ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

Начин на оценяване

Верните отговори на задачи от 1. до 5. включително се оценяват по 3 точки, на задачи от 6. до 15. включително с по 4 точки, а пълните решения на задачи 16., 17. и 18. с по 15 точки. Максималният брой точки е 100.

Изпитен вариант №1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Г	Б	В	А	Г	Б	В	Г	Б	А	В	Б	А	Г	Б

1. (Г) $(3.(-2) - 2.3; 3.5 - 2.(-1)) = (-6 - 6; 15 + 2) = (-12; 17)$.

2. (Б) $\dfrac{x^2}{4^2} - \dfrac{y^2}{5^2} = 1$ е уравнение на хипербола.

3. (В) $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|.|\overrightarrow{b}|} = \dfrac{1.1 + 0.(-\sqrt{3})}{\sqrt{1^2+0^2}.\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}} = \dfrac{1}{1.2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$.

4. (А) Общото уравнение на права има вида $ax + by + c = 0$. Координатите на $A(3;-2)$ и $B(-1;4)$ удовлетворяват уравнението $3x + 2y - 5 = 0$ и не удовлетворяват уравнението $3x - 2y + 5 = 0$.

5. (Г) Координатите на медицентъра са $\left(\dfrac{-5+2+6}{3}; \dfrac{-3-2+2}{3}\right) = (1; -1)$.

6. (Б) $5.3 + (-3).5 = 0 \Rightarrow p \perp q$.

7. (В) Височината от върха C е от права, която има ъглов коефициент $-\dfrac{3-1}{1-(-2)} = -\dfrac{2}{3}$.

Следователно правата има уравнение $y - 2 = -\dfrac{2}{3}(x - 0)$, т.е. $2x + 3y - 6 = 0$.

8. (Г) $\left|\begin{array}{l} x - y - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x = y + 4 \\ (y+4)^2 + y^2 + 2(y+4) - 4y - 20 = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x = y + 4 \\ 2y^2 + 6y + 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x = y + 4 \\ y^2 + 3y + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x = y + 4 \\ (y+1)(y+2) = 0 \end{array}\right.$.

$\Rightarrow x_1 = 3, y_1 = 1$ или $x_2 = 2, y_2 = -2$.

9. (Б) В правоъгълния $\triangle ABC$ хипотенузата $BC = \sqrt{5^2 + 12^3} = 13$. Следователно медианата $AM = 6,5$ и $\triangle AMD$ е равнобедрен и правоъгълен, т.е. $\sphericalangle AMD = 45^\circ$.

10. (А) $S = \dfrac{a_1}{1-q} = \dfrac{\frac{3}{7}}{1-\frac{3}{7}} = \dfrac{3}{4}$.

11. (В) Сечението APC_1Q е ромб с диагонали $AC_1 = \sqrt{3}$ и $PQ = \sqrt{2}$.

Лицето му е $S = \dfrac{AC_1.PQ}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

12. (Б)

$$\begin{array}{l|l} x^4-x^3+0.x^2+ax+b & x^2-x+1 \\ \hline -\;x^4-x^3+\;x^2 & x^2+0.x+1 \\ \quad\quad -\;\;x^2+ax+b & \\ \quad\quad -\;\;x^2+\;x-1 & \\ \hline \quad\quad\quad\quad\quad 0 & \end{array} \Rightarrow a=1, b=-1.$$

13. (Б) За $x = 2$ се получава $2.2^3 - 3.2^2 + 2 - 6 = 16 - 12 + 2 - 6 = 0$.

14. (Г) $1100100 1_{(2)} = 2^7 + 2^6 + 2^3 + 1 = 128 + 64 + 8 + 1 = 201$;
$1301_{(5)} = 5^3 + 3.5^2 + 1 = 125 + 75 + 1 = 201; 311_{(8)} = 3.8^2 + 8 + 1 = 192 + 8 + 1 = 201$.

