Допускаме, че твърдението е вярно при $n = k$.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k}.$$

Ще докажем, че твърдението е вярно при $n = k + 1$,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}.$$

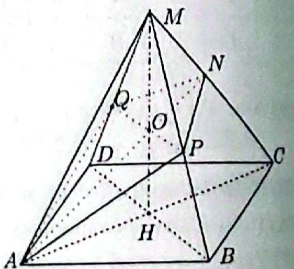
Последователно преобразуваме лявата страна до получаване на дясната като използваме направеното предположение при $n = k$.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} =$$

$$= \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2k+2}\right) = \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}.$$

Следователно твърдението е вярно за всяко $n \in N$.

18. Решение на задачата:



а) От Питагоровата теорема за $\triangle ABC$ следва, че

$AC = a\sqrt{2}$, откъдето $AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

От $MH \perp (ABCD) \Rightarrow \triangle AHM$ е правоъгълен и следва, че $\dfrac{MH}{AH} = \operatorname{cotg} 30^\circ$, откъдето $MH = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

$V_{ABCDM} = \dfrac{1}{3}a^2 . \dfrac{a\sqrt{6}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

б) В $\triangle ACM$ $MA = MC$ и $\sphericalangle AMC = 60^\circ$. Следователно $\triangle ACM$ е равностранен.
В $\triangle ACM$ построяваме $AN \perp MC$. Нека $AN \cap MH = O$. AN и MH са височини и медиани.
Следователно точка O е медицентър на $\triangle ACM$. През т. O построяваме $QP \parallel DB$.
От $HC \perp DB$ като диагонали в квадрат $ABCD$ и от това, че HC е ортогонална проекция на MC върху $(ABCD)$ и от теоремата за трите перпендикуляра следва, че $MC \perp DB$.
Тогава $MC \perp QP$ $(QP \parallel DB)$. Получихме, че MC е перпендикулярна на двете пресичащи се прави AN и QP. Следователно $APNQ$ е търсеното сечение.

в) От $AH \perp DB$ и AH проекция на AO върху $(ABCD)$ следва, че $AO \perp DB$ (теорема за трите перпендикуляра). От $QP \parallel DB$ получаваме, че $AO \perp QP$. Следователно $APNQ$ е четириъгълник с перпендикулярни диагонали.

Тогава $S_{APNQ} = \dfrac{1}{2}AN.QP$.

От $\triangle ACM$ равностранен с височини AN и $MH \Rightarrow AN = MH = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ (*от а)*).

Точка O е медицентър в $\triangle ACM \Rightarrow \dfrac{MO}{MH} = \dfrac{2}{3}$.

Тогава в $\triangle DBM$ $\dfrac{QP}{DB} = \dfrac{MO}{MH} = \dfrac{2}{3} (QP \parallel DB)$. Следователно $QP = \dfrac{2}{3}DB = \dfrac{2}{3}a\sqrt{2}$ и

$S_{APNQ} = \dfrac{1}{2}AN.QP = \dfrac{1}{2}\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.\dfrac{2}{3}a\sqrt{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

Изпитен вариант №5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Г	В	А	В	Б	Б	Г	А	А	В	В	А	А	Г	Г

16. Решение на задачата:

а) $AB : 4x + y - 14 = 0$, а средата на отсечката AB е точката $M(3; 2)$. Уравнението на симетралата на AB е $x - 4y + 5 = 0$.

б) Намираме уравнението на симетралата и на страната.
Уравнението на BC е $x - y + 4 = 0$, средата $K(1; 5)$, симетралата: $x + y - 6 = 0$.
Пресечната точка на двете симетрали получаваме от решението на системата

$$\left| \begin{array}{l} x + y - 6 = 0 \\ x - 4y + 5 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow O(3,8; 2,2).$$

Намираме радиуса $AO = R = \sqrt{(4 - 3,8)^2 + (-2 - 2,2)^2} = \sqrt{17,68}$ и получаваме уравнението на окръжността: $(x - 3,8)^2 + (y - 2,2)^2 = 17,68$.

