第五章　恒定磁场

重点和难点

该章重点及处理方法与静电场类似。但是磁感应强度的定义需要详细介绍，尤其要强调磁场与运动电荷之间没有能量交换，电流元受到的磁场力垂直于电流的流动方向。

说明磁导率与介电常数不同，磁导率可以小于 1，而且大多数媒质的磁导率接近 1。

讲解恒定磁场时，应与静电场进行对比。例如，静电场是无散场，而恒定磁场是无旋场。在任何边界上电场强度的切向分量是连续的，而磁感应强度的法向分量是连续的。

重要公式

磁感应强度定义：

根据运动电荷受力：　$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$

根据电流元受力：　$\boldsymbol{F} = I\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}$

根据电流环受力：　$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}$

真空中恒定磁场方程：

积分形式：　$\oint_l \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 I$　　$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$

微分形式：

已知电流分布求解电场强度：

1，　$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$　　$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \dfrac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$

2， $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\dfrac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}V'$ 毕奥—萨伐定律。

3， $\oint_{l}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0 I$ 安培环路定律。

面电流产生的矢量磁位及磁感应强度分别为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{S'}\frac{\boldsymbol{J}_S(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}S' \qquad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{S'}\frac{\boldsymbol{J}_S(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}S'$$

线电流产生的矢量磁位及磁感应强度分别为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{l'}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \qquad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{l'}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}'\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

矢量磁位满足的微分方程：

无源区中标量磁位满足的微分方程： $\nabla^2\varphi^m=0$

媒质中恒定磁场方程：

积分形式： $\oint_l \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=I$ $\oint_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$

微分形式：

磁性能均匀线性各向同性的媒质：

场方程积分形式： $\oint_l \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu I$ $\oint_B \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$

场方程微分形式： $\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{J}$ $\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0$

矢量磁位微分方程： $\nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{J}$

矢量磁位微分方程的解： $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\dfrac{\mu}{4\pi}\int_{V'}\dfrac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$

恒定磁场边界条件：

1， $H_{1t}=H_{2t}$。对于各向同性的线性媒质，

$$\frac{B_{1t}}{\mu_1}=\frac{B_{2t}}{\mu_2}$$

2，。对于各向同性的线性媒质，

题　解

5-1　在均匀线性各向同性的非磁性导电媒质（即）中，当存在恒定电流时，试证磁感应强度应满足拉普拉斯方程，即。

证　在均匀线性各向同性的非磁性导电媒质中，由 $\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$ 及，得

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}$$

对等式两边同时取旋度，得

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{B}=\nabla\times\mu_0\boldsymbol{J}$$

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\nabla\times\boldsymbol{J}$$

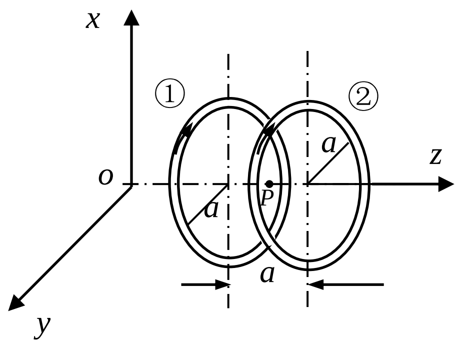
但是 $\nabla\times\boldsymbol{J}=0$，考虑到恒等式 $\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$，得

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{B}=0$$

又知 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$，由上式求得　$\nabla^2\boldsymbol{B}=0$。

5-2　设两个半径相等的同轴电流环沿 x 轴放置，如习题图 5-2 所示。试证在中点 P 处，磁感应强度沿 x 轴的变化率等于零，即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}x^2}=0$$



习题图 5-2

解　设电流环的半径为 a，为了求解方便，将原题中坐标轴 x 换为坐标轴 z，如图示。那么，中点 P 的坐标为（z，0，0），电流环①位于 $\left(z-\dfrac{a}{2}\right)$处，电流环②位于 $\left(z+\dfrac{a}{2}\right)$处。根据毕奥—沙伐定律，求得电流环①在 P 点产生的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}_1=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{l_1}\frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

取圆柱坐标系，则

$$I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1=\boldsymbol{e}_\phi Ia\,\mathrm{d}\phi\,,\quad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_z z\,,\quad \boldsymbol{r}'=\boldsymbol{e}_r r+\boldsymbol{e}_z\left(z-\frac{r}{2}\right),$$

因此

$$\boldsymbol{B}_1=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\boldsymbol{e}_\phi Ir\,\mathrm{d}\phi\times\left[\boldsymbol{e}_z z-\boldsymbol{e}_r r-\boldsymbol{e}_z\left(z-\dfrac{r}{2}\right)\right]}{\left|\boldsymbol{e}_z z-\boldsymbol{e}_r r-\boldsymbol{e}_z\left(z-\dfrac{r}{2}\right)\right|^3}$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\boldsymbol{e}_\phi Ir\,\mathrm{d}\phi\times\left[-\boldsymbol{e}_r r+\boldsymbol{e}_z\dfrac{r}{2}\right]}{\left|-\boldsymbol{e}_r r+\boldsymbol{e}_z\dfrac{r}{2}\right|^3}$$

同理可得，电流环②在 P 点产生的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}_2=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\boldsymbol{e}_\phi Ir\,\mathrm{d}\phi\times\left(-\boldsymbol{e}_z\dfrac{r}{2}-\boldsymbol{e}_r r\right)}{\left|-\boldsymbol{e}_z\dfrac{r}{2}-\boldsymbol{e}_r r\right|^3}$$

