1) Допирателна към окръжност

Определение. Права, която има само една обща точка с окръжност, се нарича **допирателна** към окръжността.

Общата им точка се нарича **допирна точка**.

Нека окръжността е зададена с нормалното си уравнение $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$, където (α,β) е центърът, а R е радиусът на окръжността.

Може да се докаже следната

Теорема. Правата $t:\ (x_0-\alpha)(x-\alpha)+(y_0-\beta)(y-\beta)=R^2$ е допирателна към окръжността $k:\ (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$ в точката $M_0(x_0,y_0)$.

1. Да се намери уравнението на допирателната към окръжността с уравнение $x^2+y^2-4x-6y+11\frac{3}{4}=0$ в точката $M(1,\ 2\frac{1}{2})$.

Решение. Записваме уравнението на окръжността в нормален вид $x^2-4x+4+y^2-6y+9-13+11\frac{3}{4}=0$, $(x-2)^2+(y-3)^2=\frac{5}{4}$.

Координатите на центъра на окръжността са $(2,3)$ и радиусът е $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$. Уравнението на допирателната в точката $M(1,\ 2\frac{1}{2})$ е:

$t:\ (1-2)(x-2)+(2\frac{1}{2}-3)(y-3)=\frac{5}{4}$ или $t:\ 4x+2y-9=0$.▲

2. Да се намери допирателната към дадената окръжност в дадената точка.

а) $x^2+y^2=8$, (2, 2);

б) $(x-1)^2+(y-1)^2=8$, (3, 3);

в) $(x+2)^2+(y-7)^2=10$, (1, 8);

г) $x^2+y^2-8x+16y+60=0$, (2, −12).

3. Да се намерят допирателните към окръжността $(x+7)^2+(y-1)^2=50$, спуснати от точка $A(-22,-4)$, външна за окръжността и да се намерят допирните точки.

Решение.

Нека точка $M(x_0,y_0)$ е някоя от търсените допирни точки, тогава уравнението на допирателната в M е $(x_0+7)(x+7)+(y_0-1)(y-1)=50$.

Точката $A(-22,-4)$ лежи на допирателната $\Rightarrow$ $(x_0+7)(-22+7)+(y_0-1)(-4-1)=50$.

M е точка от окръжността $\Rightarrow$ $(x_0+7)^2+(y_0-1)^2=50$.

Последните две равенства образуват система, чиито решения са координатите на допирните точки: $(x_0,y_0)=(-12,6)$ и $(x_0,y_0)=(-8,-6)$.

Допирателната в $(-12,\ 6)$ е $(-12+7)(x+7)+(6-1)(y-1)=50$, $x-y+18=0$.

Допирателната в $(-8,\ -6)$ е $(-8+7)(x+7)+(-6-1)(y-1)=50$, $x+7y+50=0$.▲

4. Да се намерят допирателните към дадената окръжност, спуснати от точка A, външна за окръжността и да се намерят допирните точки.

а) $(x+2)^2+(y+10)^2=25$, $A(-3,-3)$;

б) $x^2+y^2-2x+16y+25=0$, $A(-3,-16)$;

в) $(x-6)^2+(y-3)^2=37$, $A(13,-2)$.

5. Да се намери пресечната точка на допирателните към дадената окръжност в дадените точки.

а) $(x-1)^2+(y+3)^2=20$, $(5, -1)$, $(-1, 1)$;

б) $x^2+y^2-2x-16y+40=0$, $(-3, 5)$, $(4, 4)$;

в) $x^2+y^2-10y=0$, $(-3, 9)$, $(-4, 2)$;

г) $(x-2)^2+(y-5)^2=20$, $(4, 9)$, $(-2, 3)$.

6. Намерете общите уравнения на допирателните към окръжността $x^2+y^2=13$, успоредни на правата $2x-3y+5=0$.

Решение. Нека точка $M(x_0, y_0)$ е една от допирните точки на търсените допирателни към окръжността. Уравнението на допирателната в точката $M(x_0, y_0)$ е $x_0x+y_0y=13$. Тази права е успоредна на правата $2x-3y+5=0$ $\Rightarrow$ коефициентите пред x и y са пропорционални:

$\dfrac{x_0}{2}=\dfrac{y_0}{-3}$, откъдето $y_0=-\dfrac{3x_0}{2}$.

