2018-19学年高等数学竞赛试卷分析

Zhang qin*

April 11, 2019

谢谢阅读！
若发现文中错误，请一定不要吝啬您的批评意见，
期待得到您的更好的解题方法。

一、填空题(本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分)

1. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax+2|\sin x|}{bx-|\sin x|}\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$，则 $a=$________，$b=$________.

解

$$I_+ = \lim_{x\to 0^+}\frac{ax+2\sin x}{bx-\sin x}\arctan\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{a+2\sin x/x}{b-\sin x/x}\arctan\frac{1}{x} = \frac{a+2}{b-1}\cdot(\frac{\pi}{2})$$

$$I_- = \lim_{x\to 0^-}\frac{ax-2\sin x}{bx+\sin x}\arctan\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{a-2\sin x/x}{b+\sin x/x}\arctan\frac{1}{x} = \frac{a-2}{b+1}\cdot(\frac{-\pi}{2})$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax+2|\sin x|}{bx-|\sin x|}\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$，所以$I_+=\dfrac{\pi}{2}=I_-$，由此解得 $a=-1, b=2$

2. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{e^{\tan x}-e^x}=$________.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{e^{\tan x}-e^x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-e^{\sin x-x}}{e^{\tan x-x}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{-(\sin x-x)}{\tan x-x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1/\cos^2 x-1} = \lim_{x\to 0}\cos^2 x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x} = \frac{1}{2}$$

3. 设 $f(x)=(x-1)(x-2)^3(x-3)^5(x-4)^7$，则 $f'''(2)=$________.

解 设 $u(x)=(x-2)^3, v(x)=(x-1)(x-3)^5(x-4)^7$，则 $f(x)=u(x)v(x)$.
因为 $v(2)=v'(2)=v''(2)=0, v'''(2)=3!$，由Leibniz公式，

$$f'''(2)=u'''(2)v(2)=3!\cdot 2^7=768.$$

*E-mail address: zhangqin@seu.edu.cn

4. 曲线$y = x + \sqrt{x^2 - x + 1}$的渐近线方程为_______.。

解 $\lim\limits_{x\to-\infty}(x + \sqrt{x^2 - x + 1}) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{x - \sqrt{x^2 - x + 1}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1 - 1/x}{1 + \sqrt{1 - 1/x + 1/x^2}} = \dfrac{1}{2}$.

曲线有水平渐近线$y = \dfrac{1}{2}$.

$$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \sqrt{1 - 1/x + 1/x^2} = 2$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax) = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2 - x + 1} - x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x} = -\frac{1}{2}$$

曲线有斜渐近线$y = 2x - \dfrac{1}{2}$.

5. 计算积分$\displaystyle\int_3^9 \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3} + \sqrt{9-x}}\mathrm{d}x$_______.

解 $\displaystyle I = \int_3^9 \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3} + \sqrt{9-x}}\mathrm{d}x = \int_{-3}^3 \frac{\sqrt{t+3}}{\sqrt{t+3} + \sqrt{3-t}}\mathrm{d}t$ （令$t = x - 6$）

$\displaystyle = \int_{-3}^3 \frac{\sqrt{3-u}}{\sqrt{3-u} + \sqrt{3+u}}\mathrm{d}t$ （令$u = -t$）

$\displaystyle = \int_{-3}^3 \frac{\sqrt{3-t}}{\sqrt{3-t} + \sqrt{3+t}}\mathrm{d}t$ (定积分与积分变量无关)

故$\displaystyle I = \frac{1}{2}\left(\int_{-3}^3 \frac{\sqrt{t+3}}{\sqrt{t+3} + \sqrt{3-t}}\mathrm{d}t + \int_{-3}^3 \frac{\sqrt{3-t}}{\sqrt{3-t} + \sqrt{3+t}}\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{2}\int_{-3}^3 \mathrm{d}t = 3$.

6. 计算积分$\displaystyle\int \frac{x^9}{(x^5+1)^4}\,\mathrm{d}x =$_______.

