

Отговори – Модул III

1. Приложения на математическия анализ

1.0. Математически анализ - преговор..... 5

1. а) $-\frac{1}{6}$; б) 2; в) 6; г) 2; д) 0; е) 3; 3. -4; 4. Прекъсната при $x = 0$;
5. а) $6x^2 - 6x + m^2$; б) $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 5m}}$; в) $-\frac{\cos x}{a \sin^2 x}$; г) $-\frac{1}{4\sqrt[4]{ax^5}}$; д) $\frac{2\sqrt{x+3}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}(\sqrt{x+1})}$; е) $\frac{-4}{(x-2)^2}$;
6. а) $5e^x$; б) $2e^{2x} + 2x$; в) $e^x(x^2 + 2x + 3)$; г) $-\frac{a}{x^2}e^{\frac{a}{x}}$; д) $\frac{-2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}$; е) $-e^{-x}$;
7. а) $2^x \ln 2$; б) $2x + 2^x \ln 2$; в) $\frac{2x^3 + 3^x(x \ln 3 - 1)}{x^2}$; г) $2e^{2x} + 4^x \ln 4$; д) $2 \ln 5.5^{2x-1}$;
- е) $\frac{3^x(\ln 3 \cdot x - 3)}{x^4}$; 8. а) $\frac{x+1}{x}$; б) $\ln x + 1$; в) $\frac{1}{x+1}$; г) $\frac{2}{x}$; д) $\frac{2x}{x^2+1}$; е) $\frac{1}{x \ln x}$; ж) $\frac{2 \ln x}{x}$; з) $-\frac{1}{x \ln^2 x}$;
- и) $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$; к) $e^x \frac{x \ln x + 1}{x}$; л) $\frac{2x+2}{x^2+2x-3}$; м) $\frac{1}{2x\sqrt{1+\ln x}}$; 9. а) $e^x(x^2 + 4x + 7)$; б) $\frac{2x+2}{x^2+2x+5}$;
10. а) $\frac{1}{x \ln 10}$; б) $\frac{2x}{(x^2+3) \ln 3}$; в) $\log_2 x + \frac{1}{\ln 2}$; г) $\frac{1}{\ln^2 2 \cdot x \cdot \log_2 x}$;
11. а) $\frac{1}{x}$; б) $-\frac{1}{x}$; в) $\frac{1-x^2}{x(x^2+1)}$; г) $\frac{2}{2x-3} - \frac{3}{3x+2}$; д) $\frac{1}{x+1} + \frac{\cos x}{\sin x}$; 12. а) 54; б) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$;

Входно ниво – Тест 1 и Тест 2 10

Тест 1. 1. $-\frac{1}{2}$; 2. $\frac{5}{6}$; 3. $\frac{2}{3}$; 4. $-\frac{10}{7}$; 5. $\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$; 6. $\frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2}$; 7. $e^x(4x^2+1)$; 8. $\frac{3}{x(x+3)}$; 9. 2;

Оценяване. За всеки верен отговор по 2 точки. Оценка = (получени точки.100/18).

Тест 2. 1. 8; 2. 1; 3. $-\infty$; 4. 2 и 3; 5. 651; 6. $-\frac{1+\cos^2 x}{\sin^3 x}$; 7. $\frac{2x}{5-x^2}$; 8. 1; 9. 0;

Оценяване. За всеки верен отговор по 2 точки. Оценка = (получени точки.100/18).

1.1. Геометричен смисъл на понятието производна 11

2. а) $5x - y - 3 = 0$; б) $x + 2y - 7 = 0$; в) $6 \ln 3x - y + 3 = 0$; г) $x - 4y + 8 \ln 2 - 3 = 0$;
- д) $6(\sqrt{3}-1)x - 12y + 6(\sqrt{3}+1) - \pi(\sqrt{3}-1)$; 3. а) 1; 4; б) $-\frac{1}{3}$; 1; 4. а) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,
- $\sqrt{3}x + 3y - 2\sqrt{3} = 0$; б) $(0, 1)$, $y = 1$; в) $(1, 0)$, $x = 1$; $(-1, 0)$, $x = -1$; 5. а) $4x + 4y - 7 = 0$, $\alpha = \frac{3\pi}{4}$;
- б) $(2\sqrt{2}+3)x - y + 3 = 0$, $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{2}+3$; в) $4x - 2y + 2 - \pi = 0$, $\operatorname{tg} \alpha = 2$; г) $x + y + 4 = 0$, $\operatorname{tg} \alpha = -1$;
- д) $y = 1$, $\alpha = 0$; е) $x - y + 1 = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$; ж) $x - y - 1 = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$;
6. а) $(1; -3)$, $(2; -4)$; б) $(-1; -1)$, $(0; 0)$; в) $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$; г) $(0, 1)$, $(\pi, -1)$, $(2\pi, 1)$;
- д) $(-1; 20)$, $(\sqrt{3}; -24(\sqrt{3}+1))$, $(-\sqrt{3}; 24(\sqrt{3}-1))$; 7. а) $a = 2$; б) $a = -\frac{1}{2}$;

1.2. Производни на функции от по-висок ред. Втора производна на функция 14

2. а) $\frac{-12}{(x-1)^4}$; б) $\frac{114}{(x+5)^4}$; в) $\frac{6c^2(ad-bc)}{(cx+d)^4}$; 3. а) $\frac{-2}{x^2}$; б) $e^x\left(\frac{1}{x^4} + \frac{2}{x^3}\right)$;

1.4. Признаци за растене и намаляване на функция 15

3. а) Расте в $(-\infty; -4)$, намалява в $(-4; 2)$, расте в $(2; +\infty)$; б) Расте в $(-\infty; +\infty)$; в) Расте в $(-\infty; +\infty)$; г) Намалява в $(-\infty; -2)$, расте в $(-2; 3)$, намалява в $(3; +\infty)$; д) Намалява в $(-\infty; -3)$, расте в $(-3; -1)$, намалява в $(-1; 2)$, расте в $(2; +\infty)$; е) Расте в $(-\infty; -1)$, намалява в $(-1; 1)$, расте в $(1; +\infty)$; ж) Расте в $(-\infty; +\infty)$; з) Расте в $(-\infty; -1)$, намалява в $(-1; -\frac{2\sqrt{5}}{5})$, расте в $(-\frac{2\sqrt{5}}{5}; \frac{2\sqrt{5}}{5})$, намалява в $(\frac{2\sqrt{5}}{5}; 1)$, расте в $(1; +\infty)$;

4. а) Расте в $(-\infty; -1)$, намалява в $(-1; 0)$, намалява в $(0; 1)$, расте в $(1; +\infty)$; б) Намалява в $(-\infty; -1)$, расте в $(-1; 1)$, намалява в $(1; +\infty)$; в) Намалява в $(-\infty; 0)$, расте в $(0; +\infty)$; г) Расте в $(-\infty; -1)$, расте в $(-1; 0)$, намалява в $(0; 1)$, намалява в $(1; +\infty)$;

5. а) Расте в $(-1; 0)$, намалява в $(0; 1)$; б) Намалява в $(-\infty; -3)$, расте в $(1; +\infty)$; в) Расте в $(2, \frac{5}{2})$; намалява в $(\frac{5}{2}, 3)$; г) Намалява в $(-\infty; 1)$, расте в $(3; +\infty)$; д) Расте в $(-\sqrt{3}, 0)$; намалява в $(0, \sqrt{3})$; е) Намалява в $(-\infty; 0)$, расте в $(0; +\infty)$;

6. а) Намалява в $(-\infty; -1)$, расте в $(0; +\infty)$; б) Намалява в $(-\infty; -\frac{1}{2})$, расте в $(-\frac{1}{2}; +\infty)$;

в) Намалява в $(-\infty; -1)$, расте в $(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$; намалява в $(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$;

1.5. Най-голяма и най-малка стойност на функция 17

2. а) $f_{\max} = f(2) = 29$, $f_{\min} = f(3) = 28$; б) $f_{\min} = f(2) = -191$, $f_{\max} = f(3) = -188$, $f_{\min} = f(4) = -191$; в) $f_{\max} = f(-2) = 145$, $f_{\min} = f(2) = -143$; 4. а) $f_{\max} = f(-3) = -9$, $f_{\min} = f(1) = -1$; б) Функцията няма локални екстремуми; в) $f_{\max} = f(\frac{\pi}{18}) = \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{12}$; 5. а) расте в $(-\infty, -2)$; намалява в $(-2, 0)$; расте в $(0, +\infty)$; $f_{\max} = f(-2) = 3$; $f_{\min} = f(0) = -1$; б) расте в $(-\infty, 1)$; расте в $(1, \frac{3}{2})$; намалява в $(\frac{3}{2}, 2)$; намалява в $(2, +\infty)$; $f_{\max} = f(\frac{3}{2}) = -3$; в) намалява в $(-\infty, -1)$; намалява в $(-1, 3)$; намалява в $(3, +\infty)$; няма локални екстремуми;

9. а) $\max_{[-3,3]} f(x) = f_{\max} = f(-2) = 17$, $\min_{[-3,3]} f(x) = f_{\min} = f(2) = -15$; б) $\max_{[-3,4]} f(x) = f_{\max} = f(-2) = f(4) = 17$, $\min_{[-3,4]} f(x) = f_{\min} = f(2) = -15$; в) $\max_{[-3,5]} f(x) = f(5) = 66$, $\min_{[-3,5]} f(x) = f_{\min} = f(2) = -15$; 10. $\max_{[-2,3]} f(x) = f_{\max} = f(2) = 392$, $\min_{[-2,3]} f(x) = f_{\min} = f(-1) = -391$;

14. $\frac{\sqrt{5}}{5}$; 15. а) $\ln 3$; б) $2 \ln \frac{3}{2}$; 16. а) 1; б) 0; в) $\frac{1}{2} + \ln 2$; 17. а) $\min_{[-1,1]} f(x) = f_{\min} = f(0) = 1$, $\max_{[-1,1]} f(x) = f(-1) = \frac{281}{30}$; б) $\min_{[0,2]} f(x) = f_{\min} = f(0) = 1$, $\max_{[0,2]} f(x) = f(1) = \frac{49}{30}$; в) $\min_{[1,4]} f(x) = f(4) = -\frac{97}{15}$, $\max_{[1,4]} f(x) = f_{\max} = f(3) = \frac{19}{10}$; 18. а) $\min_{[-2,-1]} f(x) = f_{\min} = f(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}) = \frac{-9-6\sqrt{3}}{4}$, $\max_{[-2,-1]} f(x) = f(-2) = 0$; б) $\min_{[-1,1]} f(x) = f(-1) = -4$, $\max_{[-1,1]} f(x) = f_{\max} = f(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}) = \frac{-9+6\sqrt{3}}{4}$;

в) $\min_{[-1,2]} f(x) = f(-1) = -4$, $\max_{[-1,2]} f(x) = f(2) = 8$; 19. а) намалява в $(-\infty, -\frac{3}{2})$, расте в $(-\frac{3}{2}, +\infty)$; $f_{\min} = f(-\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{7}}{2}$; б) намалява в $(-\infty, -2)$, расте в $(-2, +\infty)$; $f_{\min} = f(-2) = 0$;

