2) Допирателна към елипса

Нека елипсата е зададена с каноничното уравнение $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Определение. Права, която има само една обща точка с елипса, се нарича допирателна към елипсата. Общата точка се нарича **допирна точка**.

Теорема. Правата $Ax+By+C=0$ е допирателна към елипсата $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ точно когато

$$a^2A^2+b^2B^2-C^2=0.$$

Доказателство. В общото уравнение на права поне един от коефициентите A или B е различен от 0. Нека $B\neq 0$.

Правата и елипсата имат само една обща точка точно когато системата $\left|\begin{array}{l} b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \\ Ax+By+C=0 \end{array}\right.$

има единствено решение. Изразяваме $y=\dfrac{-Ax-C}{B}$ от второто уравнение и заместваме в първото:

$$b^2x^2+a^2\,\frac{A^2x^2+2AC\,x+C^2}{B^2}=a^2b^2,$$

$$(a^2A^2+b^2B^2)x^2+2a^2AC\,x+a^2C^2-a^2b^2B^2=0.$$

Системата има единствено решение точно когато това квадратно уравнение има дискриминанта, равна на 0.

$$D'=a^4A^2C^2-(a^2A^2+b^2B^2)(a^2C^2-a^2b^2B^2)\ =\ a^2b^2B^2(a^2A^2+b^2B^2-C^2).$$

Тъй като $a^2b^2B^2>0$, то $D'=0\ \Leftrightarrow\ a^2A^2+b^2B^2-C^2=0$.▲

Следствие. Правата *t* с уравнение $t:\ \dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$ е допирателна към елипсата $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ в точката ѝ $M_0(x_0,y_0)$.

Доказателство. Да запишем уравнението на допирателната *t* във вида

$t:\ Ax+By+C=0$, където $A=\dfrac{x_0}{a^2}$, $B=\dfrac{y_0}{b^2}$, $C=-1$. Проверяваме условието *t* да бъде допирателна към елипсата: $a^2A^2+b^2B^2-C^2=a^2\,\dfrac{x_0^{\,2}}{a^4}+b^2\,\dfrac{y_0^{\,2}}{b^4}-1=\dfrac{x_0^{\,2}}{a^2}+\dfrac{y_0^{\,2}}{b^2}-1=0$.

Последното равенство е изпълнено, тъй като точката $M_0(x_0,y_0)$ лежи на елипсата и съгласно теоремата правата *t* е допирателна към елипсата в точката $M_0(x_0,y_0)$.▲

11. Да се намери уравнението на допирателната към дадената елипса в точката M.

а) $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{8}=1,\ M(3,2)$; б) $x^2+2y^2=14,\ M(-2,\sqrt{5})$.

Решение. а) Уравнението на допирателната е $t:\ \dfrac{3x}{12}+\dfrac{2y}{8}=1$, $t:\ x+y-4=0$.▲

Решение. б) Каноничното уравнение на елипсата е $\dfrac{x^2}{14}+\dfrac{y^2}{7}=1$. Уравнението на допирателната е

$t:\ \dfrac{-2x}{14}+\dfrac{\sqrt{5}y}{7}=1$, $x-\sqrt{5}y+7=0$.▲

12. Да се намери уравнението на допирателната към дадената елипса в точката M.

а) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{36}=1$, $M(3,3)$;
б) $3x^2+y^2=57$, $M(4,3)$;
в) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{60}=1$, $M(\sqrt{2},-6)$;
г) $9x^2+4y^2=36$, $M(2,0)$.

13. Да се намерят допирателните към елипсата $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$, спуснати от точка $P(6,1)$, външна за елипсата и да се намерят допирните точки.

Решение. Нека точка $M(m,n)$ е точка от елипсата. Тогава $\frac{m^2}{20}+\frac{n^2}{5}=1$.

Записваме уравнението на допирателната към елипсата в точка M: $\frac{mx}{20}+\frac{ny}{5}=1$.

