

级数

一、常数项级数

1、已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan \frac{1}{n}}{n^p}$ 收敛, 则 p 应满足的条件是 $p > 0$ 。

2、设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(u_n - u_{n-1}) = s$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} n u_n = A$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n =$ $A - s$ 。

3、设 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = 5$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n =$ 8。

4、当常数 α 满足条件 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n-3}}{n^\alpha}$ 绝对收敛。

5、已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - \cos \frac{1}{n^\alpha})$ 绝对收敛, 则 α 的取值范围是 $\alpha > \frac{1}{2}$ 。

6、若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散, 则(**B**)

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 必发散 (B) $\sum_{n=1}^{\infty} (|u_n| + |v_n|)$ 必发散 (C) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n v_n)$ 必发散 (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n^2 + v_n^2)$ 必发散

7、下列结论正确的是 (**A**)

(A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散; (B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(C) 若 $u_{n+1} = \cos u_n (n=1, 2, \dots)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; (D) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

8、下面说法中正确的是 (**D**)

(A) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 且 $u_n \geq v_n (n=1, 2, \dots)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也收敛;

(B) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n v_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛;

(C) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $u_n \geq \frac{1}{n} (n=1, 2, \dots)$;

(D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ 收敛。

9、若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则下列级数必收敛的为(**D**)

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ (C) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$

10、设 α 为常数, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [\frac{\sin(n\alpha)}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}}]$ (**C**)

(A) 绝对收敛, (B) 条件收敛, (C) 发散, (D) 敛散性与 α 有关

11、设 $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$, 则下列级数必收敛的为(**D**)

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (C) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n}$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n^2$

12、若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [(1-p)^n + n^{-p}] (p > 0)$ 发散, 则 p 的取值范围是(**D**)

(A) $0 < p \leq 1$ (B) $1 < p < 2$ (C) $p \geq 2$ (D) $0 < p \leq 1$ 或 $p \geq 2$

13、①、 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{\ln n}}$ (**C**) ②、设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ (**D**) ③、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} \sin \frac{n\pi}{3}$ (**A**)

(A) 绝对收敛, (B) 条件收敛, (C) 发散, (D) 可能收敛可能发散

14、设 $u_n \neq 0, (n=1, 2, \dots)$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} = 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}})$ (**C**).

(A) 发散, (B) 绝对收敛, (C) 条件收敛, (D) 敛散性不能判定

15、正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛的(**A**)

(A) 充分条件 (B) 必要条件 (C) 充要条件 (D) 非必要非充分条件

16、设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 条件收敛, 则必有 [**D**]

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 (B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛 (C) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 都收敛 (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ 收敛

17、设 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 a_n = b > 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ (**B**).

(A) 发散, (B) 绝对收敛, (C) 条件收敛, (D) 敛散性不能判定

19、下列级数中条件收敛的是 ()

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+2} \right)^n$; (B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}$;

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n^2}{\pi^n}$; (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$.

18. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则必有[]

(A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$; (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$; (C) 数列 $\{u_n\}$ 单调减少; (D) 部分和数列有界 $\{S_n\}$ 。

20. 下列级数中发散的是 ()

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$; (B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^3}{3^n}$; (C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$; (D) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n}$ 。

21. 下列级数中发散的是 ()

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2-5)}}$; (B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{[(-1)^n + 4]^n}$; (C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$; (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^n$ 。

31. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n}{n[4^n + (-3)^n]}$ 的敛散性, 若收敛是绝对收敛还是条件收敛?

32. 常数 p 取什么值时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n^p}$ 是 (1) 发散; (2) 条件收敛; (3) 绝对收敛的?

33. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a}{n(1+a^n)}$ ($a > 0$) 的绝对收敛与条件收敛。

34. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{a}}{n}$ ($a > 0$) 的敛散性, 若收敛, 是绝对收敛还是条件收敛?

