东 南 大 学 考 试 卷

课程名称　高等数学（A）期中　考试学期　07-08-3　得分

适用专业　选学高数（A）的各专业　考试形式　闭卷　考试时间长度　120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六
得分						

一填空题(本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 2 5 分)

1.交换二次积分的次序 $\int_{-2}^{0}dx\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy+\int_{0}^{1}dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy=$__________;

2.设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x^2-y^2,y^2-z^2)=0$ 所确定，其中 $F(u,v)$ 是可微函数，

且 $zF_v\neq 0$，则 $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=$__________;

3.二重积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}(x+y)^2dxdy=$__________;

4.曲线 $\begin{cases}y^2=x-1,\\ z=x^2+y^2,\end{cases}$ 在点 $(1,0,1)$ 处的切线方程为______________;

5.设曲线 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4\\ z=1\end{cases}$，则曲线积 $\int_L\frac{z^2+1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}ds=$____________。

二．单项选择题(本题共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分)

6. $(-\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ 的主值为

(A) $e^{\sqrt{2}\ln\sqrt{2}}\left(\cos\left(\sqrt{2}\pi\right)-i\sin\left(\sqrt{2}\pi\right)\right)$　(B) $e^{\sqrt{2}\ln\sqrt{2}}\left(\cos\left(\sqrt{2}\pi\right)+i\sin\left(\sqrt{2}\pi\right)\right)$

(C) $e^{\sqrt{2}\ln\sqrt{2}}\left(\cos\left(2\sqrt{2}\pi\right)-i\sin\left(2\sqrt{2}\pi\right)\right)$　(D) $e^{\sqrt{2}\ln\sqrt{2}}\left(\cos\left(2\sqrt{2}\pi\right)+i\sin\left(2\sqrt{2}\pi\right)\right)$

7.设 $I=\iiint\limits_{\Omega}f(x^2+y^2+z^2)dV,\Omega:x^2+y^2+z^2\leq 4z$， f 为连续函数，则 $I=$

(A) $\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{4\cos\theta}f(r^2)r^2\sin\theta dr$　(B) $2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{4\cos\theta}f(r^2)r^2\sin\theta dr$

(C) $\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{4\cos\theta}f(r^2)r^2\sin\theta dr$　(D) $\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{4\cos\theta}f(r^2)r^2\sin\theta dr$

8.设 $z=f\left(\frac{x}{y},ye^x\right)$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$

(A) $-\frac{x}{y^3}f_{11}+\frac{e^x}{y}(1-x)f_{12}+ye^{2x}f_{22}-\frac{1}{y^2}f_1+e^xf_2$

(B) $\frac{x}{y^3}f_{11}+\frac{e^x}{y}(1-x)f_{12}+ye^{2x}f_{22}$ (C) $\frac{x}{y^3}f_{11}+\frac{e^x}{y}f_{12}+ye^{2x}f_{22}-\frac{1}{y^2}f_1$

(D) $\frac{x}{y^3}f_{11}+\frac{e^x}{y}f_{12}+ye^{2x}f_{22}+e^xf_2$

9.设 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数,且 $f(1,1)=2$, $f_x(m,n)=m+n$, $f_y(m,n)=m\cdot n$,

令 $g(x)=f(x,f(x,x))$ ，则 $g'(1)=$

（A）3　　（B）6　　（C）9　　（D）12

三.计算下列各题(本题共 4 小题，每小题 9 分，满分 36 分)

10. 计算二重积分 $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, $D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le\sqrt{2y-y^2}\right\}$.

11. 求函数 $u(x,y,z)=\int_z^{xy}e^{-t^2}dt$ 在点 $P(1,1,1)$ 处沿曲面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{6}=1$ 在该点处的法线方向的方向导数.

12. 计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega(xy^2+z^2)dV$,其中 Ω 是由旋转抛物面 $x^2+y^2=z$ 与平面 $z=1$ 和 $z=4$ 围成的空间闭区域.

13.计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} \frac{x^2+y^2+R^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \mathrm{d}A$，其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 含在圆柱面 $x^2+y^2-Ry=0\ (R>0)$ 内的部分.

四（14）.（本题满分 8 分）设曲线段 $L: y=x^2(0\le x\le 1)$ 上任意一点 (x,y) 处的线密度函数 $\mu=12x$，求该曲线段的质量.

五（15）。（本题满分 8 分）已知曲线 $C:\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x+y+z=4 \end{cases}$，求 C 上距离原点最远的点和最近的点，并求最远距离和最近距离.

