① Решения стр. 83/зад. 2

"Измежду всички конуси с даден обем V да се намери този с най-малка дължина на образуващата."

Дадено. Прав кръгов конус $V = const$, $l_{min} = ?$

Решение.

$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{\frac{3V}{2\pi h} + h^2}.$$

Д.М. $h \in (0; +\infty)$

Нека $f(h) = \frac{3V}{2\pi h} + h^2.$

l расте $\Leftrightarrow$ f расте

$$f'(h) \geq 0$$

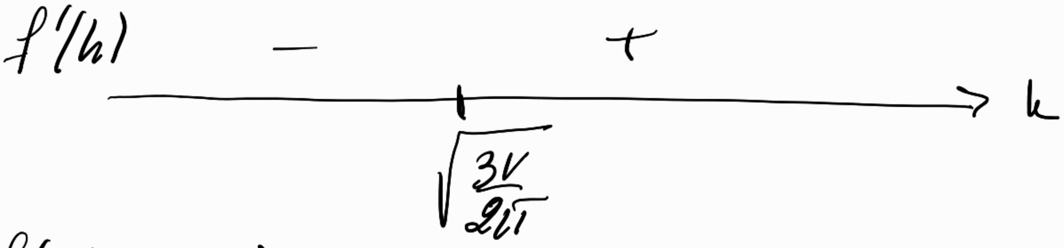
$$2h - \frac{3V}{\pi h^2} \geq 0 \quad \Big| \cdot \frac{h^2}{2} > 0$$

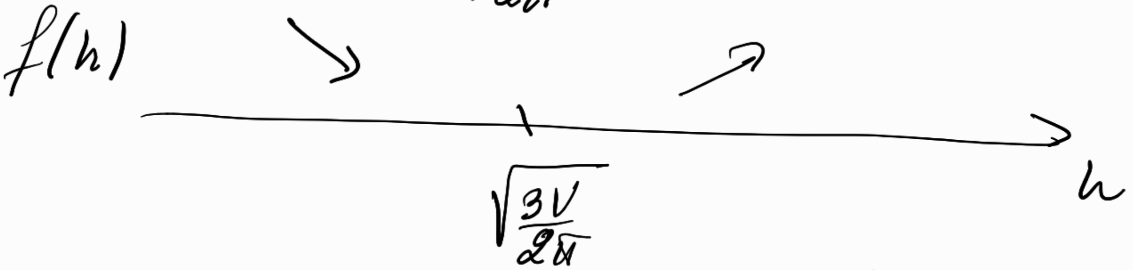
$$h^3 - \frac{3V}{2\pi} \geq 0$$

$$\left(h - \sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}\right)\left(h^2 + h\sqrt{\frac{3V}{2\pi}} + \sqrt[3]{\left(\frac{3V}{2\pi}\right)^2}\right) \geq 0 \quad \Big| : (h^2 + \dots +) > 0$$

$$h - \sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}} \geq 0$$

$$h \in \left[\sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}; +\infty\right)$$





$\Rightarrow$ $f(h)$ расте $\Leftrightarrow$ $h \in \left[\sqrt{\frac{3V}{2\pi}}; +\infty\right)$

$\Rightarrow$ l расте $\Leftrightarrow$ $h \in \left[\sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}; +\infty\right)$

$\Rightarrow$ l достига min за $h = \sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}$

$$\Rightarrow \quad h^3 = \frac{3V}{2\pi} = \frac{\cancel{3}}{2\cancel{\pi}} \frac{1}{\cancel{3}} \cancel{\pi} r^2 h$$

$$\Rightarrow \quad r^2 = 2h^2$$

$$\Rightarrow \quad l = \sqrt{2h^2 + h^2} = \sqrt{3h^2} = \sqrt{3}\,h = \sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}$$

$$\boxed{\text{Отговор } l = \sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{3V}{2\pi}}}$$

② Решения стр. 83/ зад. 3

"Дадена е Δ пирамида ABCD, за която стената ABD е равностранен Δ и ръбът CD е перпендикулярен на основата ABC. За AB = 6, да се намери височината на тази от пирамидите, която има възможно най-голям обем"

Дадено

Пирамида ABCD $AB = BD = DA = 6$, $CD \perp (ABC)$
$CD = ?$: $V \to \max$

Решение

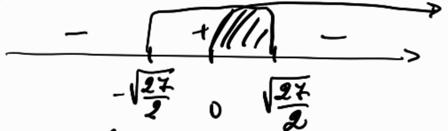
По дефиниция CD е височината. Нека $CD = h \in (0; +\infty)$
Нека M – среда на AB. $\xrightarrow{AD=BD} DM \perp AB \xrightarrow{T3\perp} CM \perp AB$

$$\Rightarrow V = \frac{S_{\Delta ABC}\cdot h}{3} = \frac{\frac{AB\cdot CM}{2}\cdot h}{3} = \frac{\cancel{6}\sqrt{DM^2-DC^2}\cdot h}{\cancel{6}} = \sqrt{DM^2-h^2}\cdot h = \sqrt{BD^2-BM^2-h^2}\cdot h$$

