自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名______ 学号______

密……封……线

东 南 大 学 考 试 卷 (A 卷)

课程名称 数学物理方法 考试学期 15-16-3 得分________

适用专业 面上 考试形式 闭卷 考试时间长度 120分钟

题目	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

注意：本份试卷可能会用到以下公式：

1、$\mathscr{L}[\sin\alpha t](p)=\dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$，$\mathscr{L}[\cos\alpha t](p)=\dfrac{p}{p^2+\alpha^2}$，$\mathscr{L}[t^n\mathrm{e}^{at}](p)=\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$；

2、$\mathscr{L}[f(t-t_0)H(t-t_0)](p)=\tilde{f}(p)\mathrm{e}^{-t_0p},\ t_0\ge 0$;

3、$\mathscr{L}[t^nf(t)](p)=(-1)^n\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}\tilde{f}(p)$;

一 填空题(30分，每空5分)

1. 给定方程$u_{tt}+u_{xxxx}=hu_t^2$, 则此方程是几阶方程? 以及是否是齐次方程?
   四阶、齐次方程.

2. 设有初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & 0<x<l,t>0,\\ u(0,t)=A,\ u_x(l,t)=B, & t\ge 0,\\ u(x,0)=\varphi(x),u_t(x,0)=\psi(x), & 0\le x\le l,\end{cases}$$

   其中A,B是常数，将此问题化为齐次边界条件的初边值问题得到

$$\begin{cases} v_{tt}-a^2v_{xx}=0, & 0<x<l,t>0,\\ v(0,t)=0,\ v_x(l,t)=0, & t\ge 0,\\ v(x,0)=\varphi(x)-A-Bx,v_t(x,0)=\psi(x), & 0\le x\le l,\end{cases};$$

   用分离变量法求解此问题时，所得特征函数系是$\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l},n=1,2,\cdots$.

3. 对于波动方程$u_{tt}-u_{xx}=0,x\in R,t>0$，设区间$[x_1,x_2]$的决定区域是$\{(x,t):-1+t\le x\le 3-t,0\le t\le 2\}$, 则该区间$[x_1,x_2]=$ $[-1,3]$.

4. 设$u(x,y)=x^3y+x\varphi(y)$是调和函数，则$\varphi(y)=$ $-6y^3+Cy+D$, C,D是任意常数.

5. 按镜像法，上半空间$R_+^3=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3):\ x_1,x_2\in R,x_3>0\}$ 的格林函数 $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}-\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}^*|}\right]$.

线 封 密

二 (15分) 用分离变量法求解圆外区域$D=\{(x,y)\ :x^2+y^2>a^2\}$上Laplace方程边值问题(推导出解的表达式及计算各系数的公式):

$$\begin{cases}\Delta u:=u_{rr}+\dfrac{1}{r}u_r+\dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0, \quad a<r<\infty, 0\le\theta<2\pi,\\ u(a,\theta)=h(\theta),\ 0\le\theta<2\pi,\\ \lim\limits_{r\to\infty}u(r,\theta)\text{有界}.\end{cases}$$

解 令$U(r,\theta)=R(r)\Phi(\theta)$非平凡特解，将其代入方程，得

$$\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}=-\frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)}=\lambda(\text{常数}).$$

因此，$r^2R''(r)+rR'(r)-\lambda R(r)=0,\ \Phi''(\theta)+\lambda\Phi(\theta)=0.$ 由$U(r,\theta)=U(r,\theta+2\pi)$, 得$\Phi(\theta)=\Phi(\theta+2\pi)$; 由$\lim\limits_{r\to\infty}u(r,\theta)$有界, 得$\lim\limits_{r\to\infty}R(r)$ 有界. ············· 4分

求解特征值问题

$$\begin{cases}\Phi''(\theta)+\lambda\Phi(\theta)=0,\\ \Phi(\theta)=\Phi(\theta+2\pi),\end{cases}$$

