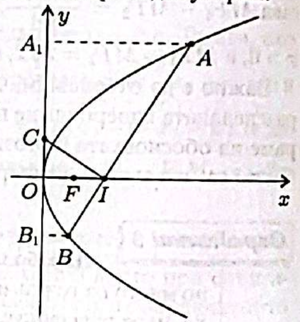
на симетрия е ординатната ос.

Парабола е и графиката на квадратната функция $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$.

Задача 7. Нека A и B са две произволни точки от парабола с връх O. Проекциите на A и B върху върховата допирателна на параболата са означени с A_1 и B_1, а C е средата на A_1B_1. Ако I е симетричната точка на върха O спрямо фокуса F, да се докаже, че правите AB и CI са перпендикулярни.



Решение:

Координатната система избираме така, че оста Ox да е ос на параболата, а оста Oy да е допирателна към параболата във върха O.

Ако параболата има уравнение $y^2 = 2px,\ (p > 0)$, то $A\left(\frac{y_1^2}{2p}; y_1\right)$, $B\left(\frac{y_2^2}{2p}; y_2\right)$, $I(p; 0)$ и $C\left(O; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

Ъгловият коефициент на правата AB е $k_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{\frac{y_2^2}{2p} - \frac{y_1^2}{2p}} = \dfrac{2p}{y_2 + y_1}$, а на правата CI е съответно $k_2 = \dfrac{\frac{y_2 + y_1}{2}}{-p} = -\dfrac{y_2 + y_1}{2p}$. Понеже $k_1k_2 = -1$, правите AB и CI са перпендикулярни.

Задачи

1. Какъв най-голям брой общи точки могат да имат:

а) права и елипса; б) права и хипербола; в) елипса и хипербола;
г) елипса и окръжност; д) хипербола и окръжност?

2. Намерете координатите на фокусите на елипсата $\dfrac{x^2}{\frac{2}{3}} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$.

3. Намерете каноничното уравнение на елипса, минаваща през точките $(-8; 3)$ и $(6; 4)$.

4. Съставете уравнение на елипса, която има фокуси $F_1(1; 0)$ и $F_2(-1; 0)$ и голяма ос $a = 5$.

5. Намерете каноничното уравнение на хипербола, минаваща през точката $(4; 1)$, разстоянието между фокусите на която е 6.

6. Намерете координатите на фокусите на хиперболата $\dfrac{x^2}{144} - \dfrac{y^2}{25} = 1$.

7. Намерете каноничното уравнение на хипербола, минаваща през точките $\left(5; \frac{4}{3}\right)$ и $\left(\sqrt{34}; -\frac{5}{3}\right)$.

8. Напишете каноничното уравнение на парабола с фокус $F(3; 0)$ и директриса $x + 3 = 0$.

9. Намерете координатите на фокуса и директрисата на параболата $y = 2x^2$.

10. Намерете общите точки на правата $y = 2x - 10$ и елипсата $\dfrac{x^2}{45} + \dfrac{y^2}{20} = 1$.

11. Намерете общите точки на правата $x - y = 1$ и хиперболата $\dfrac{x^2}{10} - \dfrac{y^2}{15} = 1$.

12. Намерете уравнението на окръжност, минаваща през общите точки на елипсата $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{18} = 1$ и хиперболата $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{16} = 1$.

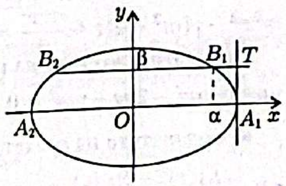
13. Намерете стойностите на параметъра a, за които правата $ax + y = 2a + 1$ и елипсата $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ имат единствена обща точка.

21 КАНОНИЧНО УРАВНЕНИЕ НА ЕЛИПСА, ХИПЕРБОЛА И ПАРАБОЛА. УПРАЖНЕНИЕ

Задача 1. Дадена е елипса с уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ a > b > 0$. Нека A_1 и A_2 са краищата на голямата ос, а B_1B_2 е хорда, успоредна на A_1A_2. Точката T е проекцията на A_1 върху правата B_1B_2.

Да се докаже, че $b^2.TB_1.TB_2 = a^2.TA_1^2$.

Решение:



Имаме $A_1(a; 0)$, $A_2(-a; 0)$, $B_1(\alpha; \beta)$, $B_2(-\alpha; \beta)$ и $T(a; \beta)$. Понеже B_1 и B_2 лежат на елипсата, то $\dfrac{\alpha^2}{a^2} + \dfrac{\beta^2}{b^2} = 1$, откъдето $b^2(a^2 - \alpha^2) = a^2.\beta^2$. Следователно $b^2.TB_1.TB_2 = b^2(a - \alpha)(a + \alpha) = b^2(a^2 - \alpha^2) = a^2.\beta^2 = a^2.TA_1^2$.

Задача 2. Дадена е кривата $H: 2x^2 - 5y^2 - 10 = 0$. Да се провери дали дадената крива е хипербола, като се запише в каноничен вид и да се намерят координатите на върховете и фокусите ѝ.

Решение:

Записваме уравнението на кривата във вида $\dfrac{x^2}{5} - \dfrac{y^2}{2} = 1$, което е уравнение на хипербола т.е. $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{2}$, $c^2 = a^2 + b^2 = 7$. Следователно върховете са $A_1(\sqrt{5}; 0)$ и $A_2(-\sqrt{5}; 0)$, а фокусите са $F_1(\sqrt{7}; 0)$ и $F_2(-\sqrt{7}; 0)$.