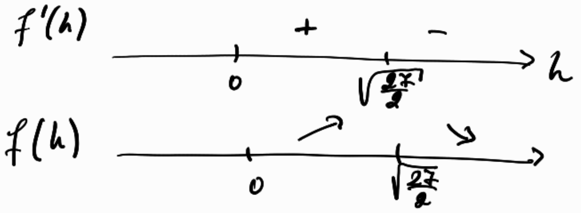
$$= \sqrt{6^2-3^2-h^2}\cdot h = \sqrt{27-h^2}\cdot h = \sqrt{-h^4+27h^2}$$

Нека $f(h) = -h^4+27h^2$; f расте ⇔ V расте.

$f'(h) \geq 0$
$-4h^3+2\cdot 27h \geq 0$
$4h\left(-h^2+\frac{27}{2}\right) \geq 0 \quad |:4h>0$
$\left(\sqrt{\frac{27}{2}}-h\right)\left(\sqrt{\frac{27}{2}}+h\right) \geq 0$



$h \in \left(0; \sqrt{\frac{27}{2}}\right]$



$\Rightarrow f(h)$ расте $\Leftrightarrow h \in \left(0; \sqrt{\frac{27}{2}}\right]$

$\Rightarrow V$ расте $\Leftrightarrow h \in \left(0; \sqrt{\frac{27}{2}}\right]$

$\Rightarrow V$ достига НГС $\Leftrightarrow CD = h = \sqrt{\frac{27}{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$

Алтернативно решение. Нека $\sphericalangle CMD = \varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Понеже $MD = \sqrt{27}$, то $MC = \sqrt{27}\cos\varphi$; $CD = \sqrt{27}\sin\varphi$

Така $V = \dfrac{\frac{6 \cdot \sqrt{27}\cos\varphi}{2} \cdot \sqrt{27}\sin\varphi}{3} = \frac{27}{2}\sin 2\varphi.$

Но ние знаем, че $\sin x$ достига НГС $\sin = 1$ при $x = \frac{\pi}{2}$.
(понеже $\sin x$ расте в $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ и намалява за $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$)

Така $\sin 2\varphi$ достига НГС за $2\varphi = \frac{\pi}{2}$ т.е. $\varphi = \frac{\pi}{4}$

Т.е. $CD = \sqrt{27} \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{27} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$

Отговор: $CD = \frac{3\sqrt{6}}{2}$

③ Регалия стр. 84/зад. 4.

"Основата на четириъгълна пирамида ABCDS е правоъгълник с дължина $AB = a$, а $SA = SB = SC = SD = b$. Да се намери дължината на страната BC, при което обемът на пирамидата е най-голям.

Дадено

пирамида ABCDS, ABCD - правоъгъл.

$AB = a$, $SA = SB = SC = SD = b$

$BC = ?$: $V \to max$

Решение

Нека $BC = x$, $x \in (0; +\infty)$

Тъй като $SA = SB = SC = SD$, то $S' = \text{Пр}_{ABC} S = AC \cap BD$ - център на описаната около ABCD окръжност.

Т.е. $3V = S_{ABCD} . SS' = AB . BC . \sqrt{SB^2 - OB^2} = xa\sqrt{b^2 - \left(\frac{DB}{2}\right)^2} = xa\sqrt{b^2 - \frac{DB^2}{4}} =$

$= \frac{xa}{2}\sqrt{4b^2 - DB^2} = \frac{xa}{2}\sqrt{4b^2 - DC^2 - CB^2} = \frac{xa}{2}\sqrt{4b^2 - a^2 - x^2}$

Т.е. $V = \frac{xa}{6}\sqrt{4b^2 - x^2 - a^2} = \frac{a}{6}\sqrt{-x^4 + (4b^2 - a^2)x^2}$

Нека $f(x) = -x^4 + (4b^2 - a^2)x^2$

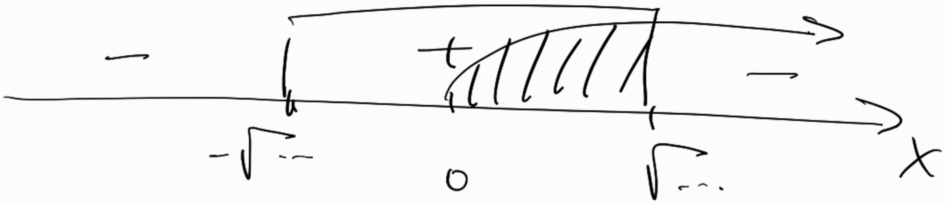
f расте $\Leftrightarrow$ V расте.

