东南大学数学院贺传富

工科数分（上册）复习建议

第一部分：基本内容

一元函数微分学：

1. 定义问题：

(1). $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$的 ε-N 定义以及柯西收敛准则；

(2). $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$的 ε-X 定义以及柯西收敛准则；

(3). $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$的 ε-X 定义以及柯西收敛准则；

(4).一致连续问题与非一致连续的判定；

2.求极限:

（1） 夹逼定理
（2） 单调有界
（3） 重要极限
（4） 等价无穷小
（5） 左右极限
(6) 罗比达法则
（7） 中值定理（微分中值与积分中值）
（8） 泰勒公式
（9） 定积分的定义
（10） 与变上限积分有关的极限
（11） 无穷小阶的判定

3.导数与微分：

（1）导数定义
（2）导数公式（18个）
（3）参数方程求导
（4）隐函数求导
（5）极坐标方程求导
(6) 求高阶导数
（7）求微分

3.微分学应用:

（1） 求切线和法线方程

（2） 利用中值定理证明等式

（3） 单调性和利用单调性证明不等式

（4） 求极值和最值

（5） 判定凹凸性与拐点

（6） 怎样求渐近线

(7) 无穷小阶的判定

（8） 导函数的一些结论

4.一元函数积分学：

1）.计算题：计算不定积分、定积分及广义积分;
特别是奇函数，周期函数的积分，积分的重要公式

2）.关于变上限积分的题：
如求导、求极限、求积分等;

3）.定积分应用题：

计算面积，旋转体体积，平面曲线弧长，
平均值，变力作功，水压力，已知速度求路程，
已知线面度求质量等;

4）.反常积分的判别法

5.微分方程：

1）.一阶微分方程;
（分离变量，齐次方程，一阶线性，伯努利方程）

2）.二阶可降阶的微分方程;

3）二阶线性微分方程;
（欧拉方程）

4）三阶以上线性微分方程;

5）.与变上限积分，面积，体积有关的综合性练习。

第二部分：典型练习

1. 设$0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n$，

证明：(1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$∃，并求此极限.

(2) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{\tan x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$

2.$x\to 0^+$时，下列无穷小量中阶数最高的是（　　）

$$(1)\int_0^x (e^{t^2}-1)dt;(2)\int_0^x \ln(\sqrt{t^2}+1)dt;$$

$$(3)\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt;(4)\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^2 t}\,dt.$$

3.已知 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}}=1$.求$a,b$.

$$\left(a=-1, b=-\frac{1}{2}\right)$$

4．当 $x \to 0$ 时，若 $\tan(\tan x) - \sin(\sin x)$

与 ax^k 是等价无穷小，则 k 取值是（　）

$$(k = 3)$$

5. 求曲线$y=\dfrac{x^{1+x}}{(x+1)^x}$的斜渐近线.

$$\left(y=\frac{1}{e}x+\frac{1}{2e}\right)$$

6. 已知$f(x)$连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$, $g(x)=\int_0^1 f(xt)dt$,

求$g'(x)$，并证明$g'(x)$在$x=0$处连续。

7.(1). $\int \frac{1}{3+\cos 2x}\mathrm{d}x$ 。

(2). $\int \frac{\ln\tan x}{\csc x}\mathrm{d}x$ 。

(3). $\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$ 。

(4). $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$

(5). $\int_1^7 \frac{1}{\sqrt{|4x-x^2|}}\mathrm{d}x$

8.三个积分$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx,$

$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})dx$ 的由小到大的顺序是 （　　）

9.已知$f(x)$是周期函数，证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}=\frac{\int_0^T f(t)dt}{T}$$

并求（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x (t-[t])dt}{x}$

(2).求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^3+3}{3x^4+2x-3}\int_0^x |\cos t|dt.$

$$\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{\int_0^\pi |\cos t|dt}{\pi}\right).$$

10.设$f(x)$在$[-\pi,\pi]$连续,且

$$f(x)=\frac{x}{1+\cos^2 x}+\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,dx,$$ 求$f(x)$

11. （练习）(1) $\int_{-\pi}^{\pi} x\sin^5 x dx$;

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} x\sin^5 x \arctan e^x dx$;

(3) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x\sin^5 x \arctan e^x}{1+\cos^2 x} dx$; .

(4) $\int_{-2}^{2} x\ln(e^{2x}+1) dx$.