15. (Б) $\lim\limits_{n\to-\infty} \dfrac{\sqrt{3a_n+5}-2}{3a_n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cancel{3a_n+5-4}}{\cancel{(3a_n+1)}.(\sqrt{3a_n+5}+2)} = \dfrac{1}{\sqrt{3.\left(-\frac{1}{3}\right)+5}+2} = \dfrac{1}{4}$.

16. Решение на задачата:
При $n = 1$ имаме вярното числово равенство $1 = 1^2$.
Да предположим, че за някое естествено число k е вярно равенството

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2.$$

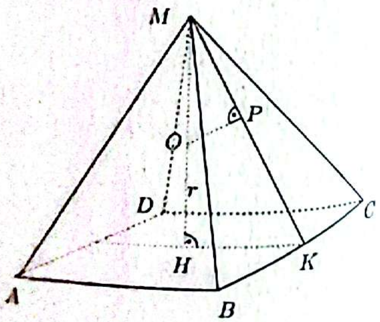
Тогава за $n = k + 1$ сборът е $1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$.
Следователно равенството $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$ е вярно за всяко естествено число n.

17. Решение на задачата:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{x^2}{4}\sin 2x + \frac{x}{4}\cos 2x - \frac{1}{8}\sin 2x - 1\right)' =$$
$$= \left(\frac{1}{6}x^3\right)' + \left(\frac{x^2}{4}\sin 2x\right)' + \left(\frac{x}{4}\cos 2x\right)' - \left(\frac{1}{8}\sin 2x + 1\right)' =$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{x^2}{4}\right)'\sin 2x + \frac{x^2}{4}(\sin 2x)' + \left(\frac{x}{4}\right)'\cos 2x + \frac{x}{4}(\cos 2x)' - \frac{1}{8}(\sin 2x)' =$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{x^2}{4}\cos 2x(2x)' + \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{x}{4}\sin 2x(2x)' - \frac{1}{8}\cos 2x(2x)' =$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + \cancel{\frac{1}{2}x\sin 2x} + \frac{x^2}{2}\cos 2x + \cancel{\frac{1}{4}\cos 2x} - \cancel{\frac{x}{2}\sin 2x} - \cancel{\frac{1}{4}\cos 2x} =$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^2}{2}\cos 2x = x^2\frac{(1 + \cos 2x)}{2} = x^2\cos^2 x$$

18. Решение на задачата:

По условие четириъгълната пирамида $MABCD$ е правилна с основен ръб $AB = 2$ cm и околен ръб $AM = \sqrt{5}$cm. Следователно, ако K е среда на BC, то $KC = 1$ cm. С помощта на Питагоровата теорема за $\triangle KCM$ получаваме, че апотемата на пирамидата е $KM = 2$ cm, а височината - $MH = \sqrt{3}$ cm. Центърът O на вписаната сфера принадлежи на височината MH и радиусът на сферата $r = OH = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ cm.



Използваме, че $\triangle OPM \sim \triangle KHM$ и $\dfrac{OH - r}{MK} = \dfrac{r}{HK}$, т.е $\dfrac{\sqrt{3} - r}{2} = \dfrac{r}{1}$, $r = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Лицето на сферата е $S = 4\pi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \dfrac{4\pi}{3}$ cm^2.

Изпитен вариант №2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
В	Б	Г	А	Г	А	Г	А	Г	А	В	А	Б	В	В

4. (А) Разлагат се на множители числителят и знаменателят на b_n и се съкращава на $(a_n - 3)$.

5. (Г) Използвайте $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ и $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.

8. (А) Използвайте схемата на Хорнер и ще получите системата $\left|\begin{array}{l} 8a + 4b + 36 = 0 \\ 12a + 4b + 60 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a = -6 \\ b = 3 \end{array}\right.$.

9. (Г) Биномният коефициент на петия член в развитието на $(1 + x)^n$ е
$C_n^4 = 210 \Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} = 210$, откъдето $n(n-1)(n-2)(n-3) = 10.9.8.7$ и $n = 10$.

10. (А) Осното сечение на пресечения конус е равнобедрен трапец.