Точка $P(6,1)$ е точка от допирателната $\Rightarrow \frac{m6}{20}+\frac{n}{5}=1$.

Получаваме система за m и n:

$\left|\begin{array}{l}\frac{m^2}{20}+\frac{n^2}{5}=1\\ \frac{m6}{20}+\frac{n}{5}=1\end{array}\right.$, чиито решения $(4,-1)$ и $(2,2)$ са допирните точки.

Правата през точка $P(6,1)$, която се допира до елипсата в точка $(4,-1)$ е $x-y-5=0$.

Правата през точка $P(6,1)$, която се допира до елипсата в точка $(2,2)$ е $x+4y-10=0$.▲

14. Да се намерят допирателните към дадената елипса, спуснати от точка A, външна за елипсата и да се намерят допирните точки.

а) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{64}=1$, $A(4,4)$;
б) $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{64}=1$, $A(4,8)$;
в) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{100}=1$, $A(1,14)$;
г) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$, $A(0,2)$.

15. Да се намери пресечната точка на допирателните към дадената елипса в дадените точки.

а) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{6}=1$, $(-2,2)$, $(2,2)$;

б) $2x^2+y^2=36$, $(0,6)$, $(4,2)$;

в) $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{9}=1$, $(5,2)$, $(\frac{20}{3},-\frac{1}{3})$;

г) $\frac{x^2}{70}+\frac{y^2}{14}=1$, $(-5,-3)$, $(-5,3)$.

16. Намерете каноничното уравнение на елипса с оси върху координатните оси, ако правата $x+y-3=0$ е допирателна към елипсата в точката $(2,1)$.

Решение. Нека каноничното уравнение на елипсата е $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Уравнението на допирателната към тази елипса в точката $(2,1)$ е $\frac{2x}{a^2}+\frac{y}{b^2}=1$. От друга страна по условие това уравнение е $x+y-3=0$, следователно двете прави съвпадат, условието за което е $\dfrac{\frac{2}{a^2}}{1}=\dfrac{\frac{1}{b^2}}{1}=\dfrac{-1}{-3}$, откъдето $a^2=6$ и $b^2=3$. Каноничното уравнение на елипсата е $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$.▲

17. Намерете каноничното уравнение на елипса с оси върху координатните оси, ако дадената права е допирателна към елипсата в точката T.

а) $x-3y+6=0$, $T(-\frac{3}{2},\frac{3}{2})$;

б) $x+4y+10=0$, $T(-2,-2)$;

в) $x+y+2=0$, $T(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$;

г) $x+2y-9=0$, $T(5,2)$.

18. Да се намери каноничното уравнение на елипса с оси върху координатните оси, към която правите $2x+y-21=0$ и $x-4y+21=0$ са допирателни.

Решение. Нека уравнението на елипсата е $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Дадените прави са допирателни към елипсата и от теоремата получаваме системата:

$\left| \begin{array}{l} a^2 4+b^2-21^2=0 \\ a^2+b^2 16-21^2=0 \end{array} \right.$, чието решение е $a^2=105$ и $b^2=21$. Елипсата е $\dfrac{x^2}{105}+\dfrac{y^2}{21}=1$.▲

19. Да се намери каноничното уравнение на елипса с оси върху координатните оси, към която дадените прави са допирателни.

а) $x+y-7=0$, $x-13y+35=0$;

б) $x+3y-15=0$, $7x-9y-75=0$.

20. Проверете коя права към коя елипса е допирателна и намерете допирните точки.

а) $x+6y-24=0$, $x-2y-4=0$, $\dfrac{x^2}{144}+\dfrac{y^2}{12}=1$, $\dfrac{x^2}{12}+y^2=1$;

б) $x+6y-12=0$, $x+2y-12=0$, $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{3}=1$, $\dfrac{x^2}{108}+\dfrac{y^2}{9}=1$.