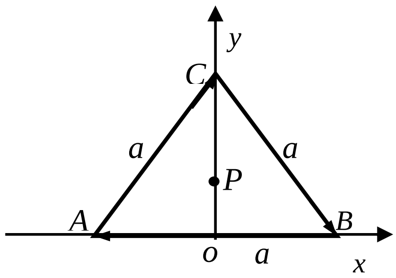
那么，P 点合成磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2$$

由于 $\boldsymbol{B}_1$ 和 $\boldsymbol{B}_2$ 均与坐标变量 z 无关，因此 P 点的磁感应强度沿 z 轴的变化率为零，即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}z^2}=0$$

5-3 已知边长为 a 的等边三角形回路电流为 I，周围媒质为真空，如习题图 5-3 所示。试求回路中心点的磁感应强度。



习题图 5-3

解 取直角坐标系，令三角形的 AB 边沿 x 轴，中心点 P 位于 y 轴上，电流方向如图示。

由毕奥—沙伐定律，求得 AB 段线电流在 P 点产生的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}_1=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_l\frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

式中 $I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\boldsymbol{e}_xI\,\mathrm{d}x$，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_y\dfrac{\sqrt{3}}{6}a$，$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{e}_xx$，即

$$\boldsymbol{B}_1=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\frac{-\boldsymbol{e}_xI\,\mathrm{d}x\times\left(\boldsymbol{e}_y\dfrac{\sqrt{3}}{6}a-\boldsymbol{e}_xx\right)}{\left|\boldsymbol{e}_y\dfrac{\sqrt{3}}{6}a-\boldsymbol{e}_xx\right|^3}=-\boldsymbol{e}_z\frac{3\sqrt{3}\mu_0I}{2\pi a}$$

由于轴对称关系，可知 BC 段及 AC 段电流在 P 点产生的磁感应强度与 AB 段产生的磁感应强度相等。因此，P 点的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}=3\boldsymbol{B}_1=-\boldsymbol{e}_z\frac{9\sqrt{3}\mu_0I}{2\pi a}$$

5-4 已知无限长导体圆柱半径为 a，通过的电流为 I，且电流均匀分布，试求柱内外的磁感应强度。

解 建立圆柱坐标系，令圆柱的轴线为 Z 轴。那么，由安培环路定律得知，在圆柱内线积分仅包围的部分电流为

$I_1=\dfrac{\pi r^2}{\pi a^2}I$，又 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{e}_\phi r\,\mathrm{d}\phi$，则

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{\pi r^2}{\pi a^2}I \Rightarrow H_\phi=\frac{rI}{2\pi a^2}$$

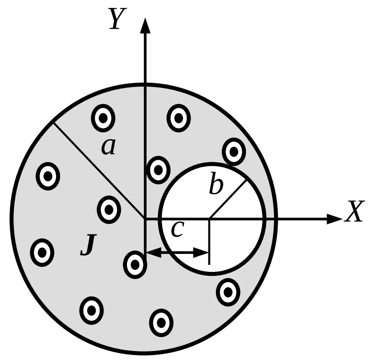
即
$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_\phi\frac{\mu_0 rI}{2\pi a^2}$$

在圆柱外，线积分包围全部电流 I，那么

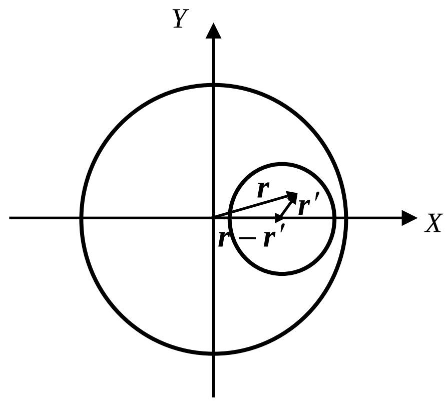
$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=I \Rightarrow H_\phi=\frac{I}{2\pi r}$$

即
$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_\phi\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

5-5 已知无限长导体圆柱的半径为 a，其内部存在的圆柱空腔半径为 b，导体圆柱的轴线与空腔圆柱的轴线之间的间距为 c，如习题图 5-5（a）所示。若导体中均匀分布的电流密度为 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{e}_z J_0$，试求空腔中的磁感应强度。



习题图 5-5(a)



习题图 5-5(b)

解 柱内空腔可以认为存在一个均匀分布的等值反向电流，抵消了原有的电流而形成的。那么，利用叠加原理和安培环路定律即可求解。已知半径为 a，电流密度为 J_0 的载流圆柱在柱内半径 r 处产生的磁场强度 $\boldsymbol{H}_1$ 为

$$\oint_l \boldsymbol{H}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \pi r^2 J_0$$

求得 $H_{1\phi} = \dfrac{J_0 r}{2}$，或写为矢量形式 $\boldsymbol{H}_1 = \dfrac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{r}}{2}$

对应的磁感应强度为 $\boldsymbol{B}_1 = \dfrac{\mu_0 \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{r}}{2}$