11. (В) Използвайте теоремата $\vec{c} \perp \vec{d} \Leftrightarrow \vec{c}.\vec{d} = 0$.

12. (А) Използвайте необходимото и достатъчно условие за перпендикулярност на две прави, зададени с декартовите си уравнения, т.е. $x_1.x_2 = -1$.

16. Решение на задачата: *I. Начин:*

Даденото уравнение е симетрично от нечетна степен и има корен $x_1 = -1$. От разлагането на полинома получаваме:

$(x + 1)(12x^4 + 56x^3 + 89x^2 + 56x + 12) = 0$. Знае се, че $x \neq 0$.

Разделяме на x^2 и получаваме: $12\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + 56\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + 89 = 0$

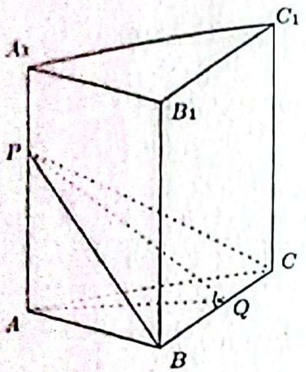
$\Leftrightarrow 12\left(\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 2\right) + 56\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + 89 = 0$.

Полагаме $x + \dfrac{1}{x} = t$ и получаваме $12t^2 + 56t + 65 = 0$ с корени $t_1 = -\dfrac{5}{2}$ и $t_2 = -\dfrac{13}{6}$.

Решаваме уравненията $2x^2 + 5x + 2 = 0$ и $6x^2 + 13x + 6 = 0$. Корените им са $x_2 = -2$, $x_3 = -\dfrac{1}{2}$, $x_4 = -\dfrac{3}{2}$ и $x_5 = -\dfrac{2}{3}$.

II. Начин: Чрез схемата на Хорнер намираме корените на даденото уравнение: $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -\dfrac{1}{2}$, $x_4 = -\dfrac{3}{2}$ и $x_5 = -\dfrac{2}{3}$.

17. Решение на задачата:



Означаваме $AB = BC = AC = a$. Нека $AQ \perp BC$.

$AQ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ($\triangle ABC$ е равностранен) и $AA_1 = 4a$.

Тогава $B_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC.AQ$, $B_{\triangle BCP} = \frac{1}{2}BC.PQ$ и $B_{BCP} = nB_{ABC}, n \in N$,

откъдето $n = \frac{B_{\triangle BCP}}{B_{\triangle ABC}} = \frac{PQ}{AQ} > 1$.

Ако $P \equiv A_1$, то PB е с най-голяма дължина и $PQ = \sqrt{(4a)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{67}$.

Следователно $n < \frac{\frac{a}{2}\sqrt{67}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{201}}{3} \approx 4,73$. Откъдето следва, че $1 < n \leq 4$. Получихме, че $n = 2, 3$ или 4.

18. Решение на задачата: Координатите на пресечната точка на правите намираме като решим системата $\begin{vmatrix} 4x + y - 5 = 0 \\ 4x - y - 5 = 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow x = 0, y = 5$.

Пресечната точка е $(0;5)$. Пресечните точки на двете прави с абсцисната ос са $\left(\frac{5}{4};0\right)$ и $\left(-\frac{5}{4};0\right)$.

Намираме разстоянията от $O(0;0)$ до правата и доказваме, че са равни.

Изпитен вариант №3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
А	В	Г	А	Б	В	Б	А	В	Г	А	Г	Г	В	А

4. (А) Използвайте формулата $\cos\sphericalangle A = \frac{x_{\vec{AB}}.x_{\vec{AC}} + y_{\vec{AB}}.y_{\vec{AC}}}{|\vec{AB}|.|\vec{AC}|}$ или косинусова теорема.

7. (Б) Използвайте, че уравнението на директрисата е $d: x = \frac{p}{2}$ и каноничното уравнение на параболата е $y^2 = 2px$.

9. (В) Използвайте, че сфера се определя от 4 точки, нележащи в една равнина.