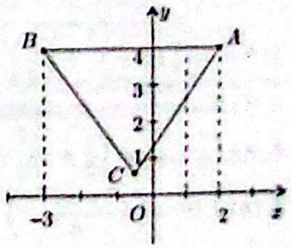
в) Правата на Ойлер минава през медицентъра и центъра на описаната окръжност. Координатите на медицентъра са $G\left(2; \dfrac{8}{3}\right)$ и търсеното уравнение е $7x + 27y - 86 = 0$.

17. Решение на задачата:

Координатите на пресечните точки намираме след решаване на уравненията

$2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2, A(2; 4), 2^{-x-1} = 4 \Leftrightarrow x = -3, B(-3; 4)$

и $2^x = 2^{-x-1} \Rightarrow x = -0,5, C\left(-0,5; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.



Лицето на $\triangle ABC$ е $S = \dfrac{AB.|4 - y_C|}{2} =$

$$= \frac{|-3-2|.\left|4 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right|}{2} = \frac{40 - 5\sqrt{2}}{4} \text{ кв. м. ед.}$$

18. Решение на задачата:

а) Намираме първата производна на дадената функция $f'(x) = 16x^3 - 3x^2 + 10x$ и използвайки формулата за уравнение на допирателна в точка, получаваме уравнението на допирателната за $x = -0,5$. Получаваме $f'(-0,5) = -2 - 0,75 - 5 = -7,75$. Уравнението на допирателната в точка $\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{43}{8}\right)$ е $y = -7,75x - 9,25$.

б) решаваме неравенството $f'(x) = 16x^3 - 3x^2 + 10x > 0 \Leftrightarrow x(16x^2 - 3x + 10) > 0$ и получаваме, че функцията расте за $x \in (0; +\infty)$ и намалява за $x \in (-\infty; 0)$. Намираме втората производна $f''(x) = 48x^2 - 6x + 10$. Детерминантата е отрицателна, следователно функцията няма инфлексни точки, тъй като $f''(x) \neq 0$, $\forall x$.

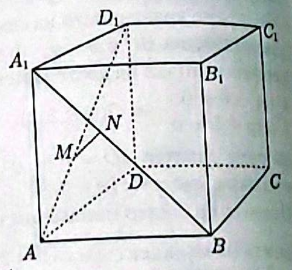
Изпитен вариант №6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Г	В	Б	Г	Б	А	А	В	В	А	В	Г	Б	Г	В

1. (Г) $AB = \sqrt{(3-(-2))^2 + (-5-7)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$ cm.

2. (В) Уравнението $\dfrac{x^2}{6^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1$ е канонично на елипса.

3. (Б) Нека MN е ос-отсечката на правите AD_1 и BA_1. Избира се векторна база $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$. За нея $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = 9$ и
$\vec{a}\,\vec{b} = \vec{a}\,\vec{c} = \vec{b}\,\vec{c} = 0$, $\overrightarrow{AD_1} = \vec{b} + \vec{c}$,
$\overrightarrow{BA_1} = -\vec{a} + \vec{c}$, $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AD_1} = m(\vec{b} + \vec{c})$,
$\overrightarrow{BN} = n\overrightarrow{BA_1} = n(-\vec{a} + \vec{c})$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} =$
$= -m(\vec{b} + \vec{c}) + \vec{a} + n(-\vec{a} + \vec{c}) =$
$= (1-n)\vec{a} - m\vec{b} + (n-m)\vec{c}$.



Тъй като $MN \perp AD_1$ и $MN \perp BA_1$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} -9m + 9(n-m) = 0 \\ -9(1-n) + 9(n-m) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} n = 2m \\ 2n - m = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} m = \dfrac{1}{3} \\ n = \dfrac{2}{3} \end{array} \right. .$$

$$MN = 3\sqrt{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)^2} = 3.\sqrt{3.\frac{1}{3^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \text{ cm}.$$

4. (Г) Декартовото уравнение на права има вида $y = kx + n$.

