Г Редица $a_1, a_2, \dots$:

$a_1 = \frac{17}{9}$

$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$

Да се докаже, че е сходяща.

Теорема (на Вайерщрас)

Редица $a_1, a_2, \dots$ е монотонно растяща и ограничена отгоре

$\Rightarrow$ Редицата $a_1, a_2, \dots$ е сходяща.

Решение

- $a_1, a_2, \dots$ е ограничена отгоре:
  - $a_1 \le 2$
  - Нека $a_k \le 2$

    Тогава $a_{k+1} = \sqrt{a_k + 2} \overset{a_k \le 2}{\le} \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$
  - Така по индукция $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \le 2$

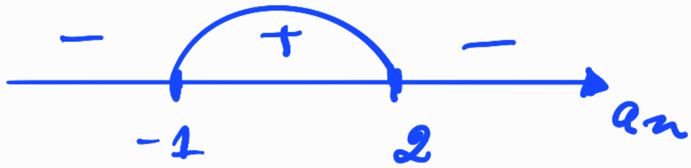
Следователно $a_1, a_2 \dots$ е ограничена отгоре от 2.

- $a_1, a_2, \dots$ е монотонно растяща:
  - $(a_{n+1})^2 - (a_n)^2 = (\sqrt{a_n + 2})^2 - a_n^2 =$

$$= -a_n^2 + a_n + 2 =$$

$$= -(a_n^2 - a_n - 2) =$$

$$= -(a_n-2)(a_n+1).$$



- но $\forall n\ a_n \in (-1;2)$

$\Rightarrow \forall n\ -(a_n-2)(a_n+1) \ge 0$

$\Rightarrow \forall n\ a_{n+1}^2 - a_n^2 \ge 0$

$\Rightarrow \forall n\ a_{n+1} \ge a_n$

Следователно $a_1, a_2, \dots$ е монотонно растяща.

От теорема на Вайерщрас $\Rightarrow a_1, a_2, \dots$ е сходяща.

Редица $a_1, a_2, \dots$

$a_1 = \sqrt{5}$

$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 5}$

Да се покаже, че е сходяща.

Теорема (на Вайерщрас)

Редица $a_1, a_2, \dots$ е монотонно растяща и ограничена отгоре

$\Rightarrow$ Редицата $a_1, a_2, \dots$ е сходяща

Решение

• $a_1, a_2, \ldots$ е ограничена отгоре:

/* елемент на досещане: $\sqrt{5}+1$ */

• $a_1 < \sqrt{5}+1$

• Нека $a_k < \sqrt{5}+1$

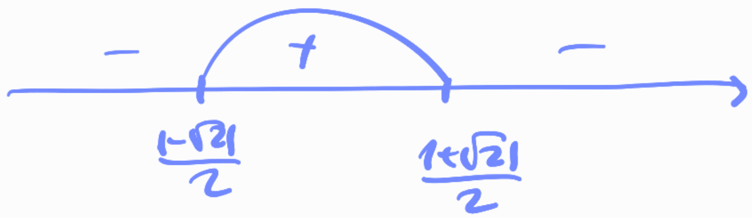
$$\Rightarrow a_{k+1} = \sqrt{5+a_k} \overset{a_k<\sqrt{5}+1}{<} \sqrt{5+\sqrt{5}+1} < \sqrt{5+2\sqrt{5}+1} < \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} = \sqrt{5}+1$$

• Така по индукция $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n < \sqrt{5}+1$

Следователно $a_1, a_2, \ldots$ е <u>ограничена отгоре</u>

• $a_1, a_2, \ldots$ е монотонно растяща:

• $$a_{n+1}^2 - a_n^2 = \left(\sqrt{a_n+5}\right)^2 - a_n^2 = -\left(a_n - \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)\left(a_n - \frac{1-\sqrt{21}}{2}\right)$$



• Но $\forall n\ a_n \in (0;\sqrt{5}+1) \subseteq \left(\frac{1-\sqrt{21}}{2}; \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)$

$\Rightarrow \forall n\ a_{n+1}^2 - a_n^2 > 0$

$\Rightarrow \forall n\ a_{n+1} > a_n$

Следователно $a_1, a_2, \ldots$ е монотонно растяща

От теорема на Вайерщрас $\Rightarrow a_1, a_2, \ldots$ е сходяща.