Годишен преговор

Вектори. Векторна база

1. Дадени са неколинеарните вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и нека $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$. Да се докаже, че необходимо и достатъчно условие $\vec{p}$ и $\vec{q}$ да са перпендикулярни е $|\vec{a}|=|\vec{b}|$. Да се даде геометрично тълкуване на получения резултат.

2. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, като $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=1$ и $\angle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{3}$. Да се намери λ, така че векторите $\vec{p}=\lambda\vec{a}+2\vec{b}$ и $\vec{q}=-\vec{a}+\vec{b}$ да бъдат перпендикулярни.

3. Да се докаже, че ако един вектор е перпендикулярен на три линейно независими вектора, то той е нулев.

4. Дадени са векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, като $|\vec{a}|=\dfrac{3}{2}$ и $|\vec{b}|=1$. Да се пресметне ъгълът между тях, така че векторите $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$ да образуват ъгъл, равен на $\dfrac{\pi}{3}$.

5. Да се намери скаларното произведение на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ако:

а) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=60°$;

б) $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=1$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=135°$;

в) $|\vec{a}|=\dfrac{2}{3}$, $|\vec{b}|=5$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=30°$;

г) $\vec{a}=\vec{b}$ и $|\vec{a}|=7$.

6. Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуват нормирана база в равнината. Да се намери ъгълът между тях, така че векторът;

а) $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}$ да има дължина $\sqrt{3}$;

б) $\vec{u}=\vec{a}-2\vec{b}$ да има дължина $\sqrt{2}$.

7. Векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са такива, че $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$ и $\angle(\vec{a};\vec{b})=\dfrac{\pi}{3}$. Намерете дължината на:

а) $\vec{c}$, ако $|\vec{a}|=3$ и $|\vec{b}|=10$;

б) $\vec{a}$, ако $|\vec{b}|=7$ и $|\vec{c}|=13$;

в) $\vec{b}$, ако $|\vec{a}|=5$ и $|\vec{c}|=14$;

г) $\vec{c}$, ако $\vec{a}\vec{b}=20$ и $|\vec{a}-\vec{b}|=7$.

8. За векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ от пространствена база е изпълнено $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=1$ $\angle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{2}$, $\angle(\vec{b},\vec{c})=\dfrac{\pi}{4}$, $\angle(\vec{a},\vec{c})=\dfrac{\pi}{2}$. Да се намери дължината на вектора:

а) $\vec{u}=2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$;

б) $\vec{p}=3\vec{a}+\vec{c}$;

в) $\vec{q}=\vec{a}-2\vec{b}-3\vec{c}$.

9. Дадени са векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, като $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=\angle(\vec{b},\vec{c})=\frac{\pi}{3}$, $\angle(\vec{a},\vec{c})=\frac{\pi}{2}$. Да се намери дължината на вектора:

а) $\vec{u}=\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$;

б) $\vec{v}=\vec{a}-\vec{b}-2\vec{c}$;

в) $\vec{p}=2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.

10. Дадени са векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, като $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=\angle(\vec{b},\vec{c})=\frac{\pi}{2}$, $\angle(\vec{a},\vec{c})=\frac{\pi}{3}$. Да се намери косинусът на ъгъла между векторите:

а) $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ и $\vec{q}=\vec{a}+2\vec{b}$;

б) $\vec{p}=\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$ и $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$;

в) $\vec{p}=\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ и $\vec{q}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

11. Намерете ъгъла между векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ако $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=3$ и $\vec{a}\vec{b}=-1,5$.

☒ **А)** $60°$ **Б)** $90°$ **В)** $120°$ **Г)** $135°$

12. Векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са такива, че $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$ и $\angle(\vec{a};\vec{b})=\frac{\pi}{3}$. Скаларното произведение на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е равно на:

☒ **А)** 3 **Б)** $3\sqrt{3}$ **В)** 2π **Г)** $\frac{\sqrt{6}}{2}$

<u>Вектори. Координати на вектор</u>

13. Дадени са точките $M(2;1)$ и $N(\sqrt{2};-2\sqrt{2})$. Да се намери разстоянието между тях.

14. Дадени са векторите $\vec{a}(-1;0)$ и $\vec{b}(3;2)$ в правоъгълна координатна система. Намерете:

а) $\vec{a}\vec{b}$;

б) $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$;

в) $\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$.

15. Точка M е средата на отсечката AB. Да се намерят координатите на точка:

а) M, ако $A(2,1)$ и $B(5,2)$;

б) B, ако $A(4,-3)$ и $M(1,3)$;

16. Дадени са векторите $\vec{a}(2;-1)$, $\vec{b}(-2;1)$ и $\vec{c}(-1;3)$. Да се намерят координатите на вектора:

а) $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$;

б) $\vec{v}=\vec{c}-4\vec{b}$;

в) $\vec{p}=\frac{1}{2}\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}$.

Аналитична геометрия

17. Правата g е определена от точките $M_1(0;2)$ и $M_2(2;5)$. Намерете:

а) вектор $\vec{p}$, колинеарен на правата;

б) ъгловия коефициент k.

