1) Допирателна към окръжност

Определение. Права, която има само една обща точка с окръжност, се нарича **допирателна** към окръжността.

Общата им точка се нарича **допирна точка**.

Нека окръжността е зададена с нормалното си уравнение $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$, където (α,β) е центърът, а R е радиусът на окръжността.

Може да се докаже следната

Теорема. Правата $t:\ (x_0-\alpha)(x-\alpha)+(y_0-\beta)(y-\beta)=R^2$ е допирателна към окръжността $k:\ (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$ в точката $M_0(x_0,y_0)$.

1. Да се намери уравнението на допирателната към окръжността с уравнение $x^2+y^2-4x-6y+11\frac{3}{4}=0$ в точката $M(1,\ 2\frac{1}{2})$.

Решение. Записваме уравнението на окръжността в нормален вид $x^2-4x+4+y^2-6y+9-13+11\frac{3}{4}=0$, $(x-2)^2+(y-3)^2=\frac{5}{4}$.

Координатите на центъра на окръжността са $(2,3)$ и радиусът е $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$. Уравнението на допирателната в точката $M(1,\ 2\frac{1}{2})$ е:

$t:\ (1-2)(x-2)+(2\frac{1}{2}-3)(y-3)=\frac{5}{4}$ или $t:\ 4x+2y-9=0$.▲

2. Да се намери допирателната към дадената окръжност в дадената точка.

а) $x^2+y^2=8$, (2, 2);

б) $(x-1)^2+(y-1)^2=8$, (3, 3);

в) $(x+2)^2+(y-7)^2=10$, (1, 8);

г) $x^2+y^2-8x+16y+60=0$, (2, −12).

3. Да се намерят допирателните към окръжността $(x+7)^2+(y-1)^2=50$, спуснати от точка $A(-22,-4)$, външна за окръжността и да се намерят допирните точки.

Решение.

Нека точка $M(x_0,y_0)$ е някоя от търсените допирни точки, тогава уравнението на допирателната в M е $(x_0+7)(x+7)+(y_0-1)(y-1)=50$.

Точката $A(-22,-4)$ лежи на допирателната $\Rightarrow$ $(x_0+7)(-22+7)+(y_0-1)(-4-1)=50$.

M е точка от окръжността $\Rightarrow$ $(x_0+7)^2+(y_0-1)^2=50$.

Последните две равенства образуват система, чиито решения са координатите на допирните точки: $(x_0,y_0)=(-12,6)$ и $(x_0,y_0)=(-8,-6)$.

Допирателната в $(-12,\ 6)$ е $(-12+7)(x+7)+(6-1)(y-1)=50$, $x-y+18=0$.

Допирателната в $(-8,\ -6)$ е $(-8+7)(x+7)+(-6-1)(y-1)=50$, $x+7y+50=0$.▲

4. Да се намерят допирателните към дадената окръжност, спуснати от точка A, външна за окръжността и да се намерят допирните точки.

а) $(x+2)^2+(y+10)^2=25$, $A(-3,-3)$;

б) $x^2+y^2-2x+16y+25=0$, $A(-3,-16)$;

в) $(x-6)^2+(y-3)^2=37$, $A(13,-2)$.

5. Да се намери пресечната точка на допирателните към дадената окръжност в дадените точки.

а) $(x-1)^2+(y+3)^2=20$, $(5,-1)$, $(-1,1)$;

б) $x^2+y^2-2x-16y+40=0$, $(-3,5)$, $(4,4)$;

в) $x^2+y^2-10y=0$, $(-3,9)$, $(-4,2)$;

г) $(x-2)^2+(y-5)^2=20$, $(4,9)$, $(-2,3)$.

6. Намерете общите уравнения на допирателните към окръжността $x^2+y^2=13$, успоредни на правата $2x-3y+5=0$.

Решение. Нека точка $M(x_0,y_0)$ е една от допирните точки на търсените допирателни към окръжността. Уравнението на допирателната в точката $M(x_0,y_0)$ е $x_0x+y_0y=13$. Тази права е успоредна на правата $2x-3y+5=0$ $\Rightarrow$ коефициентите пред x и y са пропорционални:

$\dfrac{x_0}{2}=\dfrac{y_0}{-3}$, откъдето $y_0=-\dfrac{3x_0}{2}$.

$M(x_0,y_0)$ е точка от окръжността $x^2+y^2=13$ $\Rightarrow$ $x_0^2+y_0^2=13$, $x_0^2+\dfrac{9}{4}x_0^2=13$, $x_0=\pm 2$

$\Rightarrow$ $y_0=\mp 3$, допирните точки са $M_1(2,-3)$, $M_2(-2,3)$.

Допирателната в $M_1(2,-3)$ е $2x-3y-13=0$.

Допирателната в $M_2(-2,3)$ е $2x-3y+13=0$.▲

7. Намерете общите уравнения на допирателните към дадената окръжност, успоредни на дадената права.

а) $x^2+y^2=50$, $5x+5y-12=0$;

б) $(x+3)^2+y^2=9$, $y=4$;

в) $x^2+y^2+10x-2y-46=0$, $x+y-3=0$.

8. Правата $3x-y-10=0$ е допирателна към окръжността $x^2+y^2=10$ в точката $(3,-1)$:

☒ **А)** $(-3,-1)$ **Б)** $(-3,1)$ **В)** $(3,-1)$ **Г)** $(3,1)$

9. Уравнението на допирателната към окръжността $x^2+y^2=29$ в точка $(2,5)$ е:

☒ **А)** $2x+5y-29=0$ **Б)** $2x-5y+29=0$ **В)** $2x+5y+29=0$ **Г)** $2x-5y-29=0$

10. Уравненията на правите, допирателни към окръжността $x^2+y^2=9$ през външната точка $(-6,-3)$, са:

☒ **А)** $y=-6$ и $4x-3y+15=0$ **Б)** $y=-3$ и $6x+3y+9=0$

В) $y=-9$ и $6x+3y-9=0$ **Г)** $y=-3$ и $4x-3y+15=0$