12. (Г) Преобразувайте израза $\left(\frac{x+3}{x}\right)^{2x}$ до $\left(\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^6$.

13. (Г) Използвайте, че $A(x) = (x+1).B(x)$.

14. (В) Числителят и знаменателят са сборове от членовете на две аритметични прогресии.

16. Решение на задачата:

$\exists a_1, q : |q| < 1$ и

$S_5 = 372 \Rightarrow a_1\frac{1-q^5}{1-q} = 372$.

$$\underbrace{a_1 + a_3 + a_3 + \ldots}_{\substack{\exists\ a_1' = a_1 \\ q' = q^2}} = 2\underbrace{(a_2 + a_4 + a_6 + \ldots)}_{\substack{\exists\ a_1'' = a_2 = a_1 q \\ q'' = q^2}},$$

$|q| < 1 \Rightarrow q^2 < 1 \Rightarrow |q^2| < 1$.

$S' = a_1 + a_3 + a_5 + \ldots = \frac{a_1'}{1-q'} = \frac{a_1}{1-q^2}$.

$S'' = a_2 + a_4 + a_6 + \ldots = \frac{a_1''}{1-q''} = \frac{a_2}{1-q^2} = \frac{a_1 q}{1-q^2}$.

$S' = 2S''$ и тогава:

$\frac{a_1}{1-q^2} = 2.\frac{a_1 q}{1-q^2} \Rightarrow 2q = 1 \Rightarrow q = \frac{1}{2}$.

$a_1.\frac{1-q^5}{1-q} = 372, \quad a_1.\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5}{1-\frac{1}{2}} = 372$.

$\frac{a_1.31}{16} = 372 \Rightarrow a_1 = \frac{372.16}{31} = 192$.

17. Решение на задачата:

От теоремата на Вайерщрас редицата е сходяща, ако е монотонна и ограничена.

$a_1 = \frac{17}{9} < 2; a_2 = \sqrt{a_1 + 2} < \sqrt{2+2} = 4 \Rightarrow a_2 < 2$

Допускаме, че $a_{n-1} < 2$

$a_n = \sqrt{a_{n-1} + 2} < \sqrt{2+2} = 2 \Rightarrow a_n < 2 \quad \forall n \in N \qquad (1)$

$\Rightarrow$ редицата е ограничена отгоре.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = \frac{17}{9} > 0 \\ a_n = \sqrt{a_{n-1} + 2} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a_n > 0 \quad \forall n \in N. \qquad (2)$$

От (1) и (2) $\Rightarrow \forall n \in N$ е вярно, че $0 < a_n < 2 \Rightarrow$ редицата е ограничена. (*)

От $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 2}$ (за $n > 1, n \in N$) $\Rightarrow a_n^2 = a_{n-1} + 2$.

Следователно

$a_n^2 - a_{n-1}^2 = a_{n-1} + 2 - a_{n-1}^2 = -(a_{n-1} - 2)(a_{n-1} + 1) > 0$

$\forall a_{n-1} \in (-1;2)$ при $n > 1, n \in N$.

От доказателството знаем, че $\forall n \in N, a_n \in (0;2) \Rightarrow a_n^2 - a_{n-1}^2 > 0 \quad \forall n > 1, n \in N$

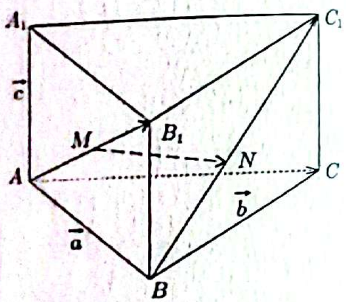
$\Rightarrow a_n^2 > a_{n-1}^2 \quad \forall n > 1, n \in N \Leftrightarrow a_n > a_{n-1} \quad \forall n > 1, n \in N$.

$\Rightarrow$ Редицата е монотонна (растяща). (**)

От (*) и (**) (теорема на Вайерщрас) $\Rightarrow$ редицата $a_1 = \dfrac{17}{9}, a_n = \sqrt{a_{n-1} + 2}$ е сходяща.