同理可得半径为 b，电流密度为 $-\boldsymbol{J}$ 的载流圆柱在柱内产生的磁场强度为

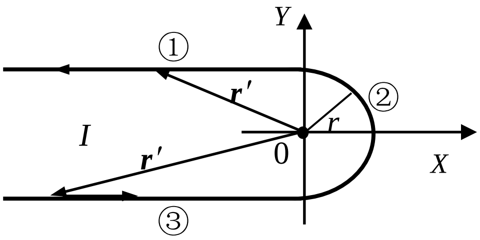
$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{-\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{r}'}{2}$$

对应的磁感应强度为 $\boldsymbol{B}_2 = -\dfrac{\mu_0 \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{r}'}{2}$

上式中 $\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'$ 的方向及位置如习题图 5-5（b）示。因此，空腔内总的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2 = \frac{\mu_0 \boldsymbol{J}}{2}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \frac{\boldsymbol{e}_z \mu_0 J_0 \times \boldsymbol{e}_x c}{2} = \boldsymbol{e}_y \frac{\mu_0 J_0 c}{2}$$

5-6 两条半无限长直导线与一个半圆环导线形成一个电流回路，如习题图 5-6 所示。若圆环半径 r =10cm，电流 I = 5A，试求半圆环圆心处的磁感应强度。



习题图 5-6

解 根据毕奥—沙伐定律，载流导线产生的磁场强度为

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{4\pi}\int_l \frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

设半圆环圆心为坐标原点，两直导线平行于 X 轴，如图所示。那么，对于半无限长线段①

$$I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\boldsymbol{e}_x I\mathrm{d}x, \quad \boldsymbol{r} = 0, \quad \boldsymbol{r}' = -\boldsymbol{e}_x x + \boldsymbol{e}_y r$$

因此，在圆心处产生的磁场强度为

$$\boldsymbol{H}_1=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{-\boldsymbol{e}_x I\,\mathrm{d}x\times\left(\boldsymbol{e}_x x-\boldsymbol{e}_y r\right)}{\left(x^2+r^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\boldsymbol{e}_z\frac{I}{4\pi r}$$

同理线段③在圆心处产生的磁场强度为

$$\boldsymbol{H}_3=\boldsymbol{e}_z\frac{I}{4\pi r}$$

对于半圆形线段②

$$I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{e}_\phi Ir\,\mathrm{d}\phi,\quad \boldsymbol{r}=0,\quad \boldsymbol{r}'=\boldsymbol{e}_r r$$

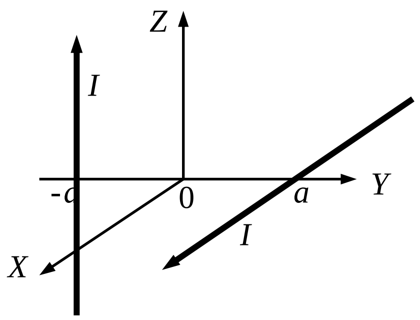
因此，它在半圆心处产生的磁场强度为

$$\boldsymbol{H}_2=\frac{1}{4\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\boldsymbol{e}_\phi Ir\,\mathrm{d}\phi\times\left(0-\boldsymbol{e}_r r\right)}{r^3}=\boldsymbol{e}_z\frac{I}{4r}$$

那么，半圆中心处总的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}=\mu_0\left(\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_2+\boldsymbol{H}_3\right)=\boldsymbol{e}_z\frac{\mu_0 I}{4r}\left(\frac{2}{\pi}+1\right)=25.7\times10^{-6}(\mathrm{T})$$

5-7 若在处放置一根无限长线电流 $\boldsymbol{e}_z I$，在 $y=a$ 处放置另一根无限长线电流 $\boldsymbol{e}_x I$，如习题图 5-7 所示。试求坐标原点处的磁感应强度。



习题图 5-7

解 根据无限长电流产生的磁场强度公式，求得位于 $y=-a$ 处的无限长线电流 $\boldsymbol{e}_z I$ 在原点产生的磁场为

$$\boldsymbol{H}_1=-\boldsymbol{e}_x\frac{I}{2\pi a}$$

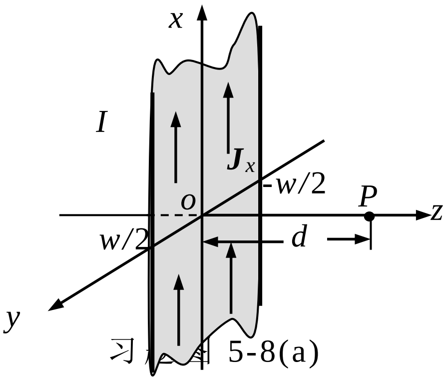
位于 $y=a$ 处的无限长线电流 $\boldsymbol{e}_x I$ 产生的磁场为

$$\boldsymbol{H}_2 = -\boldsymbol{e}_z \frac{I}{2\pi a}$$

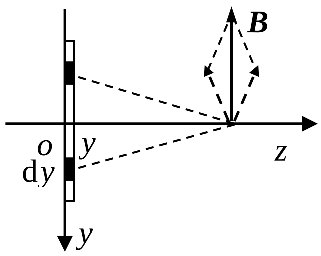
因此，坐标原点处总磁感应强度为

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_2\right) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\left(\boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{e}_x\right)$$

5-8 已知宽度为 W 的带形电流的面密度 $\boldsymbol{J}_s = \boldsymbol{e}_x J_s$，位于 $z=0$ 平面内，如习题图 5-8 所示。试求处的磁感应强度。



习题图 5-8(a)



习题图 5-8(b)

