东南大学 2010-2011 学年第二学期《高等数学(上)》期中考试试卷

课程名称 高等数学 A、B（期中） 考试学期 10-11-2 得分 ______

适用专业 工科类 考试形式 闭卷 考试时间长度 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

一.填空题（每个空格 4 分，本题满分 24 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=$ ________；

2. 已知 $f(x)=\begin{cases}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}, & x>0\\ a\mathrm{e}^{x}, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$ ________；

3. 设 $f(x)=\arctan \mathrm{e}^{x}$,则微分 $\mathrm{d}f(x)=$ ________；

4. 设 $f(x)=x^{2010}\cos x$，则 $f^{(2010)}(0)=$ ________；

5. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $y=1-x\mathrm{e}^{2y}$ 所确定的隐函数，则 $y'(0)=$ ________；

6. 曲线 $x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}=16$ 在点 $(4,4)$ 处的切线方程为________.

二.单项选择题（每小题 4 分，本题满分 12 分）

7. 当 $x\to 0$ 时，$x-\sin ax$ 与 $x^{2}\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则 [ ]

(A) $a=1, b=-\dfrac{1}{6}$ (B) $a=1, b=\dfrac{1}{6}$ (C) $a=-1, b=-\dfrac{1}{6}$ (D) $a=-1, b=\dfrac{1}{6}$

8. 函数 $f(x)=\dfrac{\frac{\pi x}{2}\arctan\frac{1}{x-1}}{\sin\frac{\pi x}{2}}$ 的间断点[ ]

（A）都是可去间断点 （B）都是跳跃间断点

（C）都是无穷间断点 （D）分别是可去间断点、跳跃间断点与无穷间断点

9. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的邻域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 可导的一个充分条件是 [ ]

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty} h\left(f\left(a+\frac{1}{h}\right)-f(a)\right)$存在　　　(B) $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$存在

(C) $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$存在　　　(D) $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$存在

三.计算题（每小题 8 分，本题满分 32 分）

10. 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^x$

11.求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n}\right)$

12. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t-2\arctan t\\ y=\dfrac{t^3}{3}-t\end{cases}$ 所确定，试求 $\frac{dy}{dx}$、$\frac{d^2y}{dx^2}$.

13. 写出函数 $f(x)=x\ln x$ 在 $x=1$ 处的带有Lagrange 余项的3 阶Taylor 公式.

四(14).（13 分）设 a 和 b 都是实常数,$b<0$，定义 $f(x)=\begin{cases}x^a\sin\left(x^b\right), & x>0\\ 0, & x\le0\end{cases}$，

回答下列问题，并说明理由。

（1）当 a 、b 满足什么条件时，$f(x)$ 不是连续函数？

（2）当 a 、b 满足什么条件时，$f(x)$ 连续，但不可导？

（3）当 a 、b 满足什么条件时，$f(x)$ 可导，但 $f'(x)$ 在区间$[-1,1]$上无界？

（4）当 a 、b 满足什么条件时，$f'(x)$ 在区间$[-1,1]$上有界，但 $f'(x)$ 不连续？

（5）当 a 、b 满足什么条件时，$f'(x)$ 连续？

五(15).（8 分）对不同的实数 a ，讨论方程 $x\ln x = a$ 有几个实根.

六(16). (6 分)设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上可导，且 $f'(x)$ 在区间 (a,b) 上单调增加，试证明：

若 $x_0 \in (a,b)$，对任意 $x \in (a,b)$，有 $f(x) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

七(17). (5 分) 设 $f \in C[a,b]$，且 f 在 (a,b) 内有二阶导数，试证存在 $c \in (a,b)$，使

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{(b-a)^2}{4} f''(c).$$

东南大学 2010~2011 高等数学 AB 期中试卷参考答案

一、填空

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=$ ____1____；

2. 设 $f(x)=\begin{cases}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}, & x>0\\ a\mathrm{e}^{x}, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，

   则 $a=$ ____e^{6}____；

3. 设 $f(x)=\arctan \mathrm{e}^{x}$，则微分 $\mathrm{d}f(x)=$ ____$\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$____；

4. 设 $f(x)=x^{2010}\cos x$，则 $f^{(2010)}(0)=$ ____2010!____；

5. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $y=1-x\mathrm{e}^{2y}$ 所确定的隐函数，