18. Решение на задачата:

а) Нека $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$.



$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{a}| = p$ (по условие).

$\vec{a} \perp \vec{c} \Rightarrow \vec{a}.\vec{c} = 0$,

$\vec{b} \perp \vec{c} \Rightarrow \vec{b}.\vec{c} = 0$,

$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = p^2 \cos 60^\circ = \dfrac{p^2}{2}$.

Разглеждаме векторна база $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

$\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} = \vec{a} + \vec{c}$.

$M \in AB_1$ и $\dfrac{AM}{MB_1} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \dfrac{AM}{AB_1} = \dfrac{3}{5}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB_1} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \dfrac{3}{5}(\vec{a} + \vec{c}) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \dfrac{3}{5}\vec{a} + \dfrac{3}{5}\vec{c}$.

$\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}) = (\vec{b} - \vec{a} + \vec{c})$.

$N \in BC_1$ и $\dfrac{BN}{NC_1} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{BN}{BC_1} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow \overrightarrow{BN} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{BC_1} = \dfrac{2}{5}(\vec{b} - \vec{a} + \vec{c})$.

$\overrightarrow{BN} = \dfrac{2}{5}\vec{b} - \dfrac{2}{5}\vec{a} + \dfrac{2}{5}\vec{c}$.

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = -\dfrac{3}{\cancel{5}}\cancel{\vec{a}} - \dfrac{3}{5}\vec{c} + \cancel{\vec{a}} + \dfrac{2}{5}\vec{b} - \dfrac{2}{\cancel{5}}\cancel{\vec{a}} + \dfrac{2}{5}\vec{c}$.

$\overrightarrow{MN} = \dfrac{2}{5}\vec{b} - \dfrac{1}{5}\vec{c}$.

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB_1} = (\dfrac{2}{5}\vec{b} - \dfrac{1}{5}\vec{c})(\vec{a} + \vec{c}) = \dfrac{2}{5}\vec{b}.\vec{a} + \dfrac{2}{5}\vec{b}.\vec{c} - \dfrac{1}{5}\vec{c}.\vec{a} - \dfrac{1}{5}\vec{c}^2$.

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB_1} = \dfrac{2}{5}.\dfrac{p^2}{2} + 0 - 0 - \dfrac{1}{5}p^2 = \dfrac{1}{5}p^2 - \dfrac{1}{5}p^2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{AB_1}$. (1)

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BC_1} = (\dfrac{2}{5}\vec{b} - \dfrac{1}{5}\vec{c})(\vec{b} - \vec{a} + \vec{c}) = \dfrac{2}{5}\vec{b}^2 - \dfrac{2}{5}\vec{b}.\vec{a} + \dfrac{2}{5}\vec{b}.\vec{c} - \dfrac{1}{5}\vec{c}.\vec{b} + \dfrac{1}{5}\vec{c}.\vec{a} - \dfrac{1}{5}\vec{c}^2$,

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BC_1} = \dfrac{2}{5}p^2 - \dfrac{2}{5}.\dfrac{p^2}{2} + 0 - 0 + 0 - \dfrac{1}{5}p^2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{BC_1}$. (2)

От (1) и (2) $\Rightarrow MN$ е ос-отсечка на AB_1 и BC_1.

б) $MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{\overrightarrow{MN}^2} = \sqrt{\left(\dfrac{2}{5}\vec{b} - \dfrac{1}{5}\vec{c}\right)^2} = \sqrt{\left(\dfrac{1}{5}(2\vec{b} - \vec{c})\right)^2} =$

$= \dfrac{1}{5}\sqrt{4\vec{b}^2 - 4\vec{b}\vec{c} + \vec{c}^2} = \dfrac{1}{5}\sqrt{4p^2 - 4.0 + p^2} = \dfrac{p\sqrt{5}}{5}$.

Изпитен вариант №4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Б	Г	В	В	А	В	В	А	Г	Б	Г	А	Б	А	В

3. (В) Ако $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$, то средата M на отсечката AB е с координати $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ и $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.