解 宽度为 dy，面密度为 J_s 的面电流可看作为线电流 J_sdy，其在 P 点产生的磁场为

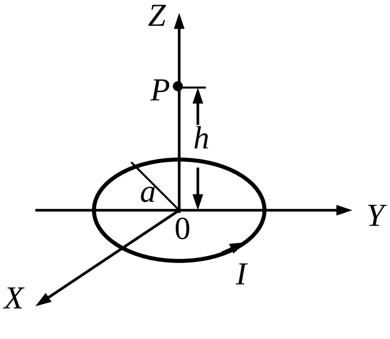
$$\mathrm{d}\boldsymbol{H} = \frac{J_s \,\mathrm{d}y}{2\pi\left(y^2 + d^2\right)}\left(-\boldsymbol{e}_y d - \boldsymbol{e}_z y\right)$$

由对称性可知，z 方向的分量相互抵消，如习题图 5-8（b）所示，则

$$\boldsymbol{H} = 2\int_0^{\frac{w}{2}} \frac{-dJ_s \,\mathrm{d}y}{2\pi\left(y^2 + d^2\right)}\boldsymbol{e}_y = -\boldsymbol{e}_y \frac{J_s}{\pi}\arctan\frac{w}{2d}$$

因此，在 $P(0,0,d)$ 处的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} = -\boldsymbol{e}_y \frac{\mu_0 J_s}{\pi}\arctan\frac{w}{2d}$$



习题图 5-9

5-9 已知电流环半径为 a，电流为 I，电流环位于 $z=0$ 平面，如习题图 5-9 所示。

试求处的磁感应强度。

解 由毕奥—沙伐定律得

$$\boldsymbol{H}=\int_l \frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{e}_r}{4\pi r^2}$$

因为 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 处处与 $\boldsymbol{e}_r$ 正交，则 $\left|\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{e}_r\right|=a\,\mathrm{d}\phi$

即 $$H=\int\frac{I\left|\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{e}_r\right|}{4\pi r^2}=\int\frac{Ia\,\mathrm{d}\phi}{4\pi r^2}$$

由对称性可知，P 点磁场强度只有 H_z 分量，所以

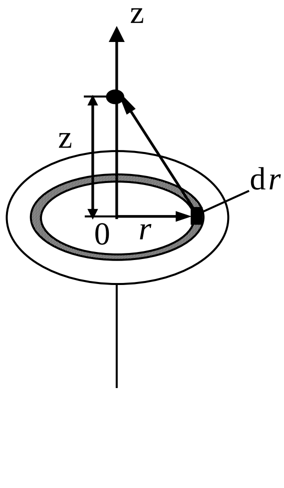
$$H_z=\int_0^{2\pi}\frac{Ia^2\,\mathrm{d}\phi}{4\pi\left(a^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{Ia^2}{2\left(a^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

因此，$P(0,0,h)$ 处的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}=\boldsymbol{e}_z\frac{\mu_0 Ia^2}{2\left(a^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

5-10 当半径为 a 的均匀带电圆盘的电荷面密度为，若圆盘绕其轴线以角速度旋转，试求轴线上任一点磁感应强度。

解 如习题图 5-10 所示，将圆盘分割成很多宽度为 $\mathrm{d}r$ 的载流圆环 $\mathrm{d}I$，它在 z 处产生的磁感应强度，根据题 5-9 结果，得知



$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_z\frac{\mu_0 r^2\,\mathrm{d}I}{2\left(r^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

因为 $\mathrm{d}I=2\pi r\dfrac{\omega}{2\pi}\rho_s\,\mathrm{d}r=\rho_s\omega\,r\,\mathrm{d}r$

习题图 5-10

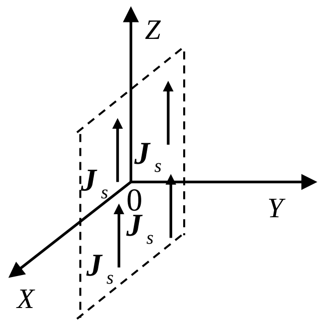
因此

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_z\frac{\mu_0\rho_s\omega}{2}\int_0^a\frac{r^3\,\mathrm{d}r}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\boldsymbol{e}_z\frac{\mu_0\rho_s\omega}{2}\left(\frac{a^2+2z^2}{\sqrt{a^2+z^2}}-2z\right)$$

5-11 已知位于 $y=0$ 平面内的表面电流 $\boldsymbol{J_s}=\boldsymbol{e}_z J_{s0}$，试证

磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 为

$$\boldsymbol{B}=\begin{cases}-\boldsymbol{e}_x\dfrac{\mu_0 J_{s0}}{2}, & y>0\\ \boldsymbol{e}_x\dfrac{\mu_0 J_{s0}}{2}, & y<0\end{cases}$$



习题图 5-11

解 有两种求解方法。

解法一：将平面分割成很多宽度为 $\mathrm{d}y$ 的无限长线电流，那么由题 5-8 结果获知，当 $y>0$ 时

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{e}_x\frac{\mu_0 J_{s0} y\,\mathrm{d}x}{\pi\left(x^2+y^2\right)}$$

因此，积分求得

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_x\frac{J_{s0}\mu_0}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=-\boldsymbol{e}_x\frac{\mu_0 J_{s0}}{2}$$

同理，当 $y<0$ 时，　$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_x\dfrac{\mu_0 J_{s0} y\,\mathrm{d}x}{\pi\left(x^2+y^2\right)}$