解
$$\begin{aligned}
\int \frac{x^9}{(x^5+1)^4}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{5}\int \frac{x^5}{(x^5+1)^4}\,\mathrm{d}(x^5+1) \\
&= \frac{1}{5}\int \frac{(x^5+1)-1}{(x^5+1)^4}\,\mathrm{d}(x^5+1) \\
&= \frac{1}{5}\int \frac{1}{(x^5+1)^3}\,\mathrm{d}(x^5+1) - \frac{1}{5}\int \frac{1}{(x^5+1)^4}\,\mathrm{d}(x^5+1) \\
&= -\frac{1}{10}\frac{1}{(x^5+1)^2} + \frac{1}{15}\frac{1}{(x^5+1)^3} + C
\end{aligned}$$

7. 设 $f(x)$ 是连续函数，且满足 $f(x)=4x^2-\int_0^1 f(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$，则 $f(x)=$_______.

解 由题设条件，可知

$$f(\mathrm{e}^x)=4\mathrm{e}^{2x}-\int_0^1 f(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$$

两边在区间 $[0,1]$ 上积分，得到

$$\int_0^1 f(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x=4\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x-\int_0^1\left(\int_0^1 f(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 f(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x=2(\mathrm{e}^2-1)-\int_0^1 f(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 f(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^2-1$$

故 $f(x)=4x^2-(\mathrm{e}^2-1)$

8. 设函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)=\arctan x^2$，且 $f(1)=0$，则 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=$_______.

解
$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \left.xf(x)\right|_0^1-\int_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x=-\int_0^1 x\arctan x^2\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1\arctan x^2\,\mathrm{d}x^2=-\frac{1}{2}\int_0^1\arctan t\,\mathrm{d}t\\
&= -\frac{1}{2}\left(\left.t\arctan t\right|_0^1-\int_0^1\frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\left.\ln(1+t^2)\right|_0^1\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\right)\end{aligned}$$

二、(本题8分) 在极坐标系中，求曲线 $\rho=(1+\cos\theta)(0\le\theta\le\frac{\pi}{2})$ 与射线 $\theta=0,\theta=\frac{\pi}{2}$ 所围成的平面区域绕极轴 $(\theta=0)$ 旋转所得旋转体的体积.

解
$$\begin{aligned}V &= \pi\int_0^2 y^2(x)\,\mathrm{d}x=\pi\int_{\pi/2}^0[(1+\cos\theta)\sin\theta]^2\,\mathrm{d}\left((1+\cos\theta)\cos\theta\right)\\
&= \pi\int_{\pi/2}^0(1+\cos\theta)^2\sin^2\theta(1+2\cos\theta)\mathrm{d}\cos\theta=\pi\int_0^1(1+t)^2\left(1-t^2\right)(1+2t)\mathrm{d}t\\
&= \pi\int_0^1\left(1+4t+4t^2-2t^3-5t^4-2t^5\right)\mathrm{d}t=\frac{5\pi}{2}\end{aligned}$$

三、(本题10分）设函数 $f(x)$ 无穷阶可导，证明恒等式

$$(x^{n-1}f(\frac{1}{x}))^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}(\frac{1}{x})\,(n=1,2,\cdots).$$

证明 当 $k=1$ 时，等号左边$=(f(\frac{1}{x}))'=-\frac{1}{x^2}f'(\frac{1}{x})$ =等号右边.

设 $k=n$ 时结论成立，则当 $k=n+1$ 时

$$\begin{aligned}
(x^n f(\frac{1}{x}))^{(n+1)} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\cdot x^{n-1}f(\frac{1}{x}))^{(n)}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\cdot\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)}+n\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n-1)}\right)\\
&= \left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)}+x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)}+n\left(x^{n-1}f(\frac{1}{x})\right)^{(n)}\\
&= (n+1)\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)}+x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)}\\
&= (n+1)\cdot\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)+x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\
&= (n+1)\cdot\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)-(n+1)\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

结论也成立。由数学归纳法得到所证结论成立。

四、(本题10分） 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=0,f(1)=1$，求证: 存在$\xi\in(0,1)$，使得$\xi f''(\xi)+(1+\xi)f'(\xi)=1+\xi$

解 因为$f(0)=0,f(1)=1$，由Lagrange中值定理可知，存在$\eta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)=1$.

构造 $F(x)=xe^x(f'(x)-1)$，则$F(0)=0,F(\eta)=\eta$，由Rolle定理，存在$\xi\in(0,\eta)$，使得 $F'(\xi)=0$.又

$$F'(x)=xe^xf''(x)+(x+1)e^xf'(x)-(x+1)e^x$$

故$\xi f''(\xi)+(1+\xi)f'(\xi)=1+\xi$.