5. (Б) $\left(\dfrac{x}{2} - 3\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2} + 2\right)^2 = 1 \Rightarrow (x-6)^2 + (y+4)^2 = 2^2$.

6. (А) $f''(x) = \left(\dfrac{x^2 - \sin^2 x}{4}\right)'' = \left(\dfrac{2x - 2\sin x\cos x}{4}\right)' = \left(\dfrac{x - \sin x\cos x}{4}\right)' = \dfrac{1 - \cos^2 x + \sin^2 x}{2} =$
$\sin^2(x)$.

7. (А) $y' = 6x^2 - 18x + 30 = 6(x^2 - 3x + 5) > 0 \Rightarrow$ функцията няма локални екстремуми.

8. (В) Дефиниционната област е $(-\infty;0) \cup (0,+\infty)$. Тъй като $y' = 1 - \dfrac{1}{x^2}$, то функцията е намаляваща за $x \in (-1;0) \cup (0;1)$.

9. (В) Дефиниционната област е $(-\infty;-1) \cup (-1,1) \cup (1,\infty)$.

$$y'' = \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)'' = \left(\frac{2x(x^2-1) - 2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}\right)' = \left(\frac{-4x}{(x^2-1)^2}\right)' = \frac{-4(x^2-1)^2 + 8x(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{-4x^2 + 4 + 16x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3} > 0 \text{ за } |x| > 1.$$

10. (А) $x^2 - 2x + 1 = 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 2$.

11. (В) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x-4}{x-5} = 1$.

12. (Г) $\dbinom{9}{7}.(-2)^2 = \dfrac{9!}{7!2!}.4 = 9.8.2 = 144$.

13. (Б) $x^4 + x^2 + 6x - 8 = 0$, $x^4 - 1 + x^2 - 1 + 6x - 6 = 0$, $(x^2-1)(x^2+1) + (x^2-1) + 6(x-1) = 0$, $(x^2-1)(x^2+2) + 6(x-1) = 0$, $(x-1)(x+1)(x^2+2) + 6(x-1) = 0$, $(x-1)(x^3+x^2+2x+8) = 0$, $(x-1)(x+2)(x^2-2x+4) + x(x+2) = 0$, $(x-1)(x+2)(x^2-3x+4) = 0$.

14. (Г) $a_n = \begin{cases} 0, & \text{за } n = 2k \\ -2, & \text{за } n = 2k+1. \end{cases}$

15. (В) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n = e^2$.

16. Решение на задачата:

Уравнението $6x^5 - 11x^4 - 11x + 6 = 0$ е симетрично от нечетна степен. Следователно има корен $x_1 = -1$. Делим чрез схемата на Хорнер дадения полином на $(x+1)$ и получаваме разлагането:

$(x+1)(6x^4 - 17x^3 + 17x^2 - 17x + 6) = 0 \Leftrightarrow$
$x + 1 = 0$, $x_1 = -1$ или $6x^4 - 17x^3 + 17x^2 - 17x + 6 = 0$.

Очевидно $x \neq 0$ и като разделим второто уравнение на x^2, получаваме

$$6x^2 - 17x + 17 - 17\frac{1}{x} + 6\frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 17\left(x + \frac{1}{x}\right) + 17 = 0 \qquad (1).$$

Полагаме $y = x + \dfrac{1}{x}$ и от $y^2 = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2$ изразяваме $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = y^2 - 2$.

След заместване от уравнение (1) получаваме уравнението $6(y^2 - 2) - 17y + 17 = 0 \Leftrightarrow$
$6y^2 - 17y + 5 = 0 \Leftrightarrow y_1 = \dfrac{1}{3}$ и $y_2 = \dfrac{5}{2}$.