в) намалява в $(-\infty, -4)$, расте в $(-1, +\infty)$; няма локални екстремуми;

20. а) $\max f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{11}}{11}$; б) $\min f(x) = f(1) = 1$; в) $\min f(x) = f(-3) = \frac{1}{2}$;

г) $\max f(x) = f(1) = 1$; 21. $\max_{[0, \frac{\pi}{2}]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\min_{[0, \frac{\pi}{2}]} f(x) = f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$;

22. а) расте в $[-1, 0]$, намалява в $[0, 1]$; $\max_{[-1, 1]} f(x) = f(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\min_{[-1, 1]} f(x) = f(-1) = f(1) = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

б) намалява в $[-1, 0]$, расте в $[0, 1]$; $\min_{[-1, 1]} f(x) = f(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\max_{[-1, 1]} f(x) = f(-1) = f(1) = 1$;

1.6. Изпъкналост и вдлъбнатост на функция. Инфлексни точки.....26

2. а) $f(x)$ е вдлъбната в $(-\infty, -1)$, изпъкнала в $(-1, 2)$, вдлъбната в $(2, 3)$ и изпъкнала в $(3, +\infty)$;

б) $f(x)$ е изпъкнала в $(-\infty, +\infty)$; в) $f(x)$ е вдлъбната в $(-\infty, -3)$, изпъкнала в $(-3, -2)$ и вдлъбната в $(-2, +\infty)$;

3. а) $x = -\frac{1}{2}$; б) Няма инфлексни точки; в) $x = 1$, $x = 2$; 5. а) $f_{\min}\left(\frac{1}{4}\right) = -8\frac{139}{256}$; изпъкнала в $(-\infty, -2)$, вдлъбната в $(-2, -\frac{1}{2})$; изпъкнала в $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ инфлексни точки $(-2, 0)$ и $(-\frac{1}{2}, -5\frac{1}{16})$;

б) $f_{\max} = f(-1) = 1$; $f_{\min} = f\left(\frac{7}{3}\right) = -\frac{473}{27}$; вдлъбната в $(-\infty, \frac{2}{3})$; изпъкнала в $(\frac{2}{3}, +\infty)$; инфлексна точка $(\frac{2}{3}, -\frac{223}{27})$;

в) $f_{\min} = f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, $f_{\max} = f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$, вдлъбната в $(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{2})$, изпъкнала в $(-\frac{\sqrt{6}}{2}, 0)$, вдлъбната в $(0, \frac{\sqrt{6}}{2})$, изпъкнала в $(\frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty)$; инфлексни точки $(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{8})$, $(0, 0)$, $(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{8})$;

1.7. Асимптоти28

2. а) $x = 1$ – вертикална асимптота при $x \rightarrow 1$ отляво и отдясно, $y = 1$ е хоризонтална асимптота при $x \rightarrow -\infty$ и при $x \rightarrow +\infty$;

б) $x = -2$ – вертикална асимптота $x \rightarrow -2$ отляво и отдясно, $y = 3$ е хоризонтална асимптота при $x \rightarrow -\infty$ и при $x \rightarrow +\infty$;

в) $x = -\frac{1}{2}$ – вертикална асимптота $x \rightarrow -\frac{1}{2}$ отляво и отдясно, $y = 1$ е хоризонтална асимптота при $x \rightarrow -\infty$ и при $x \rightarrow +\infty$;

г) $x = 2$ – вертикална асимптота $x \rightarrow 2$ отляво и отдясно, $y = -3$ е хоризонтална асимптота при $x \rightarrow -\infty$ и при $x \rightarrow +\infty$;

3. а) $\max_{(-\infty, +\infty)} = f_{\max} = f(6) = 1$; инфлексия при $x = 6 - \sqrt{2}$ и $x = 6 + \sqrt{2}$; $y = 0$ е хоризонтална асимптота при $x \rightarrow -\infty$ и при $x \rightarrow +\infty$;

б) $\max_{(-\infty, +\infty)} = f_{\max} = f(4) = 1$; инфлексия при $x = 4 - \sqrt{3}$ и $x = 4 + \sqrt{3}$; $y = 0$ е хоризонтална асимптота при $x \rightarrow -\infty$ и при $x \rightarrow +\infty$;

в) $\max_{(-\infty, +\infty)} = f_{\max} = f(0) = 1$; инфлексия при $x = -1$ и $x = 1$; $y = 0$ е хоризонтална асимптота при

$x \rightarrow -\infty$ и при $x \rightarrow +\infty$; 4. а) $d = 0$; б) $d > 0$, $d \neq \frac{5}{3}$; в) $d < 0$; 5. а) $a \in (1, +\infty)$; б) $a \in (-\infty, 0)$;

в) $a \in (0, 1)$; г) няма такива a .

1.8. Допирателни. Допирателни към криви от втора степен.....30

2. а) $x + y = 4$; б) $x + y = 6$; в) $3x + y = 11$; г) $x + 2y + 22 = 0$, нормалното уравнение на окръжността е $(x - 4)^2 + (y + 8)^2 = 20$;

4. а) $3x + 4y + 21 = 0$ в т. $(1, -6)$, $4x - 3y + 3 = 0$ в т. $(-6, -7)$; б) $3x + y + 25 = 0$ в т. $(-5, -10)$, $x - 3y - 45 = 0$ в т. $(3, -14)$, нормалното уравнение на окръжността е $(x - 1)^2 + (y + 8)^2 = 40$;
в) $x - 6y - 25 = 0$ в т. $(7, -3)$, $6x + y - 76 = 0$ в т. $(12, 4)$;

5. а) $(3, 3)$; допирателна в $(5, -1)$ е $2x + y - 9 = 0$, допирателна в $(-1, 1)$ е $x - 2y + 3 = 0$;

б) $(0, 1)$; нормалното уравнение на окръжността е $(x - 1)^2 + (y - 8)^2 = 25$; допирателна $4x + 3y - 3 = 0$ в $(-3, 5)$, допирателна $3x - 4y + 4 = 0$ в $(4, 4)$;

в) $(-7, 6)$; нормалното уравнение на окръжността е $x^2 + (y - 5)^2 = 25$ допирателна $3x - 4y + 45 = 0$ в $(-3, 9)$, допирателна $4x + 3y + 10 = 0$ в $(-4, 2)$;

г) $(-8, 15)$; допирателна $x + 2y - 22 = 0$ в $(4, 9)$, допирателна $2x + y - 1 = 0$ в $(-2, 3)$;

7. а) $x + y \pm 10 = 0$; б) $y = \pm 3$; в) $x + y - 8 = 0$, $x + y + 16 = 0$; 8. В; 9. А; 10. Г;

12. а) $3x + y - 12 = 0$; б) $4x + y - 19 = 0$, каноничното уравнение на елипсата е $\frac{x^2}{19} + \frac{y^2}{57} = 1$;

в) $2\sqrt{2}x - y - 10 = 0$; г) $x = 2$, каноничното уравнение на елипсата е $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$;

14. а) $3x + 2y - 20 = 0$, $(2, 4)$; $6, 4$ и $x = 4$, $(4, 0)$; б) $2x + y - 16 = 0$, $(6, 4)$ и $y = 8$, $(0, 8)$;

в) $3x - 2y + 25 = 0$, $(-3, 8)$ и $8x + 3y - 50 = 0$, $(4, 6)$; г) $x - 2y + 4 = 0$, $(-1; 1, 5)$ и $x + 2y - 4 = 0$,

$(1; 1, 5)$; 15. а) $(0, 3)$; б) $(3, 6)$; в) $(7, 1)$; г) $(-14, 0)$; 17. а) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$; б) $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$;

в) $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$; г) $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{9} = 1$; 19. а) $\frac{x^2}{42} + \frac{y^2}{7} = 1$; б) $\frac{x^2}{90} + \frac{y^2}{15} = 1$;

20. а) $x + 6y - 24 = 0$ и $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{12} = 1$, допирна точка $(6, 3)$; $x - 2y - 4 = 0$ и $\frac{x^2}{12} + y^2 = 1$, допирна

точка $(3, -\frac{1}{2})$; б) $x + 6y - 12 = 0$ и $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{3} = 1$, допирна точка $(3, \frac{3}{2})$; $x + 2y - 12 = 0$ и

$\frac{x^2}{108} + \frac{y^2}{9} = 1$, допирна точка $(9, \frac{3}{2})$;

21. а) $2x - 9y - 6 = 0$; б) $x - y - 6 = 0$; в) $3x - 4y - 10 = 0$; г) $2x - 3y - 7 = 0$;

22. а) $11x + 14y + 48 = 0$, $(\frac{22}{3}, \frac{7}{3})$ и $3x - 2y - 16 = 0$, $(6, 1)$; б) $x = 6$, $(6, 0)$ и $5x - 8y + 18 = 0$,

$(-10, -4)$; в) $7x + 2y + 48 = 0$, $(-7, \frac{1}{2})$ и $x - y - 6 = 0$, $(8, 2)$; 23. а) $(-1, 1)$; б) $(-9, -5)$; в) $(2, 2)$;

г) $(12, 6)$; 25. а) $\frac{x^2}{68} - \frac{y^2}{17} = 1$; б) $\frac{x^2}{76} - \frac{y^2}{19} = 1$; в) $\frac{x^2}{45} - \frac{y^2}{9} = 1$; 26. а) $\frac{x^2}{28} - \frac{y^2}{7} = 1$; б) $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1$;

27. а) $2x - 3y - 11 = 0$ и $\frac{x^2}{55} - \frac{y^2}{11} = 1$ допирна точка $(10, 3)$; $2x + 3y + 10 = 0$ и $\frac{x^2}{70} - \frac{y^2}{20} = 1$

допирна точка $(-14, 6)$; б) $x + 2y + 6 = 0$ и $\frac{x^2}{84} - \frac{y^2}{12} = 1$ допирна точка $(-14, 4)$; $x + y + 6 = 0$ и

$\frac{x^2}{60} - \frac{y^2}{24} = 1$ допирна точка $(-10, 4)$; 29. а) $2x - y + 2 = 0$; б) $6x + y + 4 = 0$; в) $10x - y - 52 = 0$;

г) $4x + y + 10 = 0$; 31. а) $2x - y + 3 = 0$, $4x - y - 3 = 0$; б) $x + y + 7 = 0$, $x - y - 1 = 0$; в) $x + y = 0$, $3x - y = 0$; г) $12x + y - 6 = 0$, $8x - y + 6 = 0$; 32. а) $(3, 3)$; б) $(2, 6)$; в) $(-6, 6)$; г) $(-4, -12)$;

34. а) $y = x^2 + 4x - 5$; б) $y = x^2 + 8x + 8$; в) $y = x^2 + 3$;

35. а) (2, 4); б) (3, 10); в) (-2, -12); г) (2, 3);