$f'(x) \geq 0$

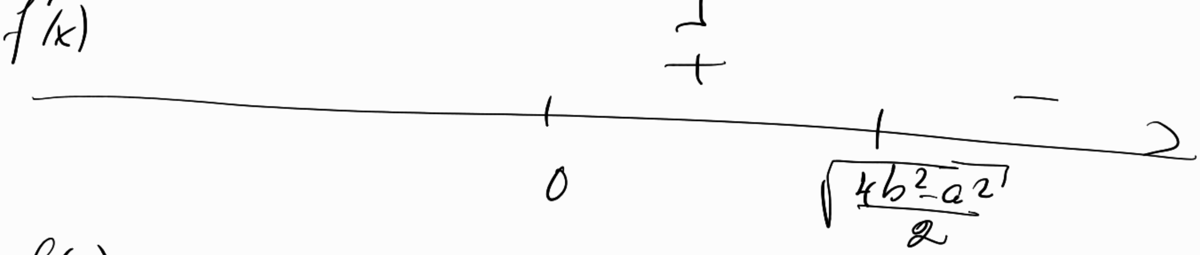
$$-4x^3+2(4b^2-a^2)x \geq 0 \quad \Big|:4x>0$$

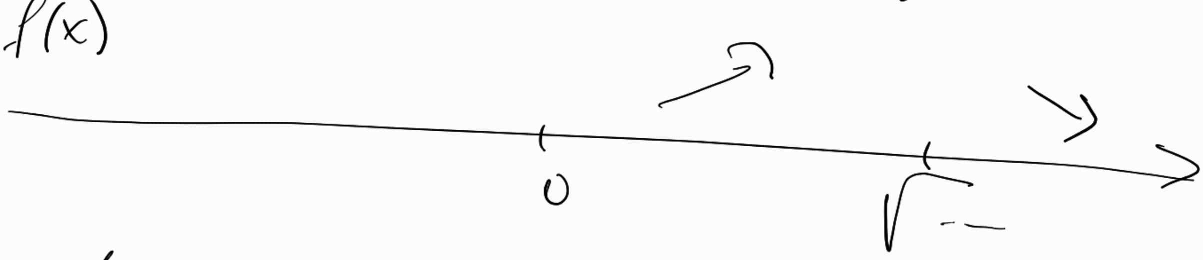
$$-x^2+\frac{4b^2-a^2}{2} \geq 0$$

$$\left(\sqrt{\frac{4b^2-a^2}{2}}-x\right)\left(\sqrt{\frac{4b^2-a^2}{2}}+x\right) \geq 0$$



$$x \in \left(0; \sqrt{\frac{4b^2-a^2}{2}}\right]$$





- $f(x)$ расте $\Leftrightarrow$ $x \in \left(0; \sqrt{\frac{4b^2-a^2}{2}}\right]$

$\Rightarrow$ V расте $\Leftrightarrow$ $x \in \left(0; \sqrt{\frac{4b^2-a^2}{2}}\right]$

$\Rightarrow$ V достига max при $BC = x = \sqrt{\frac{4b^2-a^2}{2}}$

Отговор: $BC = \sqrt{\frac{4b^2-a^2}{2}}$

④ Решения стр. 84 / 1

"Околен ръб на правилна Δ пирамида има д-на b и сключва ъгъл α с основата. Определете α така, че обемът на пирамидата да е най-голям."

Дадено

$ABCD$ - пирамида, $AB=BC=CA$, $AD=BD=CD=b$, $\measuredangle(AD; ABC)=\alpha$.

$\alpha = ?$: $V \to max$

Решение

Тъй като $AD=BD=CD \Rightarrow D' = \text{Пр}_{(ABC)} D$ = център на описаната на ABC.

$\Delta AD'D$ - правоъгълен $\Rightarrow AD' = AD\cos\alpha = b\cos\alpha;$
$DD' = AD\sin\alpha = b\sin\alpha$

използвайки, че $R_{ABC} = \dfrac{AB\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AB = \sqrt{3}R_{ABC} = \sqrt{3}AD' = \sqrt{3}b\cos\alpha$

$$V_{ABCD} = \frac{S_{ABC}\cdot h}{3} = \frac{\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}\cdot DD'}{3} = \frac{\sqrt{3}}{12}\cdot AB^2\cdot DD' = \frac{\sqrt{3}}{12}\cdot 3b^2\cos^2\alpha\cdot b\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}b^3}{4}(1-\sin^2\alpha)\sin\alpha$$

Нека $u = \sin\alpha$.

