3) Допирателна към хипербола

Определение. Права, която не е успоредна на асимптотите на хиперболата и има само една обща точка с нея, се нарича **допирателна** към хиперболата. Общата им точка се нарича **допирна** точка.

Теорема. Правата $Ax+By+C=0$ е допирателна към хиперболата $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ точно когато

$$a^2A^2-b^2B^2-C^2=0.$$

Следствие. Правата t с уравнение $t: \frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$ е допирателна към хиперболата $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ в точката ѝ $M_0(x_0, y_0)$.

На доказателството на тези две твърдения няма да се спираме.

21. Да се намери допирателната към дадената хипербола в точката M.

а) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{12}=1$, $M(12,6)$;

б) $x^2-3y^2=54$, $M(9,3)$;

в) $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$, $M(6,2)$;

г) $x^2-4y^2=28$, $M(8,3)$.

22. Дадени са хипербола и точка, нележаща на хиперболата. Да се намерят допирателните от точката към хиперболата и допирните точки.

а) $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{8}=1$, $(2,-5)$; б) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$, $(6,6)$; в) $\frac{x^2}{48}-\frac{y^2}{12}=1$, $(-4,-10)$.

23. Намерете пресечната точка на допирателните към дадената хипербола в дадените точки.

а) $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{2}=1$, $(-3,-1)$, $(9,-5)$; б) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$, $(-21,-12)$, $(-6,-3)$;

в) $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{8}=1$, $(-18,-10)$, $(6,-2)$; г) $\frac{x^2}{54}-\frac{x^2}{18}=1$, $(9,3)$, $(27,15)$.

24. Да се намери каноничното уравнение на хипербола с оси върху координатните оси, ако допирателната ѝ в точката $(10,3)$ е $5x-6y-32=0$.

Решение. Нека каноничното уравнение на хиперболата е $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Уравнението на допирателната в точката $(10,3)$ е $\frac{10x}{a^2}-\frac{3y}{b^2}=1$.

От друга страна това уравнение е $5x-6y-32=0$. Следователно двете прави съвпадат, условието за което е $\frac{\frac{10}{a^2}}{5}=\frac{\frac{-3}{b^2}}{-6}=\frac{-1}{-32}$, откъдето $a^2=64$ и $b^2=16$.

Хиперболата е $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{16}=1$.▲

25. Да се намери каноничното уравнение на хипербола с оси върху координатните оси, ако дадената права е допирателна към хиперболата в дадената точка.

а) $9x-16y-34=0$, $(18,8)$;

б) $5x-9y-19=0$, $(20,9)$;

в) $x-2y-3=0$, $(15,6)$.

26. Да се намери каноничното уравнение на хипербола с оси върху координатните оси, към която дадените прави са допирателни.

а) $4x+y-21=0$, $2x-3y-7=0$;

б) $x-y+2=0$, $3x-5y+2=0$.

27. Проверете коя права към коя хипербола е допирателна и намерете допирните точки.

а) $2x-3y-11=0$, $2x+3y+10=0$, $\dfrac{x^2}{70}-\dfrac{y^2}{20}=1$, $\dfrac{x^2}{55}-\dfrac{y^2}{11}=1$;

б) $x+2y+6=0$, $x+y+6=0$, $\dfrac{x^2}{60}-\dfrac{y^2}{24}=1$, $\dfrac{x^2}{84}-\dfrac{y^2}{12}=1$.

4) Допирателна към парабола

Ще използваме, че параболата е крива, която е графиката на функцията $f(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ и тогава допирателната ѝ в точката $(x_0, f(x_0))$ се задава с уравнението

$$t:\ y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).$$

28. Намерете допирателната към параболата $y=x^2+3x+4$ в точката $(-4,8)$.

Решение. Уравнението на допирателната е $t:\ y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. Пресмятаме $f'(x)=2x+3$, $f'(-4)=-5$ и $f(-4)=8$ и получаваме $t:\ y=-5(x+4)+8,\quad 5x+y+12=0$.▲

29. Намерете допирателната към дадената парабола в дадената точка.

а) $y=x^2+2x+2$, $(0,2)$;

б) $y=x^2-4x-3$, $(-1,2)$;

в) $y=2x^2-10x-2$, $(5,-2)$;

г) $y=2x^2+4x-2$, $(-2,-2)$.

30. Дадена е парабола $y=x^2-10x+12$ и точка $(7,-10)$, нележаща на нея. Да се намерят допирателните от точката към параболата и допирните точки.

Решение. а) Правата $t:\ y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ е допирателна в точка (x_0, y_0) от параболата.

Имаме $f'(x)=2x-10$, $f'(x_0)=2x_0-10$ и $f(x_0)={x_0}^2-10x_0+12$.

За допирателната получаваме $t:\ y=(2x_0-10)(x-x_0)+{x_0}^2-10x_0+12$.

Ще определим x_0 от условието, че t минава през точка $(x,y)=(7,-10)$:

$$t:\ -10=(2x_0-10)(7-x_0)+{x_0}^2-10x_0+12 \quad\Leftrightarrow\quad {x_0}^2-14x_0+48=0$$