得特征值$\lambda_n=n^2$,特征函数$\Phi_n(\theta)=C_n\cos n\theta+D_n\sin n\theta,\ n=0,1,\cdots.$ ········· 7分

把$\lambda=\lambda_n=n^2$代入$R(r)$所在的方程，得

$$r^2R_n''(r)+rR_n'(r)-n^2R_n(r)=0.$$

求得此方程的通解为

$$R_0(r)=A_0+B_0\ln r,\ R_n(r)=A_nr^{-n}+B_nr^n,\ n=1,2,\cdots.$$

再利用$\lim\limits_{r\to\infty}R(r)$，得$B_n=0,\ n=0,1,2,\cdots$. 所以$R_n(r)=r^{-n},\ n=0,1,2,\cdots$ (取 $A_n=1$). ············ 11分

因此非平凡特解

$$U_n(r,\theta)=(C_n\cos n\theta+D_n\sin n\theta)r^{-n},\ n=0,1,2,\cdots.$$

叠加得一般解

$$u(r,\theta)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cos n\theta+D_n\sin n\theta)r^{-n}.$$ ·················· 13分

利用边界条件，得

$$C_0+\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cos n\theta+D_n\sin n\theta)a^{-n}=h(\theta),\ 0\le\theta<2\pi.$$

所以

$$C_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(\theta)\mathrm{d}\theta,\ C_n=\frac{a^n}{\pi}\int_0^{2\pi}h(\theta)\cos n\theta\mathrm{d}\theta, D_n=\frac{a^n}{\pi}\int_0^{2\pi}h(\theta)\sin n\theta\mathrm{d}\theta.$$ ······15分

线 封 密

三 (10分) 求函数$f(t)=t\mathrm{e}^{-t}\cos\omega t,\ t\in[0,\infty)$ 的Laplace变换.

解 方法I：由$\mathscr{L}[\cos\omega t](p)=\frac{p}{p^2+\omega^2}$得

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-t}\cos\omega t](p)=\frac{p+1}{(p+1)^2+\omega^2}.$$

………………… 6分

从而得

$$\mathscr{L}[t\mathrm{e}^{-t}\cos\omega t](p)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\frac{p+1}{(p+1)^2+\omega^2}=\frac{(p+1)^2-\omega^2}{((p+1)^2+\omega^2)^2}.$$

………………… 10分

方法II：由$\mathscr{L}[\cos\omega t](p)=\frac{p}{p^2+\omega^2}$得

$$\mathscr{L}[t\cos\omega t](p)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\frac{p}{p^2+\omega^2}=\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}.$$

………………… 6分

从而得

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{-t}t\cos\omega t](p)=\mathscr{L}[t\cos\omega t](p+1)=\frac{(p+1)^2-\omega^2}{((p+1)^2+\omega^2)^2}.$$

………………… 10分

四 (10分) 用 Laplace 变换法求解定解问题

$$\begin{cases} xu_t+u_x=x, & x>0,\ t>0,\\ u(0,t)=\sin t, & t>0,\\ u(x,0)=0, & x\geq 0.\end{cases}$$

解 关于t作Laplace变换并记$\mathscr{L}[u(x,t)]=\tilde{u}(x,p)$，得

$$\begin{cases} xp\tilde{u}+\tilde{u}_x=x/p, & x>0,\\ \tilde{u}(0,p)=\frac{1}{1+p^2}.\end{cases}$$ ………………… 4分

求得

$$\tilde{u}=\frac{1}{p^2}+\Big[\frac{1}{1+p^2}-\frac{1}{p^2}\Big]\mathrm{e}^{-px^2/2}.$$

………………… 7分

作逆变换，得

$$u(x,t)=t+[\sin(t-x^2/2)-t+x^2/2]H(t-x^2/2).$$

………………… 10分

五 (12分) 用 Fourier 变换法推导出下列边值问题的求解公式

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x\in R,\ y>0, \\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in R, \\ \lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} u(x,y)=0. \end{cases}$$

注：$\mathscr{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-a|\lambda|}](x)=\dfrac{a}{\pi(x^2+a^2)}$,常数$a>0$.