$M(x_0, y_0)$ е точка от окръжността $x^2+y^2=13$ $\Rightarrow$ $x_0{}^2+y_0{}^2=13$, $x_0{}^2+\dfrac{9}{4}x_0{}^2=13$, $x_0=\pm 2$

$\Rightarrow$ $y_0=\mp 3$, допирните точки са $M_1(2,-3)$, $M_2(-2,3)$.

Допирателната в $M_1(2,-3)$ е $2x-3y-13=0$.

Допирателната в $M_2(-2,3)$ е $2x-3y+13=0$.▲

7. Намерете общите уравнения на допирателните към дадената окръжност, успоредни на дадената права.

а) $x^2+y^2=50$, $5x+5y-12=0$;

б) $(x+3)^2+y^2=9$, $y=4$;

в) $x^2+y^2+10x-2y-46=0$, $x+y-3=0$.

8. Правата $3x-y-10=0$ е допирателна към окръжността $x^2+y^2=10$ в точката $(3,-1)$:

☒ **А)** $(-3,-1)$ **Б)** $(-3,1)$ **В)** $(3,-1)$ **Г)** $(3,1)$

9. Уравнението на допирателната към окръжността $x^2+y^2=29$ в точка $(2,5)$ е:

☒ **А)** $2x+5y-29=0$ **Б)** $2x-5y+29=0$ **В)** $2x+5y+29=0$ **Г)** $2x-5y-29=0$

10. Уравненията на правите, допирателни към окръжността $x^2+y^2=9$ през външната точка $(-6, -3)$, са:

☒ **А)** $y=-6$ и $4x-3y+15=0$ **Б)** $y=-3$ и $6x+3y+9=0$

В) $y=-9$ и $6x+3y-9=0$ **Г)** $y=-3$ и $4x-3y+15=0$

2) Допирателна към елипса

Нека елипсата е зададена с каноничното уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Определение. Права, която има само една обща точка с елипса, се нарича допирателна към елипсата. Общата точка се нарича **допирна точка**.

Теорема. Правата $Ax+By+C=0$ е допирателна към елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ точно когато

$$a^2A^2+b^2B^2-C^2=0.$$

Доказателство. В общото уравнение на права поне един от коефициентите A или B е различен от 0. Нека $B\neq 0$.

Правата и елипсата имат само една обща точка точно когато системата $\left|\begin{array}{l} b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \\ Ax+By+C=0 \end{array}\right.$

има единствено решение. Изразяваме $y=\frac{-Ax-C}{B}$ от второто уравнение и заместваме в първото:

$$b^2x^2+a^2\,\frac{A^2x^2+2AC\,x+C^2}{B^2}=a^2b^2,$$

$$(a^2A^2+b^2B^2)x^2+2a^2AC\,x+a^2C^2-a^2b^2B^2=0.$$

Системата има единствено решение точно когато това квадратно уравнение има дискриминанта, равна на 0.

$$D'=a^4A^2C^2-(a^2A^2+b^2B^2)(a^2C^2-a^2b^2B^2)\;=\;a^2b^2B^2(a^2A^2+b^2B^2-C^2).$$

Тъй като $a^2b^2B^2>0$, то $D'=0 \Leftrightarrow a^2A^2+b^2B^2-C^2=0$.▲

Следствие. Правата *t* с уравнение $t:\ \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$ е допирателна към елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в точката ѝ $M_0(x_0,y_0)$.

Доказателство. Да запишем уравнението на допирателната *t* във вида

$t:\ Ax+By+C=0$, където $A=\frac{x_0}{a^2}$, $B=\frac{y_0}{b^2}$, $C=-1$. Проверяваме условието *t* да бъде допирателна към елипсата: $a^2A^2+b^2B^2-C^2=a^2\,\frac{{x_0}^2}{a^4}+b^2\,\frac{{y_0}^2}{b^4}-1=\frac{{x_0}^2}{a^2}+\frac{{y_0}^2}{b^2}-1=0$.

Последното равенство е изпълнено, тъй като точката $M_0(x_0,y_0)$ лежи на елипсата и съгласно теоремата правата *t* е допирателна към елипсата в точката $M_0(x_0,y_0)$.▲

11. Да се намери уравнението на допирателната към дадената елипса в точката M.

а) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1,\ M(3,2)$; б) $x^2+2y^2=14,\ M(-2,\sqrt{5})$.