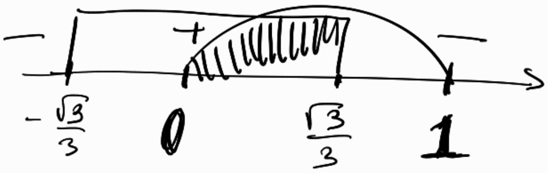
$\alpha \in (0; 90°) \Rightarrow u \in (0;1)$

$$V_{ABCD} = \frac{\sqrt{3}b^3}{4}(1-u^2)u = \frac{\sqrt{3}}{4}b^3(u-u^3) = V(u)$$

$V'(u) \geq 0$

$\frac{\sqrt{3}}{4}b^3(1-3u^2) \geq 0 \;/:3$

$\frac{\sqrt{3}}{4}b^3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-u\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+u\right) \geq 0$



$u \in \left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

$\Rightarrow$ V расте $\Leftrightarrow$ $u \in \left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

$\Rightarrow$ V достига max $\Leftrightarrow$ $\sin\alpha = u = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\boxed{\text{Одговор: } \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

⑤ Решения стр. 84/3

"Правилна Δ призма има обем V. Намерете дължината на основния ръб, при който лицето на повърхнината на призмата е възможно най-малко"

Дадено.

$ABCA_1B_1C_1$ - правилна призма с обем V.

$AB = ?$: $S \to S_{min}$

Решение

Нека $AB = x$. $x \in (0;\infty)$

$$S = 2S_{ABC} + 3S_{AA_1B_1B} = \frac{2x^2\sqrt{3}}{4} + 3.x\,h = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + 3.x.\frac{V}{S_{\Delta ABC}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + 3V\frac{x.4}{\sqrt{3}x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{4\sqrt{3}V}{x}$$

$$S'(x) \geq 0$$

$$\sqrt{3}x - \frac{4\sqrt{3}V}{x^2} \geq 0 \quad \Big|:\sqrt{3}$$

$$x - \frac{4V}{x^2} \geq 0 \quad \Big|\cdot x^2 > 0$$

$$x^3 - 4V \geq 0$$

$$\left(x - \sqrt[3]{4V}\right)\left(x^2 + x\sqrt[3]{4V} + \sqrt[3]{(4V)^2}\right) \geq 0 \quad / : (x^2 + \dots) > 0$$

$$x - \sqrt[3]{4V} \geq 0$$

$$x \in [\sqrt[3]{4V}; +\infty)$$

$S(x)$ расте $\Leftrightarrow x \in (\sqrt[3]{4V}; +\infty)$

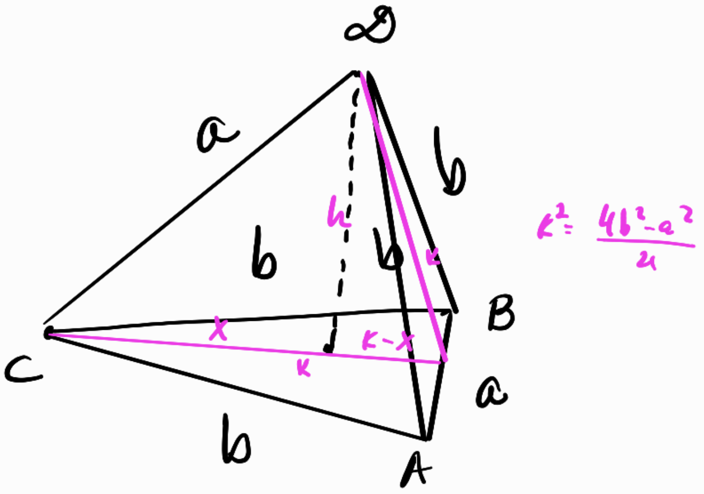
$\Rightarrow S$ достига min за $AB = x = \sqrt[3]{4V}$

$$\boxed{\text{Отговор: } AB = \sqrt[3]{4V}}$$

⑥ Регалия стр. 84 / зад. 4

"Четирите стени на тетраедър са равнобедрени Δ с дължина на основата a и бедра b. Изразете обема на пирамидата и намерете при фиксирано b онази стойност на a, за която този обем е максимален.

Дадено.



пирамида ABCD, $AB = CD = a$, $AC = BC = AD = BD = b$.

$V(a,b) = ?$, $a = ?$: $V \Rightarrow max$

Решение

Нека M – среда на AB $\Rightarrow DM \perp AB \perp CM$.

