(11) Регалия стр. 787 | зад 1

Дадени са успоредници с остър ъгъл 30° и периметър $2p$. Да се определят страните на този от тях, който има най-голямо лице

Дадено: $ABCD$ - успоредник, $\beta = 30^\circ$; $AB = ?$, $BC = ?$; $S = max$; $P = 2p$

Решение:

Нека $AB = a$, $\Rightarrow BC = p - a \Rightarrow a \in (0; p)$

$\Rightarrow S = AB.BC.\sin\beta = a(p-a)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(-a^2 + ap)$

$S'(a) \geq 0$

$\left[\frac{1}{2}(-a^2 + ap)\right]' \geq 0$

$\frac{1}{2}(-2a + p) \geq 0$

$2a - p \leq 0$

$2a \leq p$

$a \leq \frac{1}{2}p$

$a \in \left(0; \frac{p}{2}\right]$

$\Rightarrow S$ расте за $a \in \left(0; \frac{p}{2}\right]$

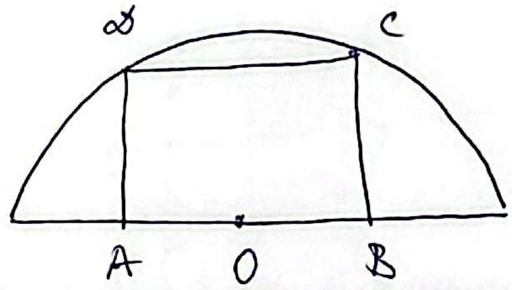
$\Rightarrow S$ е Н.Г. за $a = \frac{p}{2}$

$\Rightarrow AB = BC = \frac{p}{2}$

(12) Регалия стр. 78 / зад. 2

В даден полукръг с радиус R е вписан правоъгълник с най-голямо лице. Да се намерят размерите му.

Решение.



$\triangle OAD \cong \triangle OBC \Rightarrow OA = OB = x, \quad x \in (0; 2R)$

$BC = \sqrt{OC^2 - OB^2} = \sqrt{R^2 - x^2}$

$S = AB \cdot BC = 2x \cdot \sqrt{R^2 - x^2}$

$S'(x) \geq 0$

$\left(2x\sqrt{R^2 - x^2}\right)' \geq 0$

$2\,\dfrac{R^2 - 2x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} \geq 0$

$R^2 - 2x^2 \geq 0$

$x^2 - \frac{1}{2}R^2 \leq 0$

$x \in \left[-\frac{R}{\sqrt{2}}; \frac{R}{\sqrt{2}}\right]$ но $x \in (0; 2R)$

$x \in \left(0; \frac{R}{\sqrt{2}}\right]$

$\Rightarrow S$ расте за $\left(0; \frac{R}{\sqrt{2}}\right]$

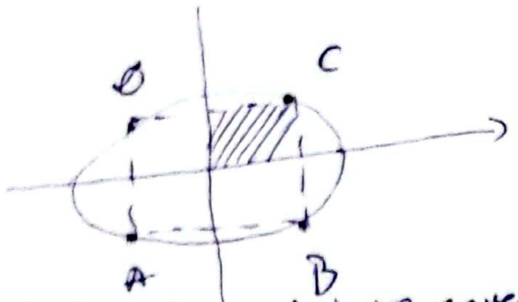
$\Rightarrow S$ е Н.Г. за $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow AB = \sqrt{2}R, \; BC = \frac{R}{\sqrt{2}}$

(13) Регалия стр 79/зад.4

Дадена е елипса $\varepsilon: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Да се намерят страните на най-голямия по лице правоъгълник, който може да се впише в нея.

Решение



~~Озн. $S = S_{ABCD}$, S_1 = лицето защрихованото "КХ"~~

~~$S = 4S_1$ т.к. $CB = 2y_C$, $CD = 2x_C$~~

Нека $C(x_c; y_c) \Rightarrow B(+x_c; -y_c)$, $\boxed{x \in (0;a)}$

$D(-x_c; y_c)$,

$A(-x_c; -y_c)$.