4. (В) Рационализирайте числителя на дробта.

8. (А) Полученото ротационно тяло е конус.

9. (Г) Търсеният сбор е равен на $P(1)$.

10. (Б) Използвайте, че $(k+1)$-вият член в развитието на $(a+b)^n$ има вида $C_n^k a^{n-k} b^k$.

12. (А) Използвайте формулата за сбор на безкрайно намаляваща геометрична прогресия.

13. (Б) Докажете, че осното сечение е квадрат.

14. (А) Ако $AC \cap BD = M$, то $\sphericalangle((BDC_1),(ABC)) = \sphericalangle CMC_1$.

15. (В) Използвайте схемата на Хорнер.

16. Решение на задачата:

За $x \in [0;3) \cup (3;+\infty)$ функцията $f(x)$ е непрекъсната като елементарна функция.
За да е непрекъсната $f(x)$ при $x = 3$, трябва $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$.

$$\lim_{x\to3} \frac{\sqrt{3x} - 3}{\sqrt{x+6} - \sqrt{2x+3}} = \lim_{x\to3} \frac{(\sqrt{3x} - 3)(\sqrt{x+6} + \sqrt{2x+3})}{(\sqrt{x+6} - \sqrt{2x+3})(\sqrt{x+6} + \sqrt{2x+3})} =$$

$$\lim_{x\to3} \frac{(\sqrt{3x} - 3)(\sqrt{x+6} + \sqrt{2x+3})}{3 - x} = \lim_{x\to3} \frac{\sqrt{3}(\sqrt{x} - \sqrt{3})(\sqrt{x+6} + \sqrt{2x+3})}{-(\sqrt{x} - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3})} = -3.$$

Тогава $f(3) = a^2 - 4a = -3$, откъдето $a_1 = 1$ и $a_2 = 3$.

17. Решение на задачата:

Прилагаме метода на математическата индукция.

Проверяваме верността на твърдението при $n = 1$. Получаваме вярно равенство $1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Допускаме, че твърдението е вярно при $n = k$,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k}.$$

Ще докажем, че твърдението е вярно при $n = k + 1$,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}.$$

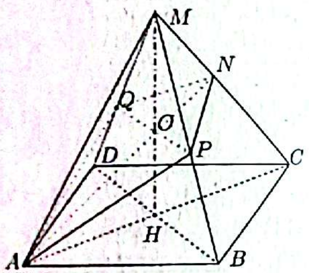
Последователно преобразуваме лявата страна до получаване на дясната като използваме направеното предположение при $n = k$.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} =$$

$$= \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2k+2}\right) = \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}.$$

Следователно твърдението е вярно за всяко $n \in N$.

18. Решение на задачата:



а) От Питагоровата теорема за $\triangle ABC$ следва, че $AC = a\sqrt{2}$, откъдето $AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

От $MH \perp (ABCD) \Rightarrow \triangle AHM$ е правоъгълен и следва, че $\dfrac{MH}{AH} = \cotg 30^\circ$, откъдето $MH = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

$$V_{ABCDM} = \frac{1}{3}a^2.\frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}.$$

б) В $\triangle ACM$ $MA = MC$ и $\sphericalangle AMC = 60^\circ$. Следователно $\triangle ACM$ е равностранен.
В $\triangle ACM$ построяваме $AN \perp MC$. Нека $AN \cap MH = O$. AN и MH са височини и медиани.
Следователно точка O е медицентър на $\triangle ACM$. През т. O построяваме $QP \parallel DB$.
От $HC \perp DB$ като диагонали в квадрат $ABCD$ и от това, че HC е ортогонална проекция на MC върху $(ABCD)$ и от теоремата за трите перпендикуляра следва, че $MC \perp DB$.
Тогава $MC \perp QP$ ($QP \parallel DB$). Получихме, че MC е перпендикулярна на двете пресичащи се прави AN и QP. Следователно $APNQ$ е търсеното сечение.

