1. Приложения на математическия анализ

1.0. Математически анализ – преговор

1) Граница на функция

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана за $x \in D$ и нека $a \in D$.

Казваме, че функцията $f(x)$ има граница A при x клонящо към a, ако за всяка редица $\{x_n\}$, клоняща към a със стойности от D и различни от a, редицата $\{f(x_n)\}$ е сходяща и има граница A.

Означаваме $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = A$ се нарича лява граница при $x \to a, x < a$.

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = A$ се нарича дясна граница при $x \to a, x > a$.

Теорема. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ точно когато $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = A$.

Основни граници:

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$;

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$;

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$; $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Желателно е да се помнят и границите:

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin \alpha x}{\operatorname{tg} \beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 \alpha x}{x^2} = \alpha^2$.

1. Да се намери границата.

а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{1-\sqrt{x+1}}$;

б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x^2+x}$;

в) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x^3+3x^2}{1-\cos x}$;

г) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\sin x \left(\operatorname{cotg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)\right]$;

д) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1-\cos 2x}{\operatorname{tg} x} . \frac{2x^2+\ln 2}{1+\ln 2}\right)$;

е) $\lim\limits_{x \to 0} \left[3x^2 \left(\frac{1}{\sin x \operatorname{tg} x} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}\right)\right]$.

2) Непрекъснатост на функции

Определение. Нека $f(x)$ е дефинирана в област D и $a \in D$. Казваме, че $f(x)$ е непрекъсната в точката a, ако $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Ако $f(x)$ е непрекъсната във всяка точка от D, казваме, че $f(x)$ е непрекъсната в множеството D.

Ако $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = f(a)$, то $f(x)$ е непрекъсната отляво в точката a.

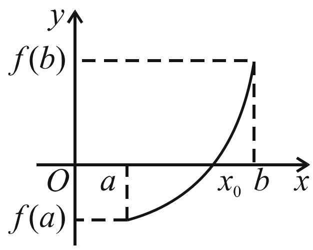
Ако $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = f(a)$, то $f(x)$ е непрекъсната отдясно в точката a.

Теорема 1. Функцията $f(x)$ е непрекъсната в точка a точно когато е непрекъсната отляво и отдясно в точката a.

Твърдение. Степенната функция, тригонометричните функции, показателната функция и логаритмичната функция са непрекъснати в съответните им дефиниционни области.

Теорема 2. (Теорема на Болцано)

Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a,b]$ и в краищата на интервала приема различни знаци, то съществува точка x_0 от отворения интервал (a,b), за която $f(x_0)=0$.



Теорема 3. (Теорема за междинните стойности)

Ако $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a,b]$ и $f(a) \neq f(b)$, то за всяко число c между стойностите $f(a)$ и $f(b)$ съществува число x_0 от отворения интервал (a,b), така че $f(x_0)=c$.

Теорема 4. (Теорема на Вайерщрас)

Ако една функция е непрекъсната в краен и затворен интервал, то тя достига в него най-голямата си и най-малката си стойност.

Като използваме теоремата на Болцано, ще докажем следното твърдение.

Твърдение. Ако функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната за всяко x, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, то съществува число α, така че $f(\alpha)=0$.

Доказателство.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \Rightarrow$ съществува число x_1, така че $f(x_1)<0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow$ съществува число x_2, така че $f(x_2)>0$.

Тогава $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в крайния и затворен интервал $[x_1, x_2]$ и в краищата му приема стойности с различни знаци и според теоремата на Болцано съществува число α, за което $f(\alpha)=0$.▲

2. Да се докаже, че функцията $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^2-9}{2x-3}, & \text{при } x \neq \dfrac{3}{2} \\ 6, & \text{при } x = \dfrac{3}{2} \end{cases}$ е непрекъсната при $x=\dfrac{3}{2}$.

3. За коя стойност на реалния параметър a функцията $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+(2-a)x-2a}{x+2}, & \text{при } x\neq -2\\ 2, & \text{при } x=-2\end{cases}$ е

непрекъсната при $x=-2$?

4. Намерете точките, в които функцията $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\sin 2x}{1-\cos 2x}, & \text{при} -\dfrac{\pi}{4}<x<0\\ \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{при} \, 0\leq x\leq 1\\ \dfrac{4x^2-5x+1}{4\sqrt{x+3}-8}, & \text{при} \, x>1\end{cases}$ е прекъсната.

3) Производна на функция

Определение. Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в D и $x_0\in D$. Границата (ако съществува) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$ се нарича производна на $f(x)$ в точката x_0, а $f(x)$ се нарича диференцируема в x_0.

Когато $f(x)$ е диференцируема във всяка точка от D, получаваме нова функция $f'(x)$, която се нарича производна на $f(x)$.

Производните на основните елементарни функции се наричат таблични производни. Към вече изучените производни ще добавим и производните на функциите e^x, a^x ($a>0$), $\ln x$ и $\log_a x$ ($a>0, a\neq 1$).

$(e^x)'=e^x$; $(a^x)'=a^x\ln a,\ a>0$;

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$; $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a},\ a>0,\ a\neq 1$.

За да намираме производните на различни функции, използваме и правилата за диференциране.