   则 $y'(0)=$ ____$-\mathrm{e}^{2}$____；

6. 曲线 $x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}=16$ 在点 $(4,4)$ 处的的切线方程为

   ____$x+y=8$____.

二、选择题　　7. A　　8. D　　9. D

三、计算

10. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\left(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^{x}$

解 原式 $=\mathrm{e}\lim\limits_{x\to 0^{+}}\left(1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right)^{x}=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^{+}}x\ln\left(1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right)}$

11. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n^2+1}+\dfrac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n+n}{n^2+n}\right)$

解 $\dfrac{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n}\le\dfrac{n+1}{n^2+1}+\dfrac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n+n}{n^2+n}\le\dfrac{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}$，

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\dfrac{3}{2}$，

故由夹逼定理得知，原式 $=\dfrac{3}{2}$.

12. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t-2\arctan t\\ y=\dfrac{t^3}{3}-t\end{cases}$

所确定，试求 $\dfrac{dy}{dx}$、$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解 $\dfrac{dy}{dx}=1+t^2$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2t}{1-\frac{2}{1+t^2}}=\frac{2t(1+t^2)}{t^2-1}.$$

13. 写出函数 $f(x)=x\ln x$ 在 $x=1$ 处的

带有 Lagrange 余项的 3 阶 Taylor 公式.

解 $f(1)=0$，$f'(1)=1$，$f''(1)=1$，

$f'''(1)=-1$，$f^{(4)}(x)=\dfrac{2}{x^3}$，

所以 $x\ln x=x-1+\dfrac{1}{2}(x-1)^2-\dfrac{1}{6}(x-1)^3$

$$+\frac{1}{12(1+\theta(x-1))^3}(x-1)^4,\quad 0<\theta<1$$

四(14)(13 分) 设 a 和 b 都是实常数，$b<0$，定义

$$f(x)=\begin{cases} x^a\sin(x^b), & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases},$$

1) a，b 满足什么条件时，$f(x)$ 不是连续函数？

解 $f(x)$ 不连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续

即 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\ne f(0)$.

注意到 $f(0-0)=f(0)=0$，所以只需 $f(0+0)\ne 0$

又 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin(x^b)$ 既不存在也不为∞，故 $a\le 0$.

2) 当 a，b 满足什么条件时，$f(x)$ 连续，但不可导？

解 $a>0$ 时 $f(x)$ 连续. $f(x)$ 不可导 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导

注意到 $f'_-(0)=0$，所以只需

$$0\ne f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^a\sin x^b}{x}=\lim_{x\to 0^+}x^{a-1}\sin x^b,$$

又 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin(x^b)$ 既不存在也不为∞，因此 $a-1\le 0$.

故 $0<a\le 1$.

3) a，b 满足什么条件时，$f(x)$ 可导，

但 $f'(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上无界？

解 $a>1$ 时 $f(x)$ 可导.

注意到 $-1\le x\le 0$ 时 $f'(x)=0$，有界；

$0<x\le 1$ 时 $f'(x)=ax^{a-1}\sin(x^b)+ax^{a+b-1}\cos(x^b)$

$a>1$ 时 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{a-1}\sin x^b=0$，而 $\cos(x^b)$ 有界，

因此要使 $f'(x)$ 在 $[-1,1]$ 上无界，只需

$\lim\limits_{x\to 0^+}x^{a+b-1}=\infty \Leftrightarrow a+b-1<0$，即 $1<a<1-b$.

4) a，b 满足什么条件时，$f'(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有界，

但 $f'(x)$ 不连续？

解 $a\ge 1-b$ 时 $f'(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有界.

$$f'(x)=\begin{cases} ax^{a-1}\sin(x^b)+bx^{a+b-1}\cos(x^b), & 0<x\le 1 \\ 0, & -1\le x\le 0 \end{cases}$$

在 $x\ne 0$ 时连续，且 $f'(0-0)=f'(0)=0$，

所以要使 $f'(x)$ 不连续，只需 $f'(0+0)\ne 0$

$a>1-b$时， $\lim\limits_{x\to0^+} x^{a-1}\sin x^b=0$， $\lim\limits_{x\to0^+} x^{a+b-1}\cos x^b=0$，

此时 $f'(0+0)=0$. 说明 $f'(x)$ 连续.