$$\Rightarrow S = BC \cdot CD = [y_c - (-y_c)][x_c - (-x_c)] = 4x_c y_c$$

~~Оттук~~ $C \in \varepsilon \Rightarrow \frac{x_c^2}{a^2} + \frac{y_c^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y_c = b\sqrt{1 - \frac{x_c^2}{a^2}}$

$$\Rightarrow S = 4b x_c \sqrt{1 - \frac{x_c^2}{a^2}}$$

$$S'(x_c) \geq 0$$

$$\left(4b x_c \sqrt{1 - \frac{x_c^2}{a^2}}\right)' \geq 0$$

$$4b \frac{a^2 - 2x_c^2}{a^2\sqrt{1 - \frac{x_c^2}{a^2}}} \geq 0$$

$$x_c^2 - \frac{1}{2}a^2 \leq 0$$

$x_c \in \left[-\frac{a}{\sqrt{2}}; \frac{a}{\sqrt{2}}\right]$ но $x_c \in (0;a)$

$$\Rightarrow x_c \in \left(0; \frac{a}{\sqrt{2}}\right]$$

(16) Регалия стр. 81 10 зад.

(17) Регалия стр. 81/зад 1

Правоъгълник има лице S и диагонал 2. Докажете, че периметърът е растяща ф-я на S и намерете най-голямата му стойност.

Дадено:

ABCD – правоъгълник, $AC = 2$, $S_{ABCD} = S$, $\boxed{P_{max} = ?}$

$\boxed{P = P(S) = ?}$

Решение

! Д.М. $S \in ?$ ⇒ после.

$$\frac{1}{2}P = AB + BC = \sqrt{(AB+BC)^2} = \sqrt{AB^2 + BC^2 + 2AB \cdot BC} =$$

$$= \sqrt{4 + 2S}$$

$$\Rightarrow \cancel{S}\ P = 2\sqrt{2S+4}$$

$$\Rightarrow P'(S) = \frac{2}{\sqrt{2S+4}} \geq 0 \quad \forall S.$$

⇒ $P(S)$ е растяща $\forall S$.

⇒ при най-голямо S P достига НГС.

Нека $AB = x$, $BC = \sqrt{4-x^2}$, $x \in (0;2)$

$$S = x \cdot \sqrt{4-x^2}$$

$$S'(x) \geq 0$$

$$\frac{2(x^2-2)}{\sqrt{4-x^2}} \geq 0$$

$$x^2 - 2 \geq 0$$

$$x \in (0; \sqrt{2}]$$

⇒ ~~P достига~~ S, P достигат max за $x = \sqrt{2}$

⇒ $BC = \sqrt{2}$ ⇒ $P = 4\sqrt{2}$

~~⑯ Решения стр. 81 / зад. 3~~

⑮ Решения стр. 81 / зад. 2

Върху параболата $y=-x^2+8x-7$ са взети точки C и D, в първи квадрант. Точки A и B от Абсцисната ос и $AB \parallel CD$, $AB = 3CD$. Намерете най-голямата стойност на лицето на трапеца.

<u>Дадено</u>. ABCD – трапец. $A \in \vec{Ox}$, $B \in \vec{Ox}$, $AB \parallel CD$, $AB = 3CD$, $x_C, y_C, x_D, y_D > 0$, C и D са от $y=f(x)$, $f(x) = -x^2+8x-7$

$S_{ABCD_{max}} = ?$

<u>Решение</u>

Нека $C(u; -u^2+8u-7)$ и $x_C > x_D$

$$AB \parallel CD \Rightarrow CD \parallel Ox \Rightarrow \begin{cases} y_D = y_C = -u^2+8u-7 \\ \dfrac{x_C+x_D}{2} = x_v = \dfrac{-b}{2a} = 4 \Rightarrow x_D = 8 - x_C = 8-u \end{cases}$$

$\Rightarrow D(8-u; -u^2+8u-7)$; $u > 8-u$, т.е. $u > 4$

$\Rightarrow CD = |\vec{CD}| = \sqrt{(u-(8-u))^2+(y_C-y_D)^2} = \sqrt{(2u-8)^2} = |2u-8| = 2u-8$

$h = dist(CD; AB) = dist(C; AB) = dist(C; Ox) = y_C =$
$= -u^2+8u-7$

$S = \frac{1}{2}(AB+CD).h = \frac{1}{2}.4CD.h = 2CD.h = 4(u-4)(-u^2+8u-7)$

$S'(u) \geq 0$

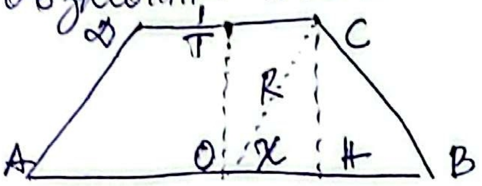
$u \in [4-\sqrt{3}; 4+\sqrt{3}]$ но $u > 4$

$u \in [4; 4+\sqrt{3}]$ – в този интервал S расте!