Нека $O = пр._{(ABC)} D \Rightarrow O \in CM$.

$$CM \perp AB \perp DM \Rightarrow CM^2 = DM^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{4b^2-a^2}{4}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{CM.AB}{2} = \sqrt{\frac{4b^2-a^2}{4}} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{4}$$

Сега остава да изразим DO чрез a и b 

$DO \perp CO \Rightarrow \quad DO^2 = a^2 - CO^2$

$DO \perp MO \Rightarrow \quad MO^2 + DO^2 = DM^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (CM - CO)^2 + (a^2 - CO^2) = \frac{4b^2-a^2}{4}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{\frac{4b^2-a^2}{4}} - CO\right)^2 + a^2 - CO^2 = \frac{4b^2-a^2}{4}$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{4b^2-a^2}{4}} - \cancel{2}CO\sqrt{\frac{4b^2-a^2}{\cancel{4}}} + \cancel{CO^2} + a^2 - \cancel{CO^2} = \cancel{\frac{4b^2-a^2}{4}}$$

$$\Rightarrow a^2 - CO\sqrt{4b^2-a^2} = 0$$

$$CO = \frac{a^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}$$

$$DO^2 = a^2 - CO^2 = a^2 - \frac{a^4}{4b^2-a^2} = \frac{4b^2a^2 - a^4 - a^4}{4b^2-a^2}$$

$$DO = \frac{a\sqrt{4b^2-2a^2}}{\sqrt{4b^2-a^2}}$$

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot DO = \frac{1}{3} \frac{a\cancel{\sqrt{4b^2-a^2}}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{4b^2-2a^2}}{\cancel{\sqrt{4b^2-a^2}}} =$$

$$= \frac{a^2\sqrt{4b^2-2a^2}}{12} = \frac{\sqrt{4b^2a^4 - 2a^6}}{12}$$

Нека $f = 4b^2a^4 - 2a^6$

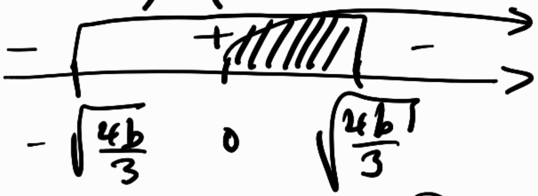
$f'(a) \geq 0$

$4b^2 \cdot 4a^3 - 2 \cdot 6 \cdot a^5 \geq 0 \quad / : 12a^3 \geq 0$

$$\frac{16b^2a^3}{12a^3} - \frac{12a^5}{12a^3} \geq 0$$

$$\frac{4}{3}b - a^2 \geq 0$$

$$\left(\sqrt{\frac{4b}{3}} - a\right)\left(\sqrt{\frac{4b}{3}} + a\right) \geq 0$$



$$a \in \left(0; \sqrt{\frac{4b}{3}}\right]$$

⇒ f(a) расте ⇔ $a \in \left(0; \sqrt{\frac{4b}{3}}\right]$

⇒ V(a) расте ⇔ $a \in \left(0; \sqrt{\frac{4b}{3}}\right]$

⇒ V достига НГС при $a = \sqrt{\frac{4b}{3}}$

$$\boxed{\text{Отговор } a = \sqrt{\frac{4b}{3}}}$$

⑦ Решали в стр. 84/зад. 5

Околната повърхнина на правилна четириъгълна пирамида е Q. Нека x е дължината на основния ръб. Намерете за коя ст-ст на x обемът е максимален.

Дадено

ABCD E – правилна 4ъг. пирамида, $AB = x$, $S_{ок.} = Q$

$x = ?$: $V \to max.$

Решение: $x \in (0; +\infty)$

Нека $Пр._{ABCD}E = O \Rightarrow O = AC \cap BD.$

Нека M – среда на AB.

$\Rightarrow OM = \frac{x}{2}$

$AE = BE \Rightarrow EM \perp AB \Rightarrow S_{\Delta ABE} = \frac{1}{2} AB.EM$

$\Rightarrow Q = 4 S_{\Delta ABE} = 2AB.EM = 2x\,EM$

$\Rightarrow EM = \frac{Q}{2x}$

$\Rightarrow EO^2 = EM^2 - OM^2 = \frac{Q^2}{4x^2} - \frac{x^2}{4}$

$\Rightarrow V = \frac{1}{3} S_{ABCD}.EO = \frac{1}{3}x^2 . \sqrt{\frac{Q^2}{4x^2} - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{6}\sqrt{Q^2x^2 - x^6}$