1.9. Изследване на полиномни функции. Графика 39

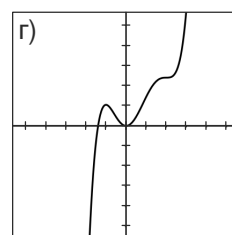
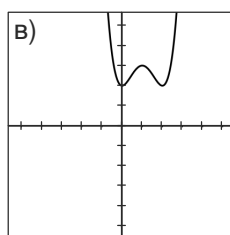
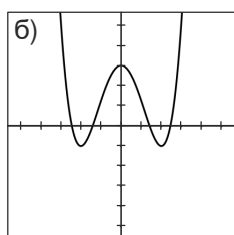
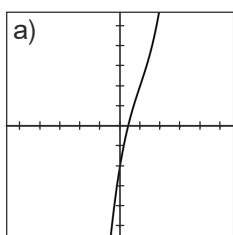
2. а) растяща в $(-\infty, +\infty)$, инфлексия в (1, 2);

б) четна, $f_{\min} = f(-2) = f(2) = -1$, $f_{\max} = f(0) = 3$; инфлексия при $x_{1,2} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$;

в) $f_{\min} = f(0) = f(2) = 2$, $f_{\max} = f(1) = 3$; инфлексия при $x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$;

г) $f_{\max} = f(-1) = \frac{21}{20}$; $f_{\min} = f(0) = 0$, инфлексия в $x_1 = \frac{1 - \sqrt{33}}{8}$, $x_2 = \frac{1 + \sqrt{33}}{8}$, $x_3 = 2$,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;



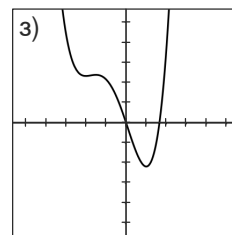
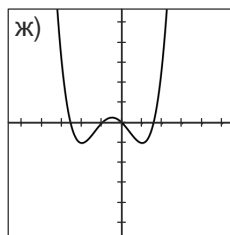
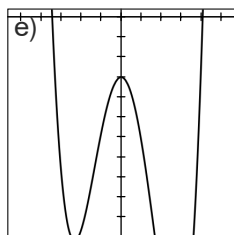
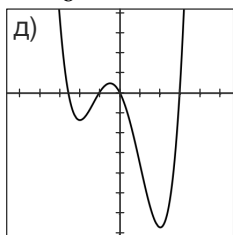
д) $f_{\min} = f(-2) = -\frac{4}{3}$, $f_{\max} = f(-\frac{1}{2}) = \frac{95}{192}$, $f_{\min} = f(2) = -\frac{20}{3}$; инфлексни точки при $x_1 = -\frac{4}{3}$ и

$x_2 = 1$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$; е) $f_{\min} = f(-2) = -\frac{5}{3}$, $f_{\max} = f(-\frac{1}{2}) = \frac{139}{192}$, $f_{\min} = f(3) = -\frac{45}{2}$,

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$; ж) $f_{\min} = f(-2) = f(1) = -1$, $f_{\max} = f(-\frac{1}{2}) = \frac{17}{64}$, инфлексия в $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$,

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$; з) $f_{\min} = f(-2) = \frac{7}{3}$, $f_{\max} = f(-\frac{3}{2}) = \frac{153}{64}$, $f_{\min} = f(1) = -\frac{13}{6}$, инфлексия в

$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{31}}{6}$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$;



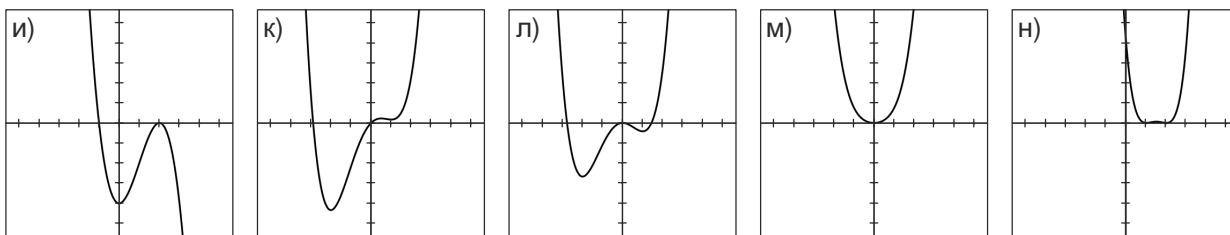
и) $f_{\min} = f(0) = -4$, $f_{\max} = f(2) = 0$, инфлексия в (1, -2), $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$;

к) $f_{\min} = f(-2) = -\frac{13}{3}$, $f_{\max} = f(\frac{1}{2}) = \frac{43}{192}$, $f_{\min} = f(1) = \frac{1}{6}$; инфлексия в $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{31}}{6}$;

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$; л) $f_{\min} = f(-2) = -\frac{8}{3}$, $f_{\max} = f(0) = 0$, $f_{\min} = f(1) = -\frac{5}{12}$; инфлексия в

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$; м) четна, $f_{\min} = f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$, няма инфлексни точки;

н) $f_{\min} = f(1) = f(2) = 0$, $f_{\max} = f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{16}$; инфлексия при $x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{3}}{6}$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$;



3. а) $f'(x) = 24x$, растяща в $(-\infty, +\infty)$, права;

б) $f''(x) = 12x^2 - 6$; четна; намаляваща в $(-\infty, 0)$, растяща в $(0, +\infty)$; изпъкнала в $(-\infty, +\infty)$;

$f_{\min}'' = f''(0) = -6$; в) $f''(x) = 4x^3 - 6x$; нечетна; растяща в $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, намаляваща в $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, растяща в $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$; вдлъбната в $(-\infty, 0)$, изпъкнала в $(0, +\infty)$; инфлексна точка

$(0, 0)$; $f_{\max}'' = f''(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2\sqrt{2}$, $f_{\min}'' = f''(\frac{\sqrt{2}}{2}) = -2\sqrt{2}$; г) $f'(x) = x^4 - 3x^2 + 2$; четна;

намаляваща в $(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{2})$, растяща в $(-\frac{\sqrt{6}}{2}, 0)$, намаляваща в $(0, \frac{\sqrt{6}}{2})$, растяща в $(\frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty)$;

изпъкнала в $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, вдлъбната в $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, изпъкнала в $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$, инфлексни точки

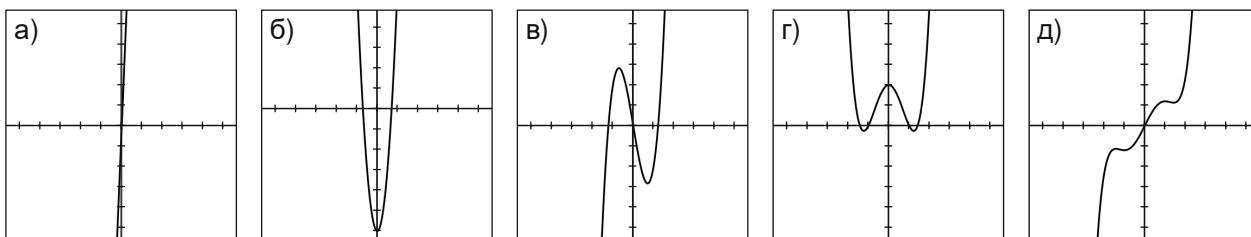
$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{4})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{4})$; $f_{\min}' = f'(-\frac{\sqrt{6}}{2}) = f'(\frac{\sqrt{6}}{2}) = -\frac{1}{4}$, $f_{\max}' = f'(0) = 2$;

д) нечетна, растяща в $(-\infty, -\sqrt{2})$, намаляваща в $(-\sqrt{2}, -1)$, растяща в $(-1, 1)$, намаляваща в

$(1, \sqrt{2})$, растяща в $(\sqrt{2}, +\infty)$; вдлъбната в $(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{2})$, изпъкнала в $(-\frac{\sqrt{6}}{2}, 0)$, вдлъбната в

$(0, \frac{\sqrt{6}}{2})$, изпъкнала в $(\frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty)$; инфлексни точки $(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{19\sqrt{6}}{40})$, $(0, 0)$, $(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{19\sqrt{6}}{40})$;

$f_{\max} = f(-\sqrt{2}) = -\frac{4\sqrt{2}}{5}$, $f_{\min} = f(-1) = -\frac{6}{5}$, $f_{\max} = f(1) = \frac{6}{5}$, $f_{\min} = f(\sqrt{2}) = \frac{4\sqrt{2}}{5}$;



1.10. Изследване на дробно-линейна функция. Графика43

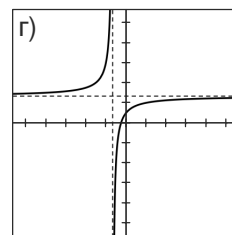
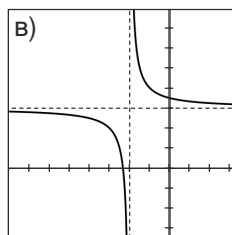
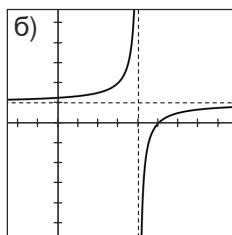
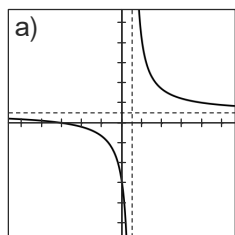
2 а) вертикална асимптота $x = 1$, хоризонтална асимптота $y = 2$; вдлъбната в $(-\infty, 1)$, изпъкнала в

$(1, +\infty)$; б) вертикална асимптота $x = 4$, хоризонтална асимптота $y = 1$; изпъкнала в $(-\infty, 4)$,

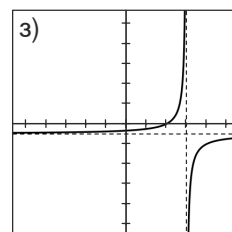
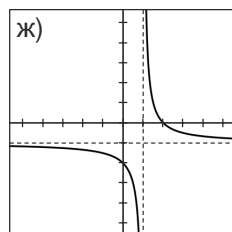
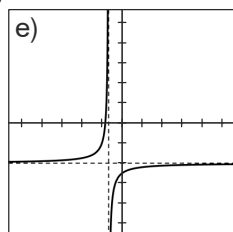
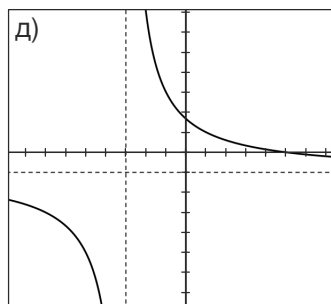
вдлъбната в $(4, +\infty)$; в) вертикална асимптота $x = -2$, хоризонтална асимптота $y = 3$; вдлъбната

в $(-\infty, -2)$, изпъкнала в $(-2, +\infty)$; г) вертикална асимптота $x = -\frac{2}{3}$, хоризонтална асимптота

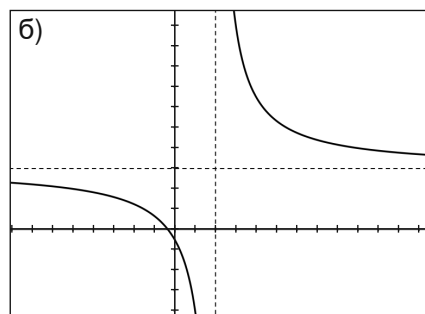
$y = \frac{4}{3}$; изпъкнала в $(-\infty, -\frac{2}{3})$, вдлъбната в $(-\frac{2}{3}, +\infty)$;