那么，积分求得　$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_x\dfrac{\mu_0 J_{s0}}{2}$

解法二：由题 5-8 知，$\boldsymbol{B}=\begin{cases}-\boldsymbol{e}_x B_0, y>0\\ \boldsymbol{e}_x B_0, y<0\end{cases}$

即　$\boldsymbol{H}=\begin{cases}-\boldsymbol{e}_x H_0, y>0\\ \boldsymbol{e}_x H_0, y<0\end{cases}$

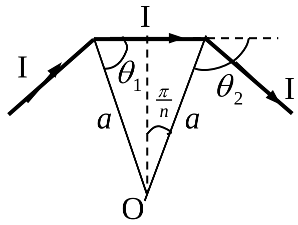
令 $y<0$ 的区域中磁场强度为 H_1，而 $y>0$ 的区域中磁场强度为 H_2，那么，在 $y=0$ 的边界上，$\boldsymbol{e}_y\times\left(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1\right)=\boldsymbol{J}_s$。由此求得 $H_0=\dfrac{1}{2}J_{s0}$，因此

$$\boldsymbol{B}=\begin{cases}-\boldsymbol{e}_x\dfrac{\mu_0 J_{s0}}{2}, & y>0\\ \boldsymbol{e}_x\dfrac{\mu_0 J_{s0}}{2}, & y<0\end{cases}$$

5-12 已知 N 边正多边形的外接圆半径为 a，当通过的电流为 I 时，试证多边形中心的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_n\frac{\mu_0 NI}{2\pi a}\tan\frac{\pi}{N}$$

式中 $\boldsymbol{e}_n$ 为正多边形平面的法线方向上单位矢量。若时，中心 $\boldsymbol{B}$ 值多大？



解 如习题图 5-12 所示，载流线圈每边在中心 O 处产生的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{e}_n\frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left(\cos\theta_1-\cos\theta_2\right)$$

习题图 5-12

$$=\boldsymbol{e}_n\frac{\mu_0 I}{4\pi a\cos\left(\dfrac{\pi}{N}\right)}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{N}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{N}\right)\right]=\boldsymbol{e}_n\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\tan\left(\frac{\pi}{N}\right)$$

所以，N 条边在中心 O 处产生的磁场为

$$\boldsymbol{B}=N\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{e}_n\frac{\mu_0 NI}{2\pi a}\tan\frac{\pi}{N}$$

当 $N\to\infty$ 时， $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_n\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{\mu_0 NI}{2\pi a}\tan\left(\dfrac{\pi}{N}\right)=\boldsymbol{e}_n\dfrac{\mu_0 I}{2a}$

此结果即是半径为 a 的电流环在中心处产生的磁感应强度。

5-13 若表面电流 $\boldsymbol{J}_s$ 位于 $x=x'$ 平面内，试证

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}_s\delta\,(x-x')$$

式中为在处取极值的一维函数。

解 由安培环路定理得知，$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0 I$

因 $I=\int_S \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，再利用斯托克斯定理得

$$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_s\left(\nabla\times\boldsymbol{B}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

由 δ 函数的定义可知，一维函数的量纲为长度的倒数。因此，$\boldsymbol{J}_s\delta(x-x')$ 为体电流密度,即

$$I=\int_s \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_s \boldsymbol{J}_s\delta(x-x')\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\int_s(\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_s \mu_0\boldsymbol{J}_s\delta(x-x')\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\int_s(\nabla\times\boldsymbol{B}-\mu_0\boldsymbol{J}_s\delta(x-x'))\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$$

上式对于任何表面都成立，因此被积函数为零，即

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}_s\delta(x-x')$$

5-14 若位于圆柱坐标系中 (r_0,ϕ_0) 处的无限长线电流的电流为 *I*，方向与正 *Z* 轴一致，试证磁感应强度为

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_z\mu_0 I\frac{\delta(r-r_0)\delta(\phi-\phi_0)}{r_0}$$

解 由 δ 函数的定义可知，$\dfrac{\delta(r-r_0)\delta(\phi-\phi_0)}{r_0}$ 为二维 δ 函数在圆柱坐标系中的表示，其量纲为面积的倒数。因此，$\boldsymbol{e}_z I\dfrac{\delta(r-r_0)\delta(\phi-\phi_0)}{r_0}$ 为位于 (r_0,ϕ_0) 处的 z 方向的电流密度。那么

$$I=\int_s \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_s \boldsymbol{e}_z I\frac{\delta(r-r_0)\delta(\phi-\phi_0)}{r_0}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

由安培环路定律得知，$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0 I$，即

$$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_s \boldsymbol{e}_z\mu_0 I\frac{\delta(r-r_0)\delta(\phi-\phi_0)}{r_0}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

再利用斯托克斯定理，$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_s(\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$，求得

$$\int_s\left(\nabla\times\boldsymbol{B}-\boldsymbol{e}_z\mu_0 I\frac{\delta(r-r_0)\delta(\phi-\phi_0)}{r_0}\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$$

上式对于任何表面均成立，因此被积函数为零，即

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_z\mu_0 I\frac{\delta(r-r_0)\delta(\phi-\phi_0)}{r_0}$$

5-15 若无限长的半径为 a 的圆柱体中电流密度分布函数 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{e}_z(r^2+4r),\ \ r\le a$，试求圆柱内外的磁感应强度。

