

ИЗПИТЕН ВАРИАНТ

Април

Nº 15

ЧАСТ 1 (Време за работа: 90 минути)

На задачи от 1. до 15. включително отбележете верния отговор.

1. Дадена е функцията на разпределение на случайна величина: $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{за } x \leq 3 \\ 0,2 & \text{за } 3 < x \leq 4 \\ 0,7 & \text{за } 4 < x \leq 5 \\ 1 & \text{за } x > 5 \end{cases}$

Вероятността на събитието $3 \leq x \leq 5$ е:

А) 0,7

Б) 0,5

В) 0,2

Г) 0,9

2. В един колектив има 5 жени и 4 мъже. На колектива са дадени 4 билета за театър. Каква е вероятността на театър да отидат две жени и двама мъже?

А) $\frac{1}{126}$

Б) $\frac{10}{63}$

В) $\frac{10}{21}$

Г) $\frac{2}{63}$

3. Функцията $f(x) = \begin{cases} 0; & x < 1 \\ cx; & 1 \leq x \leq 2 \\ 1; & x > 2 \end{cases}$ е функция на плътността на случайна величина x , ако c е равно на:

А) $\frac{3}{2}$

Б) 1

В) $\frac{2}{3}$

Г) $\frac{1}{3}$

4. Допустимите стойности на израза $\log_{x-1} \frac{3-x}{x}$ са:

А) $x \in (3; +\infty)$

Б) $x \in (1; 2) \cup (2; 3)$

В) $x \in (0; 1) \cup (1; 3)$

Г) $x \neq 0$

5. Решенията на уравнението $3^x + 6 \cdot (\sqrt{3})^x - 27 = 0$ са числата:

А) $x = 3$ или $x = -9$

Б) $x = 2$ или $x = -2$

В) $x = 3$

Г) $x = 2$

6. Ако $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$, то стойността на $\operatorname{tg} 2\alpha$ е:

А) $-\frac{4\sqrt{2}}{7}$

Б) $\pm \frac{4\sqrt{2}}{7}$

В) $-\pm \frac{2\sqrt{2}}{7}$

Г) $\frac{7\sqrt{2}}{8}$

7. В правоъгълна координатна система са дадени точките $A(2; -1)$, $B(3; 3)$ и $C(-1; 4)$. Уравнението на медианата на $\triangle ABC$, построена през върха C е:
 А) $7x + 6y - 22 = 0$ Б) $x + 2y - 7 = 0$ В) $2x + 3y + 5 = 0$ Г) $6x + 7y - 22 = 0$
8. Дадена е окръжност с уравнение $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 29$. Коя от посочените прави е допирателна към окръжността?
 А) $5y = 2x + 13$ Б) $2y - x - 5 = 0$ В) $3x - 2y = 0$ Г) $y = x + 2$
9. Дадена е параболата $y = 10x^2$. Права, успоредна на директрисата и на разстояние от фокуса, има уравнение:
 А) $x = 9,5$ Б) $x = -5$ В) $y = 9,5$ Г) $y = 7,5$
10. Намерете границата на редицата с общ член $b_n = \frac{4a_n^2 - 25a_n + 25}{2a_n^2 - 15a_n + 25}$, ако $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 5$.
 А) 1 Б) 2 В) 3 Г) $\frac{1}{3}$
11. Границата на функцията $f(x) = \sin 8x \cotg 4x$ при $x \rightarrow 0$ е:
 А) 2 Б) 0,5 В) 0 Г) $+\infty$
12. Сумата на периодичните дробни $0,(23) + 1,(78)$ е:
 А) 2,0201 Б) 2,0(2) В) $2\frac{2}{99}$ Г) $2\frac{1}{90}$
13. Коя от посочените функции не е диференцируема навсякъде в дефиниционното си множество?
 А) $f(x) = \frac{(x-3)^3}{x^2}$ Б) $f(x) = \left| \frac{x-2}{5} \right|$ В) $f(x) = \frac{x^2}{|x^2 + 1|}$ Г) $f(x) = \frac{2x-1}{\sin x}$
14. Коя от посочените функции има най-голям локален максимум в интервал $[2; 4]$?
 А) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ Б) $f(x) = \frac{x^2 - 5}{x}$
 В) $f(x) = -x^3 + 27x - 5$ Г) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$
15. Правоъгълен триъгълник, катетите на който се отнасят както 2 : 3, е завъртян на 360° около права, успоредна на по-малкия катет, минаваща през срещуположния връх. Ако обемът на полученото ротационно тяло е $12\pi \text{ cm}^3$, то лицето на повърхнината му е:
 А) $(16\pi + 2\sqrt{13}\pi) \text{ cm}^2$ Б) $(21\pi + 3\sqrt{13}\pi) \text{ cm}^2$
 В) $(16\pi + 2\sqrt{11}\pi) \text{ cm}^2$ Г) $(21\pi + 3\sqrt{11}\pi) \text{ cm}^2$

ЧАСТ 2 (Време за работа: 150 минути)

На задачи 16., 17. и 18. напишете пълно решение.

16. Даден е правоъгълник $ABCD$ със страни $AB = 9$ cm и $BC = 15$ cm. Точките M, N, K и P са средите на страните на правоъгълника. Точките A_1, B_1, C_1 и D_1 са средите на страните на четириъгълника $MNKP$.

а) Намерете периметъра на $MNKP$ и лицето на $A_1B_1C_1D_1$.

б) Ако продължим да образуваме четириъгълници с върхове средите на страните на всеки получен четириъгълник, то намерете сумата от периметрите на всички четириъгълници от вида на $MNKP$ и сумата от лицата на всички правоъгълници.

17. Дадена е функцията $f(x) = x^3 - 2x + 1$.

а) Намерете интервалите на монотонност на функцията.

б) Намерете уравненията на допирателните към графиката на функцията, успоредни на правата $y = x + 1$.

в) Докажете, че уравнението $2^{3x} - 2^{x+1} + 1 = 0$ има 2 реални корена, единият от които е отрицателен.

18. Дадена е четириъгълна пирамида $ABCDM$ с основа правоъгълник $ABCD$. Ръбовете са $AB = AM = 3$ cm и $AD = 4$ cm, и ръбът AM е перпендикулярен на равнината на основата.

а) Ако точките K и G са съответно медицентрове на стените BCM и ADM , то намерете косинуса на ъгъла между правите AK и AG .

б) Намерете обема на описаното около пирамидата кълбо.