

Редица a_1, a_2, \dots :

$$a_1 = \frac{17}{9}$$

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$$

да е покане, че е сходеца.

Теорема (на Башерупас) :

Редица a_1, a_2, \dots е ограничена от горе
и ограничена отдолу \leftarrow монотонно раслеява

\Rightarrow Редицата a_1, a_2, \dots е сходеца.

Доказателство

• a_1, a_2, \dots е ограничена отгоре:

- $a_1 \leq 2$
- Нека $a_K \leq 2$

$$\text{Тогава } a_{K+1} = \sqrt{a_K + 2} \stackrel{a_K \leq 2}{\leq} \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$$

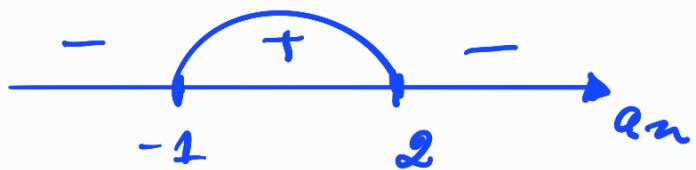
- Така по индукция $\forall n \in \mathbb{N} a_n \leq 2$

Следователно a_1, a_2, \dots е ограничена отгоре от 2.

• a_1, a_2, \dots е монотонно раслеява:

$$\begin{aligned} \bullet (a_{n+1})^2 - (a_n)^2 &= (\sqrt{a_n + 2})^2 - a_n^2 = \\ &= -a_n^2 + a_n + 2 = \\ &= -(a_n^2 - a_n - 2) = \end{aligned}$$

$$= - (a_n - 2)(a_n + 1).$$



- ИО $a_n \in (-1; 2)$

$$\Rightarrow H_n = (a_n - 2)(a_n + 1) \geq 0$$

$$\Rightarrow H_n \quad a_{n+1}^2 - a_n^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow H_n \quad a_{n+1} \geq a_n$$

Следовательно a_1, a_2, \dots е многоделто растеува.

От теорема на Башевицес $\Rightarrow a_1, a_2, \dots$ е схопеня.

F Пепуза a_1, a_2, \dots .

$$a_1 = \sqrt{5}$$

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 5}$$

Да е нокатче, те е схопеня.

Теорема (на Башевицес)

Пепуза a_1, a_2, \dots
е ограничена отгоре

е многоделто растеува

\Rightarrow Пепуза a_1, a_2, \dots

е схопеня

Резултат

• a_1, a_2, \dots е ординарна отпоре:

1-ти элемент на последовательните: $\sqrt{5} + 1$

• $a_1 < \sqrt{5} + 1$

• Нека $a_k < \sqrt{5} + 1$

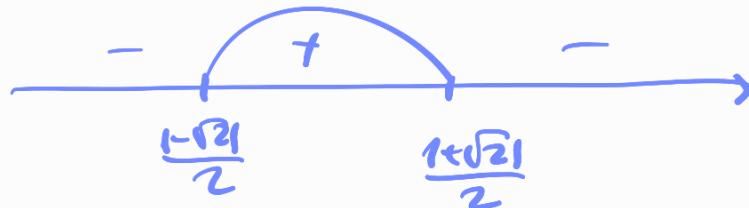
$$\Rightarrow a_{k+1} = \sqrt{5 + a_k} \stackrel{a_k < \sqrt{5} + 1}{<} \sqrt{5 + \sqrt{5 + 1}} < \sqrt{5 + 2\sqrt{5} + 1} < \sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2} = \sqrt{5} + 1$$

• Така по утврждене $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n < \sqrt{5} + 1$

Следователно a_1, a_2, \dots е ординарна отпоре

• a_1, a_2, \dots е монотонно пасловъз:

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = (\sqrt{a_n + 5})^2 - a_n^2 = -\left(a_n - \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)\left(a_n - \frac{1-\sqrt{21}}{2}\right)$$



• Но $\forall n \in (0; \sqrt{5} + 1) \subseteq \left(\frac{1-\sqrt{21}}{2}; \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$

$$\Rightarrow \forall n \quad a_{n+1}^2 - a_n^2 > 0$$

$$\Rightarrow \forall n \quad a_{n+1} > a_n$$

Следователно a_1, a_2, \dots е монотонно пасловъз

От теорема за байдрупъц $\Rightarrow a_1, a_2, \dots$ е сходене.