$\Rightarrow S_{max} = S(4+\sqrt{3}) = \dots 24\sqrt{3}$

(16) Регатия стр. 81 | зад. 5

В окръжност с радиус R е вписан трапец с основа $2R$. Намерете най-голямата възможна стойност на лицето на този трапец.



Дадено: $ABCD$ - трапец, $AB \parallel CD$, $AB = 2R$ вписан в окръжност с радиус R. $S_{ABCD\,max} = ?$

Решение

Нека O - център $\Rightarrow AO = OB$, $O \in AB$.

Нека $H \in AB$: $CH \perp AB$, $x = CH$, $x \in (0; R)$

$\Rightarrow HC = \sqrt{OC^2 - CH^2}$ т.е. $h = \sqrt{R^2 - x^2}$

Ако построим $T \in CD$: $TO \perp CD \Rightarrow CT = x$.

Но $CO = DO$ и $TO \perp CD \Rightarrow DT = x \Rightarrow DC = 2x$

$\Rightarrow S = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot h = (R + x)\sqrt{R^2 - x^2}$

$S'(x) \geq 0$

...

$$\frac{R^2 - Rx - 2x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} > 0$$

...

$x \in \left[-R; \frac{R}{2}\right]$ но $x \in (0; R)$

$x \in \left(0; \frac{R}{2}\right]$ - в този интервал S нараства!

$\Rightarrow S_{max} = S\left(\frac{R}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2$

(17) Редица стр. 81 / зад. 4

Даден е квадрат ABCD със страна 8. Точките L и M са съответно от страните AB и BC, като BL = BM = 3. Точките K и N са от AD и CD, и са такива, че KN ∥ LM. Намерете положението на K и N, за което трапецът има най-голямо лице. Намерете това лице.

Дадено: ABCD - квадрат, $L \in AB$, $M \in BC$, $K \in AD$, $N \in CD$.
$AB = 8$, $BL = 3$, $BM = 3$, $KN \parallel ML$, $S_{KMNL\,max} = ?$

Решение

Нека $DN = x$. $x \in (0;8)$

$BL = BM \Rightarrow \angle BML = 45^\circ \Rightarrow \angle DKN = 45^\circ \Rightarrow DK = DN = x$

$S_{\Delta DKN} = \frac{1}{2}x^2$; $S_{\Delta AKM} = \frac{5}{2}(8-x)$; $S_{\Delta CNL} = \frac{5}{2}(8-x)$; $S_{\Delta BLM} = \frac{9}{2}$

той като $CN = 8-x$; $AK = 8-x$; $CL = 5$; $AM = 5$

$$\Rightarrow S_{KMNL} = S = S_{ABCD} - S_{DKN} - S_{AKM} - S_{CNL} - S_{BLM} =$$
$$= 64 - \frac{1}{2}x^2 - 5(8-x) - \frac{9}{2} =$$
$$= 59,5 - \frac{1}{2}x^2 - 40 + 5x =$$
$$= -\frac{1}{2}x^2 + 5x + 19,5$$

$S'(x) \geq 0$

...

$x \in (-\infty;5]$ но $x \in (0;8)$

$\Rightarrow x \in (0;5] \Rightarrow$ интервал в който S расте!

$\Rightarrow S_{max} = S(5) = 32$, $x = 5$.

(18) Фограля стр. 81 / зад. 5

В правоъгълен трапец с височина 10 и основи 8, 6 е вписан правоъгълник, на който два от върховете лежат на бедрата, а другите два – на голямата основа. Намерете най-голямата възможна стойност на лицето на този правоъгълник.

Дадено: $ABCD$ ($AB \parallel CD$) трапец. $AB = 8$, $AD = 6$; $AD = 10$, $AD \perp AB$,
$AB_1C_1D_1$ – вписан правоъгълник. $B_1 \in AB$, $C_1 \in BC$, $D_1 \in AD$.
$S_{max} = S_{AB_1C_1D_1\,max} = ?$

Решение.

