(+) растене, намаляване, екстремуми
(+) изп., вдл., инфлексни точки
(+) асимптоти
(+) допирателни към криви от $2^{ра}$ степен

① въпроси

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{} \left(\frac{\cos x}{\cancel{\sin^2 x}} \cdot \frac{x^2}{x^2} + \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}}{x^2+1-x-1} \right)$$

$$\lim_{x\to 0} 3\left(\cos x + \frac{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\right)}{x^2-x}\right.$$

$$3\lim_{x\to 0}\left[\cos x + \frac{x\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\right)}{(x-1)}\right]$$

$\cos x \to 1$, $x \to 0$, $(x-1) \to -1$

$\to 0$

$= 3$

$$\lim \frac{x^2-3x}{(x-3)(x-2)}$$

$\frac{1}{x-2}$ $\quad f'(2)$ $\quad x_0 = 2$

$\sqrt{x}$ $\quad f'(0)$ $\quad x_0 = 0$

$f(x) = x^n \qquad f^{(n)}(x) = n! \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

Искаме за докажем за всички функции

$f(x) = x^1 \rightarrow f^{(1)}(x) = 1!$

$f(x) = x^2 \rightarrow f^{(2)}(x) = 2!$

$f(x) = x^3 \rightarrow f^{(3)}(x) = 3! = 6$

Решение.

База: за $n = 1$, $f(x) = x^1$

$$f^{(1)}(x) = 1 = 1!$$

Предп. Нека $n = m$ - някое ест. ч-ло и

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x^m \quad \text{и} \\ f^{(m)}(x) &= m! \end{aligned}\right\} (x^m)^{(m)} = m!$$

Стъпка. разгл. $n = m+1$ - следващото ест. ч-ло

$$f(x) = x^{m+1}$$

$$\cancel{f^{(m+1)}(x) = (x^{m+1})^{(m+1)} = (m+1)(x^m)^m}$$

$$f^{(m+1)}(x) = ((x^{m+1})')^{(m)} = ((m+1).x^m)^{(m)} =$$

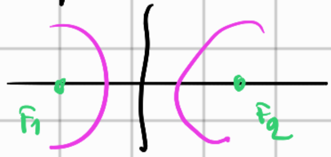
$$= (m+1).(x^m)^{(m)} \overset{П}{=} (m+1).m! =$$

$$= (m+1)!$$

По ММИ $\forall n$ $f^{(n)}(x) = n!$ за $f(x) = x^n$

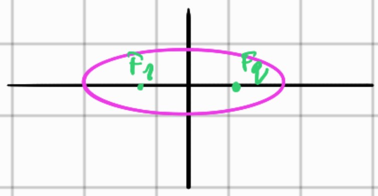
Допирателни към криви от втора степен

→ хипербола



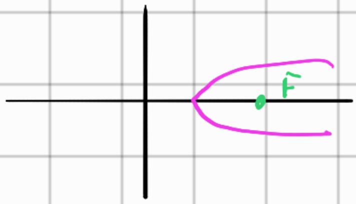
$h: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

→ елипса



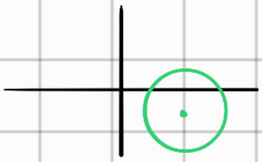
$e: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

→ парабола



p: $y^2 = a \cdot x$

→ окръжност



k: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

$(a;b)$, R

Фокуси

хипербола

Нека $h: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ $\quad a = 3, \ b = 4$

фокусите на хиперболата се търсят $F_1 = ?$ $F_2 = ?$

Решение

Използваме правилото, че $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $c = 5$
и, че за уравнение на хипербола с положителен коеф. пред x^2: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$

$F_1(-5;0)$ $\quad F_2(5;0)$

ако уравнението беше $h: -\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$,
то щяхме да имаме $F_1(0;-c)$ $F_2(0;c)$

т.е. $F_1(0;-5)$ $\quad F(0;5)$

! да се внимава при решаване на задачи от криви уравненията да се свеждат в каноничен вид

$$-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = -1$$

$$16x^2 - 9y^2 = 25 \rightarrow \frac{x^2}{\ } - \frac{y^2}{\ } = 1$$

$\frac{25}{16}$ $\frac{25}{9}$

$a = \frac{5}{4}$ $b = \frac{5}{3}$

Елипса

$$e: \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{625} = 1 \qquad a = 7, \; b = 25$$

