东南大学 2005-2006 学年第二学期《高等数学(上)》期中考试试卷

课程名称	高等数学 A、B 期中	考试学期	05-06-2	得分	
适用专业	工科类	考试形式	闭卷	考试时间长度	120 分钟

一. 填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{2x}{x^2+1} =$ ____________；

2. 当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 与 $\beta(x)=kx^2$ 是等价无穷小，则 $k=$ ___；

3. 设 $y=(1+\sin x)^x$，则 $\mathrm{d}y\big|_{x=\pi}=$ ____________；

4. 函数 $f(x)=xe^x$ 在 $x=1$ 处带有 Peano 余项的二阶 Taylor 公式为________________；

5. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2ae^x+\sin x, & x<0\\ 2b(x-1)^3+9\arctan x, & x\ge 0\end{cases}$ 可导，则 $a=$ ____，$b=$ _____。

二. 单项选择题（本题共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

6. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x-1}{x}}}$，则 [　　]

（A）$x=0, x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点

（B）$x=0, x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点

（C）$x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

（D）$x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

7. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^2+2t\\ y=\ln(1+t)\end{cases}$ 确定，则曲线 $y=y(x)$ 在 $x=3$ 处的切线与 x 轴交点的横坐标是 [　　]

（A）$\frac{1}{8}\ln 2+3$　（B）$-\frac{1}{8}\ln 2+3$　（C）$-8\ln 2+3$　（D）$8\ln 2+3$

8. 以下四个命题中，正确的是 [　　]

（A）若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

（B）若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

（C）若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

（D）若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

9． 当 a 取下列哪个数值时，函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-a$ 恰有两个不同的零点[　　]

（A）2　　　　（B）4　　　　（C）6　　　　（D）8

三．计算题（本题共 5 小题，每小题 7 分，满分 35 分）

10． $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)$

11。 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+2^x\right)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)\right]$

12． $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$　　**13。** 设 $f(x)=\dfrac{1}{x(1-2x)}$，求 $f^{(n)}(x)$

14． 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin(x^2+y^2)+e^x-xy^2=0$ 所确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

四．（本题共 4 道题，满分 29 分）

15.（本题满分 6 分） 如果以每秒 $50cm^3$ 的匀速给一个气球充气，假设气球内气压保持常值，且形状始终为球形，问当气球的半径为 $5cm$ 时，半径增加的速率是多少？

16.（本题满分 7 分）证明不等式：$\mathrm{e}^{x} \geq 1 + x\mathrm{e}^{\frac{x-1}{2}} \quad (x \geq 0)$

17.（本题满分 8 分）在抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 上求一点 $P\left(a, \frac{1}{4}a^2\right)$，$(a > 0)$，使弦 PQ 的长度最短，并求最短长度，其中 Q 是过点 P 的法线与抛物线的另一个交点。

18.（本题满分 8 分）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a) = b, f(b) = a$，证明：

（1） 至少存在一点 $c \in (a,b)$，使得 $f(c) = c$；

(2) 至少存在互异的两点 $\xi, \eta \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) \cdot f'(\eta) = 1$

05-06-2 高等数学（A，B）期中试卷参考答案

一．填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1． 2 **2。** $\dfrac{3}{4}$ **3。** $-\pi\,\mathrm{d}x$ **4。** $\mathrm{e}+2\mathrm{e}(x-1)+\dfrac{3\mathrm{e}}{2}(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right)$ **5。** $1,-1$

二．单项选择题（本题共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

6．C 7。C 8。C 9。B

三．计算题（本题共 5 小题，每小题 7 分，满分 35 分）

10． $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-\mathrm{e}^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2-1+\mathrm{e}^{-x}}{x\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\mathrm{e}^{-x}-1+x}{x^2}=1+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{-x}-1+x}{x^2}$

$=1+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}=\dfrac{3}{2}$

11． $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+2^x\right)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x\ln 2+\ln\left(1+2^{-x}\right)\right)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)\right]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\dfrac{3}{x}\cdot\ln 2+\dfrac{3}{x\cdot 2^x}\right)=3\ln$

12． $\dfrac{n}{n+\sqrt{n}}\le\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}\le 1$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+\sqrt{n}}=$

由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}\right)=1$

13． $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{1-2x}$ **（2 分）** $f^{(n)}(x)=(-1)^n\dfrac{n!}{x^{n+1}}+\dfrac{2^{n+1}\cdot n!}{(1-2x)^{n+1}}$

14． $\left((2x+2yy')\cos\left(x^2+y^2\right)+\mathrm{e}^x-y^2-2xyy'=0\right.$ $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2x\cos\left(x^2+y^2\right)+\mathrm{e}^x-y^2}{2y\left(x-\cos\left(x^2+y^2\right)\right)}$

四．（本题共 4 道题，满分 29 分）

15．（本题满分 6 分） $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$， $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\cdot\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=4\pi^2\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,50=100\pi\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$， $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2\pi}$

16．（本题满分 7 分）

设 $F(x)=\mathrm{e}^x-1-x\mathrm{e}^{\frac{x-1}{2}}$

$F'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{\frac{x-1}{2}}-\dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{\frac{x-1}{2}}=\mathrm{e}^{\frac{x-1}{2}}\left(\mathrm{e}^{\frac{x+1}{2}}-1-\dfrac{x}{2}\right)=\mathrm{e}^{\frac{x-1}{2}}\phi(x)$，其中

$\phi(x)=e^{\frac{x+1}{2}}-1-\frac{x}{2}$， $\phi(0)=e^{\frac{1}{2}}-1>0$， $\phi'(x)=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x+1}{2}}-1\right)>0\ (x\geq 0)$

所以当$x\geq 0$时，$\phi(x)$单增，又因$\phi(0)>0$，所以$\phi(x)\geq 0$，从而$F'(x)\geq 0$，所以$F(x)$单增，又因$F(0)=0$，故当$x\geq 0$时，$F(x)\geq F(0)=0$，所要证不等式成立。

17.（本题满分 8 分）

法线方程$y=-\frac{a}{2}x+2+\frac{a^2}{4}$，点$Q$的坐标$\left(-\frac{8+a^2}{a},\frac{(8+a^2)^2}{4a^2}\right)$ **（2 分）**

$$f(a)=d^2=\left(\frac{8+a^2}{a}+a\right)^2+\frac{1}{16}\left(\frac{(8+a^2)^2}{a^2}-a^2\right)^2=\frac{4(4+a^2)^3}{a^4}$$

$f'(a)=\frac{8(4+a^2)^2(a^2-8)}{a^5}=0$，得唯一驻点$a=2\sqrt{2}$，当$0<a<2\sqrt{2}$时，$f'(a)<0$，

当$a>2\sqrt{2}$时，$f'(a)>0$，$a=2\sqrt{2}$是$f(a)$的唯一极小值点，因而

是最小值点。 $P(2\sqrt{2},2)$，$d_{\min}=6\sqrt{3}$

18.（本题满分 8 分） （1）令 $F(x)=f(x)-x$

$F(a)\cdot F(b)=(f(a)-a)\cdot(f(b)-b)=-(b-a)^2<0$，$F(x)\in C[a,b]$，所以

$\exists c\in(a,b),\ni F(c)=0$,即$f(c)=c$