

实验二 利用龙贝格方法求定积分

孙寒石 06219109 2021 年 5 月 19 日

一、实验目的及原理

用龙贝格方法计算：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2 \cos x) \sin^2 x dx$$

龙贝格方法原理：

函数变化有急有缓，为了照顾变化剧烈部分的误差，我们需要加密格点。对于变化缓慢的部分，加密格点会造成计算的浪费。以此我们介绍一种算法，可以自动在变化剧烈的地方加密格点计算，而变化缓慢的地方，则取稀疏的格点。

实际计算中，由于要事先给出一个合适的步长往往很困难，所以我们往往采用变步长的计算方案，即在步长逐步分半的过程中，反复利用复化求积公式进行计算，直到所求得的分值满足精度要求为止。在步长逐步分半过程中将粗糙的积分值逐步加工为精度较高的积分值，或者说将收敛缓慢的梯形值序列加工成收敛迅速的积分值序列。这种加速方法称为**龙贝格算法**。

龙贝格求积公式也称为逐次分半加速法。它是在梯形公式、辛普森公式和柯特斯公式之间的基础上，构造出一种加速计算积分的方法。作为一种外推算法，它在不增加计算量的前提下提高了误差的精度。在等距基点的情况下，用计算机计算积分值通常都采用把区间逐次分半的方法进行。这样，前一次分割得到的函数值在分半以后仍可被利用，且易于编程。

龙贝格算法是由递推算法得来的。由梯形公式得出辛普生公式得出柯特斯公式最后得到龙贝格公式。在变步长的过程中探讨梯形法的计算规律。设将求积区间 $[a, b]$ 分为 n 个等分，则一共有 $n+1$ 个等分点 $x_k = a + kh, h = \frac{b-a}{n}, k = 0, 1, \dots, n$ 。这里用 T_n 表示复化梯形法求得的积分值，其下标 n 表示等分数。

先考察下一个字段 $[x_k, x_{k+1}]$ ，其中点 $x_{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1})$ ，在该子段上二分前后两个积分值

$$T_1 = \frac{h}{2} [f(x_k) + f(x_{k+1})]$$

$$T_2 = \frac{h}{4} \left[f(x_k) + f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) + f(x_{k+1}) \right]$$

显然有下列关系

$$T_2 = \frac{1}{2} T_1 + \frac{h}{2} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right)$$

将这一关系式关于 k 从 0 到 $n-1$ 累加求和，即可导出下列递推公式

$$T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right)$$

需要强调指出的是，上式中的 $h = \frac{b-a}{n}$ 代表二分前的步长，而

$$x_{k+\frac{1}{2}} = a + \left(k + \frac{1}{2}\right)h$$

梯形法的算法简单，但精度低，收敛速度缓慢，如何提高收敛速度以节省计算量，自然是人们极为关心的。根据梯形法的误差公式，积分值 T_n 的截断误差大致与 h^2 成正比，因此步长半后误差将减至四分之一，既有

$$\frac{1 - T_{2n}}{1 - T_n} \approx \frac{1}{4}$$

将上式移项整理，知

$$1 - T_{2n} \approx \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$$

由此可见，只要二分前后两个积分值 T_n 和 T_{2n} 相当接近，就可以保证计算保证结果计算结果 T_{2n} 的误差很小，这种直接用计算结果来估计误差的方法称作误差的事后估计法。按上式，积分值 T_{2n} 的误差大致等于 $\frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$ ，如果用这个误差值作为 T_{2n} 的一种补偿，可以期望，所得的

$$\bar{T} = T_{2n} + \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n) = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n$$

应当是更好的结果。按上式，组合得到的近似值 \bar{T} 直接验证，用梯形二分前后的两个积分值 T_n 和 T_{2n} 按式组合，结果得到辛普生法的积分值 S_n 。

$$S_n = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n$$

再考察辛普生法。其截断误差与 h^4 成正比。因此，若将步长折半，则误差相应的减至十六分之一。既有

$$\frac{I - S_{2n}}{I - S_n} \approx \frac{1}{16}$$

由此得

$$I \approx \frac{16}{15}S_{2n} - \frac{1}{15}S_n$$

不难验证，上式右端的值其实就等于 C_n ，就是说，用辛普生法二分前后的两个积分值 S_n 和 S_{2n} ，在按上式再做线性组合，结果得到柯特斯法的积分值 C_n ，既有

$$C_n \approx \frac{16}{15} S_{2n} - \frac{1}{15} S_n$$

重复同样的手续，依据斯科特法的误差公式可进一步导出龙贝格公式

$$R_n \approx \frac{64}{63} C_{2n} - \frac{1}{63} C_n$$

应当注意龙贝格公式已经不属于牛顿 - 柯特斯公式的范畴。在步长二分的过程中运用公式加工三次，就能将积分值 T_n 逐步加工成精度较高的龙贝格 R_n ，或者说，将收敛缓慢的梯形值序列 T_n 加工成熟练迅速的龙贝格值序列 R_n ，这种加速方法称龙贝格算法。