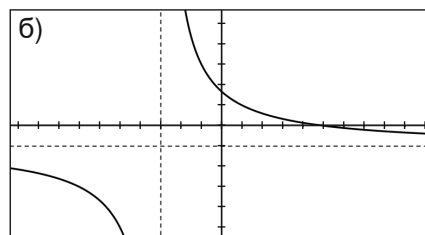
д) вертикална асимптота $x = -3$, хоризонтална асимптота $y = -1$; вдлъбната в $(-\infty, -3)$, изпъкнала в $(-3, +\infty)$; е) вертикална асимптота $x = -\frac{2}{3}$, хоризонтална асимптота $y = -2$; изпъкнала в $(-\infty, -\frac{2}{3})$, вдлъбната в $(-\frac{2}{3}, +\infty)$; ж) вертикална асимптота $x = 1$, хоризонтална асимптота $y = -1$; вдлъбната в $(-\infty, 1)$, изпъкнала в $(1, +\infty)$; з) вертикална асимптота $x = 3$, хоризонтална асимптота $y = -\frac{1}{2}$; изпъкнала в $(-\infty, 3)$, вдлъбната в $(3, +\infty)$;



3. а) Няма локални екстремуми, вертикална асимптота $x = 2$;
б) $f'(x) = \frac{3x+1}{x-2}$; намалява в $(-\infty, 2)$ и в $(2, +\infty)$, вдлъбната в $(-\infty, 2)$, изпъкнала в $(2, +\infty)$; вертикална асимптота $x = 2$, хоризонтална асимптота $y = 3$;



4. а) $f_{\max} = f(5) = 24 \ln 2$, вертикална асимптота $x = -3$;
б) $f'(x) = \frac{5-x}{x+3}$; намалява в $(-\infty, -3)$ и в $(-3, +\infty)$, вдлъбната в $(-\infty, -3)$, изпъкнала в $(-3, +\infty)$; вертикална асимптота $x = -3$, хоризонтална асимптота $y = -1$;
5. а) $k = 2$; б) за всяко $k \neq -16$; в) няма такива k ; г) $k = -7$;
6. а) $k < 1$; б) $k > 1$;



Приложения на математическия анализ. Общи задачи 45

1. -16 ; 2. 12 ; 3. $3x + 4y - 3 = 0$; 4. $2x + 1$; 5. $1, \frac{5}{3}$; 6. $(\frac{5}{2}, 1)$; 7. а) Намалява в $(-\infty, \frac{-3-\sqrt{5}}{2})$, расте в $(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2})$, намалява в $(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, 2)$, расте в $(2, +\infty)$; б) Намалява в $(-\infty, -3)$, расте в $(0, +\infty)$; в) Намалява в $(-\infty, 0)$, расте в $(2, +\infty)$; г) Расте в $(-\infty, -5-\sqrt{13})$, намалява в $(-5-\sqrt{13}, 5+\sqrt{13})$, расте в $(5+\sqrt{13}, +\infty)$;

8. а) Расте в $(-\infty, 1)$, расте в $(1, 2)$, намалява в $(2, 3)$, намалява в $(3, +\infty)$, $f_{\max} = f(2) = 0$;
 б) Расте в $(-\infty, -1)$, расте в $(-1, \frac{1}{2})$, намалява в $(\frac{1}{2}, 2)$, намалява в $(2, +\infty)$, $f_{\max} = f(\frac{1}{2}) = -\frac{11}{9}$;
 в) Намалява в $(-\infty, 2)$, намалява в $(2, 5)$, намалява в $(5, +\infty)$, няма локални екстремуми;
 г) Намалява в $(-\infty, -2)$, намалява в $(-2, 3)$, намалява в $(3, +\infty)$, няма локални екстремуми;
 д) Намалява в $(-\infty, 0)$, расте в $(0, +\infty)$, няма локални екстремуми; е) намалява в $(0, 1)$, намалява в $(1, e)$, расте в $(e, +\infty)$, $f_{\min} = f(e) = e$;

9. Расте в $(-\infty, 0)$, намалява в $(0, +\infty)$, $\max_{(-\infty, \infty)} f(x) = f_{\max} = f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, изпъкнала в $(-\infty, -1)$,

вдлъбната в $(-1, 1)$, изпъкнала в $(1, +\infty)$, инфлексни точки при $x = \pm 1$, хоризонтална асимптота

$y = 0$; 10. Расте в $(-1, -\frac{\sqrt{3}}{3})$, намалява в $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$, расте в $(1, +\infty)$, $f_{\max} = f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = \ln \frac{2\sqrt{3}}{9}$;

11. а) Намалява в $(-\infty, \infty)$, няма локални екстремуми, вдлъбната в $(-\infty, -1)$, изпъкнала в $(-1, 1)$, вдлъбната в $(1, +\infty)$, инфлексни точки в $x = \pm 1$; б) Намалява в $(-\infty, 0)$, расте в $(0, +\infty)$, $f_{\min} = f(0) = 0$, вдлъбната в $(-\infty, -1)$, изпъкнала в $(-1, 1)$, вдлъбната в $(1, +\infty)$, инфлексни точки

$(-1, f(-1)) = (-1, \ln 2)$, $(1, f(1)) = (1, \ln 2)$; 13. $f_{\min} = f(4 - \sqrt{26}) = \frac{-3 - \sqrt{26}}{2}$,

$f_{\max} = f(4 + \sqrt{26}) = \frac{-3 + \sqrt{26}}{2}$; 14. а) $f_{\min} = f(\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi) = -\sqrt{2}$, $f_{\max} = f(\frac{\pi}{4} + 2k\pi) = \sqrt{2}$,

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; б) $f_{\min} = 0$, $f_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$; 15. б) $x = 4k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; 16. Намалява в

$(-\infty, -1)$, расте в $(-1, -\frac{1}{2})$, намалява в $(-\frac{1}{2}, 0)$, расте в $(0, +\infty)$; $f_{\min} = f(-1) = 1$,

$f_{\max} = f(-\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}$, $f_{\min} = f(0) = 1$; 17. а) растяща в $(-\infty, 2)$, намаляваща в $(2, 3)$,

намаляваща в $(3, 4)$, растяща в $(4, +\infty)$; $f_{\max} = f(2) = 1$, $f_{\min} = f(4) = 5$; вдлъбната в $(-\infty, 3)$,

изпъкнала в $(3, +\infty)$; вертикална асимптота $x = 3$; б) намаляваща в $(-\infty, -1)$, растяща в $(-1, 3)$,

растяща в $(3, 7)$, намаляваща в $(7, +\infty)$; $f_{\min} = f(-1) = -1$, $f_{\max} = f(7) = -17$; изпъкнала в

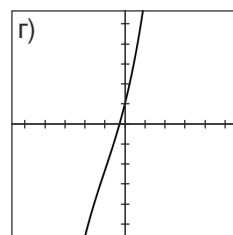
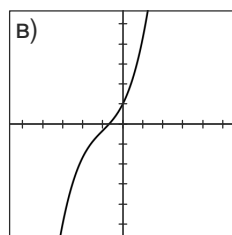
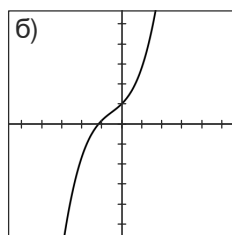
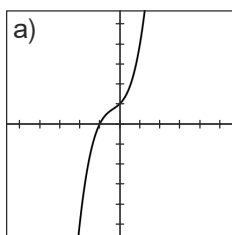
$(-\infty, 3)$, вдлъбната в $(3, +\infty)$; вертикална асимптота $x = 3$; в) растяща в $(-\infty, -3)$, намаляваща в

$(-3, -2)$, намаляваща в $(-2, -1)$, растяща в $(-1, +\infty)$; $f_{\max} = f(-3) = -4$, $f_{\min} = f(-1) = 0$;

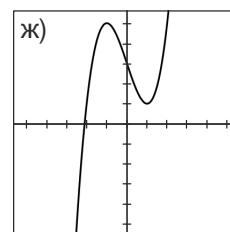
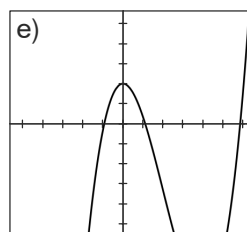
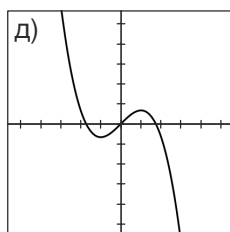
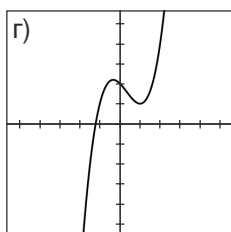
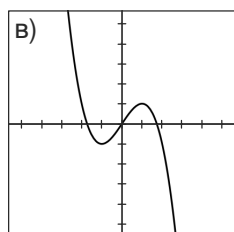
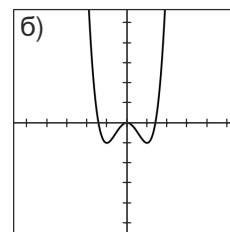
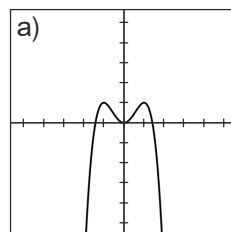
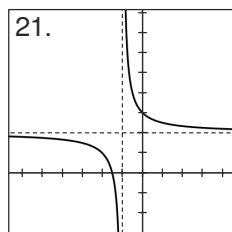
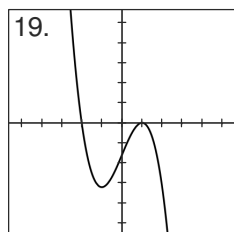
вдлъбната в $(-\infty, -2)$, изпъкнала в $(-2, +\infty)$; вертикална асимптота $x = -2$;

18. а) инфлексна точка $(-\frac{1}{3}, \frac{20}{27})$; б) инфлексна точка $(-\frac{1}{2}, \frac{7}{12})$;

в) инфлексна точка $(-1, -\frac{1}{3})$; г) инфлексна точка $(-1, -\frac{7}{3})$;

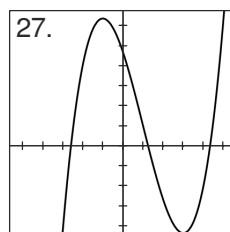
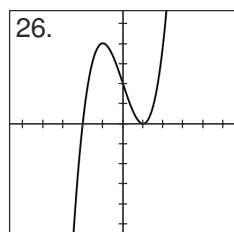
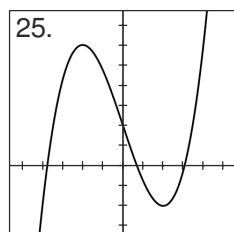


19. $y = -\frac{4}{5}x^3 + \frac{12}{5}x - \frac{8}{5}$; 20. $a = -1$ и $a = 2$; 21. чертеж; 22. чертеж от а) до ж);



24. $p=0, q=3$;

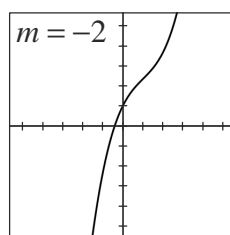
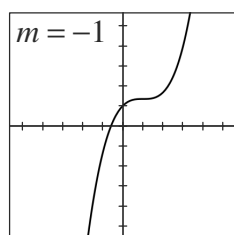
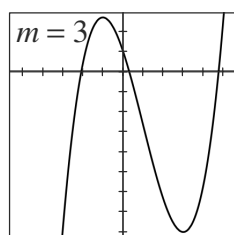
25. $m=0, n=-3, y=\frac{x^3}{4}-3x+2$; $f_{\max}=f(-2)=6, f_{\min}=f(2)=-2$; инфлексна точка $(0, 2)$;



26. $m=0, n=-3, y=x^3-3x+2$; $f_{\min}=f(-1)=4, f_{\max}=f(1)=0$, инфлексна точка $(0, 2)$;

27. $m=-1, n=-3, y=\frac{x^3}{3}-x^2-3x+\frac{14}{3}$; 28. $a \neq 2$; 29. $a=\pm 2\sqrt[4]{3}$; 30. $-\frac{1}{3}$;

31. При $m > -1$ $f(x)$ има локален максимум при $x=1-\sqrt{1+m}$ и локален минимум при $x=1+\sqrt{1+m}$; При $m \leq -1$ $f(x)$ няма локални екстремуми; При $m > -1$ $f(x)$ има локален максимум за $x=1-\sqrt{1+m}$ и локален минимум за $x=1+\sqrt{1+m}$. При всяко m $f(x)$ има инфлексна точка при $x=2$.

