

25. Да се намери каноничното уравнение на хипербола с оси върху координатните оси, ако дадената права е допирателна към хиперболата в дадената точка.
- а) $9x - 16y - 34 = 0$, $(18, 8)$;
 б) $5x - 9y - 19 = 0$, $(20, 9)$;
 в) $x - 2y - 3 = 0$, $(15, 6)$.
26. Да се намери каноничното уравнение на хипербола с оси върху координатните оси, към която дадените прави са допирателни.
- а) $4x + y - 21 = 0$, $2x - 3y - 7 = 0$;
 б) $x - y + 2 = 0$, $3x - 5y + 2 = 0$.
27. Проверете коя права към коя хипербола е допирателна и намерете допирните точки.
- а) $2x - 3y - 11 = 0$, $2x + 3y + 10 = 0$, $\frac{x^2}{70} - \frac{y^2}{20} = 1$, $\frac{x^2}{55} - \frac{y^2}{11} = 1$;
 б) $x + 2y + 6 = 0$, $x + y + 6 = 0$, $\frac{x^2}{60} - \frac{y^2}{24} = 1$, $\frac{x^2}{84} - \frac{y^2}{12} = 1$.

4) Допирателна към параболата

Ще използваме, че параболата е крива, която е графиката на функцията $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ и тогава допирателната ѝ в точката $(x_0, f(x_0))$ се задава с уравнението

$$t: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

28. Намерете допирателната към параболата $y = x^2 + 3x + 4$ в точката $(-4, 8)$.

Решение. Уравнението на допирателната е $t: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Пресмятаме $f'(x) = 2x + 3$, $f'(-4) = -5$ и $f(-4) = 8$ и получаваме $t: y = -5(x + 4) + 8$, $5x + y + 12 = 0$. ▲

29. Намерете допирателната към дадената параболата в дадената точка.

- а) $y = x^2 + 2x + 2$, $(0, 2)$;
 б) $y = x^2 - 4x - 3$, $(-1, 2)$;
 в) $y = 2x^2 - 10x - 2$, $(5, -2)$;
 г) $y = 2x^2 + 4x - 2$, $(-2, -2)$.

30. Дадена е параболата $y = x^2 - 10x + 12$ и точка $(7, -10)$, нележаща на нея. Да се намерят допирателните от точката към параболата и допирните точки.

Решение. а) Правата $t: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ е допирателна в точка (x_0, y_0) от параболата.

Имаме $f'(x) = 2x - 10$, $f'(x_0) = 2x_0 - 10$ и $f(x_0) = x_0^2 - 10x_0 + 12$.

За допирателната получаваме $t: y = (2x_0 - 10)(x - x_0) + x_0^2 - 10x_0 + 12$.

Ще определим x_0 от условието, че t минава през точка $(x, y) = (7, -10)$:

$$t: -10 = (2x_0 - 10)(7 - x_0) + x_0^2 - 10x_0 + 12 \Leftrightarrow x_0^2 - 14x_0 + 48 = 0$$

Корените на полученото квадратно уравнение са 6 и 8. Тогава допирните точки са $(6, -12)$ и $(8, -4)$. Получаваме допирателните:

$$t_1: 2x - y - 24 = 0 \text{ в точката } (6, -12) \text{ и } t_2: 6x - y - 52 = 0 \text{ в точката } (8, -4). \blacktriangle$$

31. Дадени са парабола и точка, нележаща на параболата. Да се намерят допирателните от точката към параболата и допирните точки.

а) $y = \frac{x^2}{2} + 5$, $(3, 9)$;

б) $y = \frac{x^2}{6} + x - 1$, $(-3, -4)$;

в) $y = x^2 + x + 1$, $(0, 0)$;

г) $y = -5x^2 - 2x + 1$, $(0, 6)$.

32. Правите f и g са допирателни към дадената парабола в дадените точки. Да се намери пресечната точка на f и g .

а) $y = x^2 - 2x + 1$, $(2, 1)$, $(4, 9)$;

б) $y = -x^2 + 7x - 5$, $(3, 7)$, $(1, 1)$;

в) $y = x^2 + 4x - 5$, $(-7, 16)$, $(-5, 0)$;

г) $y = x^2 + 8x + 8$, $(-6, -4)$, $(-2, -4)$.

33. Да се намери парабола с уравнение $f(x) = y = x^2 + bx + c$, ако правите $3x - y - 1 = 0$ и $7x - y - 5 = 0$ са допирателни към нея.

Решение. Нека правите се допират до параболата съответно в точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) .

Тогава ъгловите им коефициенти са $f'(x_1) = 3$ и $f'(x_2) = 7$, откъдето получаваме уравненията $2x_1 + b = 3$ и $2x_2 + b = 7$.

Неизвестните коефициенти b и c и координатите на допирните точки намираме от системата:

$$\begin{cases} y_1 = 3x_1 - 1 \\ y_2 = 7x_2 - 5 \\ 2x_1 + b = 3 \\ 2x_2 + b = 7 \\ y_1 = x_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 = x_2^2 + bx_2 + c \end{cases}$$

Решението на системата е $b = 3$, $c = -1$, $x_1 = 0$, $y_1 = -1$, $x_2 = 2$, $y_2 = 9$. Търсената парабола е $y = x^2 + 3x - 1$. \blacktriangle

34. Да се намери парабола с уравнение $y = x^2 + bx + c$, ако дадените прави са допирателни към нея.

а) $6x + y + 30 = 0$, $2x + y + 14 = 0$;

б) $y = -8$, $4x - y + 4 = 0$;

в) $2x + y - 2 = 0$, $6x - y - 6 = 0$.

35. Намерете допирната точка на дадената права към дадената парабола.

а) $x - y + 2 = 0$, $y = -x^2 + 5x - 2$;

б) $4x - y - 2 = 0$, $y = x^2 - 2x + 7$;

в) $x - y - 10 = 0$, $y = x^2 + 5x - 6$;

г) $2x - y + 1 = 0$, $y = x^2 - 2x + 3$.