стр. 67 / зад. 3

Дадено:

$f(x) = -x^2 + 7x + 3$

$g(x) = -3x^2 + 2x^2 + 6x - 1$

$h(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 3x - 6$

$r(x) = -2x^3 + x^2 - 5x + 7$

Т-се:

Колко функции имат само 1 инфлексна точка?

Решение:

! Дефиниционно множество:

f, g, h, r са дефинирани в $x \in (-\infty; +\infty)$

$f''(x) = (-x^2 + 7x + 3)'' = (-2x + 7)' = -2$

$g''(x) = (-3x^3 + 2x^2 + 6x - 1)'' = (-9x^2 + 4x + 6)' = -18x + 4$

$h''(x) = (x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 3x - 6)'' = 12x^2 + 12x + 4$

$r''(x) = (-2x^3 + x^2 - 5x + 7)'' = -12x + 2$

Твърдение: за произволна функция f:

① $f''(x) \geq 0 \ \forall x \in I \Leftrightarrow f(x)$ е изпъкнала в $x \in I$

② $f''(x) \leq 0 \ \forall x \in I \Leftrightarrow f(x)$ е вдлъбната в $x \in I$

③ т. $x = a$ е инфлексна $\Leftrightarrow$ в т. $x = a$ $f(x)$ променя изпъкналостта / вдлъбнатостта си.

$f''(x) = -2 \leq 0 \ \forall x \in (-\infty; +\infty)$

$\Rightarrow f(x)$ е вдлъбната в $x \in (-\infty; +\infty)$

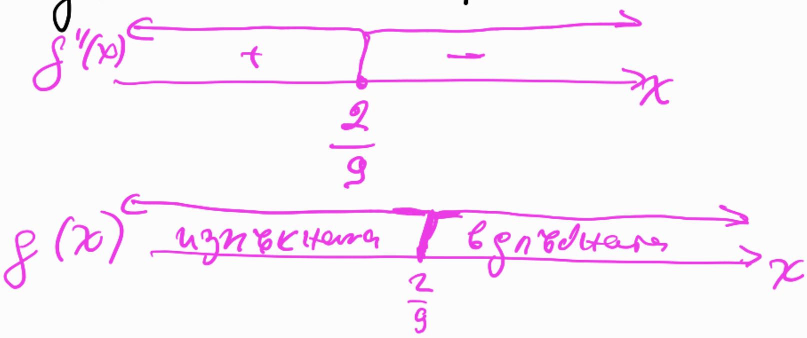
$\Rightarrow f(x)$ има 0 инфлексни точки.

$g''(x) \leq 0$

$$-18x+4 \le 0$$
$$18x \ge 4$$
$$x \ge \frac{2}{9}$$
$$x \in \left[\frac{2}{9}; +\infty\right)$$

$\Rightarrow g(x)$ е вдлъбната в $\left[\frac{2}{9}; +\infty\right)$ и изпъкнала в $\left(-\infty; \frac{2}{9}\right]$

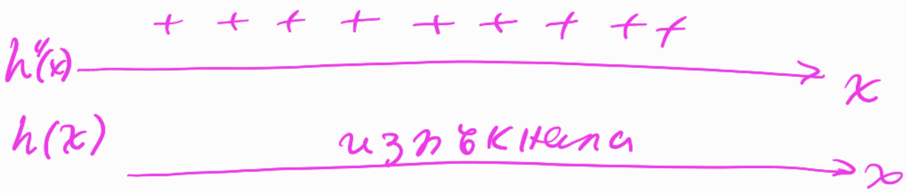
$\Rightarrow g(x)$ има 1 инфлексна точка.



$$h''(x) \le 0$$
$$12x^2+12x+4 \le 0$$
$$x^2+x+\frac{1}{3} \le 0$$
$$x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4} \le 0$$
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12} \le 0$$
$$x \in \varnothing$$

$\Rightarrow h(x)$ е вдлъбната за $x \in \varnothing$ и
$h(x)$ е изпъкнала за $x \in (-\infty; +\infty)$

$\Rightarrow h(x)$ няма инфлексни точки



$$z''(x) \le 0$$
$$-12x+2 \le 0$$
$$12x \ge 2$$
$$x \ge \frac{1}{6}$$
$$x \in \left[\frac{1}{6}; +\infty\right)$$

$\Rightarrow z(x)$ е вдлъбната в $x \in \left[\frac{1}{6}; +\infty\right)$
$z(x)$ е изпъкнала в $x \in \left(-\infty; \frac{1}{6}\right]$

$\Rightarrow \tau(x)$ има 1 инфлексна точка

$\boxed{\Rightarrow \text{Одговор Б: } 2}$