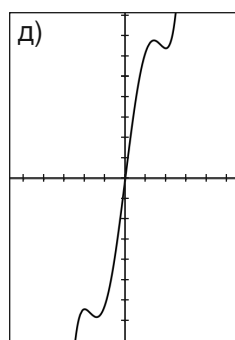
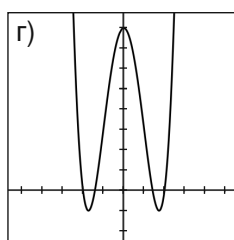
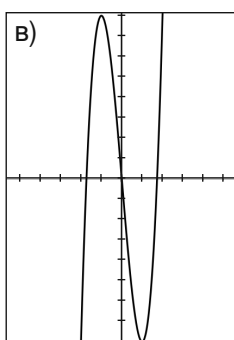
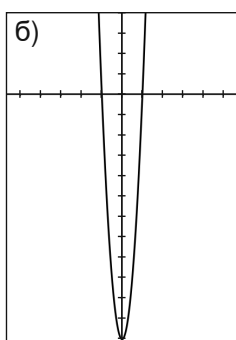
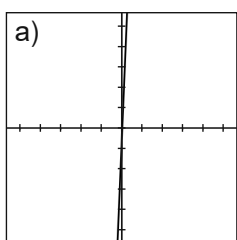


32. а) $a=3$; б) $a=7$; 33. а) един двукратен $x_{1,2}=-\frac{1}{3}$ и един прост $x_3=-\frac{4}{3}$ корен; б) един корен в $(-2,-1)$; в) три различни корена във всеки от интервалите $(-4,-3)$, $(-3,-1)$ и $(-1,0)$; г) четири корена във всеки от интервалите $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$; д) пет корена във всеки от интервалите $(-2,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$; 34. б) 4;

35. а) $f''(x)=24x$, растяща в $(-\infty, +\infty)$, права;

б) $f'''(x)=12x^2-12$; четна; намаляваща в $(-\infty, 0)$, растяща в $(0, +\infty)$; изпъкнала в $(-\infty, +\infty)$; $f'''_{\min}=f'''(0)=-12$;

в) $f''(x) = 4x^3 - 12x$; нечетна; растяща в $(-\infty, -1)$, намаляваща в $(-1, 1)$, растяща в $(1, +\infty)$; вдлъбната в $(-\infty, 0)$, изпъкнала в $(0, +\infty)$; инфлексна точка $(0, 0)$; $f''_{\max} = f''(-1) = 8$, $f''_{\min} = f''(1) = -8$; г) $f'(x) = x^4 - 6x^2 + 8$; четна; намаляваща в $(-\infty, -\sqrt{3})$, растяща в $(-\sqrt{3}, 0)$, намаляваща в $(0, \sqrt{3})$, растяща в $(\sqrt{3}, +\infty)$; изпъкнала в $(-\infty, -1)$, вдлъбната в $(-1, 1)$, изпъкнала в $(1, +\infty)$, инфлексни точки $(-1, 3)$, $(1, 3)$; $f'_{\min} = f'(-\sqrt{3}) = f'(\sqrt{3}) = -1$, $f'_{\max} = f'(0) = 8$;
д) нечетна, растяща в $(-\infty, -2)$, намаляваща в $(-2, -\sqrt{2})$, растяща в $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, намаляваща в $(\sqrt{2}, 2)$, растяща в $(2, +\infty)$; вдлъбната в $(-\infty, -\sqrt{3})$, изпъкнала в $(-\sqrt{3}, 0)$, вдлъбната в $(0, \sqrt{3})$, изпъкнала в $(\sqrt{3}, +\infty)$; инфлексни точки $(-\sqrt{3}, -\frac{19\sqrt{3}}{5})$, $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, \frac{19\sqrt{3}}{5})$; $f_{\max} = f(-2) = -\frac{32}{5}$, $f_{\min} = f(-\sqrt{2}) = -\frac{24\sqrt{2}}{5}$, $f_{\max} = f(\sqrt{2}) = \frac{24\sqrt{2}}{5}$, $f_{\min} = f(2) = \frac{32}{5}$;



39. При $a > \frac{9}{4}$, $\max_{[0, a]} f(x) = \frac{4}{4a-9}$, при $\frac{9}{4} < a \leq 3$, $\min_{[0, a]} f(x) = \frac{1}{a}$, при $a > 3$, $\min_{[0, a]} f(x) = \frac{1}{a^2 - 2a}$; 40. $\min_{[-3, 3]} f(x) = \frac{1098}{4096}$, $\max_{[-3, 3]} f(x) = 9216$; 41. $\max f(x) = 1 + \sqrt{2}$, $\min f(x) = -\frac{5}{4}$; 42. $x - y - 13 = 0$, $x - y + 7 = 0$; 43. $6\sqrt{5}$; 44. а) $10x + 3y - 32 = 0$; б) $x = \sqrt{5}$; в) $7x - \sqrt{7}y - 35 = 0$; г) $3\sqrt{5}x - 10y - 60 = 0$; д) $3x + y + 18 = 0$; е) $x - y + 6 = 0$; 45. а) $(-5, -1)$; б) $(2, 8)$; в) $(-2, -7)$; г) $(4, 2)$; 46. Г; 47. 90° ; 48. $(-2, 0)$;

Приложения на математическия анализ – Тест 1 и Тест 2.....54

Тест 1. 1. $-\frac{1}{125}$; 2. Расте в $(-\infty, -1)$, расте в $(-1, -\frac{1}{2})$, намалява в $(-\frac{1}{2}, 0)$, намалява в $(0, +\infty)$; 3. $x + 2y - 9 = 0$; 4. А; 5. Г; 6. Г; 7. А; 8. Б; 9. А; 10. Расте в $(-\infty, -3)$, намалява в $(-3, 3)$, расте в $(3, +\infty)$, $f_{\max} = f(-3)$, $f_{\min} = f(3)$, инфлексни точки в $\pm\sqrt{3}$ и $\frac{3}{2}$; 11. $f_{\max} = f(\frac{2}{3}) = \frac{1}{27}$, $f_{\min} = f(1) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, инфлексия в $(\frac{5}{6}, \frac{1}{54})$.

Оценяване. За всеки верен отговор по 2 точки. Оценка =(броя на точките.100/22).

Тест 2. 1. $\frac{-27\sqrt{6}}{8}$; 2. Расте в $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, намалява в $(\frac{1}{2}, +\infty)$; 3. $x - 8y + 29 = 0$; 4. Г; 5. В;

6. Б; 7. А; 8. Б; 9. Г; 10. Намалява в $(-\infty, -1)$, намалява в $(-1, 0)$, расте в $(0, +\infty)$, $f_{\min} = f(0) = 1$, вдлъбната в $(-\infty, -1)$, изпъкнала в $(-1, +\infty)$; няма инфлексни точки.

11. $f_{\max} = f(-6) = 106$, $f_{\min} = f(0) = -2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, инфлексия в $(-3, 52)$;

Оценяване. За всеки верен отговор по 2 точки. Оценка =(броя на точките.100/22).

2. Геометрични модели

2.1. Екстремални задачи в равнината.....58

4. равностранният триъгълник, $3\sqrt{3}r^2$; 5. равностранният триъгълник, $3\sqrt{3}r^2$; 6. равностранният триъгълник, $\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$; 7. при $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\frac{r}{R} = \sqrt{2} - 1$; 9. $2R \sin \frac{2\pi}{9} = 2R \sin 40^\circ$; 10. $AB = 2BC$, R^2 ;
11. квадрат със страна \sqrt{S} , $4\sqrt{S}$; 12. квадрат, $2R^2$; 13. $\frac{\pi}{3}$, $12\sqrt{3}$; 14. $S(x) = \frac{c^2 \sin x \sin(x + \gamma)}{2 \sin \gamma}$,
 $0 < x < \pi - \gamma$, $S_{\max} = \frac{c^2 \cos^2 \frac{\gamma}{2}}{2 \sin \gamma}$; 15. $\frac{\pi}{3}$, $\frac{3\sqrt{3}b^2}{4}$; 16. отсечка, успоредна на AB с дължина $\frac{\sqrt{2}}{2}$;
17. б) $\frac{\pi}{3}$;

2.2. Екстремални задачи в пространството62

3. $\max V = \frac{2\sqrt{3}\pi R^3}{27}$ при $d = \frac{R\sqrt{3}}{3}$; 4. $\frac{3p}{5}$ – бедра, $\frac{4p}{5}$ – основа; 5. $\frac{12}{35}$; 6. $\frac{2}{3}R$, $\frac{4}{27}\pi R^2 H$;
7. $V = \frac{5\pi}{3}x^2(3-x)$, $x \in (0, 3)$, $V_{\max} = \frac{20\pi}{3}$; 8. $MA = MC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $V = \frac{4\sqrt{3}}{27}$;