Решение. а) Уравнението на допирателната е $t:\ \frac{3x}{12}+\frac{2y}{8}=1,\ t:\ x+y-4=0$.▲

Решение. б) Каноничното уравнение на елипсата е $\frac{x^2}{14}+\frac{y^2}{7}=1$. Уравнението на допирателната е

$t:\ \frac{-2x}{14}+\frac{\sqrt{5}y}{7}=1,\ x-\sqrt{5}y+7=0$.▲

12. Да се намери уравнението на допирателната към дадената елипса в точката M.

а) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{36}=1$, $M(3,3)$; б) $3x^2+y^2=57$, $M(4,3)$;

в) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{60}=1$, $M(\sqrt{2},-6)$; г) $9x^2+4y^2=36$, $M(2,0)$.

13. Да се намерят допирателните към елипсата $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$, спуснати от точка $P(6,1)$, външна за елипсата и да се намерят допирните точки.

Решение. Нека точка $M(m,n)$ е точка от елипсата. Тогава $\frac{m^2}{20}+\frac{n^2}{5}=1$.

Записваме уравнението на допирателната към елипсата в точка M: $\frac{mx}{20}+\frac{ny}{5}=1$.

Точка $P(6,1)$ е точка от допирателната $\Rightarrow \frac{m6}{20}+\frac{n}{5}=1$.

Получаваме система за m и n:

$\left|\begin{array}{l}\frac{m^2}{20}+\frac{n^2}{5}=1\\ \frac{m6}{20}+\frac{n}{5}=1\end{array}\right.$, чиито решения $(4,-1)$ и $(2,2)$ са допирните точки.

Правата през точка $P(6,1)$, която се допира до елипсата в точка $(4,-1)$ е $x-y-5=0$.

Правата през точка $P(6,1)$, която се допира до елипсата в точка $(2,2)$ е $x+4y-10=0$.▲

14. Да се намерят допирателните към дадената елипса, спуснати от точка A, външна за елипсата и да се намерят допирните точки.

а) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{64}=1$, $A(4,4)$; б) $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{64}=1$, $A(4,8)$;

в) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{100}=1$, $A(1,14)$; г) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$, $A(0,2)$.

15. Да се намери пресечната точка на допирателните към дадената елипса в дадените точки.

а) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}=1$, $(-2,2)$, $(2,2)$;

б) $2x^2+y^2=36$, $(0,6)$, $(4,2)$;

в) $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{9}=1$, $(5,2)$, $(\frac{20}{3},-\frac{1}{3})$;

г) $\frac{x^2}{70}+\frac{y^2}{14}=1$, $(-5,-3)$, $(-5,3)$.

16. Намерете каноничното уравнение на елипса с оси върху координатните оси, ако правата $x+y-3=0$ е допирателна към елипсата в точката $(2,1)$.

Решение. Нека каноничното уравнение на елипсата е $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Уравнението на допирателната към тази елипса в точката $(2,1)$ е $\frac{2x}{a^2}+\frac{y}{b^2}=1$. От друга страна по условие това уравнение е $x+y-3=0$, следователно двете прави съвпадат, условието за което е $\dfrac{\frac{2}{a^2}}{1}=\dfrac{\frac{1}{b^2}}{1}=\dfrac{-1}{-3}$, откъдето $a^2=6$ и $b^2=3$. Каноничното уравнение на елипсата е $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$.▲

17. Намерете каноничното уравнение на елипса с оси върху координатните оси, ако дадената права е допирателна към елипсата в точката T.

а) $x-3y+6=0$, $T(-\frac{3}{2},\frac{3}{2})$;

б) $x+4y+10=0$, $T(-2,-2)$;

в) $x+y+2=0$, $T(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$;

г) $x+2y-9=0$, $T(5,2)$.

18. Да се намери каноничното уравнение на елипса с оси върху координатните оси, към която правите $2x+y-21=0$ и $x-4y+21=0$ са допирателни.

Решение. Нека уравнението на елипсата е $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Дадените прави са допирателни към елипсата и от теоремата получаваме системата:

$\left|\begin{array}{l} a^2 4+b^2-21^2=0 \\ a^2+b^2 16-21^2=0 \end{array}\right.$, чието решение е $a^2=105$ и $b^2=21$. Елипсата е $\dfrac{x^2}{105}+\dfrac{y^2}{21}=1$.▲

19. Да се намери каноничното уравнение на елипса с оси върху координатните оси, към която дадените прави са допирателни.