Нека $f(x) = Q^2x^2 - x^6$

$f'(x) \geq 0$

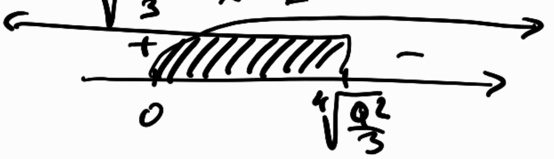
$2Q^2x - 6x^5 \geq 0 \;|: 6x \geq 0$

$\frac{Q^2}{3} - x^4 \geq 0$

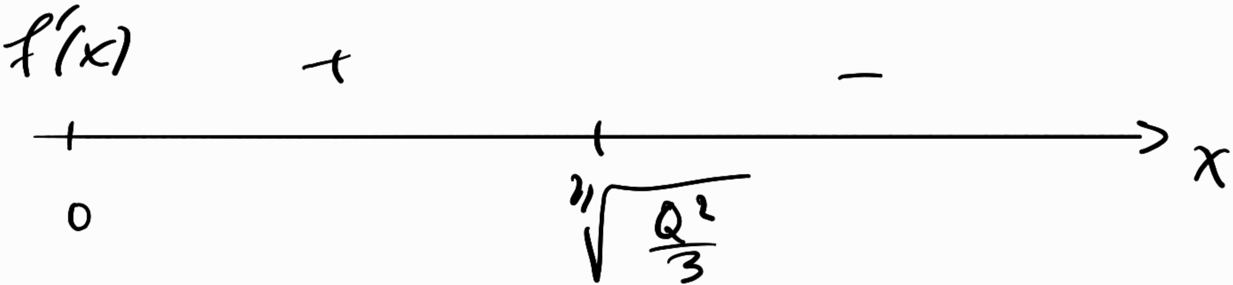
$\left(\sqrt{\frac{Q^2}{3}} - x^2\right)\left(\sqrt{\frac{Q^2}{3}} + x^2\right) \geq 0$

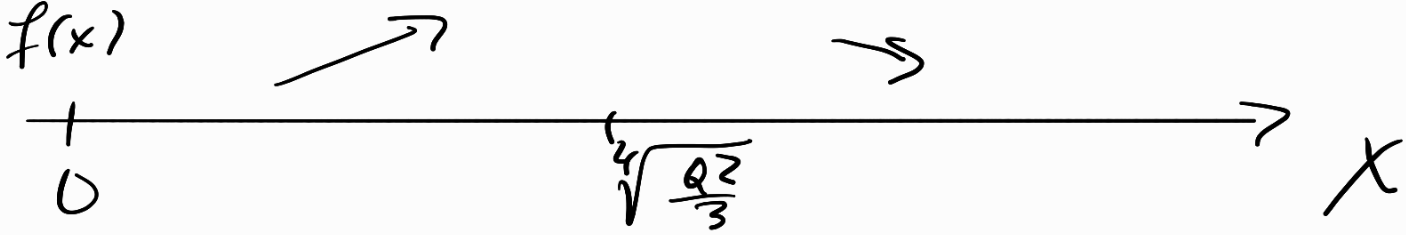
$\left(\sqrt[4]{\frac{Q^2}{3}} - x\right)\left(\sqrt[4]{\frac{Q^2}{3}} + x\right)\left(\sqrt{\frac{Q^2}{3}} + x^2\right) \geq 0$

$\sqrt[4]{\frac{Q^2}{3}} - x \geq 0$



$x \in (0; \sqrt[4]{\frac{Q^2}{3}}]$





$f(x)$ расте $\Leftrightarrow x \in (0; \sqrt[4]{\frac{Q^2}{3}}]$

$V(x)$ расте $\Leftrightarrow x \in (0; \sqrt[4]{\frac{Q^2}{3}}]$

V досяга max при $x = \sqrt[4]{\frac{Q^2}{3}}$

$$\boxed{\text{Отв: } x = \sqrt[4]{\frac{Q^2}{3}}}$$

⑧ Регалия стр. 85 / зад. 6

Периметърът на осно сечение на цилиндричен съд е 28 см. Намерете какви размери трябва да има съда, за да бъде вместимостта му най-голяма

Дадено

цилиндър с осно сечение ABCD, $P_{ABCD} = 28$.

цилиндър ?? : $V \Rightarrow \max$

Решение.

Нека $AB = 2R$, $R \in (0; 14)$

$$\Rightarrow 4R + 2BC = 28$$

$$\Rightarrow BC = 14 - 2R$$

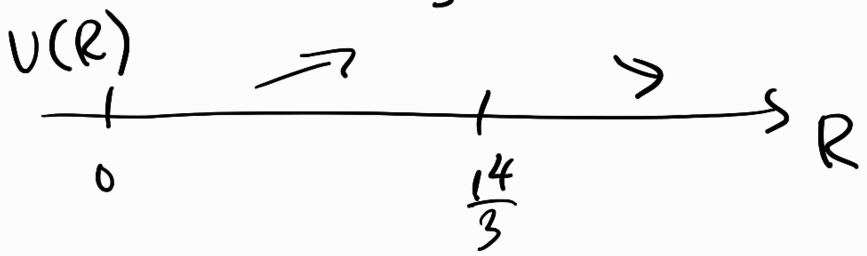
$$V = \pi R^2 h = \pi R^2 \cdot (14 - 2R) = 2\pi(7R^2 - R^3)$$

$$V'(R) \geq 0$$

$$2\pi(14R - 3R^2) \geq 0$$

$$14 - 3R \geq 0$$

$$R \in \left(0; \frac{14}{3}\right]$$



V расте $\Leftrightarrow R \in \left(0; \frac{14}{3}\right]$

$\Rightarrow$ $V_{\text{фигура}}$ max при $R = \frac{14}{3}$ см

$\Rightarrow BC = 14 - 2R = \frac{42}{3} - \frac{28}{3} = \frac{14}{3}$ см.

$$\boxed{\text{Отговор: } R = \frac{14}{3}\text{ см}; h = \frac{14}{3}\text{ см.}}$$

⑨ Решения стр. 85/зад. 7

Измежду всички прави кръгови конуси с обем 9π, намерете радиуса на основата на този с най-голям обем.