2.3. Комбинации от ротационни тела64

2. а) 684π , 2448π ; б) 5400π , 3417π ; в) 5616π , 3417π ; г) 2520π , 4900π ; д) $\frac{13464\pi}{5}$, $\frac{31212\pi}{5}$;
4. а) $104\pi \text{ cm}^2$, $48\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$; б) $44\pi \text{ cm}^2$, $\frac{28\sqrt{3}\pi}{3} \text{ cm}^3$; 5. а) $16,8\pi$, $9,6\pi$; б) $62,4\pi$, $32,8\pi$;
6. а) $\frac{\pi S^2}{a}$; б) $\frac{b}{a}$; 7. $\frac{4\pi}{3}S\sqrt{2\text{tg}\alpha}$; 8. $S_{AB} = \pi h(c + d + 2b)$, $S_{CD} = \pi h(c + d + 2a)$,
 $S_{AD} = \frac{\pi h}{c}(a^2 + b^2 + ad + bd)$, $V_{AB} = \frac{\pi h^2(a + 2b)}{3}$, $V_{CD} = \frac{\pi h^2(2a + b)}{3}$, $V_{AD} = \frac{\pi h^2(a^2 + b^2 + ab)}{3c}$;
9. а) Тялото е цилиндър с $r = 4$, $l = h = 6$, $S_1 = 48\pi$, $V = 96\pi$; б) Тялото се състои от пресечен конус с $r = 4$, $R = 8$, $h_{\text{пр.к.}} = 3$, $l_{\text{пр.к.}} = 5$ и „върху него“ цилиндър с $r = 4$, $l_{\text{ц}} = h_{\text{ц}} = 1$; повърхнина $S = 148\pi$ и обем $V = 128\pi$;
10. Тялото се състои от пресечен конус с $r = 2$, $R = \frac{5}{2}$, $l_{\text{пр.к.}} = 2$, $h_{\text{пр.к.}} = \frac{\sqrt{15}}{2}$ и конус с $R = \frac{5}{2}$,
 $h_{\text{к}} = \frac{3\sqrt{15}}{2}$, $l_{\text{к}} = 2\sqrt{10}$; $S = (13 + 5\sqrt{10})\pi$, $V = \frac{17\sqrt{15}\pi}{3}$;
11. 24 cm , $4896\pi \text{ cm}^2$. 12. $199296\pi \text{ cm}^2$; 13. а) $S_a > S_b > S_c$; б) $V_a > V_b > V_c$; 17. а) $\cos \alpha = \sqrt[3]{3} - 1$;
б) $\frac{2\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9} + \sqrt{2}\sqrt{2\sqrt[3]{9} - 3}}{4}$; 18. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$; 20. $4:25$; 21. $V_{\text{сф}}:V_{\text{к}} = 1:2$;
22. $V = \frac{4}{3}\pi h^3$ или $V = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{5} - 2)h^3$; 23. $\frac{2\pi R^2(4 - \sin^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha}$; 24. а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi R^2$; 25. $\frac{\sqrt{2}}{16}\pi d^3$;
26. $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$;

2.4. Комбинации от многостени и сфери.....69

2. 3; 3. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$; 4. 54 cm^3 ; 5. $1,5h$; 7. 3; 8. $\frac{32R^3 \sin^5 \alpha \cot \beta \sqrt{\sin(\alpha + \beta) \sin(\beta - \alpha)}}{3 \sin \beta}$; 11. 7; 12. 8; 13. 11;

14. 18; 15. 13; 16. R^3 ; 17. $\frac{a}{2}$; 18. $12\sqrt{3}R^2$; 19. $18\sqrt{3}R^2$, $6\sqrt{3}R^3$; 20. а) $R = \frac{h}{3}$; б) $R = h(\sqrt{2} - 1)$;
21. $\frac{a\sqrt{6}}{12}$; 22. $R = \frac{ah}{a + \sqrt{12h^2 + a^2}}$; 23. $R = \frac{ah}{a + \sqrt{4h^2 + a^2}}$; 26. $\frac{h \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \alpha}$;
27. $\frac{a\sqrt{2} \sin \alpha}{2}(1 + \sqrt{1 + \sin^2 \alpha})$; 29. $\frac{32\pi}{3}$; 30. $15\sqrt{15}$; 31. б) $\frac{28\sqrt{7}\pi}{3}$; 32. $\frac{\sqrt{2}}{4\pi}$; 33. $9 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$;
34. $V = \frac{8\sqrt{3}R^3}{27}$, $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$; 36. $\frac{h}{1 + \sqrt{1 + 2\operatorname{tg}^2 \beta}}$; 36. 1:63; 37. 500; 38. 400 cm^2 ;
39. $\frac{1}{\sin 2\alpha} \sqrt{\frac{B}{2 \sin \varphi}}$; 40. $\frac{8R^2 \cotg^2 \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2}}{\sin \alpha \cos \beta}$;

Геометрични модели. Общи задачи.....77

1. а) $420\pi \text{ cm}^2$; б) $\frac{1020}{13}\pi \text{ cm}^2$; 2. а) $\sqrt{3}$; б) $2 \sin \alpha$; 3. а) $\frac{2}{3}\pi S \sqrt{\frac{S\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{3}\pi S^4 \sqrt{\frac{3S^2}{4}}$; б) $\frac{2\pi S \sqrt{S}}{3}$;
- в) $\frac{2\pi S \sqrt{S \sin 2\alpha}}{3}$; 4. $624\pi \text{ cm}^2$, $2112\pi \text{ cm}^3$;
5. а) $576\pi \text{ cm}^2$, $2112\pi \text{ cm}^3$; б) $912\pi \text{ cm}^2$, $2112\pi \text{ cm}^3$; в) $1426\pi \text{ cm}^2$, $4544\pi \text{ cm}^3$; г) $896\pi \text{ cm}^2$, $2604\pi \text{ cm}^3$; д) $650\pi \text{ cm}^2$, $1900\pi \text{ cm}^3$;
6. $\frac{42986\pi}{9} \text{ cm}^2$, $16020\pi \text{ cm}^3$; 7. 6; 8. $\frac{35}{8}$; 9. 2; 10. $\frac{1}{\sin 2\alpha} \sqrt{(R-r)^2 + 4rR \cos^2 \alpha}$;
11. $V = \frac{1}{48}\pi l^3 \sin^4 \alpha \sin 2\alpha$, $S_1 = \frac{1}{2}\pi l^2 \sin^3 \alpha \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{4}\right)$; 13. $\frac{288}{625}$;
14. а) $\frac{\pi h^2}{3 \sin^2 \alpha} (2\sqrt{3 \cos^2 \alpha + 1} + 3 \cos^2 \alpha + 1)$; б) $\frac{32\pi h^3}{81 \sin^6 \alpha}$;
15. а) $S = 6B$, $V = 2B \sqrt{\frac{B}{\sin 2\alpha}} \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha - 1)$; б) $\frac{4\pi B}{\sin 2\alpha} (3 + \sin 2\alpha - 2(\sin \alpha + \cos \alpha))$;
16. $2\pi R^2 \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha \cdot (\sin \alpha + 1)$, $\frac{2}{3}\pi R^3 \sin^2 2\alpha \cdot \cos^2 \alpha$; 17. а) $\frac{4000}{81}\pi \text{ cm}^3$; б) 3 cm; $\frac{7\sqrt{5}}{9}R^2$;
19. $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ или $\cos \alpha = \frac{1}{5}$; 20. а) $\frac{8k^2 \cdot \cos \beta \cdot \cos^2 \frac{\beta}{2}}{\sin \alpha}$; б) $k \cdot \cos \beta \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$; 21. а) $\frac{2}{3}b^3 \cdot \cos^3 \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \beta$;
- б) $\frac{b}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin 2\beta}$; 22. $\frac{37}{81}R^3$; 23. $\frac{28\sqrt{7}}{81}\pi b^3$; 24. $\frac{6\sqrt{3}}{\pi}$; 25. $12\sqrt{3}r^3$; 26. $\frac{4p^2(\sin \alpha + \cos \alpha - 1)}{\sin \alpha + \cos \alpha + 1}$;
27. $\frac{1}{3}B \sqrt{B \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right) \cdot \cotg \beta$; 28. $\frac{3\sqrt{3}(\sqrt{5} - 2)}{5}$; 29. $\sqrt{2} - 1$; 30. $\frac{4}{81}\pi R^3$; 31. $\frac{a\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{2}$;
32. $6B$; 33. 1 cm; 34. $\frac{b \sin \alpha \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{2}$; 35. $\frac{h(\sqrt{-\cos 2\delta} + \cos 2\delta)}{2 \cos^2 \delta}$; 36. $2\sqrt{2}$; 37. $b\sqrt{\frac{11}{15}}$; 38. $\frac{9 + \sqrt{3}}{26}$;
39. $15\sqrt{7} \text{ cm}^3$; 40. $\frac{\sqrt{2}}{2}b^3$; 41. $\frac{b^3}{\sqrt{3b-a}\sqrt{a^3+b^3-3a^2b+ab^2}}$; 42. 2,5 cm; 43. $\frac{\sqrt{3}l^4}{32R^3}(4R^2 - l^2)$;
44. $\frac{100\sqrt{19}}{19}$; 45. 3 cm; 46. 2,5 cm; 47. $\frac{13\sqrt{41}}{8}$; 48. а) $\frac{2 + \sqrt{3}}{12}(2Rh^2 - h^3)$; б) $\frac{8(2 + \sqrt{3})R^3}{81}$;

49. $\frac{R\sqrt{4\sin^2 3\alpha - 1}}{2\sin 3\alpha}$;

50. а) $\frac{\sqrt{3}}{96} a^3 \frac{\sin^3 \frac{\alpha}{2}}{\sin^3 \frac{\alpha - 60^\circ}{2} \sin^3 \frac{\alpha + 60^\circ}{2}}$; б) $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{54} \frac{1}{\cos^3 \frac{\alpha}{2} \sin^3 \left(\frac{\alpha - 60}{2}\right) \sin^3 \left(\frac{\alpha + 60}{2}\right)}$; в) 108° ;

51. $\frac{R^3}{3} \sin^2 2\alpha$; 52. б) $\operatorname{tg} \angle(ABC, MBC) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$; в) $4(7 + \sqrt{34}) \text{ cm}^2$, 16 cm^3 ; 53. $288(2 \pm \sqrt{3}) \text{ cm}^3$;

54. $\frac{32}{81} \pi b^3$; 55. $\frac{2R \sin 3\alpha}{3 \sin \alpha}$; 56. $\frac{b\sqrt{21}}{6}$; 57. $\frac{b \sin \alpha}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{4}}$; 58. $\frac{a \sin \alpha}{1 + \sin \alpha + \cos \alpha}$;

Геометрични модели – Тест 1 и Тест 2 87

Тест 1. 1.А; 2.Г; 3. $(56 + 24\sqrt{3})\pi$; $\frac{224\sqrt{3}\pi}{3}$; 4.Б; 5.Г; 6.468 cm²; 7.В; 8. Б; 9. 12; 10. $\frac{\pi}{3}$;

Оценяване. За задачи от 1 до 9 по 2 точки, за задача 10 6 точки. Оценка =(броя на точките.100/24).

Тест 2. 1.Г; 2.Б; 3. $(10 + 6\sqrt{3})\pi$; $\frac{28\sqrt{3}\pi}{3}$; 4.В; 5.Б; 6.568 cm²; 7.Б; 8. В; 9. $\frac{128}{3}$; 10. $\frac{\pi}{4}$;

Оценяване. За задачи от 1 до 9 по 2 точки, за задача 10 6 точки. Оценка =(броя на точките.100/24).

