$$① \quad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+x}\right) = [\infty-\infty] =$$

$$// \lim_{x\to\infty}\left(x\underbrace{\sqrt{1-\tfrac{1}{x^2}}}_{\to 1} - x\underbrace{\sqrt{1-\tfrac{1}{x}}}_{\to 1}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+x}}{1}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1-x^2-x}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x-1}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(-1-\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+x\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = -\frac{1}{2}$$

$$② \quad \lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-9} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3}\frac{x+2}{x+3} = \frac{5}{6}$$

Зад. втора ст.

$$\underbrace{\underbrace{(x-3)}\underbrace{(x^{15}+x^7+2)}}_{x^{16}-3x^{15}+x^8-3x^7+2x-6}$$

// схема на хорнер

$$③ \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin 3x}\left(\overbrace{2\sin x\cos x}^{\sin 2x}-\sin^3 2x\right) = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin 3x}\left(\sin 2x-\sin^3 2x\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}\left(\overbrace{1-\sin^2 x}^{\cos^2 x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}\cdot\cos^2 x = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}_{2x\to 0}\cdot 2x\cdot\underbrace{\frac{3x}{\sin 3x}}_{3x\to 0}\cdot\frac{1}{3x}\cdot\cos^2 x = \qquad \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$$

$$\lim 2 \cos^2 x = 2 \qquad \lim \frac{\sin a t}{} = a$$

$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{3} \cdot \cos \quad = \frac{\quad}{3}$ $\qquad \lim_{t \to 0} \frac{\quad}{\sin b.t} \quad b$ $\quad a \neq 0,\ b \neq 0$

(∗) $1 - \cos x$

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \sin y$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$

$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$

$1 - \cos x = \underbrace{1 - \cos^2 \frac{x}{2}}_{\sin^2 \frac{x}{2}} + \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \cdot \sin^2 \frac{x}{2}$

(∗∗) $\cot g\, x + \frac{1}{tg\, x} = \ldots ?$

$\ldots 2 \cdot \cos x\ ?$

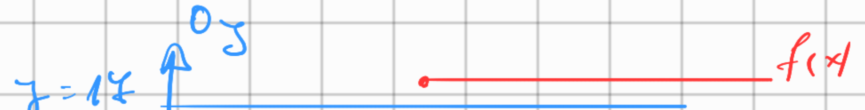
④ $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x - 12}{x^2 - 3x + 12}, & x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 1}{ax - a}, & x > 1 \end{cases}$

$a = ?$: $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x)$ е непрекъсната

// : – така че

Кога казваме, че една функция е непрекъсната ?

$f(x) = \begin{cases} 3, & x \in (-\infty; 66) \\ 17, & x \in [66; +\infty) \end{cases}$



① Дайте определение на понятието непрекъснатост за функция $f(x)$ в точка $x = a$.

Подсказка: нещо с лява, дясна граница в т. $x \to a$

Решение

1. изследване за критични точки
2. трябва в критичните точки да имаме непрекъсн.

$\boxed{1}$ • за $x \le 1$ $f(x) = \dfrac{x^2-3x-12}{x^2-3x+12}$ е непрекъсната (за $x \le 1$)

тъй като $x^2 - 3x + 12 > 0$

• за $x > 1$ $\dfrac{x^2-1}{ax-a} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)\cdot a} = \dfrac{x+1}{a}$ т.е. $a \neq 0$

$f(x)$ е непрекъсната в $x > 1$

• единствено в $x = 1$ може да има прекъснатост.

т. $x = 1$ е критична

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-3x-12}{x^2-3x+12} = -\dfrac{7}{5}$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{ax-a} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)\cdot a} = \dfrac{2}{a}$ $a \neq 0$

По дефиниция $f(x)$ е непрекъсната в $x = 1$, ТСТ

$$-\frac{7}{5} = \frac{2}{a}$$

$a = \frac{}{7}$

(4) Намерете точките на пресичане на

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2-4}, & \text{при } x \leq 7 \\ \dfrac{1}{x+38}, & \text{при } x > 7 \end{cases}$$

$\to x = 2, x = -2$

$\to x = -38$

$$\lim_{x \to 7} \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{49-4} = \frac{1}{45}$$

$$\lim_{x \to 7} \frac{1}{x+38} = \frac{1}{45}$$

Няма точки на пресичане.

$g(x) = \frac{1}{x^2-4}$, $x \leq 7$

$h(x) = \frac{1}{x+38}$, $x > 7$

питаме и $g(x)$ дали е прекъснат за $x \leq 7$

и $h(x)$ за $x > 7$

(***) $f(x) = e^x \cdot (4x^2 - 8x + 9)$

$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

$f(x) = e^x \cdot (4x^2 - 8x + 9) + e^x \cdot (8x - 8)$

$f(x) = e^x (4x^2 + 1)$

Какъв е геометричния смисъл на производната?

Нека е дадена функция $f(x)$, и точка $x = x_a \in \mathbb{R}$.