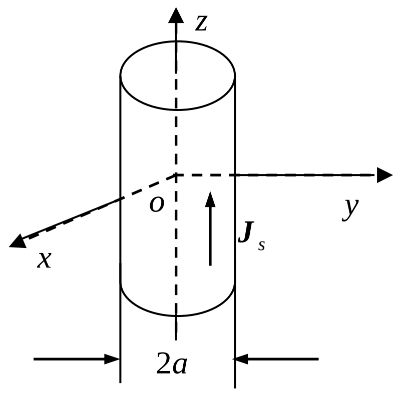
解 取圆柱坐标系，如习题图 5-15 所示。当 $r\le a$ 时，通过半径为 r 的圆柱电流为

$$I_i=\int_s\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_s\boldsymbol{e}_z\left(r^2+4r\right)\cdot\boldsymbol{e}_z\,\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^r\left(r^2+4r\right)r\mathrm{d}r$$

$$=\pi\left(\frac{1}{2}r^4+\frac{8}{3}r^3\right)$$

由 $\oint_l\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0 I_r$

求得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_\phi\mu_0\left(\frac{1}{4}r^3+\frac{4}{3}r^2\right)$



习题图 5-15

当 $r\ge a$ 时

$$I_o=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^a\left(r^2+4r\right)\cdot r\,\mathrm{d}r$$

$$=\pi\left(\frac{1}{2}a^4+\frac{8}{3}a^3\right)$$

由 $\oint_l\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0 I_o$

求得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_\phi\frac{\mu_0}{r}\left(\frac{1}{4}a^4+\frac{4}{3}a^3\right)$

5-16 证明矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 满足的方程式的解为

$$\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,\mathrm{d}V'$$

（提示：利用函数在处的奇点特性）。

证明

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla^2\int_{V'}\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\mathrm{d}V'$$

已知 $$\nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)=-4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

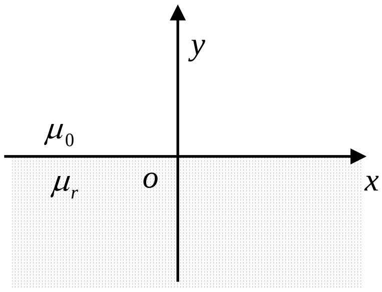
因此 $$\nabla^2\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')[-4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]\mathrm{d}V'=-\mu_0\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$$

5-17 已知空间 $y<0$ 区域为磁性媒质，其相对磁导率区域为空气。试求：① 当空气中的磁感应强度 $\boldsymbol{B}_0=(\boldsymbol{e}_x 0.5-\boldsymbol{e}_y 10)\mathrm{mT}$ 时，磁性媒质中的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$；② 当磁性媒质中的磁感应强度 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{e}_x 10+\boldsymbol{e}_y 0.5)\mathrm{mT}$ 时，空气中的磁感应强度 $\boldsymbol{B}_0$。

解 根据题意，建立的直角坐标如图 5-17 所示。

① 设磁性媒质中的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_x B_x+\boldsymbol{e}_y B_y$$



习题图 5-17

已知在此边界上磁感应强度的法向分量连续，磁场强度的切向分量连续。因此

$$B_y=-10，\qquad \frac{B_x}{5000\mu_0}=\frac{0.5}{\mu_0}$$

求得 $$B_x=2500，\quad B_y=-10$$

即 $$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{e}_x 2500-\boldsymbol{e}_y 10)\,\mathrm{mT}$$

② 设空气中的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{e}_x B_{0x}+\boldsymbol{e}_y B_{0y}$$

则由边界条件获知

$$\frac{B_{0x}}{\mu_0}=\frac{10}{5000\mu_0}，\quad B_{0y}=0.5$$

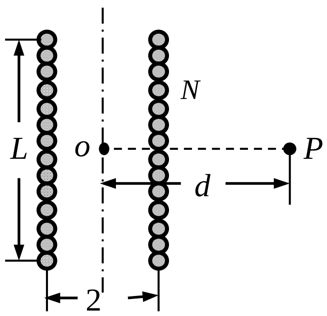
求得 $$B_{0x}=0.002，\quad B_{0y}=0.5$$

即 $$\boldsymbol{B}_0=(\boldsymbol{e}_x 0.002+\boldsymbol{e}_y 0.5)\,\mathrm{mT}$$

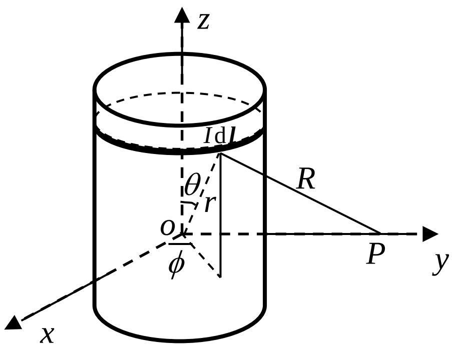
5-18 已知均匀绕制的长螺线管的匝数为 N，长度为 L，半径为 a，电流为 I，如习题图 5-18(a)所示。试求：

① 螺线管内部中点 o 处的磁感应强度；

② 螺线管外部 P 点的磁感应强度，图中。



习题图 5-18(a)



习题图 5-18(b)