3. Емпирични разпределения

3.3. Емпирично разпределение и описателни статистики, изключения (аутлаери)..... 92

1. 2. а)

x_i	2	4	6	8
f_i	30	40	50	20
P_i	0,21	0,29	0,36	0,14

x_i	1	2	3	4	5	7
f_i	4	4	4	5	5	2
P_i	0,17	0,17	0,17	0,21	0,21	0,07

б)

x_i	25	27	30
f_i	6	8	10
P_i	0,25	0,33	0,42

в)

x_i	361	518	620	740
f_i	9	12	14	10
P_i	0,2	0,27	0,31	0,22

г)

x_i	23	24	25
f_i	8	21	7
P_i	0,22	0,59	0,19

3. 4; 3; 5; 4; 2;

4. $F_{30}(x) = \{0, x \leq 2; 0,23, 2 < x \leq 4; 0,53, 4 < x \leq 6; F(x)$

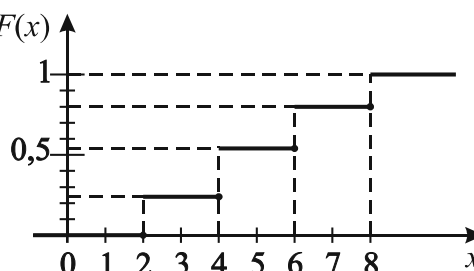
$0,8, 6 < x \leq 8; 1, 8 < x\}$; 5. $F_{21}(x) = \{0, x \leq 1;$

$0,24, 1 < x \leq 2; 0,57, 2 < x \leq 3; 0,86, 3 < x \leq 4;$

$1, 4 < x\}$; 6. $F_{21}(x) = \{0, x \leq 2; 0,16, 2 < x \leq 4;$

$0,33, 4 < x \leq 5; 0,53, 5 < x \leq 8; 0,73, 8 < x \leq 10;$

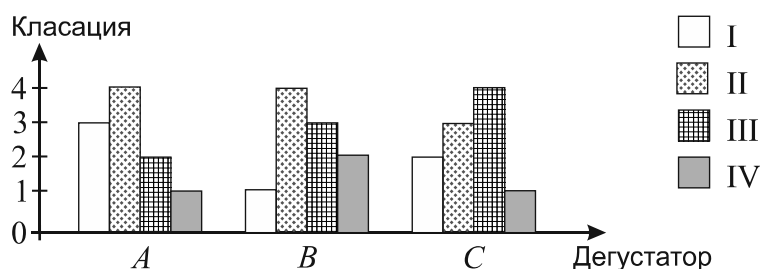
$0,87, 10 < x \leq 11; 1, 11 < x\}$



7. а) разходите на третата фирма са необичайно високи; б) дефектните изделия в цех E са необичайно ниски; в) продадените мобилни устройства в магазин B са необичайно ниски;

3.5. Анализ на диаграми – зависимост на две категорни променливи99

1.



3.6. Диаграма на разсейване. Корелационна зависимост 100

4. линейна; 5. линейна; 6. няма зависимост; 7. няма зависимост;

Емпирични разпределения – Тест 1 и Тест 2..... 102

Тест 1. 1. а) $x_i \{32, 34, 35, 39\}$; $f_i \{11, 15, 12, 18\}$; $p_i \{0,24, 0,33, 0,26, 0,17\}$;

$F_{46}(x) = \{0, x \leq 32; 0,24, 32 < x \leq 34; 0,57, 34 < x \leq 35; 0,83, 35 < x \leq 39; 1, 39 < x\}$;

б) ; г) $N_{Me} = 23$, $Me = 34$, $N_{Q_1} = 12$, $Q_1 = 34$, $N_{Q_3} = 34$, $Q_3 = 35$;

Оценяване. За верен отговор на а), б) и в) – по 2 точки, за г) по 2 точки за медианата, първи и трети квартил. Оценка в точки = (получените точки.100/12);

Тест 2. 1. а) $x_i \{37, 38, 39, 40\}$; $f_i \{12, 16, 11, 9\}$; $p_i \{0,25, 0,33, 0,23, 0,19\}$;

б) $F_{48}(x) = \{0, x \leq 37; 0,25, 37 < x \leq 38; 0,58, 38 < x \leq 39; 0,81, 39 < x \leq 40; 1, 40 < x\}$;

г) $N_{Me} = 24$, $Me = 38$, $N_{Q_1} = 12$, $Q_1 = 37$, $N_{Q_3} = 36$, $Q_3 = 39$;

Оценяване. За верен отговор на а), б) и в) – по 2 точки, за г) по 2 точки за медианата, първи и трети квартил. Оценка в точки = (получените точки.100/12);

4. Елементи от комбинаториката

4.1. Съединения с повторения 104

5. 5^6 ; 6. $9 \cdot 10^8 \cdot 9 = 81 \cdot 10^8$; 7. n^k ; 8. $9n^{k-1}$; 10. б) $\tilde{P}_7(4, 2, 1) = \frac{567}{2}$; в) $\tilde{P}_7(3, 4) = 35$;

11. $\tilde{P}_8(3, 5) = \frac{8!}{3!5!} = 56$; 12. $\tilde{P}_6(1, 3, 2) = \frac{6!}{1!2!3!} = 60$; 17. а) $\tilde{C}_3^6 = 28$; б) $\tilde{V}_3^6 = 729$; 18. $\tilde{C}_5^{10} = 1001$;

Елементи от комбинаториката . Общи задачи 113

1. а) 8; б) 81; в) 64; 2. а) 10; б) 5; в) 2520; 3. а) 4; б) 10; в) 6; г) 1; д) 5; е) 1; ж) n ; 4. а) 560; б) 32; 6;

в) 84; 5. $\tilde{P}_{12}(3, 3, 3, 3) = \frac{12!}{6^4}$; 6. $\tilde{V}_2^n = 2^n$; 7. $\tilde{V}_{10}^4 = 1000$; 8. $\tilde{V}_6^4 = 6^4 = 1296$; 9. $\tilde{V}_2^7 = 2^7 = 128$;

10. а) $\tilde{C}_6^5 - \tilde{C}_5^5 = \frac{9!}{5!4!}$; б) $\tilde{C}_5^4 = 70$; 11. а) $\tilde{V}_2^4 = 2^4 = 16$; б) $\tilde{V}_5^4 = 5^4$; в) $\tilde{V}_5^4 - \tilde{V}_5^3 = 5^4 - 5^3 = 5 \cdot 5^3$;

12. а) $\tilde{P}_5(3, 2) = \frac{5!}{3!2!}$; б) $\tilde{P}_4(1, 2, 1) = \frac{4!}{2!}$; в) $P_3 = 3!$;

13. а) $\tilde{P}_8(3, 1, 4) = \frac{8!}{3!4!}$; б) $\tilde{P}_n(1, n-1) = \frac{n!}{(n-1)!}$; в) $\tilde{P}_{2n+1}(2, n, n-1) = \frac{(2n+1)!}{2!n!(n-1)!}$; 14. \tilde{C}_5^7 ;

15. $\tilde{P}_{10}(3, 5, 2)$; 16. $\tilde{P}_6(2, 1, 1, 1, 1) = 360$; 17. \tilde{C}_4^{30} ; 19. \tilde{C}_3^{15} ; 20. а) $\tilde{C}_3^{10} \tilde{C}_3^8 = 2970$; 21. $\tilde{P}_{10}(2, 5, 3)$;

22. $\tilde{P}_9(5, 4)$; 23. а) \tilde{C}_2^6 ; б) \tilde{V}_2^6 ; 24. $\tilde{V}_5^3 \cdot 2 = 5^3 \cdot 2$; 25. $\tilde{V}_6^3 - \tilde{V}_6^2 = 6^2 \cdot 5$; 26. $\tilde{P}(1, 1, 1, 2) = 60$;

27. $\tilde{P}(1, 3, 2) = 60$; 28. \tilde{C}_3^{10} ; 29. а) \tilde{C}_3^{20} ; 30. $\frac{3 \cdot \tilde{C}_2^{40}}{\tilde{C}_3^{40}}$ 31. \tilde{C}_2^7 ; 32 а) $\frac{\tilde{C}_1^{100}}{\tilde{C}_2^{100}}$, б) $\frac{2\tilde{C}_1^{100}}{\tilde{C}_2^{100}}$;

Елементи от комбинаториката – Тест 1 и Тест 2..... 115

Тест 1. 1. 3; 2. 9; 3. 21; 4. 81; 5. 60; 6. 500; 7. 243; 8. 455; 9. 6; 10. Г;

Оценяване. За всеки верен отговор по 2 точки. Оценка в точки = (получените точки.100/20);

Тест 2. 1. 4; 2. 16; 3. 5; 4. 243; 5. 120; 6. 180; 7. 1024; 8. 66; 9. 10; 10. Б;

Оценяване. За всеки верен отговор по 2 точки. Оценка в точки = (получените точки.100/20);

Отговори – Модул IV

1. Вероятности

1.1. Вероятност и независимост. Пълна група събития и формула за пълната вероятност 117

1. а) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{8}$; б) $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{4}$; в) A и B не са независими; B и C не са независими; 2. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$;

3. а) $\frac{1}{4}$; б) 1; в) $\frac{1}{3}$; 5. а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{7}{32}$; г) $\frac{5}{11}$; д) $\frac{2}{21}$; е) $\frac{7}{11}$; 6. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{5}{6}$; в) $\frac{2}{5}$;

7. $\frac{2}{3}$; 10. $\frac{1}{3}\left(\frac{3}{7} + \frac{4}{6} + \frac{5}{8}\right)$; 11. $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{5}{7}\right)$;

12. а) $\frac{1}{3}\left(\frac{C_3^2}{C_7^2} + \frac{C_4^2}{C_9^2} + \frac{C_5^2}{C_8^2}\right)$; б) $\frac{1}{3}\left(\frac{C_3^2 + C_4^2}{C_7^2} + \frac{C_4^2 + C_5^2}{C_9^2} + \frac{C_5^2 + C_3^2}{C_8^2}\right)$; в) $\frac{1}{3}\left(\frac{C_3^1 C_4^1}{C_7^2} + \frac{C_4^1 C_5^1}{C_9^2} + \frac{C_5^1 C_3^1}{C_8^2}\right)$;

13. а) $\frac{1}{3}\left(\frac{C_5^2}{C_{12}^2} + \frac{C_4^2}{C_{10}^2} + \frac{C_8^2}{C_{11}^2}\right)$; б) $\frac{1}{3}\left(\frac{C_5^2 + C_7^2}{C_{12}^2} + \frac{C_4^2 + C_6^2}{C_{10}^2} + \frac{C_8^2 + C_3^2}{C_{11}^2}\right)$; в) $\frac{1}{3}\left(\frac{C_5^1 C_7^1}{C_{12}^2} + \frac{C_4^1 C_6^1}{C_{10}^2} + \frac{C_8^1 C_3^1}{C_{11}^2}\right)$;

14. а) $\frac{1}{3}\left(\frac{C_4^2}{C_8^2} + \frac{C_3^2}{C_9^2} + \frac{C_5^2}{C_8^2}\right)$; б) $\frac{1}{3}\left(\frac{C_4^2 + C_3^2}{C_8^2} + \frac{C_3^2 + C_6^2}{C_9^2} + \frac{C_5^2 + C_3^2}{C_8^2}\right)$; в) $\frac{1}{3}\left(\frac{C_4^1 C_3^1}{C_8^2} + \frac{C_3^1 C_6^1}{C_9^2} + \frac{C_5^1 C_3^1}{C_8^2}\right)$;

15. а) образуват; б) образуват; 16. а) A и B образуват пълна група; б) $\frac{C_5^2}{C_5^2 + C_5^1 C_4^1}$;

17. а) не образуват; б) не образуват; 18. например: $A_i = \{\text{броя на извадените } i \text{ бели топки}\}$,

$i = 0, 1, 2, 3$; $\frac{C_6^3}{C_{11}^3}$; $\frac{C_5^1 C_6^2}{C_{11}^3}$; $\frac{C_5^2 C_6^1}{C_{11}^3}$; $\frac{C_5^3}{C_{11}^3}$; 19. например: $A_i = \{\text{броя на извадените } i \text{ бели топки}\}$,

$i = 0, 1, 2$; $\frac{1}{15}$; $\frac{8}{15}$; $\frac{2}{5}$; 20. а) $\frac{11}{36}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{5}$; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{11}$; 21. $\frac{2}{5}$; 22. $\frac{31}{55}$; 23. $\frac{8}{51}$; 24. $\frac{2}{5}$; 25. $\frac{271}{420}$;

26. 0,043; 27. $\frac{2}{7}$;

28. Двете деца имат равни вероятности да вземат шоколадов бонбон;

1.2. Формула на Бейс 125

1. $\frac{11}{34}$; 2. $\frac{3}{10}$; 3. $\approx 0,33$; 4. $\approx 0,04$; 5. $\frac{18}{43}$; 6. $\frac{1}{3}$; 7. $\frac{5}{16}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{16}$; 8. $\frac{4}{7}$; 9. а) 0,33; б) 0,67; 10. 0,0705;

11. $\frac{16}{25}$; 12. Y_9 ;

2. Случайна величина

2.1. Разпределение на дискретна крайна случайна величина. Примери на разпределения Функция на разпределение 128

1.