Таблични производни	
$(c)'=0$, c – константа	$(e^x)'=e^x$;
$(x)'=1$	$(a^x)'=a^x\ln a,\quad a>0$
$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1},\ \alpha\in\mathbb{R}$	$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$
$(\sin x)'=\cos x$	$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$
$(\cos x)'=-\sin x$	$a>0,\ a\neq 1$
$(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	
$(\operatorname{cotg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	

Правила за диференциране
$(c\,f)'=c\,f'$, c – константа
$(f+g)'=f'+g'$
$(f-g)'=f'-g'$
$(f\,g)'=f'\,g+f\,g'$
$\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'\,g-f\,g'}{g^2}$
$(g(f))'=g'(f).f'$

Забележка. Когато в израза, дефиниращ една функция, участва буква, която е параметър, то тя се диференцира като константа. Пример $(2ax+3a)'=2a$, a е параметър.

5. Да се намери производната на функцията.

а) $2x^3 - 3x^2 + m^2x + m$, където m е параметър;

б) $\sqrt{x^2 + 5m}$, където m е параметър;

в) $\dfrac{1}{a\sin x}$, където a е параметър; г) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{ax}}$, където a е параметър;

д) $\dfrac{2x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$; е) $\dfrac{x+2}{x-2}$.

6. Да се намери производната на функцията.

а) $5e^x$; б) $e^{2x} + x^2$; в) $e^x(x^2+3)$;

г) $e^{\frac{a}{x}}$, където a е параметър; д) $e^{\frac{x+1}{x-1}}$; е) $\dfrac{1}{e^x}$.

7. Да се намери производната на функцията.

а) 2^x ; б) $x^2 + 2^x$; в) $\dfrac{x^3+3^x}{x}$;

г) $e^{2x} + 4^x$; д) 5^{2x-1} ; е) $\dfrac{3^x}{x^3}$.

8. Да се намери производната на функцията.

а) $\ln x + x$; б) $x\ln x$; в) $\ln(x+1)$; г) $\ln x^2$;

д) $\ln(x^2+1)$; е) $\ln\ln x$; ж) $\ln^2 x$; з) $\dfrac{1}{\ln x}$;

и) $\sqrt{\ln x}$; к) $e^x \ln x$; л) $\ln(x^2+2x-3)$; м) $\sqrt{1+\ln x}$.

9. Да се намери производната на функцията.

а) $e^x(x^2+2x+5)$;

б) $\ln(x^2+2x+5)$.

10. Да се намери производната на функцията.

а) $\lg x$; б) $\log_3(x^2+3)$; в) $x\log_2 x$; г) $\log_2 \log_2 x$.

11. Да се намери производната на функцията.

а) $\ln 3x$; б) $\ln\dfrac{1}{x}$; в) $\ln\dfrac{x}{x^2+1}$;

г) $\ln\dfrac{2x-3}{3x+2}$; д) $\ln\left[(x+1)\sin x\right]$.

12. Пресметнете:

а) $f'(3)$, където $f(x) = \dfrac{x^3}{4-x}$;

б) $f'(\sqrt{2})$, където $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{x}$.

Тест 1 – входно ниво

1. Да се намери границата $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+x}\right)$.

2. Да се намери границата $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}$.

3. Да се намери границата $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\sin 3x}(2\sin x\cos x-\sin^3 2x)\right]$.

4. За коя стойност на реалния параметър a, $a\neq 0$ функцията $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x-12}{x^2-3x+12}, & \text{при } x\leq 1\\ \dfrac{x^2-1}{ax-a}, & \text{при } x>1\end{cases}$ е непрекъсната за всяко x?

Задачи 5 – 8. Да се намери производната на функцията $f(x)$.

5. $f(x)=\sqrt{2x+1}$.

6. $f(x)=3\sqrt{x}-\dfrac{2}{x}$.

7. $f(x)=e^x(4x^2-8x+9)$.

8. $f(x)=\ln\dfrac{2x}{x+3}$.

9. Да се намери $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, където $f(x)=\sin^2 x.\operatorname{tg} x$.

Тест 2 – входно ниво

1. Да се намери границата $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-x^2}{2-\sqrt{2x}}$.

2. Да се намери границата $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$.

3. Да се намери границата $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^4-3x^2+5}{3x^3+x}$.

4. Намерете точките, в които е прекъсната функцията $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}+x, & \text{при } x<2,\ x\neq 0\\ \dfrac{2x-4}{x+1}, & \text{при } 2\leq x\leq 3\\ \dfrac{\sqrt{x^2-5}-2}{\sqrt{x-3}}, & \text{при } x>3\end{cases}$.

5. Да се намери $f'(25)$, където $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x-25$.

Задачи 6 – 7. Намерете производната на функцията.

6. $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$.

7. $f(x)=\ln\dfrac{5}{x^2-5}$.

8. Дадена е функцията $f(x)=(m+1)x^2-2mx+3$. За коя стойност на параметъра m уравнението $f'(x)=0$ има корен $x=\dfrac{1}{2}$?

9. Да се намери стойността на израза $25f'(3)-5f'(2)$, където $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+1}$.