五、(本题10分）设 $0<x<1$，试比较 $\sin x$ 与 $\ln(1+x)$ 的大小，并证明结论.

解 设$f(x)=\sin x-\ln(1+x)$，则 $f(0)=0$,

$$f'(x)=\cos x-\frac{1}{1+x},f'(0)=0$$

$$f''(x) = -\sin x + \frac{1}{(x+1)^2}, f''(0) = 1$$

$$f'''(x) = -\cos x - \frac{2}{(x+1)^3}, f'''|0) = -3$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x + \frac{6}{(x+1)^4} > 0 \quad (0 < x < 1)$$

故

$$\begin{aligned} f(x) = & \ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{f^{(4)}(\theta x)}{4!}x^4 \quad (0 < \theta < 1) \\ > & \ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} > 0 \quad (0 < x < 1) \end{aligned}$$

$$\sin x > \ \ln(1+x) \quad (0 < x < 1)$$

六、(本题10分）证明：如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，并且两函数或同时单调增加，或同时单调减少，那么

$$\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x \geq \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$$

证法1 因为 $g(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，存在 $x_0 \in (0,1)$，使得 $g(x_0) = \int_0^1 g(x))\mathrm{d}x$. 因为两函数或同时单调增加，或同时单调减少，所以

$$\int_0^1 (f(x) - f(x_0))(g(x) - g(x_0)))\mathrm{d}x \geq 0$$

$$\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)g(x_0)\,dx - \int_0^1 f(x_0)\,g(x)dx + \int_0^1 f(x_0)g(x_0))\mathrm{d}x \geqslant 0$$

$$\int_0^1 f(x)g(x))\mathrm{d}x - g(x_0)\int_0^1 f(x))\mathrm{d}x - f(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g(x_0) \geqslant 0$$

$$\int_0^1 f(x)g(x))\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 f(x)dx)\int_0^1 g(x))\mathrm{d}x$$

证法2 设 $D = [0,1] \times [0,1]$，则

$$\iint_D [f(x) - f(y)]\,[g(x) - g(y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq 0$$

$$\iint_D f(x)g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_D f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_D f(y)g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_D f(y)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq 0$$

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 g(y)dy - \int_0^1 f(y)\mathrm{d}x\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(y)g(y)\mathrm{d}y \geq 0$$

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx \geq \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$$

七 、(本题10分）设 $f(x)$ 二阶可导，且满足 $x = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t$，求 $f(x)$ 的表达式.

解 将 $x = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t$ 变形为

$$x = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_{-x}^0 (u+x)f(u)\mathrm{d}u$$

两边求导数

$$1 = f(x) + \int_{-x}^0 f(u)\mathrm{d}u, \quad f'(x) + f(-x) = 0, \quad f''(x) - f'(-x) = 0$$

故

$$\begin{cases} f''(x) + f(x) = 0, \\ f(0) = 1, f'(0) = -1 \end{cases}$$

解得 $f(x) = \cos x - \sin x$.

八 、(本题10分）

(1) 求解微分方程 $y' - xy = x\mathrm{e}^{x^2}$, $y(0) = 1$.

(2) 如 $f(x)$ 为(1)中的解，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n}{1+n^2x^2} f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

解 (1) $y = \mathrm{e}^{\int x\mathrm{d}x}\left(c + \int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{e}^{\int -x\mathrm{d}x}\right) = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\left(\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} + C\right)$,又$y(0) = 1$，所以 $C = 0$ $y = \mathrm{e}^{x^2}$.

(2) $\int_0^1 \frac{n}{1+n^2x^2}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{n}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{n}{1+nx^2}\left(\mathrm{e}^{x^2} - 1\right)\mathrm{d}x$

而

$$\int_0^1 \frac{n}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x = \arctan n \to \frac{\pi}{2} \quad (n\to\infty).$$

$$0 \le \int_0^1 \frac{n}{1+n^2x^2}\left(\mathrm{e}^{x^2} - 1\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{n}{1+n^2x^2}\left(\mathrm{e}^{x^2} - 1\right)\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^1 \frac{n}{1+n^2x^2}\left(\mathrm{e}^{x^2} - 1\right)\mathrm{d}x$$

$$\le \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1\right)\arctan\sqrt{n} + (\mathrm{e}-1)(\arctan n - \arctan\sqrt{n}) \to 0 \quad (n\to\infty)$$

由此得到

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n}{1+n^2x^2} f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

.