35. 讨论级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ 的敛散性。 S_{2n} 单减有下界。条收

36. 设在区间 $[0, a]$ 上 $u_0(x)$ 连续, 且 $u_n(x) = \int_0^x u_{n-1}(t) dt, x \in [0, a], n = 1, 2, \dots$,

证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[0, a]$ 上绝对收敛。

$$|u_0| \leq M, |u_1| \leq \int_0^x |u_0| dt \leq Mx, |u_2| \leq \int_0^x |u_1| dt \leq \frac{M}{2!} x^2, \dots, |u_n| \leq \int_0^x |u_{n-1}| dt \leq \frac{M}{n!} x^n \leq \frac{M}{n!} a^n$$

37. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有连续的二阶导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ 。

证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛。

$$f(0)=0, f'(0)=0, f \text{ 连续}, \therefore f(x)=0+0 \cdot x+\frac{f''(\xi)}{2} x^2, \therefore \left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\left|\frac{f''(\xi)}{2} \frac{1}{n^2}\right| \leq \frac{M}{2} \frac{1}{n^2}$$

38. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有一阶连续导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = a > 0$ 。

试判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$ 是否收敛? 如果收敛, 是绝对收敛还是条件收敛?

39、设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$,

(1) 求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n + a_{n+2})$ 的值; **=1** (2) 证明 对任意的 $\lambda > 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛。

40、已知 $u_n \neq 0, (n=1, 2, \dots)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{u_n} = 1$. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \right)$ 条件收敛。

41、设 p 为常数, 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n^p} - \sin \frac{1}{n^p} \right)$ 的敛散性, 若收敛, 请讨论是条件收敛还是绝对收敛。

$p \leq 0$ 时发散, $0 < p \leq \frac{1}{3}$ 时条件收敛, $p > \frac{1}{3}$ 时绝对收敛。

二、幂函数

(一) 收敛域

1. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n \cdot 3^n} x^n$ 的收敛域为_____。

2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n \cdot 3^n}$ 的收敛域为_____。

3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} (x+1)^n$ 的收敛域为_____ **$\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$** _____。

4. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^n$ 在 $x=3$ 处条件收敛, 则该幂级数的收敛半径为_____ **$R=4$** _____。

5. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 3, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为_____;

6. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛, 在 $x=-4$ 处发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-3)^n$ 的收敛域为_____ **$(1, 5]$** _____。

7. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 3, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为_____ **$(-2, 4)$** _____;

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n 2^n a_n$ 的敛散性为_____;

(二) 和函数

1、级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 的和函数及收敛域为 $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|, x \in (-1, 1)$ 。

2、级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)!}$ 的和为 $1 - \sin 1$ 。

3、级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^n}{n!} + \frac{(-1)^n}{n+1} \right)$ 的和为 $e^2 + \ln 2$ 。

4、求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ 的和函数及收敛域。 $S(x) = \frac{1}{x+1}, x \in \mathbb{R} \text{ 且 } x \neq -1, -2, \dots$

5、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{n(2n-1)}$ 的和函数。 $S(x) = \begin{cases} 2 \arctan x - \frac{1}{x} \ln(1+x^2), & x \in [-1, 1], x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

6、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n}$ 的和函数。 $S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x} \ln \frac{1+x}{1-x} - 1, & x \in (-1, 1), x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

7、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n2^n}$ 收敛域与和函数。 $S(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \ln \frac{2}{2-x}, & x \in [-2, 2), x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$

8、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{n-1}}{n3^n}$ 收敛域与和函数。 $S(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x-3} \ln \frac{6-x}{3}, & 0 \leq x < 6, x \neq 3 \\ \frac{1}{3}, & x = 3 \end{cases}$

9、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n} x^{2n}$ 的和函数。 $S(x) = -\frac{2x^2}{1+x^2} - \ln(1+x^2), x \in (-1, 1)$

10、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{2n-1} x^{2n}$ 的和函数。 $S(x) = \sqrt{2} x \arctan \sqrt{2} x, x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

11、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n} x^n$ 的和函数及收敛域。

12、求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)3^n}$ 的和。

13、求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n$ 的和函数。 $S(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3}, x \in (-1, 1)$

14、求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{n+1} x^n$ 的和函数。

15、证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2 - n + 1)}{2^n}$ 收敛，并求其和。 $= \frac{22}{27}$

16、求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)4^n}$ 的和。 $= \frac{1}{2} - \frac{3}{8} \ln 3$

17、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1} x^{2n}$ 的和函数。

(三) 函数展开成幂级数

1、将 $f(x) = \ln \sqrt{1-x^2} - x \arctan x$ 展成 x 的幂级数。

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{2n} - \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \right) x^{2n}, x \in (-1, 1)$$

