自觉遵守考场纪律 如考试作弊 此答卷无效

姓名________ 学号________

线 封 密

东 南 大 学 考 试 卷 (A)

课程名称 __数学物理方法__ 考试学期 __18-19-3__ 得分________

适用专业 __面上__ 考试形式 __闭卷__ 考试时间长度 __120分钟__

题目	一	二	三	四	五
得分					

注意：本份试卷可能会用到以下公式：

1、$\mathscr{L}[\sin\alpha t](p)=\dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$，$\mathscr{L}[\cos\alpha t](p)=\dfrac{p}{p^2+\alpha^2}$，$\mathscr{L}[t^n\mathrm{e}^{at}](p)=\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$；

2、$\mathscr{L}[f(t-t_0)H(t-t_0)](p)=\tilde{f}(p)\mathrm{e}^{-t_0p},\ t_0\ge 0$；

3、第二Green公式：$\displaystyle\int_\Omega[v\Delta u-u\Delta v]\mathrm{d}x=\oint_{\partial\Omega}\left[v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right]\mathrm{d}S$

4、$(x^\nu J_\nu(x))'=x^\nu J_{\nu-1}(x)$，$(x^{-\nu}J_\nu(x))'=-x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$.

一 填空题 ($5\times 6'=30'$)

1. (选择题)二阶偏微分方程$3u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+u_x+4u=f(x,y)$ 是什么类型的方程？答：________.(A. 双曲型方程 B. 椭圆型方程 C. 抛物型方程 D. 都不是)

2. 设$\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$是$L^2[0,l]$上完备的标准正交函数系，$f\in L^2[0,l]$, 则函数f的Fourier系数可表示为________________，函数f的Fourier级数可表示为________________.

3. 用特征函数展开法求解初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=h(x,t), & 0<x<l,t>0,\\ u_x(0,t)=0,\ u_x(l,t)=0, & t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x), & 0\le x\le l \end{cases}$$

时，需要用到的特征函数系是________________________.

4. 已知二维波动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy})=0,(x,y)\in\mathbb{R}^2,t>0,\\ u|_{t=0}=\varphi(x,y),\ u_t|_{t=0}=\psi(x,y),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \end{cases}$$

的求解公式为

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\Big[\frac{\partial}{\partial t}\iint_D\frac{\varphi(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}+\iint_D\frac{\psi(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\Big],$$

其中区域$D=\{(\xi,\eta)\mid(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\le a^2t^2\}$. 根据上述公式，此初值问题的解在点$(x_0,y_0,t_0)$的依赖区域是________________________.

5. 设$u(r,\theta)$是圆域$D = \{(r,\theta) \mid r < 1, 0 \le \theta \le 2\pi\}$上的调和函数,且$u(1,\theta) = \sin^2\theta$,则$u$在圆域$D$上的最大值和最小值分别为______________,u在圆心$r=0$处的值为______________.

二 简单计算 $(4 \times 8' = 32')$

1. 对非齐次边界条件化为齐次边界条件的初边值问题：设有初边值问题θ

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = x, \Delta & 0 < x < l, t > 0, \\ u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 1, & t \ge 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,t) = 0, & 0 < x < l, \end{cases}$$

求函数$w(x)$, 使得利用变换$u(x,t) = v(x,t) + w(x)$把未知函数v化为满足一个齐次方程及齐次边界条件的初边值问题，并写出v所满足这个齐次方程齐次边界条件的初边值问题.

2. 用Laplace变换法求解方程

$$y'(t) + \int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \sin t,\ y(0) = 0.$$

3. 用特征线法求解问题

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{xy} - 6u_{yy} = 0, & x \in R, y > 0, \\ u|_{y=0} = \sin x,\ u_y|_{y=0} = \cos x, & x \in R. \end{cases}$$

4. 写出求解下列位势方程边值问题的Green函数$G(x,y)$所满足的边值问题，并用Green函数方法推导这个位势方程边值问题的求解公式

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), \quad x \in D, \\ u(x) = h_1(x),\, x \in \Gamma_1;\ \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = h_2(x),\, x \in \Gamma_2, \end{cases}$$

其中D是光滑区域，Γ_1, Γ_2是区域D的边界，且$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset, \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial D.$

三 (13′) 用分离变量推导如下带对流项的Laplace方程边值问题的求解公式：

$$\begin{cases} -(u_{xx}+u_{yy})+2ku_y=0, & 0<x<a, 0<y<b, \\ u(0,y)=u(a,y)=0, & 0\le y\le b, \\ u(x,0)=0, u(x,b)=f(x), & 0\le x\le a, \end{cases}$$

其中k是常数.

四（$12'$） (1) 设$\delta(x)$是Dirac函数，求Fourier变换$F[\delta(x)]$;

(2) 证明Fourier变换公式：$F[\cos ax](\omega)=\pi[\delta(\omega+a)+\delta(\omega-a)]$;

(3) 用Fourier变换法求解初值问题

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=0, & x\in\mathbb{R},\ t>0, \\ u(x,0)=\cos x, & x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

线

封

密

五（13′）用分离变量法推导下列圆柱形区域上热传导方程初边值问题的求解公式

$$
\begin{cases}
u_t - a^2(u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + u_{zz}) = 0, & 0 < r < b,\ 0 < z < h, t > 0, \\
|u(0,z,t)| < \infty,\ u(b,z,t) = 0, & 0 \le z \le h, t > 0, \\
u(r,0,t) = u(r,h,t) = 0, & 0 \le r \le b, t > 0, \\
u(r,z,0) = g(r)\sin\frac{\pi z}{h}, & 0 \le r \le b, 0 \le z \le h.
\end{cases}
$$

注：$N_{mn}^2 = \displaystyle\int_0^b xJ_m^2(\alpha_{mn}x/b)\mathrm{d}x = \frac{b^2}{2}J_{m+1}^2(\alpha_{mn})$, 其中$\alpha_{mn}$是 $J_m(x)$的第n个正零点.

线

封

密