解 关于x作Fourier变换并记$\mathscr{F}[u(x,y)]=\hat{u}(\lambda,y)$，得

$$\begin{cases} -\lambda^2\hat{u}+\hat{u}_{yy}=0, & y>0, \\ \hat{u}(\lambda,0)=\hat{\varphi}(\lambda),\ \lim\limits_{y\to\infty}\hat{u}(\lambda,y)=0. \end{cases}$$

.... 6分

求得

$$\hat{u}(\lambda,y)=\hat{\varphi}(\lambda)\mathrm{e}^{-y|\lambda|}.$$

.... 9分

作逆变换，得

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \varphi(x)*\mathscr{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-y|\lambda|}](x) \\ &= \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\xi)}{(x-\xi)^2+y^2}\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

.... 12分

密 ………… 封 ………… 线

线　封　密

六 (10分) 用降维法及达朗贝尔公式推导下列三维波动方程初值问题的解的表达式

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0, & (x, y, z) \in R^3, t > 0, \\ u|_{t=0} = zg(y),\ u_t|_{t=0} = h(x), & (x, y, z) \in R^3. \end{cases}$$

解 设$u_1(x, y, z, t), u_2(x, y, z, t)$分别是下列问题的解

$$(I) \begin{cases} u_{1tt} - a^2(u_{1xx} + u_{1yy} + u_{1zz}) = 0, & (x, y, z) \in R^3, t > 0, \\ u_1|_{t=0} = zg(y),\ u_{1t}|_{t=0} = 0, & (x, y, z) \in R^3, \end{cases}$$

$$(II) \begin{cases} u_{2tt} - a^2(u_{2xx} + u_{2yy} + u_{2zz}) = 0, & (x, y, z) \in R^3, t > 0, \\ u_2|_{t=0} = 0,\ u_{2t}|_{t=0} = h(x), & (x, y, z) \in R^3. \end{cases}$$

………………… 3分

由叠加原理得$u = u_1 + u_2$. 为了求出u_1, 作辅助问题

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2(v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}) = 0, & (x, y, z) \in R^3, t > 0, \\ v|_{t=0} = g(y),\ v_t|_{t=0} = 0, & (x, y, z) \in R^3, \end{cases}$$

利用降维法，此问题的解v与x, z无关，即v满足一维问题

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{yy} = 0, & y \in R, t > 0, \\ v|_{t=0} = g(y),\ v_t|_{t=0} = 0, & y \in R, \end{cases}$$

由达朗贝尔公式，得$v(x, y, z, t) = \frac{1}{2}[g(y + at) + g(y - at)]$. 因此$u_1 = zv(x, y, z, t)$是问题(I)的解.

………………… 7分

对于问题(II), 由降维法知u_2与y, z无关，即u_2满足一维问题

$$\begin{cases} u_{2tt} - a^2 u_{2xx} = 0, & x \in R, t > 0, \\ u_2|_{t=0} = 0,\ u_{2t}|_{t=0} = h(x), & x \in R, \end{cases}$$

由达朗贝尔公式，得

$$u_2(x, y, z, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} h(\xi) \mathrm{d}\xi.$$

因原问题的解为

$$u(x, y, z, t) = u_1 + u_2 = \frac{z}{2}[g(y + at) + g(y - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} h(\xi) \mathrm{d}\xi.$$

………………… 10分

七 (13分) 用分离变量法及Bessel函数理论推导下列边值问题的解的表达式，并给出有关系数的计算公式

$$\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+u_{zz}=0, & 0<r<1, 0\le\theta<2\pi,\ 0<z<h, \\ |u(0,\theta,z)|<\infty,\ u(1,\theta,z)=0, & 0\le\theta<2\pi, 0\le z\le h, \\ u(r,\theta,0)=0,\ u(r,\theta,h)=\varphi(r)\sin\theta, & 0\le r\le 1, 0\le\theta<2\pi. \end{cases}$$

注：$N_n^2=\int_0^1 xJ_1^2(\alpha_n x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}J_2^2(\alpha_n)$, 其中$\alpha_n$是 $J_1(x)$的第n个正零点.