六（16）.（本题满分 7 分）设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 为解析函数，其中实部与虚部的乘积满足 $u(x,y)\cdot v(x,y)=2xy\left(x^2-y^2\right)$，试求 $f^2(z)$ 的表达式（必须用变量 z 表示）.

07-08-3 高数 A 期中试卷参考答案

一. 填空题(本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 2 5 分)

1、 $= \underline{\int_0^2 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x}$ 2、 $y\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = \underline{\dfrac{xy}{z}}$ 3、 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} (x+y)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \underline{\dfrac{\pi}{2}}$ 4、

$\underline{\dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{0}}$ 5、 $\int_L \dfrac{z^2+1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \mathrm{d}s = \underline{2\sqrt{3}\pi}$

二. 单项选择题(本题共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分)

6、B　　7、D　　8、A　　9、C

三. 计算下列各题(本题共 4 小题，每小题 9 分，满分 36 分)

10、**解：** $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\sin\varphi} \rho^2 \mathrm{d}\rho = \dfrac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi \mathrm{d}\varphi = \dfrac{16}{9}$

11、**解：** $:\mathrm{grad}\, u\big|_P = \left\{ y\mathrm{e}^{-(xy)^2}, x\mathrm{e}^{-(xy)^2}, -\mathrm{e}^{-z^2} \right\}_P = \left\{ \dfrac{1}{\mathrm{e}}, \dfrac{1}{\mathrm{e}}, -\dfrac{1}{\mathrm{e}} \right\}$,

单位法向量为 $\mathbf{n} = \pm\left\{ \dfrac{3}{\sqrt{14}}, \dfrac{2}{\sqrt{14}}, \dfrac{1}{\sqrt{14}} \right\}$,

$\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_P = \pm\left\{ \dfrac{3}{\sqrt{14}}, \dfrac{2}{\sqrt{14}}, \dfrac{1}{\sqrt{14}} \right\} \cdot \left\{ \dfrac{1}{\mathrm{e}}, \dfrac{1}{\mathrm{e}}, -\dfrac{1}{\mathrm{e}} \right\} = \pm\dfrac{4}{\sqrt{14}\mathrm{e}}$

12、**解：** $\iiint\limits_\Omega (xy^2+z^2)\mathrm{d}V = \iiint\limits_\Omega z^2 \mathrm{d}V = \pi\int_1^4 z^3 \mathrm{d}z = \dfrac{255}{4}\pi$

13、**解：** 投影区域 $D_{xy} = \left\{ (x,y) \,\middle|\, x^2+y^2 \le Ry \right\}$,

$$\iint\limits_\Sigma \frac{x^2+y^2+R^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}A = 2R\iint\limits_\Sigma \mathrm{d}A - \frac{1}{R}\iint\limits_\Sigma \left(R^2-x^2-y^2\right)\mathrm{d}A$$

$$= 2R^2\iint\limits_{D_{xy}} \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2R^2\int_0^\pi \mathrm{d}\varphi \int_0^{R\sin\varphi} \frac{\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho - \int_0^\pi \mathrm{d}\varphi\int_0^{R\sin\varphi}\sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho = \frac{5}{3}\pi R^3 - \frac{32}{9}R^3$$

四（14）.（本题满分 8 分）

解： $m = 12\int_L x\mathrm{d}s = 12\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x = 5\sqrt{5}-1$

五（15）。（本题满分 8 分）

解： $L = x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-4)$， $L_x = 2x+2\lambda x+\mu = 0$，

$L_y = 2y + 2\lambda y + \mu = 0$, $L_z = 2z - \lambda + \mu = 0$, $x^2 + y^2 - z = 0$, $x + y + z - 4 = 0$

解得 $M_1(-2,-2,8)$, $M_2(1,1,2)$ ，由问题的实际意义知，M_1 为最远点，M_2 为最近点

$d_{\max} = 6\sqrt{2}$, $d_{\min} = \sqrt{6}$

六（16）.（本题满分 7 分）

解： 记 $f^2(z) = U(x,y) + \mathrm{i}V(x,y)$, $V(x,y) = 2u(x,y)\cdot v(x,y) = 4xy(x^2 - y^2)$,

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 4x(x^2 - 3y^2) = \frac{\partial U}{\partial x}, U = x^4 - 6x^2y^2 + \varphi(y) ,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -12x^2y + \varphi'(y) = -\frac{\partial V}{\partial x} = -12x^2y + 4y^3 ,\text{于是}\varphi(y) = y^4 + C ,$$

$U = x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + C$ (C 为常数),

$f^2(z) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + C + \mathrm{i}4xy(x^2 - y^2)$, $f^2(x) = x^4 + C$, $f^2(z) = z^4 + C$