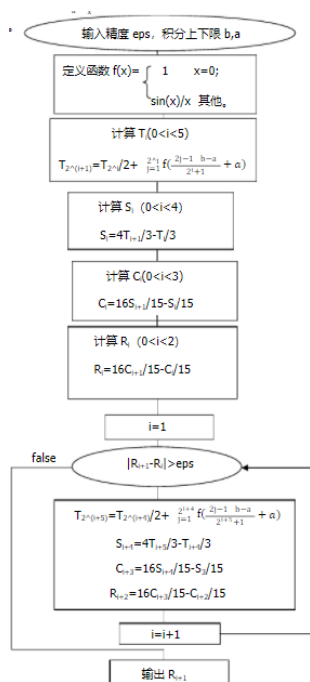
二、实验环境

- 编程语言：Python
- 编程环境：Jupyter Notebook

三、实验步骤

就是求出 T_1 ，再走一遍求出 T_2 ，根据 $T_1 T_2$ 求出 S_1 ，再走一遍求出 T_4 ，根据 $T_2 T_4$ 求出 S_2 ，根据 $S_1 S_2$ 求出 C_1 ，再走一遍程序求出 T_8 ，根据 $T_4 T_8$ 得出 S_4 ，根据 $S_2 S_4$ 得出 C_2 ，再根据 $C_1 C_2$ 得出 R_1 ，再走一边程序，得出 T_{16} ，根据 $T_8 T_{16}$ 得出 S_8 ，根据 $S_4 S_8$ 得出 C_4 ，再由 $C_2 C_4$ 得出 R_2 。再根据 $R_1 R_2$ 相减的绝对值小于其精度。那其中 R_2 为求出的值。

算法框图：



四、实验代码及结果

• Codes:

```
1. import math
2.
3. def f(x):
4.     return math.sin(2*math.cos(x))*math.sin(x)*math.sin(x)
5.
6. def Romberg(a,b,f,eps):
7.     n = 1
8.     h = b - a
9.     T1 = (b-a)/2*(f(a)+f(b))
10.    while(1):
11.        temp = 0
12.        for i in range(n):
13.            x=a+i*h+h/2
14.            temp=temp+f(x)
15.        T2=(T1+temp*h)/2
16.        if(abs(T2-T1)<eps):
17.            return T2
18.        S2=T2+(T2-T1)/3
19.        if(n==1):
20.            T1=T2
21.            S1=S2
22.            h=h/2
23.            n=n*2
24.            continue
25.        C2=S2+(S2-S1)/15
26.        if(n==2):
27.            C1=C2
28.            T1=T2
29.            S1=S2
30.            h=h/2
31.            n=n*2
32.            continue
33.        R2=C2+(C2-C1)/63
34.        if (n==4):
35.            R1=R2
36.            C1=C2
37.            T1=T2
38.            S1=S2
39.            h=h/2
40.            n=n*2
```

```
41.         continue
42.     if(abs(R2-R1)<eps):
43.         return R2
44.     R1=R2
45.     C1=C2
46.     T1=T2
47.     S1=S2
48.     h=h/2
49.     n=n*2
50.
51. pi = 3.141592653589793
52. eps = 5e-6
53. print(Romberg(0,pi/2,f,eps))
```

输出结果:

0.5079670457310737

所以最后结果为:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2 \cos x) \sin^2 x dx = 0.5079670457310737$$

五、分析和讨论

通过程序输出，我们可以得到如下结果：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2 \cos x) \sin^2 x dx = 0.5079670457310737$$

事实上，这个和答案是十分接近的。

通过本次试验，了解了龙贝格算法的计算过程，了解了龙贝格公式的计算收敛过程，用变步长的方法，逐步减小步长，反复积分，逐步得到所求积分值满足精度要求。一步步从梯形法的递推到辛普森到柯特斯法，最后到龙贝格，让精度逐步升高。

六、附件

- exp3. ipynb
- exp3 - Jupyter Notebook.pdf