解 设$U(r,\theta,z)=R(r)\Phi(\theta)Z(z)$是非平凡特解，将其代人方程，得

$$[r^2R''(r)+rR'(r)]\Phi(\theta)Z(z)+R(r)\Phi''(\theta)Z(z)+r^2R(r)\Phi(\theta)Z''(z)=0,\Longleftrightarrow$$
$$\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}+r^2\frac{Z''(z)}{Z(z)}=-\frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)}=\nu \text{ (常数)}$$

于是得常微分方程

$$\Phi''(\theta)+\nu\Phi(\theta)=0,\ Z''(z)-\lambda Z(z)=0,\ r^2R''(r)+rR'(r)+(\lambda r^2-\nu)R(r)=0.$$

………………… 3分

问题关于θ以2π为周期，关于r在$r=1$是齐次边界条件，所以得特征值问题

$$(I)\ \begin{cases}\Phi''(\theta)+\nu\Phi(\theta)=0, \\ \Phi(\theta)=\Phi(\theta+2\pi),\end{cases}$$

$$(II)\ \begin{cases}r^2R''(r)+rR'(r)+(\lambda r^2-\nu)R(r)=0,\ 0<r<1, \\ |R(0)|<\infty,\ R(1)=0.\end{cases}$$

特征值问题(I)的特征值$\nu_n=n^2$, 特征函数$\Phi_n(\theta)=\{\cos n\theta,\sin n\theta\}$, $n=0,1,2,\cdots$. 因为定解条件只与$\sin\theta$有关，所以取特征值$\nu=1$, 特征函数$\Phi_1(\theta)=\sin\theta$. ……………… 5分

以$\nu=1$，求解特征值问题(II), 得特征值和对于的特征函数

$$\lambda_n=\alpha_n^2,\ R_n(r)=J_1(\alpha_n r),\ n=1,2,\cdots,$$

其中α_n是Bessel函数$J_1(x)$的第n个正零点. ………………… 7分

再把$\lambda=\lambda_n$代人$Z(z)$所在的方程，得$Z_n''(z)-\alpha_n^2Z_n(z)=0$, 得出通解

$$Z_n(z)=C_n\cosh(\alpha_n z)+D_n\sinh(\alpha_n z),\ n=1,2,\cdots.$$

………………… 9分

于是非平凡特解为

$$U_n(r,\theta,z)=[C_n\cosh(\alpha_n z)+D_n\sinh(\alpha_n z)]J_1(\alpha_n r)\sin\theta,\ n=1,2,\cdots.$$

叠加得一般解

$$u(r,\theta,z)=\sum_{n=1}^{\infty}[C_n\cosh(\alpha_n z)+D_n\sinh(\alpha_n z)]J_1(\alpha_n r)\sin\theta.$$

………………… 11分

最后，利用边界条件$u(r,\theta,0)=0,\ u(r,\theta,h)=\varphi(r)\sin\theta$, 得

$$u(r,\theta,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_nJ_1(\alpha_n r)\sin\theta=0,\Longrightarrow C_n=0,\ n=1,2,\cdots.$$

$$u(r,\theta,h)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sinh(\alpha_n h)J_1(\alpha_n r)\sin\theta=\varphi(r)\sin\theta\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sinh(\alpha_n h)J_1(\alpha_n r)=\varphi(r),$$

得

$$D_n=\frac{\int_0^1 r\varphi(r)J_1(\alpha_n r)\mathrm{d}r}{N_n^2\sinh(\alpha_n h)}=\frac{2}{J_2^2(\alpha_n)\sinh(\alpha_n h)}\int_0^1 r\varphi(r)J_1(\alpha_n r)\mathrm{d}r,\ n=1,2,\cdots.$$

………………… 13分

密 ………… 封 ………… 线