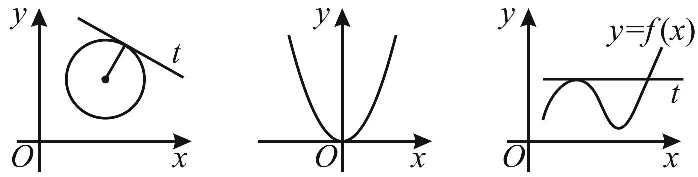
1.1. Геометричен смисъл на понятието производна

Геометричният смисъл на понятието производна е свързан с понятието допирателна към крива линия. Досега сме дали определение само за допирателна към окръжност.

Да разгледаме чертежите.

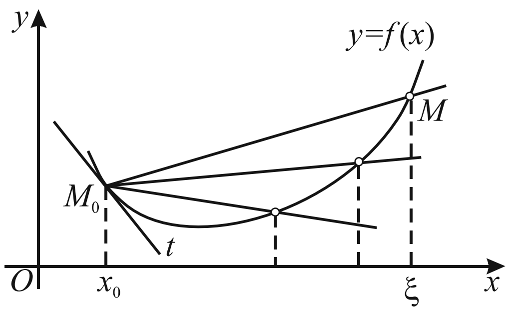


На първия чертеж правата t има само една обща точка с окръжността и такава права нарекохме допирателна към окръжността.

На втория чертеж оста Oy има само една обща точка с параболата, но по интуитивната ни представа не е допирателна към параболата.

На третия чертеж правата t има две общи точки с графиката на функцията $y = f(x)$, но (отново по интуитивната ни представа) тя е допирателна към графиката в едната обща точка, а в другата не е.

Тези примери показват, че се нуждаем от едно по-прецизно определение на понятието допирателна към крива линия.



Да разгледаме функцията $y = f(x)$, чиято графика е показана на чертежа и нека точка $M_0(x_0, f(x_0))$ лежи на графиката ѝ.

Избираме произволна точка $\xi \neq x_0$, така че точката $M(\xi, f(\xi))$ лежи на графиката на $f(x)$ (ξ – кси – буква от гръцката азбука).

Тогава е определена правата M_0M с уравнение:

$$M_0M: \ \frac{x - x_0}{\xi - x_0} = \frac{y - f(x_0)}{f(\xi) - f(x_0)}, \text{ т.е.}$$

(1) $$M_0M: \ y = \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0}(x - x_0) + f(x_0).$$

Преговор

Уравнение на права през две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Нека точката ξ се „приближава” до точката x_0.

Тогава секущата M_0M ще се променя и ако кривата е гладка (каквато е на чертежа), то M_0M ще се „приближава” до допирателната t в точка M_0 (по интуитивната ни представа).

Нека $\xi \to x_0$, $\xi \neq x_0$ и да направим граничен преход в равенството (1).

Получаваме $y = \lim\limits_{\xi \to x_0} \dfrac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0}(x - x_0) + f(x_0)$ и ако $f(x)$ е диференцируема, имаме $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

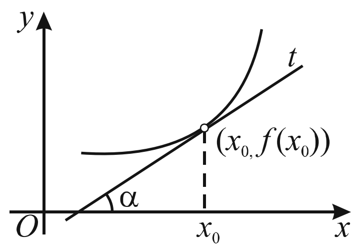
Тези наблюдения ни подсказват да дадем следното определение.

Определение. Правата t с уравнение $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ се нарича **допирателна към графиката на функцията** $y = f(x)$ в точката $(x_0, f(x_0))$.

Геометричен смисъл

Да представим уравнението на допирателната в декартов вид:

$t:\ y = f'(x_0)x - f'(x_0)x_0 + f(x_0)$.



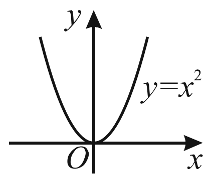
Следователно $f'(x_0)$ е ъгловият коефициент на допирателната t и ако α е ъгълът, който тя сключва с положителната посока на оста Ox, имаме $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$.