$a=1-b$时，$\lim\limits_{x\to0^+} x^{a-1}\sin x^b=0$，$\lim\limits_{x\to0^+} x^{a+b-1}\cos x^b$ 不存在，

故 $a=1-b$.

5) a, b 满足什么条件时，$f'(x)$ 连续?

解 $f'(x)=\begin{cases} ax^{a-1}\sin(x^b)+bx^{a+b-1}\cos(x^b), & 0<x\le1 \\ 0, & -\le x\le 0 \end{cases}$

$f'(x)$ 连续 $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续,

由于 $f'(0-0)=f'(0)=0$，因此只需 $f'(0+0)=0$，

即 $\lim\limits_{x\to0^+} ax^{a-1}\sin(x^b)+bx^{a+b-1}\cos(x^b)=0$，

从而 $a>1-b$.

五(15) (8 分) 对不同的实数 a，

讨论方程 $x\ln x=a$ 有几个实根.

可以构造 $f(x)=x\ln x-a$ 或 $g(x)=\ln x-\dfrac{a}{x}$ 等

解 设 $f(x)=\ln x-\dfrac{a}{x}$， $x\in(0,+\infty)$，

则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{x^2}$， $x\in(0,+\infty)$.

$a\ge0$时， $f'(x)>0$， $f(x)$严格单增.

$a=0$时， $f(1)=0$， $f(x)$有唯一零点，

即方程 $x\ln x=0$ 有唯一实根;

$a>0$时，$f(e^{-1})=-1-ae<0$，$f(e^a)=a(1-e^{-a})>0$，

$f(x)$有唯一零点，即方程 $x\ln x=a$ 有唯一实根;

$a<0$时，令 $f'(x)=\dfrac{x+a}{x^2}=0$，得

$f(x)$的唯一的极小值点（最小值点）$x=-a$.

若 $f_{\min}=f(-a)=\ln(-a)+1>0$，即 $a<-e^{-1}$ 时,

方程 $x\ln x=a$ 无实根;

$a=-e^{-1}$时， $f_{\min}=f(e^{-1})=0$， $f(x)$有唯一零点,

即方程 $x\ln x=-e^{-1}$ 有唯一实根;

$-e^{-1}<a<0$时，$f_{\min}<0$，$f(e^{a})=a(1-e^{-a})>0$，

$f(e^{-a})=-a(1+e^{a})>0$.

$0<x<-a$时，$f(x)$严格单减，

$-a<x<+\infty$时，$f(x)$严格单增，

因此$f(x)$有且仅有两个零点，

即方程$x\ln x=a$有且仅有实根 .

六(16) (6 分) 设函数$f(x)$在区间(a,b)上可导，$f'(x)$在区间(a,b)上单增，$x_0\in(a,b)$. 证明对任意$x\in(a,b)$，有$f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

证明 由$f(x)$在(a,b)上可导及 Lagrange 中值定理知，

存在ξ（介于x与x_0间），使得

$f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=(f'(\xi)-f'(x_0))(x-x_0)$.

又$f'(x)$在(a,b)上单增，故

$f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)\ge 0$. 证毕.

还可以运用凹凸函数的性质来证明

七(17)(5 分) 设$f\in C[a,b]$，f在(a,b)内有二阶导数. 证明：存在$c\in(a,b)$，使

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(c)$$

证明

$$\text{左边}=\left[f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\right)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]-\left[f\left(a+\frac{b-a}{2}\right)-f(a)\right]$$

令$\varphi(x)=f\left(x+\dfrac{b-a}{2}\right)-f(x)$，则

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(c)$$

$$\text{左边}=\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)-\varphi(a)=\varphi'(\xi)\frac{b-a}{2}\quad \xi\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$$

$$=\left[f'\left(\xi+\frac{b-a}{2}\right)-f'(\xi)\right]\frac{b-a}{2}$$

$$=f''\left(\xi+\theta\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\quad \theta\in(0,1$$

$$=\frac{(b-a)^2}{4}f''(c)\qquad c=\xi+\theta\frac{b-a}{2}\in(a,b)$$

还可以用泰勒公式和达布定理来证明