2、将 $f(x) = \arctan \frac{1-2x}{1+2x}$ 展成 x 的幂级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 和。

$$f'(x) = -2 \frac{1}{1+4x^2} = -2 \sum_{n=0}^{\infty} (-4)^n x^{2n}, f(x) = \frac{\pi}{4} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{2n+1} x^{2n+1}, x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} - 1 - f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - 1$$

3、将 $f(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x - x$ 在 $x_0 = 0$ 处展开成幂级数。

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1} x^{4n+1}, x \in (-1, 1)$$

4、将 $f(x) = \ln(2x^2 + x - 3)$ 在 $x_0 = 3$ 处展开成幂级数。

$$f(x) = \ln 18 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left[\left(\frac{2}{9}\right)^n + \frac{1}{2^n} \right] (x-3)^n, x \in (1, 5]$$

5、将 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$ 展成 $x+4$ 的幂级数。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) (x+4)^n, x \in (-6, -2)$$

6、将函数 $f(x) = 2 \arctan x + \int_0^x e^{t^2} dt$ 展开为 x 的幂级数。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[2(-1)^n + \frac{1}{n!} \right] \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}, x \in [-1, 1]$$

7、 $f(x) = 3^x$ 在 $x_0 = -1$ 处的泰勒级数及收敛域为 $\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n 3}{n!} (x+1)^n, x \in (-\infty, +\infty)$ 。

8、设 $f(x) = e^{x^2}$ ，则 $f^{(2n)}(0) =$ _____；

9、可以展开成幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-1)!}$ 的函数是 ()。

(A) $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$;

(B) $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$;

$$(C) \frac{x}{2}(e^x - e^{-x});$$

$$(D) \frac{x}{2}(e^x + e^{-x}).$$

三、Fourier 级数

1、设 $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$, $S(x)$ 为 $f(x)$ 的以 2π 为周期的 Fourier 级数的和函数, 则在区间

$[-\pi, \pi]$ 上 $S(x)$ 的表达式为 $S(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ \frac{1-\pi}{2}, & x = \pm\pi \end{cases}$ 。

2、设 $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x \leq 0 \\ 1+x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$, $S(x)$ 为 $f(x)$ 的以 2π 为周期的 Fourier 级数的和函数,

则 $S(-\pi) = \frac{\pi}{2}$; $S(3\pi) = \frac{\pi}{2}$; $S(4\pi) = 0$; $S(1) = 2$ 。

3、设 $f(x) = \begin{cases} x+\pi, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1-2x, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$, $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x, -\infty < x < +\infty$, 其中

$a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos n\pi x dx (n = 0, 1, 2, \dots)$, 则 $S(\frac{3}{4}) = -\frac{1}{2}$; $S(-\frac{5}{2}) = \frac{1+2\pi}{4}$;

$S(1) = -1$; $S(2) = \pi$ 。

4、设 $f(x) = \begin{cases} x+\pi, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1-2x, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$, $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x, -\infty < x < +\infty$, 其中

$b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx (n = 0, 1, 2, \dots)$, 则 $S(\frac{3}{4}) = -\frac{1}{2}$; $S(-\frac{5}{2}) = -\frac{1+2\pi}{4}$;

$S(1) = 0$; $S(2) = 0$ 。

5、设 $f(x) = \pi x + x^2 (-\pi < x \leq \pi)$ 的以 2π 为周期的 Fourier 级数展开式为

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, 则系数 $b_3 =$ 。

6、设 $x+1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx, (0 \leq x \leq \pi)$, 则系数 $a_3 = -\frac{4}{9\pi}$ 。

7、将函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$ 展开为正弦级数, 并写出该级数的和函数 $S(x)$ 的表达式。

8、设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ 0, \frac{\pi}{4} \leq x \leq \pi \end{cases}$ ，把 $f(x)$ 展开为以 2π 为周期的余弦级数，并写出该级数的和

函数 $S(x)$ 的表达式。

9、设函数 $f(x) = \begin{cases} 0, -\pi \leq x \leq 0 \\ x, 0 < x < \pi \end{cases}$ ，把 $f(x)$ 展开为以 2π 为周期的 Fourier 级数，

并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ 的和。

$$= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \right], \quad x \in (-\pi, \pi) \quad = \frac{\pi^2}{8}$$

10、将函数 $f(x) = x + 1 (0 \leq x \leq 2)$ 分别展开为以 4 为周期的正弦级数和余弦级数，并求级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ 的和。

东南大学数学学院程全新老师