Дадено

Конус $V = 9\pi$.

$R = ?$: $S_{ок} \to min$

Решение. $R \in (0; \infty)$

$$9\pi = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

$$h = \frac{9\pi}{\frac{\pi R^2}{3}} = \frac{27}{R^2}$$

$$S_{ок} = \pi R l = \pi R \cdot \sqrt{R^2 + h^2} = \pi\sqrt{R^4 + h^2 R^2} = \pi\sqrt{R^6 + \frac{729}{R^2}}$$

$$f(R) = R^4 + \frac{729}{R^2}$$

$$f'(R) \geq 0$$

$$4R^3 - \frac{2 \cdot 729}{R^3} \geq 0 \quad \Big| \cdot \frac{R^3}{4}$$

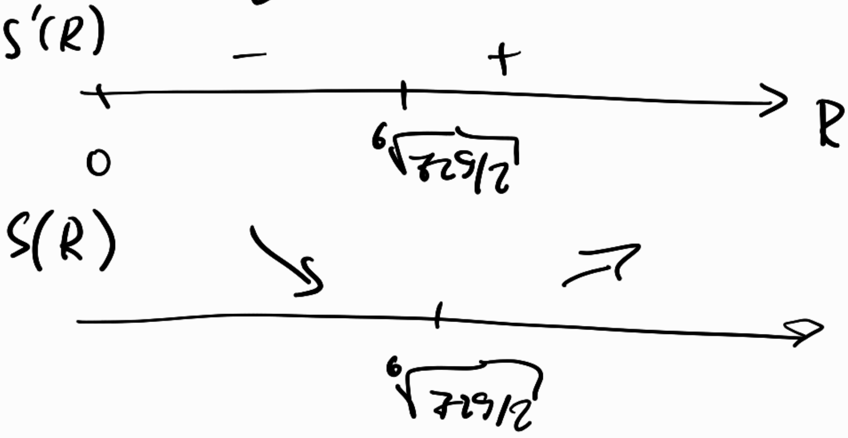
$$R^6 - \frac{729}{2} \geq 0$$

$$\left(R^3 - \sqrt[2]{729/2}\right)\left(R^3 + \sqrt[2]{729/2}\right) \geq 0$$

$$\left(R-\sqrt[6]{729/2}\right)\left(R^2+R\sqrt[6]{729/2}+\sqrt[3]{729/2}\right)\left(R^3+\sqrt[2]{729/2}\right)\geq 0$$

$$R-\sqrt{729/2}\geq 0$$

$$R\in\left[\sqrt{729/2};+\infty\right)$$



S росте ⟺ $R\in\left[\sqrt[6]{729/2};+\infty\right)$

S досяга min при $R=\sqrt[6]{729/2}$

$$\boxed{\text{Відповідь}:\ R=\sqrt{\frac{729}{2}}\ \text{см}}$$

⑩ Регалия стр. 85 / зад. 8

Измежду всички прави кръгови конуси, описани около кълбо с радиус R, намерете този, който има най-голям обем.

Дадено

Конус, описан около сфера с радиус R.

Конус ?? : $V \to max$

Решение

! Центровете на вписаната и описаната в и около конус сфера лежат върху оста на конуса (височината)

Нека C - връх; $\triangle ABC$ - осно сечение.

Нека M - среда на AB $\Rightarrow CM \perp AB$.

Нека $CM = x \in (2R; +\infty)$

- $$\frac{AB \cdot x}{2} = S = p_{ABC} \cdot R$$

$$AB\, x = (AB + BC + CA) R$$

$$AB\, x = (AB + 2CA) R$$

$$AB\, x = \left(AB + 2\sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + x^2}\right) R$$

$$AB(x - R) = R\sqrt{AB^2 + 4x^2}$$

$$AB^2(x-R)^2 = R^2(AB^2+4x^2)$$

$$AB^2(x^2-2xR+R^2) = AB^2R^2+4x^2R^2$$

$$AB^2(x^2-2xR) = 4x^2R^2$$

$$AB^2 = \frac{4x^2R^2}{x^2-2xR} = 4R^2\frac{x}{x-2R}$$

- $$V = \frac{\pi R_{\text{конус}}^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \cdot x}{3} =$$

$$= \frac{\pi}{3} x \frac{AB^2}{4} = \frac{\pi}{3} R^2 \frac{x^2}{x-2R}$$

- $V'(x) \geq 0$

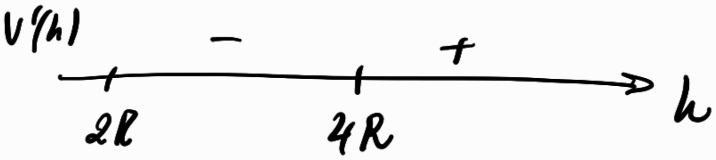
$$\frac{\pi}{3}R^2 \cdot \left(\frac{x^2}{x-2R}\right)' \geq 0$$

