东南大学 2005-2006 学年《高等数学(上)》期末考试试卷

东 南 大 学 考 试 卷（ A 卷）

课程名称 高等数学 考试学期 05-06 得分

适用专业 考试形式 闭卷 考试时间长度 150 分钟

题号	一	二	三	四	五	六
得分						

一．填空题（本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 36 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin t^2\,\mathrm{d}t}{x^6}=$ ________;

2. 曲线 $y=\dfrac{x^3}{2(1+x)^2}$ 的斜渐近线方程是________;

3. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $y\ln y=\ln x$ 所确定的隐函数，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ ________;

4. 设 f 在区间 $[0,\pi]$ 上连续，且 $f(x)=\sin x+\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$，则 $f(x)=$ ________;

5. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x<0\\ \mathrm{e}^x, & x\ge 0\end{cases}$，则 $\int_1^3 f(x-2)\mathrm{d}x=$ ________;

6. $\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{\sin x}{x^2+\cos x}\mathrm{d}x=$ ________;

7. 曲线 $y=\ln x$ 相应于 $1\le x\le 3$ 的一段弧长可用积分________表示;

8. 已知 $y_1=\mathrm{e}^{-x}$ 与 $y_2=\mathrm{e}^{2x}$ 分别是微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的两个特解，则常数

$a=$ ________，常数 $b=$ ________;

9. $f''(x_0)=0$ 是曲线 $y=f(x)$ 以点 $(x_0,f(x_0))$ 为拐点的________条件。

二．计算下列各题（本题共 4 小题，每小题 7 分，满分 28 分）

1. 设 $f(x)=\int_0^x t\sin\sqrt{x^2-t^2}\,\mathrm{d}t$，求 $f'(x)$

2. $\int\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^{2x}+4}\mathrm{d}x$

3. $\int_0^{\pi} x\sqrt{\sin^2 x-\sin^4 x}\,\mathrm{d}x$

4. $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2x^2-2x+1}}$

三.（本题满分 9 分）设有抛物线$\Gamma: y=a-bx^2$ $(a>0,b>0)$，试确定常数a 、b 的值，使得**（1）**Γ 与直线$y=-x+1$相切；**（2）**Γ 与x 轴所围图形绕y 轴旋转所得旋转体的体积最大。

四.（本题共 2 小题，满分 14 分）

1.（本题满分 6 分）求微分方程$2x\left(ye^{x^2}-1\right)\mathrm{d}x+e^{x^2}\mathrm{d}y=0$ 的通解。

2.（本题满分 8 分）求微分方程$y''-2y'=x+e^{2x}$满足初始条件$y(0)=2, y'(0)=\frac{9}{4}$的特解。

五.（本题满分 7 分）

试证：（1）设$u>\mathrm{e}$，方程$x\ln x=u$ 在$x>\mathrm{e}$时存在唯一的实根$x(u)$；

（2）当$u\to+\infty$ 时，$\frac{1}{x(u)}$是无穷小量，且是与$\frac{\ln u}{u}$等价的无穷小量。

六.（本题满分 6 分）证明不等式：$\ln\sqrt{2n+1}<1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}<1+\ln\sqrt{2n-1}$，

其中n 是大于1的正整数。

04-05-2 高等数学(上)期末试卷参考答案

一. 填空题（本题共 9 小题，每小题 4 分，满分 36 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin t^2\mathrm{d}t}{x^6}=$ ____$\dfrac{1}{3}$____；

2. 曲线 $y=\dfrac{x^3}{2(1+x)^2}$ 的斜渐近线方程是____$y=\dfrac{1}{2}x-1$____；

3. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $y\ln y=\ln x$ 所确定的隐函数，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ ____$\dfrac{1}{x(1+\ln y)}$____；

4. 设 f 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $f(x)=\sin x+\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$，则 $f(x)=$ __$\sin x+\dfrac{2}{1-\pi}$__；

5. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x<0\\ \mathrm{e}^x, & x\geq 0\end{cases}$，则 $\int_1^3 f(x-2)\mathrm{d}x=$ ____$\mathrm{e}+\dfrac{1}{3}$____；

6. $\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{\sin x}{x^2+\cos x}\mathrm{d}x=$ __0__；

7. 曲线 $y=\ln x$ 相应于 $1\leq x\leq 3$ 的一段弧长可用积分__$\int_1^3\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}\mathrm{d}x$__表示；

8. 已知 $y_1=\mathrm{e}^{-x}$ 与 $y_2=\mathrm{e}^{2x}$ 分别是微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的两个特解，则常数 $a=$ ____-1，____，常数 $b=$ ____-2____；

9. $f''(x_0)=0$ 是 $y=f(x)$ 以点 $(x_0,f(x_0))$ 为拐点的_非充分非必要_条件。

二. 计算下列各题（本题共 4 小题，每小题 7 分，满分 28 分）

1. 设 $f(x)=\int_0^x t\sin\sqrt{x^2-t^2}\mathrm{d}t$，求 $f'(x)$

解 令 $x^2-t^2=u, f(x)=\dfrac{1}{2}\int_0^{x^2}\sin\sqrt{u}\mathrm{d}u$， $f'(x)=x\sin|x|$

2. $\int \frac{e^x-1}{e^{2x}+4}dx$

原式$=\int \frac{e^x-1}{e^{2x}+4}dx=\int \frac{e^x}{e^{2x}+4}dx-\int \frac{1}{e^{2x}+4}dx=\frac{1}{2}\arctan\frac{e^x}{2}-\int \frac{1}{e^x\left(e^{2x}+4\right)}de^x$