解 ① 螺线管可看作是线密度为 $\dfrac{IN}{L}$ 的圆柱面电流，如图习题图 5-18(b)所示。由题 5-9 的结果得知，电流为 $\left(\dfrac{IN}{L}\mathrm{d}z\right)$ 的电流环在中点 o 处产生的磁感应强度为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_z\frac{\mu_0 INa^2\,\mathrm{d}z}{2L\left(a^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

那么，螺线管在中点 o 处产生的总磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_z\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{\mu_0 INa^2}{2L\left(a^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}z=\boldsymbol{e}_z\frac{\mu_0 IN}{2\sqrt{a^2+\frac{1}{4}L^2}}$$

② 为了计算螺线管外的场强，可将螺线管看作为由 N 个同轴电流环组成。已知在 xoy 平面内，单个电流环 I 在 $P\left(r,\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$点产生的矢量磁位为

$$\boldsymbol{A}_p = \oint_l \frac{\mu_0 I \,\mathrm{d}\boldsymbol{l}'}{4\pi R}$$

式中 $R = \sqrt{(r')^2 + a^2 - 2ra\sin\theta'\cos\phi'}$， $\mathrm{d}\boldsymbol{l}' = \boldsymbol{e}_\phi a\,\mathrm{d}\phi'$。考虑到 $r >> a$，那么

$$\frac{1}{R} \approx \frac{1}{r'}\left(1 + \frac{a}{r'}\sin\theta'\cos\phi'\right)$$

$$\boldsymbol{A}_p = \boldsymbol{e}_\phi \frac{\mu_0 I a}{4\pi r'}\int_0^{2\pi}\left(1 + \frac{a}{r'}\sin\theta'\cos\phi'\right)\cos\phi'\,\mathrm{d}\phi' = \boldsymbol{e}_\phi \frac{\mu_0 I a^2}{4(r')^2}\sin\theta'$$

因此 $$\boldsymbol{B}_p = \nabla\times\boldsymbol{A}_p = \frac{\mu_0 I a^2}{4(r')^3}\left(\boldsymbol{e}_r 2\cos\theta' + \boldsymbol{e}_\theta \sin\theta'\right)$$

当电流环位于 xoy 平面时，$\theta' = \frac{\pi}{2}$，$r' = d$，那么，在 $P\left(d, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 处产生的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}_P = \boldsymbol{e}_\theta \frac{\mu_0 I a^2}{4d^3}$$

考虑到 $d >> L$，对于 P 点而言，可以认为每个电流环均处于 xoy 平面内。因此，P 点磁感应强度增加 N 倍，即

$$\boldsymbol{B} = N\boldsymbol{B}_P = \boldsymbol{e}_\theta \frac{\mu_0 N I a^2}{4d^3}$$

5-19 根据式（5-2-9b），证明 $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0$。

证明 式（5-2-9b）为

$$\boldsymbol{A} = \int_{V'} \frac{\mu \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$$

则 $$\nabla\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\nabla\cdot\int_{V'}\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' = \frac{\mu}{4\pi}\int_{V'}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\cdot\nabla\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\mathrm{d}V'$$

$$= -\frac{\mu}{4\pi}\int_{V'}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\cdot\nabla'\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\mathrm{d}V'$$

$$=-\frac{\mu}{4\pi}\int_{V'}\nabla'\cdot\left[\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right]\mathrm{d}V'+\frac{\mu}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$$

利用高斯定理，同时考虑到 $\nabla'\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')=0$，求得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-\frac{\mu}{4\pi}\oint_{s}\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'$$

但由电流连续性原理获知，$\oint_{s}\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'=0$。因此，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0。$$

5-20 证明在边界上矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 的切向分量是连续的。

解 已知磁通 $\varPhi^{m}$ 与矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 的关系为

$$\varPhi^{m}=\oint_{l}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

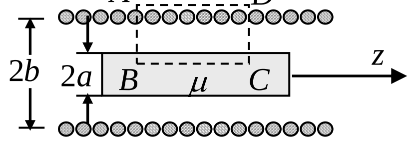
类似证明磁场强度的切向分量是连续的方法，紧靠边界作一个闭合矩形方框。当方框面积趋近零时，穿过方框的磁通 $\varPhi^{m}$ 也为零，那么求得

$$\oint_{l}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$$

这样，由此获知 $\boldsymbol{A}_{1t}=\boldsymbol{A}_{2t}$，即边界上矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 的切向分量是连续的。

5-21 当磁导率为的磁棒插入电流为 I 的螺线管中，若单位长螺线管的匝数为 N，磁棒的半径为 a，螺线管的内径为。试求：①及区域中的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$，磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 及磁化强度 $\boldsymbol{P}^{m}$；②磁棒中的磁化电流密度及磁棒表面的表面磁化电流密度。

解 ① 根据题意，螺线管中磁棒位置如图 5-22 所示。取圆柱坐标系，且令螺线管的轴线与 z 轴一致。作一个矩形闭合回路，其中 AB 和 CD



习题图 5-22

边垂直于螺线管壁，AD 边紧
靠在螺线管外壁，BC 边平行
于螺线管内壁，其长度为 l。沿该矩形闭合回路积分，由安培环路定律知

$$\oint_{ABCD} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = INl$$

可以认为，螺线管中的磁场强度方向均与螺线管的轴线平行，螺线管外附近无漏磁。那么当矩形回路的 BC 边位于磁棒内时，若令磁棒内的磁场强度为 $\boldsymbol{H}_1$，则上述闭合积分变为

$$\int_{BC} \boldsymbol{H}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = INl \Rightarrow \quad \boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{e}_z IN$$