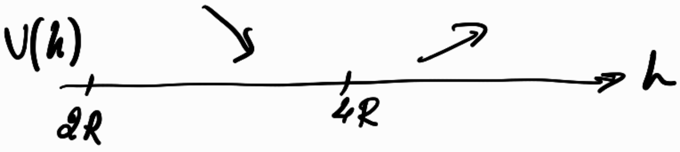
[. . .]

$$\frac{\pi R^2}{3} \cdot \frac{h(h-4R)}{(h-2R)^2} \geq 0$$

$$h-4R \geq 0$$

$$h \in [4R; +\infty)$$





V расте ⇔ $h \in [4R; +\infty)$

⇒ V не достига максимум.

⑪ Решения стр. 85/зад. 9

Определете височината на прав кръгов цилиндър с най-голям обем, който може да се впише в конус с височина 3.

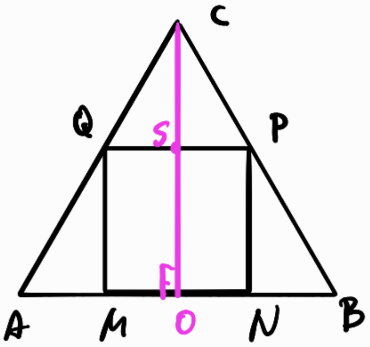
Дадено.

Цилиндър вписан в конус с височина 3

$h_{цилиндър} = ?$; $V_{цилиндър} \to max$

Решение.

Нека вземем осно сечение на тялото:



Нека $SO = x$, $x \in (0;3)$

Нека $AB = 2R$ // const.

$$\frac{QS}{CS} = \frac{AO}{CO}$$ от подобни

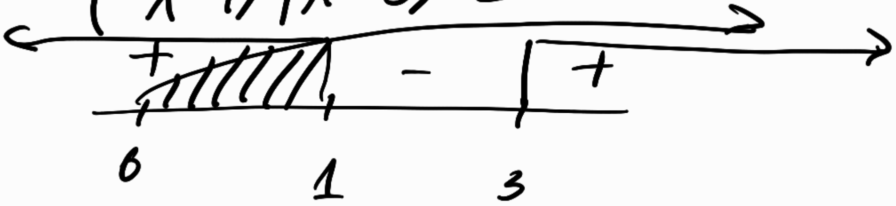
$$\Rightarrow MO = QS = \frac{AO \cdot CS}{CO} = \frac{R\cdot(CO-SO)}{CO} = \frac{R(3-x)}{3}$$

$$\Rightarrow V = V_{цилиндър} = \pi MO^2 \cdot SO = \frac{\pi R^2}{9}(3-x)^2 x$$

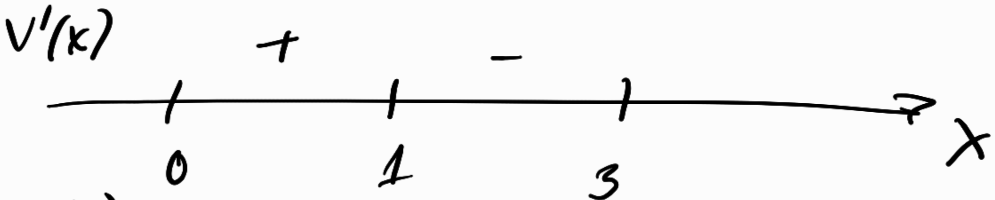
$V'(x) \geq 0$

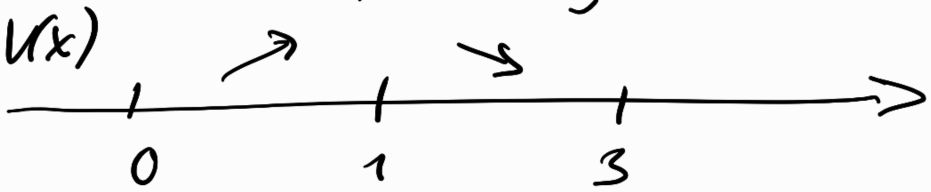
[···]

$(x-1)(x-3) \geq 0$



$x \in (0; 1]$





V растёт $\Leftrightarrow x \in (0; 1]$

$\Rightarrow$ V достигает max при $x = 1$

Ответ: 1 см.