18. Дадена е права g, определена от ъгловия си коефициент $k=2$ и точка $M(0;-3)$. Намерете вектор $\vec{p}$, колинеарен с правата.

19. Дадена е правата g, определена от $\vec{p}(4;1)$ и $M(0;2)$. Намерете ъгловия коефициент на правата. Намерете декартовото и общото уравнение на правата.

20. Дадени са права g и точка $M \in g$, такава че отношението на разстоянието от точка M до оста Ox към разстоянието от точка M до оста Oy е равно на a. Да се намерят координатите на точка M и да се начертаят M и g, ако:

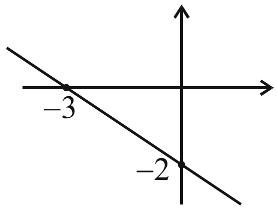
а) $g: 2x-5y-10=0$ и $a=\frac{3}{5}$;

б) $g: x+2y+7=0$ и $a=\frac{2}{3}$.

21. Дадени са правите $a:\ y=3x$, $b:\ y=3x-1$, $c:\ y=-3x$ и $d:\ y=-\frac{x}{3}$. През точките $M(1;3)$ и $N(3;-1)$ минават съответно правите:

☒ **А)** a и b **Б)** c и d **В)** b и c **Г)** a и d

22. Правата от чертежа има уравнение:



☒ **А)** $y=-\frac{2}{3}x-2$ **Б)** $y=-\frac{3}{2}x-2$

В) $y=-3x-2$ **Г)** $2y=-3x-6$

23. Определете взаимното положение на двойката прави. Ако правите се пресичат, намерете пресечната им точка и косинуса на ъгъла между тях.

а) $2x+2y-5=0$ и $2y=3$;

б) $x+2y-6=0$ и $y=3-\frac{x}{2}$;

в) $4x+y-1=0$ и $x-2y+2=0$;

г) $x+3y=0$ и $3x+2y-7=0$.

24. Да се намери разстоянието от точка $A(-2,1)$ до правата $g:\ 2x+y-7=0$.

25. Да се намерят координатите на точка B, симетрична на точка $A(1;-2)$ спрямо права $p:\ 4x-3y+15=0$.

26. Дадени са точките $A(-2;1)$, $B(6;-3)$ и $C(2;4)$. За триъгълник ABC да се намерят:

а) координатите на медицентъра G;

б) координатите на средите M_a, M_b и M_c съответно на страните BC, AC и AB.

в) уравненията на правите a, b и c, на които лежат съответно страните BC, AC и AB на триъгълника;

г) уравненията на правите m_a, m_b и m_c, на които лежат медианите съответно от връх A, B и C.

д) уравненията на правите h_a, h_b и h_c, на които лежат височините съответно от A, B и C.

е) координатите на H_a, H_b и H_c – петите на височините съответно от A, B и C.

ж) периметърът на ΔABC;

з) лицето на ΔABC.

Стереометрия

27. Прав кръгов конус има ъгъл при върха на осното сечение, равен на 2α и сума от дължините на височината и образуващата, равна на a. Намерете повърхнината и обема на конуса. (Резултатът да се приведе във вид на произведение.)

28. Височината на правилна четириъгълна пирамида е h и големината на ъгъла между два съседни околни ръба е α. Да се намерят околната повърхнина и обемът на пирамидата. (Получените изрази да се приведат във вид на произведение.)

29. Околните ръбове и ръбовете на горната основа на правилна четириъгълна пресечена пирамида са равни. Периметърът на околна стена на пресечената пирамида е 26 cm. Намерете височината и околната повърхнина на пресечената пирамида, ако апотемата ѝ е 4 cm.

30. В правилна триъгълна пирамида големината на ъгъла между два пресичащи се ръба – околен и основен, е α. Радиусът на вписаната в основата окръжност е r. Намерете повърхнината на пирамидата. (Резултатът да се приведе във вид на произведение.)

31. В правилна четириъгълна пирамида двустенният ъгъл между две съседни околни стени е α. Да се определи косинусът на ъгъла β между два съседни околни ръба.

32. Прав кръгов цилиндър има обем a m^3, околна повърхнина $3a$ m^2 и повърхнина $5a$ m^2. Намерете a, радиуса и височината на цилиндъра.

33. Правоъгълен триъгълник с катети $a=3$ cm, $b=4$ cm е завъртян около хипотенузата. Да се намерят обемът и повърхнината на полученото тяло.

34. Околната повърхнина на конус K е полукръг с радиус, равен на радиуса на друг конус K_1. Колко пъти лицето на околната повърхнина на K_1 е по-голямо от лицето на околната повърхнина на K, ако височините им са равни?

35. Околните ръбове на една пирамида имат дължина l. Основата ѝ е правоъгълник, два съседни околни ръба сключват помежду си ъгъл α, а другите два – ъгъл 2α. Да се намери обемът на пирамидата.

