量法求解此问题时，所得特征函数系是________.

3. 对于波动方程$u_{tt}-9u_{xx}=0, x\in R, t>0$，如果点$M(-2,4)$的依赖区间是________.

4. 设$u(x,y)=3x^2y-\varphi(y)$是调和函数，且$u(0,0)=0$，则$\varphi(y)=$________.

5. 设$J_1(x)$是1阶Bessel函数，则$y(x)=J_1(x)/\sqrt{x}$ 满足常微分方程________
________.

二 (15分) 用分离变量法求解半圆域$D=\{(x,y)\ :x^2+y^2<a^2,y>0\}$上Laplace方程边值问题(推导出解的表达式及计算各系数的公式):

$$\begin{cases} \Delta u := u_{rr}+\dfrac{1}{r}u_r+\dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0, & 0<r<a, 0<\theta<\pi, \\ u(a,\theta)=g(\theta),\ |u(0,\theta)|<\infty, & 0<\theta<\pi, \\ u_\theta(r,0)=u_\theta(r,\pi)=0, & 0\le r\le a. \end{cases}$$

三 (10分) 已知函数$f(x)$的Fourier变换为$\hat{f}(\lambda)$, 求$\hat{f}(\lambda/2)\cos\lambda$ 的Fourier逆变换.

四 (10分) 用 Laplace 变换法求解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \sin x, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

五 (12分) 用 Fourier 变换法推导出下列边值问题的求解公式

$$\begin{cases} u_t - 2tu_{xx} = 0, & x \in R,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in R. \end{cases}$$

六 (10分) 证明二维波动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0, & (x,y) \in R^2, t > 0, \\ u|_{t=0} = xg(y) + f(x),\ u_t|_{t=0} = h(x), & (x,y) \in R^2 \end{cases}$$

的解可表示为

$$u(x,y,t) = \frac{x}{2}[g(y+at) + g(y-at)] + \frac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} h(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

线　封　密

七 (13分) 用分离变量法及Bessel函数理论推导下列边值问题的解的表达式，并给出有关常数的计算公式

$$\begin{cases} u_t = a^2(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}), & 0 < r < b, 0 \le \theta < 2\pi,\ t > 0, \\ |u(0,\theta,t)| < \infty,\ u(b,\theta,t) = B, & 0 \le \theta < 2\pi, t > 0, \\ u(r,\theta,0) = 0, & 0 \le r \le b, 0 \le \theta < 2\pi. \end{cases}$$

其中B是常数. 注：$N_n^2 = \int_0^b xJ_0^2(\alpha_n x/b)\mathrm{d}x = \frac{b^2}{2}J_1^2(\alpha_n)$, 其中$\alpha_n$是 $J_0(x)$的第n个正零点.