12. (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} dx$;

(2) $\int_0^{\pi} \frac{x \sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x} dx$;

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cot^{2n} x} dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \tan^{2n} x} dx$;

(4) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^{2n})} dx$; .

13.已知$f(x)=\int_{\sqrt{x}}^{1}\sqrt{t^3+1}dt$, 求$\int_0^1 f(x)dx$

$$[\frac{2}{9}(2^{\frac{3}{2}}-1)]$$

（练习）.已知$f(x)=\int_0^x e^{-t^2+2t}dt$, 求$\int_0^1 (x-1)^2 f(x)dx$

$$[\frac{1}{6}(e-2)]$$

14、设平面区域由曲线

$$C:\begin{cases} x=5t^2+t \\ y=t^2-2t \end{cases}$$ 与x轴围成，试求其面积.

15、求由曲线$y^2=x^2-x^4$所围成的平面图形的面积A.

$\left(\dfrac{4}{3}\right)$

16、已知$2f(x)+x^2 f(\frac{1}{x})=\frac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}$,求$f(x)$,

并求直线$y=\frac{1}{2}, y=\frac{\sqrt{3}}{2}$, y轴与$y=f(x)$所围成

的图形绕轴旋转一周而成的旋转体的体积.

$$(1)\ f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$(2)\ V=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 2\pi y\cdot x(y)dy=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 2\pi y\cdot\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy$$

17、(练习)过原点引抛物线$y=a(x+1)^2+3(a>0)$的两条切线，切点分别为A和B

（1）求两条切线OA,OB与此抛物线所围成部分的面积$I(a)$ $I(a)=\frac{2}{3}a(1+\frac{3}{a})^{\frac{3}{2}}$

（2） 求$I(a)$的最小值. $I(\frac{3}{2})=3\sqrt{3}$

18.(练习)设$x = x(y)$是函数$y = y(x) = e^{x} - e^{-x} - \dfrac{1}{2}\sin x$的反函数,求由$x = x(y)$，直线$y = y(\pi)$及$y$轴围成的平面图形绕$y$轴旋转一周而成的旋转体的体积$V$.

$$(\pi^{3} + 2\pi)(e^{\pi} - e^{-\pi}) - 2\pi^{2}(e^{\pi} + e^{-\pi}) + \pi^{2}$$

19.判定下列反常积分的敛散型：

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{x^2+1}{e^x+2}dx$; (2) $\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan^2 x}{x^3+2x-1}dx$;

(3) $\int_1^{2}\frac{x^2+1}{\ln^2 x}dx$; (4) $\int_1^{2}\frac{x^2+1}{\ln^{\frac{1}{2}} x}dx$;

(5) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx$.

20.求通解　(1)　$(y-x^3)\mathrm{d}x-2x\,\mathrm{d}y=0$

(2).　$y'(x+y^4)=y$

21.求特解和通解：

(1) $y''+2x(y')^2=0$ 满足 $y(0)=1, y'(0)=-\dfrac{1}{2}$

(2) $(y''')^2-y''y^{(4)}=0$

(3) $y''+y=x+sinx$

(4) (练习) $y''+ay=\dfrac{1}{2}(x+sin2x)$

22.已知二阶齐次方程的通解或特解求微分方程

(1) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}$

(2)(练习) $y = \dfrac{1}{x}(C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}) \quad (x \neq 0);$

$$y = x(C_1 e^{-x} + C_2 e^{x})$$

(3)$y = xe^{-x}$

23.求一阶方程$f'(x) = f(1-x)$的通解.

24.(练习）设二阶方程$y'' + P(x)y' - y\cos^2 x = 0$有两个互为倒数的解，求$P(x)$及方程的通解.

$$(P(x) = \tan x, y = C_1 e^{\sin x} + C_2 e^{-\sin x})$$

25.设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，

且对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$,有

$$f(x)+4\int_0^x tf(x-t)dt=\frac{1}{3}x^3,$$

求$f(x)$的表达式。

$$f(x)+4\int_0^x tf(x-t)dt=\frac{1}{3}x^3,\text{ 令}x-t=u$$

$$\Rightarrow f(x)+4x\int_0^x f(u)du-4\int_0^x uf(u)du=\frac{1}{3}x^3$$

$$\Rightarrow f'(x)+4\int_0^x f(u)du=x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f''(x)+4f(x)=2x \\ f(0)=0,\ f'(0)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{2}x$$

谢谢大家，预祝
大家考个满意成绩