36. Радиусите на основите на прав кръгов пресечен конус са 13 cm и 20 cm, а образуващата му е 25 cm. С равнина, успоредна на оста и на разстояние 12 cm от нея, е построено сечение на конуса. Да се намери лицето на сечението.

37. През средите на два основни ръба в правилна триъгълна пирамида е прекарано сечение, успоредно на височината ѝ. Да се намери обемът на пирамидата, ако височината на сечението е h и околна стена образува с основата ъгъл α.

38. Кълбо е пресечено с равнина, която разполовява радиуса му и е перпендикулярна на него. Да се намери повърхнината на кълбото, ако лицето на сечението е Q.

39. Двустенният ъгъл при основата на правилна четириъгълна пирамида е α, а основният ѝ ръб има дължина a. Да се намери лицето на сечението, което минава през основния ръб и образува с равнината на основата ъгъл $30°$.

40. Диагоналът d на правоъгълен паралелепипед образува с двете съседни околни стени ъгли, всеки от които е равен на β. Да се намерят обемът на паралелепипеда и ъгълът φ, образуван от общия ръб на тези стени и отсечката, съединяваща общия връх на тези ъгли с центъра на срещуположната основа.

41. Права триъгълна призма има за основа равнобедрен триъгълник с ъгъл при върха β и основа, равна на b. Намерете обема на призмата, ако диагоналът на една от еднаквите околни стени образува с равнината на основата ъгъл α.

42. В правилна триъгълна пирамида е прекарана равнина през средите на два основни ръба и перпендикулярна на равнината на основата. Да се намери обемът на отсечената пирамида, ако основният ръб на дадената пирамида е a и двустенният ъгъл при основата ѝ е $30°$.

43. Околната повърхнина на прав кръгов пресечен конус е S, а образуващата сключва с оста му ъгъл α. Да се намерят радиусите на пресечения конус, ако отношението им е $2:3$.

44. Правоъгълен триъгълник с хипотенуза 5 cm е завъртян около ос в равнината на триъгълника, която минава през единия край на хипотенузата и е перпендикулярна на нея. Да се намерят обемът и повърхнината на образуваното тяло, ако катетът, който минава през същия край на хипотенузата, е 3 cm.

45. Обемът на триъгълна пирамида е V, а две от околните ѝ стени са равнобедрени правоъгълни триъгълници, чиито хипотенузи са равни и образуват помежду си ъгъл α. Да се намери дължината на хипотенузата.

46. Височината на правилна триъгълна призма е h, а правата, минаваща през центъра на горната основа и средата на страна на долната основа, образува с равнината на долната основа ъгъл α. Намерете повърхнината на призмата.

47. В правилна четириъгълна призма са дадени основният ръб a и ъгъл α между телесния диагонал и диагонала на околна стена (който лежи в диагоналното сечение на телесния диагонал). Намерете обема на призмата. (Изразът да се приведе във вид на произведение.)

48. Обемът на правилна четириъгълна пирамида е равен на V, а ъгълът между околната стена и основата е равен на α. Намерете повърхнината на пирамидата.

49. Основата на правоъгълен паралелепипед е вписана в окръжност с радиус r. Прилежащата дъга от окръжността на малката страна на основата е 2α. Да се намери обемът на паралелепипеда, ако околната му повърхнина е S. (Резултатът да се приведе във вид на произведение.)

50. Прав кръгов цилиндър е пресечен с равнина, успоредна на височината му, която разделя окръжността на основата, така че по-малката дъга е α. Диагоналът на полученото сечение е d и сключва $60°$ с равнината на основата на цилиндъра. Да се намери обемът на цилиндъра.

51. При завъртане на квадрат около една от страните му се получава цилиндър с обем 8. Намерете обема на цилиндър, на който осното сечение е същият квадрат.

52. В правилна триъгълна призма два върха на горната основа са съединени със средите на срещуположните им ръбове на долната основа. Ъгълът между получените отсечки, обърнат с отвора си към равнините на основите, е α, а основният ръб на призмата е a. Да се намери обемът на призмата. (Резултатът да се приведе във вид на произведение.)

53. Основата на права призма е правоъгълен триъгълник с хипотенуза c и остър ъгъл α. През хипотенузата на долната основа и върха на правия ъгъл на горната основа е прекарана равнина, която образува с долната основа ъгъл β. Намерете обема на триъгълната пирамида, отсечена от призмата.

54. През един основен ръб на правилна триъгълна призма е прекарана равнина, минаваща през средата на срещуположния околен ръб и образуваща с равнината на основата ъгъл α. Намерете лицето на сечението и околната повърхнина на призмата, ако основният ѝ ръб е a.

55. Основата $ABCD$ на пирамидата $ABCDF$ е ромб, за който $\angle BAD = 60°$. Ортогоналната проекция O на върха F върху равнината на основата е центърът на вписаната в ΔABD окръжност с радиус r. Ако острият ъгъл, който равнината (BDF) сключва с равнината на основата, е два пъти по-голям от ъгъла, който FC сключва с основата, да се намери обемът на пирамидата.