东南大学 2010-2011 学年《高等数学(上)》期末考试试卷

课程名称 高等数学　考试学期 10-11-2　得分

适用专业 选高数 AB 的专业　考试形式 闭卷　考试时间长度 150 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								

一. 填空题（本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 36 分）

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-a)(x-b)}\right)^x =$ ________；

2. 曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 的切线方程是 ________；

3. 曲线 $y=\dfrac{2x^3}{1+x^2}$ 的斜渐近线方程是 ________；

4. 若曲线 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 有拐点 $(-1,0)$，则 $b=$ ________；

5. 函数 $y=\ln(1-2x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0)=$ ________；

6. 设可导函数 $y=y(x)$ 是由方程 $\int_0^{x+y}e^{-t^2}dt=\int_0^x x\sin t^2dt$ 所确定，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ ________；

7. $\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}dx=$ ________；

8. $\int_{-1}^{1}\dfrac{x}{x-\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=$ ________；

9. 微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的特解是 ________。

二. 按要求计算下列各题（本题共 4 小题，每小题 7 分，满分 28 分）

10. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x-\sin(\sin x))\sin x}{1-\cos x^2}$

11. 求反常积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x(1+x^2)}dx$

12. 求定积分 $\int_1^e \sin\ln x dx$

13．求不定积分$\int \frac{1}{\sin 2x \cos x} dx$

（很少看到，纯三角数处，很少用分布积分。）

三（14）．（本题满分 7 分）

设 $f(x)=x, x\ge 0, g(x)=\begin{cases} \sin x, & 0\le x\le \frac{\pi}{2} \\ 0, & x>\frac{\pi}{2} \end{cases}$，分别求 $0\le x\le \frac{\pi}{2}$ 与 $x>\frac{\pi}{2}$ 时积分 $\int_0^x f(t)g(x-t)dt$ 的表达式。

四（15）．（本题满分 8 分）

求由 $y=x\sin x$，$y=x$ $(0\le x\le \frac{\pi}{2})$所围图形的面积及此图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

五（16）．（本题满分 7 分）

求微分方程 $y''-3y'+2y=2xe^x$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=0$，$y'\big|_{x=0}=0$ 的特解。

六（17）．（本题满分 8 分）

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程$\begin{cases} x=2t+t^2 \\ y=\varphi(t) \end{cases}$ $(t>-1)$ 所确定，其中$\varphi(t)$具有二阶导数，且 $\varphi(1)=\frac{5}{2}, \varphi'(1)=6$，已知$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{4(1+t)}$，求函数$\varphi(t)$。

七（18）．（本题满分 6 分）设 $f\in C[a,b]$，M, m 分别是 $f(x)$ 在$[a,b]$上的最大值和最小值，证明：$\exists \xi\in[a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)dx = M(\xi-a)+m(b-\xi)$.

10-11-2 高数（上）期末试卷参考答案

一. 填空题（本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 36 分）

1. e^{a+b}；　2. $y=x+1$；　3. $y=2x$；

4. $b=3$；　5. $-2^n(n-1)!$；　6. $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=-1$；

7. -4π；　8. $-\dfrac{2}{3}$；　9. $y=\dfrac{1}{x}$。

二. 按要求计算下列各题（本题共 4 小题，每小题 7 分，满分 28 分）

10. $\dfrac{1}{3}$　　11. $\dfrac{1}{2}\ln 2$

12. $\dfrac{e}{2}(\sin 1-\cos 1)+\dfrac{1}{2}$　　13. $\dfrac{1}{2}\left(\sec x+\ln\left|\csc x-\cot x\right|\right)+C$

三（14）.（本题满分 7 分）

关键步骤：$\int_0^x f(t)g(x-t)dt=\int_0^x f(x-u)g(u)du$

$$=\int_0^x (x-u)g(u)du=x\int_0^x g(u)du-\int_0^x ug(u)du$$

$$=\begin{cases} x-\sin x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2} \\ x-1, & x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

四（15）.（本题满分 8 分）

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-x\sin x)dx=\frac{\pi^2}{8}-1$$

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2dx-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin^2 x\,dx=\frac{\pi^4}{48}-\frac{\pi^2}{8}$$

五（16）.（本题满分 7 分）

通解为 $y=\overline{y}+y^*=C_1e^x+C_2e^{2x}-x(x+2)e^x$

特解为 $y=-2e^x+2e^{2x}-x(x+2)e^x$

六（17）.（本题满分 8 分）

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(1+t)\varphi''-\varphi'}{4(1+t)^3}=\frac{3}{4(1+t)} \Rightarrow \text{方程}\ \varphi''-\frac{1}{1+t}\varphi'=3(1+t)$$

降阶法：$\varphi'=(1+t)(3t+C_1)\overset{C_1=0}{=}3t+3t^2$

$$\Rightarrow \varphi=\frac{3}{2}t^2+t^3+C_2\overset{C_2=0}{=}\frac{3}{2}t^2+t^3$$

七（18）.（本题满分 6 分）

提示：由估值定理知 $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

令 $F(x)=\int_a^b f(x)dx-M(x-a)-m(b-x)\in C_{[a,b]}$

$F(a)=\int_a^b f(x)dx-m(b-a)\ge 0$

$F(b)=\int_a^b f(x)dx-M(b-a)\le 0$

对 $F(x)$在$[a,b]$上使用零点定理得：

$\exists\xi\in[a,b],\ \ni F(\xi)=0,$ 即 结论成立。

另解：令 $g(x)=M(x-a)+m(b-x),\quad g'(x)=M-m\ge 0,$

故 $g(x)$在$[a,b]$单增，$\Rightarrow g(a)\le g(x)\le g(b)$

而 $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

即 $g(a)\le\int_a^b f(x)dx\le g(b)$

由介值定理得

$\exists\xi\in[a,b],\ \ni\int_a^b f(x)dx=g(\xi),$ 即 结论成立。