$F_1 = ?$ $F_2 = ?$

Решение

използвайки, че $c^2 = b^2 - a^2$, защото $b > a$

т.е. $c^2 = 576 \Rightarrow c = 24$

$$\begin{array}{r} 24 \cdot 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$$

използвайки, че при $b > a$, то фокусите имат координати $F_1(0; -c)$; $F_2(0; c)$

$F_1(0; -24)$ $F_2(0; 24)$

$$e: \frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{49} = 1 \Rightarrow F_1(-24; 0)$$

$F_2(24; 0)$

Фокусите са точки със специални геометрични свойства за дадената крива (оптични свойства)

Парабола

$$p: x^2 = -3y \qquad F = ? \qquad a = -3$$

$$f = -\frac{3}{4}$$

Решение

Използвме, че $f = \frac{a}{4}$, т.е. $f = \frac{-3}{4}$

тъй като втората степен е за променливата x, и първата степен е за пром. y,
$F(0; f)$, т.е. $F(0; -\frac{3}{4})$

$k: (x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$, допирателна в $P(x_p; y_p)$, $P \in k$

$t \ni P$, t допира k в P:

$$t: (x-3)(x_p-3) + (y+4)(y_p+4) = 25$$

например за $P(6;0)$ т.е. $x_p = 6$; $y_p = 0$

$$t: (x-3).(6-3) + (y+4)(0+4) = 25$$

$$t: 3x - 9 + 4y + 16 = 25$$

$$t: 3x + 4y - 18 = 0$$

т.е. Нека $k(O; R)$ е окръжност.
тогава за $P \in k$, допирателната t към k в точка P има уравнение:

$$t: (x-x_0)(x_p-x_0) + (y-y_0)(y_p-y_0) = R^2$$

(1) Окръжност $k: x^2 + y^2 - 8x - 2y - 1 = 0$

$M(7; -2)$

$N(7;10)$

а) да се намери уравнението на t - допирателна към k, минаваща през M

б) —"— s — "— —"—, —"— —"— N

Решение

$$k: \quad (x-4)^2+(y-1)^2=18$$

$$t: \quad (x-4)(\ \ldots\ )=18$$

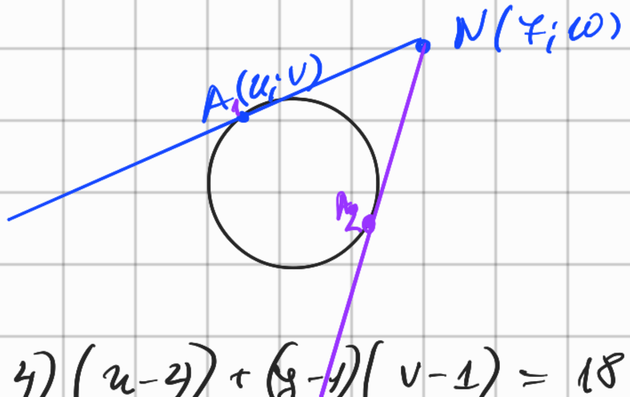
$$t: \quad x-y-9=0$$

б) $k: (x-4)^2+(y-1)^2=18$

$M \in k$, защото $(7-4)^2+(-2-1)^2 = 9+9=18$

$$(7-4)^2+(10-1)^2 = 3^2+9^2 = 90 \neq 18$$
$\Rightarrow N \notin k$

Нека $A(u;v)$ е такава, че $A \in s$, $A \in k$



$$s: \quad (x-4)(u-4)+(y-1)(v-1)=18$$
$\Rightarrow \quad 3(u-4)+9(v-1)=18$, защото $N \in s$

$\Rightarrow \quad u-4+3v-3=6$

$\Rightarrow \quad u = -3v + 13$ $\quad // A(-3v+13; v)$

$(x_a - 4)^2 + (y_a - 1)^2 = 18$, т.к. $A \in k$

$(-3v+9)^2 + (v-1)^2 = 18$

$9(v-3)^2 + (v-1)^2 = 18$

$9(v^2 - 6v + 9) + v^2 - 2v + 1 = 18$

$10v^2 - 56v + 64 = 0$

$5v^2 - 28v + 32 = 0$

$v_1 = 1{,}6 \qquad v_2 = 4$

$A_1(8{,}2; 1{,}6) \qquad A_2(1; 4)$

$s: (x-4)(x-x_a) + (y-1)(y-y_a) = 18$

...

$s_1: 8{,}4x + 1{,}2y - 70{,}8 = 0$

$s_2: -x + y - 3 = 0$

Проверка: замества N 6 S_1, S_2