Тогава производната $f'(x_a)$ (в т. $x = x_a$) я равна на ъгловият коефициент на допирателната към графиката на функция в т. $x = x_a$

⊕ $f(x) = x^3$ $\quad A(1;1)$ $\quad y_a = f(x_a) = x_a^3 = 1$

$f'(x) = 3x^2$

$f'(x_a) = 3x_a^2 = 3$

$t: \quad y = K_t \cdot x + c$

$t: \quad y = f'(x_a) \cdot x + c$

$t: \quad y = 3 \cdot x + c$ $\qquad$ но $A \in t$

$\Rightarrow \quad y_a = 3 \cdot x_a + c$ $\qquad$ $(f(x_a) = 3 \cdot x_a + c)$

$1 = 3 \cdot 1 + c$

$c = -2$

$\Rightarrow t: \quad y = 3x - 2$

⊕ Нулев ъглов коефициент?

$f(x) = x^2$, $\quad x_a = 0$, $\quad f(x_a) = y_a = 0$

$f'(x) = 2x$

$f'(x_a) = 0$ $\quad$ теорема 5 $\Rightarrow K_t = 0$

⊕ $f(x) = 3x + 1$ $\quad x_a = 5 \Rightarrow f(x_a) = 16$

$f'(x) = 3$

$16 = 3 \cdot 5 + c \Rightarrow c = 1$

$t: \quad y = 3 \cdot x + 1$

⊛ $K_t = \operatorname{tg} \sphericalangle(t; O_x)$!

$t \parallel O_y \Rightarrow \operatorname{tg} \sphericalangle(t; O_x) = \operatorname{tg} 90° =$ undefined

$Ax + 0 \cdot y + c = 0 \iff x = c$

нямаме: $\underline{y =} \; K \cdot x + c$

⊕ $f(x) = \sqrt{x-3}$, $\quad x_a = 3$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}$

$f'(x_a) = f'(3) = \frac{}{0} = $ undefined

$\lim_{x \to x_a} f'(x) = \infty \xRightarrow{\text{тогава}} t: x = x_a$ е допирателна

т.е. $t: x = 3$ е допирателна.

① Кандидат-студентски изпит

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + (a-2)x^2 + (2a-1)x + 4a^2 - 40a + 108$

Да се намерят ст-те на $a = ?$, т.ч.

а) графиката на $f(x)$ минава през $A(-3;0)$

б) допирателната към $f(x)$, минаваща през $A(-3;0)$ образува ъгъл с големина $\frac{3\pi}{4}$ с абсцисната ос

Производни от по-висок ред

② $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - a \cdot x^2 + 6x + 1$, $a \in \mathbb{R}$

$a = ?$

$f'(-1) - f''(6) = 5$ (Матура)

Решение:

$f'(x) = x^2 - 2ax + 6$

$f'(-1) = 7 + 2a$

$f''(x) = 2x - 2a$

$f''(6) = 12 - 2a$

$f'(-1) - f''(6) = 5$

$4a - 5 = 5$

$a = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

$S = 20\ km$, $t = 5\ h$

средно изминава $v = \frac{20\ km}{5\ h} = 4\ km/h$

3,9 ; 3,7 ; 3 ; 2,5 ; 4,7 ; 8 ;

в точка от времето $t = t_a$ $\quad V(t_a) = S'(t_a)$ $\quad \forall t_a \in \mathbb{R}$

т.е. винаги $V(t) = S'(t)$

(+) $S(t) = t^3$, тогава $V(t) = S'(t) = 3t^2$

? колко път е изминал за $t = 3$

$S(t) = 3^3 = 27$

? каква му е била скоростта в $t = 2$

$V(t) = 3t^2 = 3.4 = 12$

(1) Намерете скоростта на тяло в момент $t = 4\,s$, ако то се движи по закона $S(t) = 2t^2 - 3t$ см.

// cm/s

Решение:

$v(t) = S'(t) = 4t - 3$ cm/s

$V(4) = 13$ cm/s

ускорението в даден момент е $a(t) = S''(t)$

$a(t) = v'(t)$

(2) $S(t) = 4t^2 - \cos t$, намерете скоростта и ускорението.

$\rightarrow v(t) = 8t + \sin t$

$\rightarrow a(t) = 8 + \cos t$

$\boxed{a = V' \quad S''}$

$a - v = s$ за t

ускорение — скорост — път

③ Намерете формулата за k-та производна на функцията $f(x) = x^m$, $m \in \mathbb{N}$

Решение. (по индукция).

$$f^{(7)}(x) = ?$$

$$f^{(7)}(x) = (x^m)^{(VII)}$$

$$f'(x) = m x^{m-1}$$

$$f''(x) = m \cdot (m-1) \cdot x^{m-2}$$

$$f'''(x) = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot x^{m-3}$$

$$\dots$$

$$f^{(7)}(x) = m \cdot (m-1) \cdot (m-2)(m-3) \dots (m-6) \cdot x^{m-7}$$

$$\dots$$

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} m \cdot (m-1) \cdot \dots (m-(k-1)) \cdot x^{m-k} & k \le m \\ 0 & k > m \end{cases}$$

$$f^{(m)} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \underbrace{(m-(m-1))}_{1}$$

$$f^{(m+1)} = 0$$

$k \le m$ $$f^{(k)}(x) = m(m-1) \dots (m-(k-1)) \cdot x^{m-k}$$

$$f^{(k)}(x) = \frac{\overbrace{m \cdot (m-1) \cdot \dots (m-(k-1)) \cdot (m-k) \cdot (m-k-1) \dots 1}^{m!}}{(m-k) \cdot (m-k-1) \dots 1}$$

$$f^{(k)}(x) = \frac{m!}{(m-k)!} \cdot x^{m}$$

$(m-k)!$

... ред на Тейлър ...