1.4. Признаци за растене и намаляване на функция

Да преговорим. Ако функцията $f(x)$ е дефинирана в интервал U и за всеки две числа $x_1 \in U$ и $x_2 \in U$, за които $x_1 < x_2$ е изпълнено:

а) $f(x_1) \le f(x_2)$, то $f(x)$ се нарича **монотонно растяща**;

б) $f(x_1) \ge f(x_2)$, то $f(x)$ се нарича **монотонно намаляваща**.

Ако неравенствата са строги, $f(x)$ се нарича **строго растяща, (строго намаляваща).**

Ако $f(x)$ е монотонно растяща или монотонно намаляваща в U, казваме, че $f(x)$ е **монотонна** в U (строго монотонна).

Едно необходимо и достатъчно условие за монотонност на функция дава следната
Теорема (критерий за монотонност)
Нека функцията $f(x)$ е диференцируема в интервал U.

$f(x)$ е растяща точно когато $f'(x) \ge 0$ за всяко $x \in U$ и $f(x)$ е намаляваща точно когато $f'(x) \le 0$ за всяко $x \in U$. Когато неравенствата са строги, $f(x)$ е строго монотонна и обратно.

1. Да се намерят интервалите на растене и намаляване на функцията:

а) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 7$; б) $f(x) = \sqrt{x - x^2}$; в) $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Решение. а) $f(x)$ е дефинирана и диференцируема за всяко x.

Намираме $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

Определяме знака на $f'(x)$ за всяко x.

$3x^2 - 4x + 1 = 0$, $x_1 = \dfrac{1}{3}$, $x_2 = 1$

f': $-\infty$ $+$ $\dfrac{1}{3}$ $-$ 1 $+$ $+\infty$

Попълваме резултата в таблица.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Отговор. $f(x)$ е растяща в $(-\infty; \frac{1}{3})$, намаляваща в $(\frac{1}{3}; 1)$ и растяща в $(1; +\infty)$.▲

Решение. б) $f(x) = \sqrt{x - x^2}$.

Функцията е дефинирана при $x \in [0;1]$ и диференцируема при $x \in (0;1)$ и $f'(x) = \dfrac{1 - 2x}{2\sqrt{x - x^2}}$.

Тъй като $\sqrt{x - x^2} > 0$ за всяко $x \in (0;1)$, то $f'(x) > 0$ за $x \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$ и $f'(x) < 0$ за $x \in \left(\dfrac{1}{2}; 1\right)$.

Тогава $f(x)$ е растяща в $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$ и намаляваща в $\left(\dfrac{1}{2}; 1\right)$.▲

Решение. в) $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

$f(x)$ е дефинирана и диференцируема при $x \in M = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ за всяко $x \in M$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$

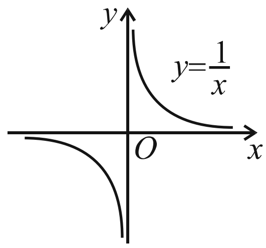
Тъй като $M = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ не е интервал (а обединение от интервали), то не можем да приложим критерия за монотонност за M.

Да разгледаме $f(x)$ в **интервала** $(-\infty; 0)$:

$f'(x) < 0$ и следователно $f(x)$ е намаляваща в $(-\infty; 0)$.

Да разгледаме $f(x)$ в **интервала** $(0;+\infty)$:

$f'(x)<0$ и следователно $f(x)$ е намаляваща в $(0;+\infty)$.



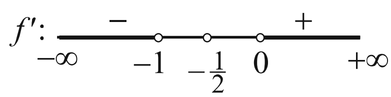
Получихме, че $f(x)$ е намаляваща във всеки от интервалите $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$, но, разглеждана като функция в обединението $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, въпросът за нейната монотонност е безсмислен.

Графиката на функцията е показана на чертежа.▲

<u>Коментар</u>. Този пример показва, че изискването на теоремата $f(x)$ да бъде дефинирана в **интервал,** е съществено.▲

2. Да се намерят интервалите на монотонност на функцията $f(x)=\sqrt{x^2+x}$.

Решение. Функцията е дефинирана при $x\in(-\infty,-1]\bigcup[0,+\infty)$ и диференцируема при $x\in(-\infty,-1)\bigcup(0,+\infty)$ и $f'(x)=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$.



$f'(x)<0$ при $x\in(-\infty,-1)$; $f'(x)>0$ при $x\in(0,+\infty)$.

Тогава $f(x)$ намалява в $(-\infty,-1)$ и расте в $(0,+\infty)$.▲

<u>Коментар</u>. Уравнението $f'(x)=0$ няма решение поради дефиниционната област на производната. Числителят $2x+1=0$, $x=-\dfrac{1}{2}$ и това позволява да определим знака на $f'(x)$ там, където f' е дефинирана .▲

3. Да се намерят интервалите на монотонност на функцията.

а) $f(x)=x^3+3x^2-24x+3$; б) $f(x)=2x^3+3x^2+6x+5$;

в) $f(x)=x^3+9x^2+27x-3$; г) $f(x)=-2x^3+3x^2+36x+1$;

д) $f(x)=3x^4+8x^3-30x^2-72x-36$; е) $f(x)=3x^5+5x^3-30x+1$;

ж) $f(x)=x^5+2x^3+2x+3$; з) $f(x)=x^5-3x^3+4x+4$.

4. Да се намерят интервалите на монотонност на функцията.

а) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$; б) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$;

в) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; г) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

5. Да се намерят интервалите на монотонност на функцията.

а) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$; б) $f(x)=\sqrt{x^2+2x-3}$; в) $f(x)=\sqrt{5x-6-x^2}$;

г) $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$; д) $f(x)=\sqrt{3-x^2}$; е) $f(x)=\sqrt{x^2+3}$.

6. Да се намерят интервалите на монотонност на функцията.

а) $f(x)=\ln(x^2+x)$; б) $f(x)=e^{x^2+x}$; в) $f(x)=\ln(x^2+x)-x$.