东 南 大 学 考 试 卷（A 卷）

课程名称 高等数学A期末 考试学期 07-08-3 得分 ________

适用专业 选学A的各专业 考试形式 闭卷 考试时间长度 150分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

一．填空题(每题4分，共36分)

1． 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^n}{n3^n}$ 的收敛域是________________。

2． 将三次积分：$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}f(x^2+y^2+z^2)dz$ （其中 f 连续）化成球面坐标系下的三次积分________________。

3． 散度 $\operatorname{div}\left(x^3\vec{i}+y\cos(y-2z)\vec{j}+\vec{k}\right)\Big|_{(2,0,\pi)}=$ ____________。

4． 曲线 $C:\begin{cases}x+y+z=4\\ z=x^2+y^2\end{cases}$ 在点 $(1,1,2)$ 处的切线的方向向量为____________。

5.将函数 $f(x)=\begin{cases}2 & -\pi<x\le 0\\ x & 0\le x<\pi\end{cases}$ 以 2π 为周期，$S(x)$ 为 $f(x)$ 的 $Fourier$ 级数的和函数，6.

则 $S(4\pi)=$ ________

设 C 是正向圆周 $|z|=2$ （逆时针方向），则积分 $\oint_C\dfrac{1}{(z-i)(z+3)}dz=$ ______。

7. 留数 $Res[\dfrac{\ln(1-z)\sin z}{z(1-\cos z)},0]=$ ___________。

8. 已知第二型曲线积分 $\int_L(x^4+4xy^n)dx+(6x^{n-1}y^2-5y^4)dy$ 与路径无关，则 $n=$ ___________。

9. 平面 $5x+4y+3z=1$ 被椭圆柱面 $4x^2+9y^2=1$ 所截得的有限部分的面积为__。

二．计算下列各题(每题7分，共28分)

10． 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n+(-3)^n}{n}x^n$ 的和函数，并指明收敛域。

11． 将函数 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x<1\\ 2-x, & 1\le x\le 2\end{cases}$ 展成余弦级数。

12. 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\beta^{n}$的敛散性，其中$\alpha$ 为任意实数，β 为正实数。

13. 判定级数$\sum_{n=3}^{\infty}\sin(n\pi+\frac{1}{\ln n})$是否绝对收敛、条件收敛或发散？并说明理由。

三.（7 分）

14. 将函数$f(z)=\frac{1}{z^{2}+1}$在圆环域$1<\left|z-2i\right|<3$内展开为 Laurent 级数。

四.（8 分）15. 计算$I=\int_{C}\sqrt{x^{2}+y^{2}}dx+y\left(xy+\ln(x+\sqrt{x^{2}+y^{2}})\right)dy$ ，其中C 是由点$B(1+\pi,0)$沿曲线$y=\sin(x-1)$到点$A(1,0)$的一段弧。

五.（8 分）

16. 计算$\iint_{\Sigma} y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x-(z+1)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$ 为圆柱面$x^{2}+y^{2}=4$被平面$x+z=2$和$z=0$所截部分的外侧。

六.（7 分）

17. 设$a_{1}=1,a_{2}=2$,当$n\geq 3$时，有$a_{n}=a_{n-1}+a_{n-2}$，

（1）证明不等式$0<\frac{3}{2}a_{n-1}<a_{n}<2a_{n-1},(n\geq 4)$;

（2）证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n}}$收敛，且满足不等式$2\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n}}\leq\frac{5}{2}$

七.（6 分）

18. 设C 是圆周$x^{2}+y^{2}=x+y$，取逆时针方向，连续函数f 恒为正，证明：

$$\oint_{C} xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx\geq\pi$$

07-08-3 高数 A 下期末试卷参考答案

一．1、$\underline{[0,6)}$　2、$\underline{\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 f(r^2)r^2\sin\theta dr}$　3、$\underline{13}$　4、$\underline{\{\mp1,\pm1,0\}}$　5、$\underline{1}$

6、$\underline{\frac{\pi}{5}(1+3i)}$　7、$\underline{-2}$　8、$\underline{3}$　9、$\underline{\frac{5\sqrt{2}\pi}{18}}$

二．10、$S(x)=-\ln(1-2x-15x^2)\quad(-\frac{1}{5}\le x<\frac{1}{5})$。

11、$b_n=0\quad(n=1,2,3,\cdots)$，$a_0=-1$，

$$a_n=\frac{4}{(n\pi)^2}(2\cos\frac{n\pi}{2}-1-\cos n\pi)=\begin{cases}-\frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}, & n=4k-2,k=1,2,\cdots\\ 0, & n\ne 4k-2,k=1,2,\cdots\end{cases},$$

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)\pi x\text{，}0\le x\le 2\text{。}$$

12、$\beta<1$ 时，收敛；$\beta>1$ 时，发散；$\beta=1$ 时，当$\alpha<-1$ 时收敛，$\alpha\ge-1$ 时发散。

13、条件收敛。（提示：$\sin(n\pi+\frac{1}{\ln n})=(-1)^n\sin\frac{1}{\ln n}$）

三．14、$f(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^{n-1}(z-2i)^{-n-1}+\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(3i)^{-n}(z-2i)^n$。

四．15、$\frac{4}{9}-\pi-\frac{1}{2}\pi^2$。

五．16、8π。

六．17、（略）

七．18、提示：用格林公式，再利用轮换对称性。