а) $x+y-7=0$, $x-13y+35=0$;

б) $x+3y-15=0$, $7x-9y-75=0$.

20. Проверете коя права към коя елипса е допирателна и намерете допирните точки.

а) $x+6y-24=0$, $x-2y-4=0$, $\dfrac{x^2}{144}+\dfrac{y^2}{12}=1$, $\dfrac{x^2}{12}+y^2=1$;

б) $x+6y-12=0$, $x+2y-12=0$, $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{3}=1$, $\dfrac{x^2}{108}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

3) Допирателна към хипербола

Определение. Права, която не е успоредна на асимптотите на хиперболата и има само една обща точка с нея, се нарича **допирателна** към хиперболата. Общата им точка се нарича **допирна** точка.

Теорема. Правата $Ax+By+C=0$ е допирателна към хиперболата $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ точно когато

$$a^2A^2-b^2B^2-C^2=0.$$

Следствие. Правата t с уравнение $t:\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$ е допирателна към хиперболата $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ в точката ѝ $M_0(x_0,y_0)$.

На доказателството на тези две твърдения няма да се спираме.

21. Да се намери допирателната към дадената хипербола в точката M.

а) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{12}=1$, $M(12,6)$;

б) $x^2-3y^2=54$, $M(9,3)$;

в) $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$, $M(6,2)$;

г) $x^2-4y^2=28$, $M(8,3)$.

22. Дадени са хипербола и точка, нележаща на хиперболата. Да се намерят допирателните от точката към хиперболата и допирните точки.

а) $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{8}=1$, $(2,-5)$; б) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$, $(6,6)$; в) $\frac{x^2}{48}-\frac{y^2}{12}=1$, $(-4,-10)$.

23. Намерете пресечната точка на допирателните към дадената хипербола в дадените точки.

а) $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{2}=1$, $(-3,-1)$, $(9,-5)$; б) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$, $(-21,-12)$, $(-6,-3)$;

в) $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{8}=1$, $(-18,-10)$, $(6,-2)$; г) $\frac{x^2}{54}-\frac{x^2}{18}=1$, $(9,3)$, $(27,15)$.

24. Да се намери каноничното уравнение на хипербола с оси върху координатните оси, ако допирателната ѝ в точката $(10,3)$ е $5x-6y-32=0$.

Решение. Нека каноничното уравнение на хиперболата е $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Уравнението на допирателната в точката $(10,3)$ е $\frac{10x}{a^2}-\frac{3y}{b^2}=1$.

От друга страна това уравнение е $5x-6y-32=0$. Следователно двете прави съвпадат, условието за което е $\frac{\frac{10}{a^2}}{5}=\frac{\frac{-3}{b^2}}{-6}=\frac{-1}{-32}$, откъдето $a^2=64$ и $b^2=16$.

Хиперболата е $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{16}=1$.▲

25. Да се намери каноничното уравнение на хипербола с оси върху координатните оси, ако дадената права е допирателна към хиперболата в дадената точка.

а) $9x-16y-34=0$, $(18,8)$;

б) $5x-9y-19=0$, $(20,9)$;

в) $x-2y-3=0$, $(15,6)$.

26. Да се намери каноничното уравнение на хипербола с оси върху координатните оси, към която дадените прави са допирателни.

а) $4x+y-21=0$, $2x-3y-7=0$;

б) $x-y+2=0$, $3x-5y+2=0$.

27. Проверете коя права към коя хипербола е допирателна и намерете допирните точки.

а) $2x-3y-11=0$, $2x+3y+10=0$, $\dfrac{x^2}{70}-\dfrac{y^2}{20}=1$, $\dfrac{x^2}{55}-\dfrac{y^2}{11}=1$;

б) $x+2y+6=0$, $x+y+6=0$, $\dfrac{x^2}{60}-\dfrac{y^2}{24}=1$, $\dfrac{x^2}{84}-\dfrac{y^2}{12}=1$.

4) Допирателна към парабола

Ще използваме, че параболата е крива, която е графиката на функцията $f(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ и тогава допирателната ѝ в точката $(x_0, f(x_0))$ се задава с уравнението

$$t:\ y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).$$

28. Намерете допирателната към параболата $y=x^2+3x+4$ в точката $(-4,8)$.