因此，磁棒内的磁场强度为 $\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{e}_z IN$

磁棒内的磁感应强度为 $\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{e}_z \mu IN$

磁棒内的磁化强度为 $\boldsymbol{P}_1^m = \dfrac{\boldsymbol{B}_1}{\mu_0} - \boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{e}_z(\mu_r - 1)IN$

若令磁棒与螺线管壁之间的磁场强度为 $\boldsymbol{H}_2$，则上述闭合积分变为

$$\int_{BC} \boldsymbol{H}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = INl \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{e}_z IN$$

磁棒与螺线管壁之间的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{e}_z \mu_0 IN$$

磁棒与螺线管壁之间磁化强度为

$$\boldsymbol{P}_2^m = \frac{\boldsymbol{B}_2}{\mu_0} - \boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{e}_z\left(\frac{\mu_0}{\mu_0} - 1\right)IN = 0$$

② 磁棒中的磁化电流密度为

$$\boldsymbol{J}' = \nabla \times \boldsymbol{P}_1^m = \nabla \times (\mu_r - 1)IN\boldsymbol{e}_z = 0$$

磁棒侧面的表面磁化电流密度为

$$\boldsymbol{J}_s' = \boldsymbol{P}_1^m \times \boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{e}_z(\mu_r - 1)IN \times \boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_\phi(\mu_r - 1)IN$$

5-22 已知半径为 a 的铁氧体球内部的磁化强度

$\boldsymbol{P}^m = \boldsymbol{e}_z P_0^m$，试求：①球内磁化电流密度及球面的表面磁化电流密度；②磁化电流在球心处产生的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$。

解 ① 球内磁化电流密度为

$$\boldsymbol{J}' = \nabla \times \boldsymbol{P}^m = \nabla \times \left(\boldsymbol{e}_z P_0^m\right) = 0$$

球面的表面磁化电流密度为

$$\boldsymbol{J}_s' = \boldsymbol{P}^m \times \boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{e}_z P_0^m \times \boldsymbol{e}_r = \left(\boldsymbol{e}_r \cos\theta - \boldsymbol{e}_\theta \sin\theta\right) P_0^m \times \boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_\phi P_0^m \sin\theta$$

由题 5-9 的结果获知，位于 θ 处宽度为 $a\mathrm{d}\theta$ 的环行电流 $\boldsymbol{J}_s' a\mathrm{d}\theta$ 在球心产生的磁感应强度 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_z \frac{\mu J_s' a (a\sin\theta)^2 \,\mathrm{d}\theta}{2a^3}$$

那么，整个球面上磁化电流在球心产生的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_z \int_0^\pi \frac{\mu P_0^m \sin^3\theta}{2} \mathrm{d}\theta = \boldsymbol{e}_z \frac{2}{3} \mu P_0^m$$

5-23 当磁矩为 $25\mathrm{Am}^2$ 的磁针位于磁感应强度 $B = 2\mathrm{T}$ 的均匀磁场中，试求磁针承受的最大转矩。

解 当磁矩方向与磁感应强度方向垂直，即夹角 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，磁针承受的转矩最大，因此磁针承受的最大转矩为

$$T_{\max} = P^m B \sin\frac{\pi}{2} = 25 \times 2 \times 1 = 50\,\mathrm{Nm}$$

5-24 已知体积为 $1\mathrm{m}^3$ 的均匀磁化棒的磁矩为 $10\mathrm{Am}^2$，若棒内磁感应强度 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_z 0.02\mathrm{T}$，$\boldsymbol{e}_z$ 为轴线方向。试求棒内磁场强度。

解 由磁化强度定义，求得棒内磁化强度为

$$M = \frac{m}{V} = 10\,\mathrm{A/m}$$

那么，棒内磁场强度为

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} = \boldsymbol{e}_z \left(\frac{0.02}{4\pi \times 10^{-7}} - 10\right) = \boldsymbol{e}_z 1.59 \times 10^4\ \mathrm{A/m}$$

5-25 已知位于坐标原点的磁化球的半径为 a，若球内的

磁化强度 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{e}_z(Az^2+B)$，式中 A，B 均为常数，试求球内及球面上的磁化电流。

解 球内的磁化电流密度为

$$\boldsymbol{J}'=\nabla\times\boldsymbol{M}=\nabla\times\boldsymbol{e}_z\left(Az^2+B\right)=0$$

因此，球内的磁化电流为零。

球面上的表面磁化电流密度为

$$\boldsymbol{J}_s'=\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{e}_n=\left[A(a\cos\theta)^2+B\right](\boldsymbol{e}_r\cos\theta-\boldsymbol{e}_\theta\sin\theta)\times\boldsymbol{e}_r$$

$$=\boldsymbol{e}_\phi\left(Aa^2\cos^2\theta+B\right)\sin\theta$$

位于 θ 处宽度为 $a\mathrm{d}\theta$ 的环形电流为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{I}=\boldsymbol{J}_s'a\,\mathrm{d}\theta=\boldsymbol{e}_\phi a\left(Aa^2\cos^2\theta+B\right)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

因此，球面上的总磁化电流为

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{e}_\phi\int_0^\pi\left(Aa^3\cos^2\theta\sin\theta+Ba\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta=\boldsymbol{e}_\phi\left(\frac{2}{3}Aa^3+2Ba\right)$$