$=\frac{1}{2}\arctan\frac{e^x}{2}-\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{e^x}-\frac{e^x}{e^{2x}+4}\right)de^x=\frac{1}{2}\arctan\frac{e^x}{2}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}\ln\left(e^{2x}+4\right)+C$

3. $\int_0^{\pi} x\sqrt{\sin^2 x-\sin^4 x}\,dx$

解 $\int_0^{\pi} x\sqrt{\sin^2 x-\sin^4 x}\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}|\cos x|\sin x dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin x dx=\frac{\pi}{2}$

4. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{2x^2-2x+1}}$

解. 令 $x=\frac{1}{t}$，$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{2x^2-2x+1}}=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{t^2-2t+2}}$ **（3 分）** $=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1+(t-1)^2}}$

$=\ln\left(t-1+\sqrt{1+(t-1)^2}\right)\Big|_0^1=\ln(1+\sqrt{2})$

三.（本题满分 9 分） 设有抛物线 $\Gamma: y=a-bx^2\ (a>0,b>0)$，试确定常数 a、b 的值，使得 **(1)** Γ 与直线 $y=-x+1$ 相切；**(2)** Γ 与 x 轴所围图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积最大。

解 设 (x_0,y_0) 为切点，$y'(x_0)=-2bx_0=-1, x_0=\frac{1}{2b}$，$a-bx_0^2=-x_0+1$，$a+\frac{1}{4b}=1$，

$V(a)=2\pi\int_0^{\sqrt{\frac{a}{b}}}x(a-bx^2)dx=\frac{\pi a^2}{2b}=2\pi a^2(1-a)$

令 $V'(a)=2\pi a(2-3a)=0$，$a=\frac{2}{3}$，当 $0<a<\frac{2}{3}$ 时，$V'(a)>0$，当 $a>\frac{2}{3}$ 时，

$V'(a)<0$，$a=\frac{2}{3}$ 是唯一的极大值点，因而是最大值点，$b=\frac{3}{4}$。

四.（本题共 2 小题，满分 14 分）

1.（本题满分 6 分）求微分方程 $2x\left(ye^{x^2}-1\right)dx+e^{x^2}dy=0$ 的通解。

解 $y'+2xy=2xe^{-x^2}$，

$$y=e^{-\int 2xdx}\left(C+\int 2xe^{-x^2}e^{\int 2xdx}dx\right)=Ce^{-x^2}+x^2e^{-x^2}$$

2.（本题满分 8 分）求微分方程 $y''-2y'=x+e^{2x}$ 满足初始条件 $y(0)=2, y'(0)=\frac{9}{4}$ 的特解。

解 $\overline{y}=C_1+C_2e^{2x}$，

解 $y''-2y'=x$ 得一特解 $y_1^*=-\frac{x(x+1)}{4}$，

解 $y''-2y'=e^{2x}$ 得一特解 $y_2^*=\frac{1}{2}xe^{2x}$，

$$y=C_1+C_2e^{2x}-\frac{x(x+1)}{4}+\frac{1}{2}xe^{2x}$$

由 $y(0)=2, y'(0)=\frac{9}{4}$ 得 $C_1+C_2=2, 2C_2-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{9}{4}, C_1=C_2=1$，

$$y=\left(1+\frac{1}{2}x\right)e^{2x}-\frac{x(x+1)}{4}+1$$

五.（本题满分 7 分）

试证：（1）设 $u>e$，方程 $x\ln x=u$ 在 $x>e$ 时存在唯一的实根 $x(u)$；

（2）当 $u\to+\infty$ 时，$\frac{1}{x(u)}$ 是无穷小量，且是与 $\frac{\ln u}{u}$ 等价的无穷小量。

解（1） 设 $f(x)=x\ln x-u$，$f(e)=e-u<0$，$f(u)=u\ln u-u>0$

$f'(x)=1+\ln x>0, f(x)$ 严格单增，所以方程 $x\ln x=u$ 存在唯一实根 $x(u)$.

（2） $e<x(u)<u, 0<\frac{1}{x(u)}=\frac{\ln x(u)}{u}<\frac{\ln u}{u}\to 0, u\to+\infty$，$\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{1}{x(u)}=0$.

$x(u)>\frac{u}{\ln u}$，$\frac{\ln u-\ln\ln u}{\ln u}<\frac{1}{x(u)}\cdot\frac{u}{\ln u}=\frac{\ln x(u)}{\ln u}<\frac{\ln u}{\ln u}=1$，$\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{\ln u-\ln\ln u}{\ln u}=1$

$\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{1}{x(u)}\cdot\frac{u}{\ln u}=1$

六.（本题满分 6 分） 证明不等式：$\ln\sqrt{2n+1}<1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}<1+\ln\sqrt{2n-1}$，其中 n 是大于1的正整数。

解　设 k 为正整数，$k<x\le k+1$，$\frac{1}{2k+1}\le\frac{1}{2x-1}<\frac{1}{2k-1}$，

三边积分得
$$\frac{1}{2k+1}<\int_k^{k+1}\frac{1}{2x-1}\mathrm{d}x<\frac{1}{2k-1}，$$

左边关于 $k=1,2,\cdots,n-1$ 相加得：

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}<\int_1^n\frac{1}{2x-1}\mathrm{d}x=\ln\sqrt{2n-1}，$$

右边关于 $k=1,2,\cdots,n$ 相加得：

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}>\int_1^{n+1}\frac{1}{2x-1}\mathrm{d}x=\ln\sqrt{2n+1}，$$

所以

$$\ln\sqrt{2n+1}<1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}<1+\ln\sqrt{2n-1}$$