Решение. Уравнението на допирателната е $t:\ y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. Пресмятаме $f'(x)=2x+3$, $f'(-4)=-5$ и $f(-4)=8$ и получаваме $t:\ y=-5(x+4)+8,\quad 5x+y+12=0$.▲

29. Намерете допирателната към дадената парабола в дадената точка.

а) $y=x^2+2x+2$, $(0,2)$;

б) $y=x^2-4x-3$, $(-1,2)$;

в) $y=2x^2-10x-2$, $(5,-2)$;

г) $y=2x^2+4x-2$, $(-2,-2)$.

30. Дадена е парабола $y=x^2-10x+12$ и точка $(7,-10)$, нележаща на нея. Да се намерят допирателните от точката към параболата и допирните точки.

Решение. а) Правата $t:\ y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ е допирателна в точка (x_0,y_0) от параболата.

Имаме $f'(x)=2x-10$, $f'(x_0)=2x_0-10$ и $f(x_0)=x_0^{\,2}-10x_0+12$.

За допирателната получаваме $t:\ y=(2x_0-10)(x-x_0)+x_0^{\,2}-10x_0+12$.

Ще определим x_0 от условието, че t минава през точка $(x,y)=(7,-10)$:

$$t:\ -10=(2x_0-10)(7-x_0)+x_0^{\,2}-10x_0+12 \quad\Leftrightarrow\quad x_0^{\,2}-14x_0+48=0$$

Корените на полученото квадратно уравнение са 6 и 8. Тогава допирните точки са $(6, -12)$ и $(8, -4)$. Получаваме допирателните:

$t_1:\ 2x - y - 24 = 0$ в точката $(6, -12)$ и $t_2:\ 6x - y - 52 = 0$ в точката $(8, -4)$.▲

31. Дадени са парабола и точка, нележаща на параболата. Да се намерят допирателните от точката към параболата и допирните точки.

а) $y = \dfrac{x^2}{2} + 5$, $(3,9)$; б) $y = \dfrac{x^2}{6} + x - 1$, $(-3,-4)$;

в) $y = x^2 + x + 1$, $(0,0)$; г) $y = -5x^2 - 2x + 1$, $(0,6)$.

32. Правите f и g са допирателни към дадената парабола в дадените точки. Да се намери пресечната точка на f и g.

а) $y = x^2 - 2x + 1$, $(2,1)$, $(4,9)$;

б) $y = -x^2 + 7x - 5$, $(3,7)$, $(1,1)$;

в) $y = x^2 + 4x - 5$, $(-7,16)$, $(-5,0)$;

г) $y = x^2 + 8x + 8$, $(-6,-4)$, $(-2,-4)$.

33. Да се намери парабола с уравнение $f(x) = y = x^2 + bx + c$, ако правите $3x - y - 1 = 0$ и $7x - y - 5 = 0$ са допирателни към нея.

Решение. Нека правите се допират до параболата съответно в точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

Тогава ъгловите им коефициенти са $f'(x_1) = 3$ и $f'(x_2) = 7$, откъдето получаваме уравненията $2x_1 + b = 3$ и $2x_2 + b = 7$.

Неизвестните коефициенти b и c и координатите на допирните точки намираме от системата:

$$\left|\begin{aligned} &y_1 = 3x_1 - 1 \\ &y_2 = 7x_2 - 5 \\ &2x_1 + b = 3 \\ &2x_2 + b = 7 \\ &y_1 = x_1^2 + bx_1 + c \\ &y_2 = x_2^2 + bx_2 + c \end{aligned}\right.$$

Решението на системата е $b = 3$, $c = -1$, $x_1 = 0$, $y_1 = -1$, $x_2 = 2$, $y_2 = 9$. Търсената парабола е $y = x^2 + 3x - 1$.▲

34. Да се намери парабола с уравнение $y = x^2 + bx + c$, ако дадените прави са допирателни към нея.

а) $6x + y + 30 = 0$, $2x + y + 14 = 0$;

б) $y = -8$, $4x - y + 4 = 0$;

в) $2x + y - 2 = 0$, $6x - y - 6 = 0$.

35. Намерете допирната точка на дадената права към дадената парабола.

а) $x - y + 2 = 0$, $y = -x^2 + 5x - 2$; б) $4x - y - 2 = 0$, $y = x^2 - 2x + 7$;

в) $x - y - 10 = 0$, $y = x^2 + 5x - 6$; г) $2x - y + 1 = 0$, $y = x^2 - 2x + 3$.