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

2.

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{4}{56}$

3. а)

X	3	6	9	12	15	18
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

б); $F(x) = \{ 0, \text{ при } x \leq 3; \frac{1}{6}, \text{ при } 3 < x \leq 6; \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}, \text{ при } 6 < x \leq 9; \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}, \text{ при } 9 < x \leq 12; \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}, \text{ при } 12 < x \leq 15; \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}, \text{ при } 15 < x \leq 18; \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1, \text{ при } 18 < x \}$

4.

X	6	10	12
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

6. Стойностите на X са 0, 1, и 2. Съответните вероятности са $\frac{45}{144}, \frac{78}{144}$ и $\frac{21}{144}$;

7. Стойностите на X са 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, и 12. Съответните вероятности са $\frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \frac{4}{36}, \frac{5}{36}, \frac{6}{36}, \frac{5}{36}, \frac{4}{36}, \frac{3}{36}, \frac{2}{36}$ и $\frac{1}{36}$;

8. Стойностите на X са 0, 1, и 2. Съответните вероятности са $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ и $\frac{1}{3}$;

9. Стойностите на X са 0, 1, и 2. Съответните вероятности са $\frac{15}{36}, \frac{6}{36}$ и $\frac{15}{36}$;

10. Стойностите на X са 0, 1, 2 и 3. Съответните вероятности са $\frac{6}{36}, \frac{6}{36}, \frac{6}{36}$ и $\frac{18}{36}$;

2.2. Математическо очакване (средна стойност), определение и свойства 132

2. а) 7; б) 1; в) 2; г) 2;

2.3. Дисперсия и стандартно отклонение на случайна величина 134

3. а) $DX = 26,25$; $\sigma = \sqrt{26,25}$; б) $DX = \frac{56}{9}$, $\sigma = \frac{\sqrt{56}}{3}$; в) $DX = 1$, $\sigma = 1$; г) $DX = \frac{5393}{1764} \approx 3,06$, $\sigma \approx 1,75$; д) $DX = \frac{80}{11}$, $\sigma = \frac{4\sqrt{55}}{11}$; е) $DX = \frac{160}{49}$, $\sigma = \frac{4\sqrt{10}}{7}$;

3. Биномно разпределение

3.1. Биномно разпределение. Примери на реални ситуации 136

3. а) $6 \cdot 0,0099^2$; б) $0,04 \cdot 0,99^3$; в) $0,99^4$;

5. Стойностите на X са 0, 1, 2, 3 и 4. Съответните вероятности са $\frac{256}{625}, \frac{128}{625}, \frac{96}{625}, \frac{16}{625}, \frac{1}{625}$;

6. Стойностите на X са 0, 1, 2, 3 и 4. Съответните вероятности са $\frac{1}{16}, \frac{4}{16}, \frac{6}{16}, \frac{4}{16}, \frac{1}{16}$;

3.2. Свойства на биномното разпределение 138

2. а) 2; 1,98; $\approx 1,4$; б) $\approx 3,33$; $\approx 1,11$; $\approx 1,05$; в) $\approx 2,29$; $\approx 0,98$; $\approx 0,99$; г) 10; 9,8; $\approx 3,13$; 4. 3; 5. 3; 6. 0; 8. $199 \leq n \leq 219$;

4.3. Основни свойства на нормалното разпределение 145

3. а) 0,0228; б) 0,0228; в) 0,9999; г) 0,9344; д) 0,4772; 4. 0,8661; 5. а) 0,7258; б) 0,0718; 6. а) 0,7745; б) 0,0062; 7. а) 0,5859; б) 0,1056; в) 0,7734; 8. а) 1,56; б) 0,58; в) 1,96; Г) 3,08; 9. а) 1,64; б) 1,96; в) 2,05; 10. а) 1,96; б) 2,55; в) 1,5;

5. Статистически изводи

5.1. Статистически изводи с модел биномното разпределение върху данни от учебен тест 149

2. $H_a: p < 0,2$, $\alpha = 0,05$ а) няма основание да се отхвърли H_0 ; б) нулевата хипотеза се отхвърля;
3. $H_a: p < 0,9$, $\alpha = 0,05$ а) нулевата хипотеза се отхвърля; б) няма основание да се отхвърли H_0 ;

**5.2. Статистически изводи с модел нормално разпределение
върху данни от измерване при конкретен експеримент 151**

5. а) няма основание да се отхвърли H_0 ; б) H_0 се отхвърля; 6. а) няма основание да се отхвърли H_0 ; б) няма основание да се отхвърли H_0 .

6. Линеен модел на корелационна зависимост

6.1. Прост линеен модел – определяне на правата. Прогнозиране 153

2. $26\hat{y} = 47 + 18x$; 6;

Вероятности и анализ на данни – Общи задачи 157

1. $\frac{21}{46}$; 2. $\frac{C_{30}^3 C_{27}^2 + C_{30}^2 C_{70}^1 C_{28}^2 + C_{30}^1 C_{70}^2 C_{29}^2 + C_{70}^3 C_{30}^2}{C_{100}^3 C_{100}^2}$; 3. $\approx 0,34$; 4. а) x_i : 10, 20, 50, 100, 200, p_i :

- $\frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \frac{2}{12}, \frac{1}{12}$; б) $F(x) = \{ 0, x \leq 10; \frac{2}{12}, 10 < x \leq 20; \frac{5}{12}, 20 < x \leq 50; \frac{9}{12}, 50 < x \leq 100; \frac{11}{12}, 100 < x \leq 200; 1, 200 < x \}$; в) $EX \approx 56,67$; г) $DX \approx 2738, (8)$;

5. $\frac{1}{C_{15}^3 C_{15}^3} (C_{10}^3 C_{10}^3 + C_{10}^2 C_5^1 C_{11}^3 + C_{10}^1 C_5^2 C_{12}^3 + C_5^3 C_{13}^3)$; 6. 0,5; 7. а) x_i : 1, 2, 3; p_i : $\frac{11}{36}, \frac{9}{36}, \frac{16}{36}$; б) $F(x) = \{ 0, x \leq 1; \frac{10}{36}, 1 < x \leq 2; \frac{20}{36}, 2 < x \leq 3; 1, 3 < x \}$; в) $EX \approx 2,14$; г) $DX \approx 0,73$;

8. 3, 2, $\sqrt{2}$; 9. а) 0,24; б) $\approx 0,24$; в) 2; 10. $\approx 0,57$; 11. а) 0,1587; б) 0,5; в) 0,1587; г) 0,1587;

12. няма основание да се отхвърли нулевата хипотеза; 13. нулевата хипотеза се отхвърля;

14. $1277\hat{y} = -72 + 1161x$; ≈ 45 ; 15. няма основание да се отхвърли нулевата хипотеза;

16. нулевата хипотеза се отхвърля; 17. $\frac{180}{1183}$; 18. няма основание да се отхвърли нулевата хипотеза; 19. няма основание да се отхвърли нулевата хипотеза; 20. 2.

Вероятности и анализ на данни – Тест 1 и Тест 2 159

Тест 1. 1. 0,45; 2. $\approx 0,39$; 3. 0,37; 4. а) Стойностите на X са 11, 12, 21 и 22. Съответните им

вероятности са $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ и $\frac{1}{4}$; б) $F(x) = \{ 0, x \leq 11, \frac{1}{4}, 11 < x \leq 12, \frac{1}{2}, 12 < x \leq 21, \frac{3}{4}, 21 < x \leq 22, 1, 22 < x \}$; 5. а) 1,8; б) 0,56; в) 0,75; 6. а) 2,4; б) 0,96; в) 3 или 2; 7. а) 0,9521;

б) 0,0004; 8. ; 9. $259\hat{y} = 790 + 227x$; 64;

Оценяване. За всеки верен отговор по 2 точки. Оценка в точки = (получените точки.100/18);

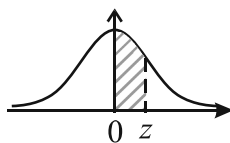
Тест 2. 1. $\frac{26}{45}$; 2. ; $\approx 0,18$; 3. 0,43; 4. а) Стойностите на X са 0, 1, 2, 3, 4 и 5. Съответните им вероятности са $\frac{6}{36}, \frac{10}{36}, \frac{8}{36}, \frac{6}{36}, \frac{4}{36}$ и $\frac{2}{36}$; б) $F(x) = \{ 0, x \leq 0; \frac{6}{36}, 0 < x \leq 1, \frac{16}{36}, 1 < x \leq 2, \frac{24}{36}, 2 < x \leq 3, \frac{30}{36}, 3 < x \leq 4, \frac{34}{36}, 4 < x \leq 5, 1, 5 < x \}$; 5. а) 1,25; б) 0,6; в) 0,77; 6. а) 3,5;

б) 1,05; в) 4; 7. а) 0,8854; б) 0,0004; 8. няма основание да се отхвърли нулевата хипотеза;

9. $1487\hat{y} = 2857 + 1242x$; 44;

Оценяване. За всеки верен отговор по 2 точки. Оценка в точки = (получените точки.100/18);

Таблица за площите под стандартната нормална крива



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998

Математика за 12. клас, профилирана подготовка

Донка Георгиева Гълъбова, Мая Пламенова Сидерова

Графичен дизайн Донка Гълъбова и Мая Сидерова
Корица Кирил Чохаджиев и Диляна Чохаджиева

Българска

Първо издание, 2021 г.

Формат 60x84/8, Печатни коли 23

Издателство „Веди.БГ ЕООД“
София, ул. „Ал. Жендов“ №6, ет.4/421
Тел. 02-971-47-82; 0888-95-98-13
e-mail: info@vedi.bg
www.vedi.bg

ISBN 978-954-8857-55-0

Печат „СИМОЛИНИ 94“

София 2021 година