Тогава допирателната има уравнение $t:\ y = f'(x_0)x + b$, където b се определя от условието, че точката $(x_0, f(x_0))$ лежи на допирателната.

Това е и **геометричният смисъл** на понятието производна – производната $f'(x_0)$ в дадена точка x_0 е равна на ъгловия коефициент на допирателната към графиката в точката $(x_0, f(x_0))$, който от своя страна е равен на $\operatorname{tg}\alpha$, където α е ъгълът, който допирателната сключва с положителната посока на оста Ox. ▲

Хоризонтална допирателна

Ако $f'(x_0) = 0$, то уравнението на допирателната в точката $(x_0, f(x_0))$ е $y = f(x_0)$, което е уравнение на права, успоредна на оста Ox. В този случай допирателната се нарича **хоризонтална**. Също така, ако в точката $(x_0, f(x_0))$ от графиката на $f(x)$ съществува хоризонтална допирателна, то $f'(x_0) = 0$.



Пример. Нека $f(x) = x^2$ и $x_0 = 0$. Имаме $f'(x) = 2x$ и $f'(0) = 0$.

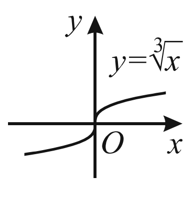
Правата $y = f(0)$, т.е. $y = 0$ е хоризонтална допирателна към графиката на $y = x^2$ в точката $(0,0)$.▲

Вертикална допирателна

В случая, когато първата производна в точката x_0 не съществува, ще дадем следното определение.

Определение. Ако $\lim\limits_{\xi \to x_0} \dfrac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} = \pm\infty$, то правата с уравнение $x = x_0$ се нарича допирателна към графиката на функцията $y = f(x)$ в точката $(x_0, f(x_0))$.

Правата с уравнение $x = x_0$ е успоредна на оста Oy. Допирателната се нарича **вертикална**.



Пример. Нека $f(x) = \sqrt[3]{x}$ и $x_0 = 0$.

Имаме $\lim\limits_{\xi \to 0} \dfrac{f(\xi) - f(0)}{\xi - 0} = \lim\limits_{\xi \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{\xi}}{\xi} = \lim\limits_{\xi \to 0} \dfrac{1}{\sqrt[3]{\xi^2}} = +\infty$.

Ето защо правата с уравнение $x = 0$ е вертикална допирателна към графиката на функцията $f(x) = \sqrt[3]{x}$ в точката $(0,0)$.▲

1. Да се намери уравнението на допирателната към графиката на функцията $f(x) = x^2 + 3x + 3$ в точката $(3, f(3))$.

Решение. Уравнението на допирателната е $y = f'(3)x + b$. Пресмятаме $f'(x) = 2x + 3$, $f'(3) = 9 \Rightarrow y = 9x + b$.

Точката $(3, f(3))$ лежи на допирателната $\Rightarrow$ $f(3)=9.3+b$, $21=27+b$, откъдето $b=-6$. Окончателно уравнението на допирателната е $y=9x-6$ или $9x-y-6=0$.▲

2. Да се намери уравнението на допирателната към графиката на функцията $f(x)$ в точката с абсциса x_0, ако:

а) $f(x)=x^2+x+1,\ x_0=2$;

б) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1},\ x\neq 1,\ x_0=3$;

в) $f(x)=3^{2x+1},\ x_0=0$;

г) $f(x)=\ln(x+1),\ x>-1,\ x_0=3$;

д) $f(x)=\sin x+\cos x,\ x_0=\dfrac{\pi}{6}$.

3. Намерете абсцисите на точките от графиката на функцията $y=f(x)$, в които:

а) допирателната е успоредна на абсцисната ос и $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-5x^2+8x+3$;

б) допирателната сключва с положителната посока на оста Ox ъгъл, чийто тангенс е равен на 2 и $f(x)=x^3-x^2+x-1$.

