东 南 大 学 考 试 卷

课程名称 工科数分（上）期中　考试学期 16-17-2　得分 ______

适用专业 选学工科数分的各类专业　考试形式 闭 卷　考试时间长度 120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六
得分						
评阅人						

自觉遵守考场纪律　如考试作弊　此答卷无效

学号______ 姓名______

密　封　线

一、 填空题（本题共9小题，每小题4分，满分36分）

1. 设 $f(x)=(x-1)^{10}\sin x$，则 $f^{(10)}(1)=$ ______;

2. 设$f(x)=\begin{cases}(1+2x^2)^{\frac{1}{\sin x^2}} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ ______;

3. 设 $y=x^{\cos(1+2x)}$，则 $\mathrm{d}y=$ ________;

4. 曲线 $y=\dfrac{x^3}{1+x+x^2}$ 的渐近线方程为________;

5. 设 $f'(0)=1, f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\tan x^2}=$ ________;

6. 设 $\lim\limits_{x\to-\infty}(5x-\sqrt{ax^2+bx+1})=2$，则 $a=$ ________, $b=$ ________;

7. 设$f(x)=\begin{cases}x^2\arctan\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$,则 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f'(x)}{x}=$ ________;

8. 设 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$，有可去间断点 $x=1$, 则

$a=$ ________, $b=$ ________;

9. 若 $x>0$ ，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}=$____________.

二、 计算下列各题（本题共5小题，每小题7分，满分35分）

1. 设 $y = y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases} x = 2 + t^2 \\ y = \sin 2t \end{cases}$ 所确定的函数，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

2. 设 $y = y(x)$ 由方程 $y = f(x - y)$ 所确定，其中 f 具有二阶导数，且其一阶导数不等于 -1，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

3. 设 $f(x)=\ln(1-x^2)$，求 $f^{(n)}(x)$.

4. 已知 $f(x)=\begin{cases} \ln x, & x\geq 1, \\ 2(x-1), & x<1, \end{cases}$，设 $g(x)=f(f(x))$，求 $g(x)$ 及 $g'(x)$.

5. 已知 $f(x)=\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$，记 $a=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$，

（1）求 a 的值；（2）若当 $x\to 0$ 时，$f(x)-a$ 是 x^k 的同阶无穷小，求 k.

三、（本题满分7分） 用定义证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{2x+1}=\dfrac{1}{3}$.

四、（本题满分8分） 已知数列 $\{a_n\}$ 满足：

$$a_1=1, a_2=\frac{1}{2}, a_n=\frac{1+a_{n-2}}{2+a_{n-2}}\ \ (n\geq 3)$$

判断 $\{a_n\}$ 是否收敛？若收敛求其极限.

五、（本题满分7分） 证明：函数 $f(x)=x+\cos 2x$ 在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

六、 （本题满分7分） 设函数 $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上连续，在 $(1,3)$ 内可导，且 $f(1)=1, f(2)=5, f(3)=2$，证明：至少存在一点 $\xi \in (1,3)$ 使得 $f'(\xi)=2$.