Нека $AD_1 = x$. $x \in (0;10]$

постр. $CH \perp AB$, $H \in AB$, $CH \cap D_1C_1 = T$, $HT = x$, $CT = 10 - x$.

$\triangle C_1TC \sim \triangle BHC$ т.к. $BH \parallel C_1T$ и $\angle C \equiv \angle C$ (равни ъгли)

$\Rightarrow \frac{TC_1}{BH} = \frac{TC}{HC} = \frac{x}{10} \Rightarrow TC_1 = BH \cdot \frac{x}{10} = \frac{x}{10} \cdot (AB - AH) = \frac{x}{10}(8-6) = \frac{x}{5}$

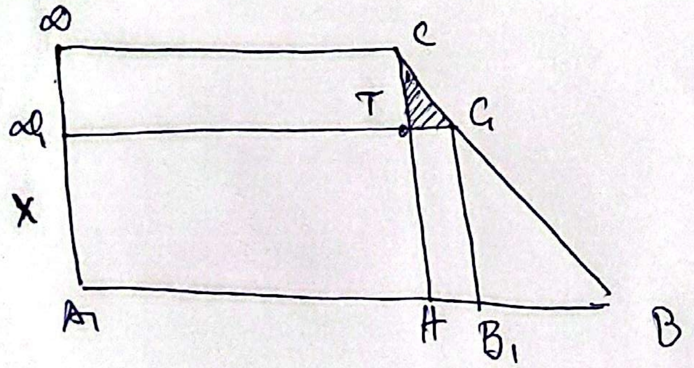
$\Rightarrow D_1C_1 = D_1T + TC_1 = AH + TC_1 = 6 + \frac{x}{5}$

$\Rightarrow S = x \cdot \left(6 + \frac{x}{5}\right) = \frac{x^2}{5} + 6x$

$\Rightarrow S'(x) = \frac{2}{5}x + 6 \geq 0 \ \forall x \in (0;10]$

$\Rightarrow$ S достига максимум при $x = 10$ (D_1C_1 съвпада с DC)

$\Rightarrow S_{max} = S(10) = 80$.



19. От всички правоъгълници с лице S да се определи този с най-малък периметър. Да се определи периметърът му.

Дадено: ABCD - правоъг. $S_{ABCD} = S$.

?: ABCD : $P \to P_{min}$; $P_{min} = ?$

Решение: Нека $AB = x$, $x \in (0; +\infty)$

$P = 2(AB + BC) = 2\left(AB + \frac{S}{AB}\right) = 2\left(x + \frac{S}{x}\right)$

$P'(x) \leq 0$

$2\left(1 - \frac{S}{x^2}\right) \leq 0$

$x^2 - S \leq 0$

$(x - \sqrt{S})(x + \sqrt{S}) \leq 0$

$x \in [-\sqrt{S}; \sqrt{S}]$, но $x \in (0; +\infty)$

$x \in (0; \sqrt{S}]$ - интервал в който P намалява!

$\Rightarrow$ P достига min при $AB = x = \sqrt{S}$; $BC = \frac{S}{AB} = \sqrt{S}$

$\Rightarrow P_{min} = 2(AB + BC) = 4\sqrt{S}$.

20) От всички правоъгълници, вписани в окръжност с радиус R да се намери този с най-голямо лице и да се намери това лице.

Дадено: $ABCD$ - правоъгълник, вписан в окръжност с радиус R. $S_{max} = ?$ $ABCD$?

Решение

$AC \cap BD = O$ - център на окръжността, т.е. $AC = BD = 2R$.

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \underbrace{\sin \measuredangle(AC; BD)}_{\sin\gamma} = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot 2R \cdot \sin\gamma = 2R^2 \sin\gamma.$$

$$S = 2R^2 \sin\gamma, \ \gamma \in (0; 180^\circ)$$

но $\sin\gamma$ е намаляваща в $(90^\circ; 180^\circ)$ и растяща в $(0; 90^\circ)$

$\Rightarrow$ S достига НГС за $\gamma = 90^\circ$ т.е. $AC \perp BD$, т.е. $ABCD$ - квадрат.

$$S = 2R^2 \sin 90^\circ = 2R^2$$