4. Да се намерят координатите на точките от графиката на функцията $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, в които:

а) допирателната сключва с положителната посока на оста Ox ъгъл, равен на $150°$;

б) допирателната е хоризонтална;

в) допирателната е вертикална

и да се напише уравнението на допирателната.

5. Намерете уравнението на допирателната към графиката на функцията $f(x)$ в точката $(x_0, f(x_0))$ и намерете ъгъла α, който тя сключва с положителната посока на оста Ox.

а) $f(x)=x^2-2x+2,\ x_0=\dfrac{1}{2}$;

б) $f(x)=x^2+3x+5,\ x_0=\sqrt{2}$;

в) $f(x)=\operatorname{tg}x,\ x_0=\dfrac{\pi}{4}$;

г) $f(x)=\dfrac{1}{x+2},\ x_0=-3$;

д) $f(x)=\sqrt{x^2+1},\ x_0=0$;

е) $f(x)=e^x,\ x_0=0$;

ж) $f(x)=\ln x,\ x_0=1$.

6. Намерете координатите на точките, в които допирателната към графиката на функцията $f(x)$ е успоредна на абсцисната ос.

а) $f(x)=2x^3-9x^2+12x-8$;

б) $f(x)=\dfrac{x^2}{2x+1}$;

в) $f(x)=x-\sqrt{x}$;

г) $f(x)=\cos x,\ x\in[0;2\pi]$;

д) $3x^4+4x^3-18x^2-36x+3$.

7. Да се намерят стойностите на параметъра a, за които допирателната към графиката на функцията $f(x)$ в точката с абсциса x_0 е успоредна на абсцисната ос.

а) $f(x)=x^2+3ax-4,\ x_0=-3$;

б) $f(x)=(a+1)x^2-2x,\ x_0=2$.

1.2. Производни на функции от по-висок ред. Втора производна на функция

Нека функцията $f(x)$ е диференцируема в D. Тогава за всяко x от D е определена производната ѝ $f'(x)$.

Ако функцията $f'(x)$ е диференцируема в D, то можем да намерим нейната производна, която се нарича **втора производна** на $f(x)$. Означаваме $f''(x)$ или само f'', четем „еф секонд". Имаме $f''(x) = (f'(x))'$.

Ако f'' е диференцируема в D, то нейната производна се нарича **трета производна** на $f(x)$. Означаваме $f'''(x) = (f''(x))'$.

Ако третата производна е диференцируема функция, получаваме четвърта $f'^{v}(x)$ и т.н.

1. Да се намери третата производна на функцията:

а) $f(x) = 2x^2 + 5x - 6$;

б) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$;

в) $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 3x + 5$.

Решение.

а) $f'(x) = 4x + 5$; $f''(x) = (f'(x))' = (4x+5)' = 4$; $f'''(x) = (f''(x))' = (4)' = 0$.

б) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$; $f''(x) = 6x - 4$; $f'''(x) = 6$.

в) $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2x + 3$; $f''(x) = 12x^2 + 6x - 2$; $f'''(x) = 24x + 6$.▲

2. Да се намери третата производна на функцията в областта, в която е дефинирана:

а) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$; б) $f(x) = \dfrac{3x-4}{x+5}$; в) $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

3. Да се намери втората производна на функцията:

а) $\ln x^2$; б) $e^{\frac{1}{x}}$.

4. Докажете, че $xf''(x) - f'(x) > 0$ за всяко x, където $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$.

1.3. Механичен смисъл на понятието производна

Нека точка M се движи по реалната права в някакъв интервал от време и за произволно t от този интервал заема положение $s(t)$. Да разгледаме два момента t и t_0. Както знаем от механиката, частното $V_{\text{ср}} = \dfrac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}$ се нарича средна скорост на движението на M в интервала от време $[t_0; t]$.

Границата $V(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}$ се нарича скорост на точката M в момента t_0. Като вземем предвид определението на понятието производна, стигаме до извода, че $V(t_0)$ е производната на функцията $S(t)$ в момента t_0: $V(t_0) = S'(t_0)$.