в) От $AH \perp DB$ и AH проекция на AO върху $(ABCD)$ следва, че $AO \perp DB$ (теорема за трите перпендикуляра). От $QP \parallel DB$ получаваме, че $AO \perp QP$. Следователно $APNQ$ е четириъгълник с перпендикулярни диагонали.

Тогава $S_{APNQ} = \dfrac{1}{2}AN.QP$.

От $\triangle ACM$ равностранен с височини AN и $MH \Rightarrow AN = MH = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ (*от а)*).

Точка O е медицентър в $\triangle ACM \Rightarrow \dfrac{MO}{MH} = \dfrac{2}{3}$.

Тогава в $\triangle DBM$ $\dfrac{QP}{DB} = \dfrac{MO}{MH} = \dfrac{2}{3}$($QP \parallel DB$). Следователно $QP = \dfrac{2}{3}DB = \dfrac{2}{3}a\sqrt{2}$ и

$$S_{APNQ} = \frac{1}{2}AN.QP = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{6}}{2}.\frac{2}{3}a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}.$$

Изпитен вариант №5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Г	В	А	В	Б	Б	Г	А	А	В	В	А	А	Г	Г

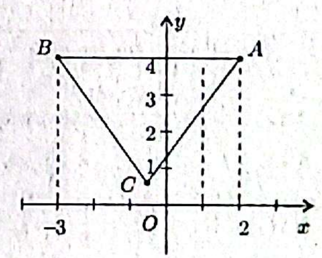
16. Решение на задачата:

а) $AB : 4x + y - 14 = 0$, а средата на отсечката AB е точката $M(3;2)$. Уравнението на симетралата на AB е $x - 4y + 5 = 0$.
б) Намираме уравнението на симетралата и на страната.
Уравнението на BC е $x - y + 4 = 0$, средата $K(1;5)$, симетралата: $x + y - 6 = 0$.
Пресечната точка на двете симетрали получаваме от решението на системата

$$\left| \begin{array}{l} x + y - 6 = 0 \\ x - 4y + 5 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow O(3,8;2,2).$$

Намираме радиуса $AO = R = \sqrt{(4-3,8)^2 + (-2-2,2)^2} = \sqrt{17,68}$ и получаваме уравнението на окръжността: $(x-3,8)^2 + (y-2,2)^2 = 17,68$.
в) Правата на Ойлер минава през медицентъра и центъра на описаната окръжност . Координатите на медицентъра са $G\left(2;\dfrac{8}{3}\right)$ и търсеното уравнение е $7x + 27y - 86 = 0$.

17. Решение на задачата:



Координатите на пресечните точки намираме след решаване на уравненията
$2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2$, $A(2;4)$, $2^{-x-1} = 4 \Leftrightarrow x = -3$, $B(-3;4)$
и $2^x = 2^{-x-1} \Rightarrow x = -0,5$, $C\left(-0,5;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Лицето на $\triangle ABC$ е $S = \dfrac{AB.|4 - y_C|}{2} =$

$$= \frac{|-3-2|.\left|4 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right|}{2} = \frac{40 - 5\sqrt{2}}{4} \text{ кв. м. ед.}$$

18. Решение на задачата:

а) Намираме първата производна на дадената функция $f'(x) = 16x^3 - 3x^2 + 10x$ и използвайки формулата за уравнение на допирателна в точка, получаваме уравнението на допирателната за $x = -0,5$. Получаваме $f'(-0,5) = -2 - 0,75 - 5 = -7,75$. Уравнението на допирателната в точка $\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{43}{8}\right)$ е $y = -7,75x - 9,25$.

б) решаваме неравенството $f'(x) = 16x^3 - 3x^2 + 10x > 0 \Leftrightarrow x(16x^2 - 3x + 10) > 0$ и получаваме, че функцията расте за $x \in (0;+\infty)$ и намалява за $x \in (-\infty;0)$. Намираме втората производна $f''(x) = 48x^2 - 6x + 10$. Детерминантата е отрицателна, следователно функцията няма инфлексни точки, тъй като $f''(x) \neq 0$, $\forall x$.