1) Ако $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{3}$, получаваме квадратно уравнение $3x^2 - x + 3 = 0$, което няма решения $(D < 0)$.

2) Ако $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{2}$, получаваме квадратно уравнение $2x^2 - 5x + 2 = 0$, което има решения $x_2 = 2$ и $x_3 = \dfrac{1}{2}$.

Решенията на уравнението са $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ и $x_3 = \dfrac{1}{2}$.

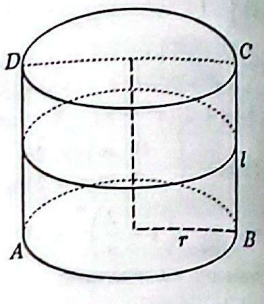
17. Решение на задачата:

Производните на функциите $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ и $g(x) = x^3 - x + 1$ са съответно $f'(x) = 6x - 4$ и $g'(x) = 3x^2 - 1$.

Съответните допирателни към точки от графиките на функциите $f(x)$ и $g(x)$ ще са успоредни, ако ъгловите им коефициенти са равни. От условието точките да имат равни абсциси следва, че трябва $f'(x) = g'(x)$, т.е. $6x - 4 = 3x^2 - 1$. След преобразуване и опростяване на последното уравнение достигаме до $(x-1)^2 = 0$, т.е. $x = 1$.

Следователно търсените точки съществуват и координатите им са съответно $(1;0)$ и $(1;1)$.

18. Решение на задачата:



Нека цилиндърът да има радиус r и образуваща l. Лицето на успоредното му сечение е равно на лицето на основата $B = \pi r^2$, а лицето на осното сечение е $S_{ABCD} = 2rl$.

Следователно $\dfrac{B}{S_{ABCD}} = \dfrac{\pi r^2}{2rl} = \dfrac{\pi r}{2l} = \dfrac{1}{2}$ и $l = \pi r$.

За отношението на лицето на околната повърхнина към лицето на пълната повърхнина на цилиндъра получаваме

$$\frac{S}{S_1} = \frac{\cancel{2\pi r}l}{\cancel{2\pi r}(l+r)} = \frac{l}{l+r} = \frac{\pi r}{\pi r + r} = \frac{\pi \cancel{r}}{(\pi+1)\cancel{r}} = \frac{\pi}{\pi+1}.$$

Изпитен вариант №7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
А	А	В	Б	Г	В	Б	В	Г	Б	Г	Б	А	А	В

1. (А) Използвайте формулата $\cos\varphi = \dfrac{x_{\vec{a}}.x_{\vec{b}} + y_{\vec{a}}.y_{\vec{b}}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$.

2. (А) Разстоянието от точка $C(x_c; y_c)$ до права с уравнение: $ax + by + c = 0$ е $d = CH = \dfrac{|ax_c + by_c + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

6. (В) Използвайте, че коефициентът на $k+1$-вият член в развитието на $(a+b)^n$ е $C_n^k a^{n-k} b^k$ и степента на x е 0.

9. (Г) Ъгловият коефициент на допирателната в точка $M(x_M; y_M)$ е $k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_M)$.

12. (Б) Използвайте твърдението, че три точки, които не лежат на една права, определят единствена равнина.

13. (А) Функцията $y = \dfrac{2+\sin x}{5} = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5}\sin x$ има най-малка стойност, когато $\sin x$ приема най-малката стойност в интервала $\left(\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{2\pi}{3}\right]$.

14. (А) Използвайте уравнението на окръжност : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, където (a, b) са координатите на центъра.

16. Решение на задачата:

$$y = x^2 - |x-1| \Leftrightarrow y = \begin{cases} y_1 = x^2 - x + 1, \ \ x \geq 1 \Rightarrow y_1' = 2x - 1, \ \ y_1' > 0 \text{ за } x > \dfrac{1}{2} \\ \qquad\qquad \Rightarrow y_1 \text{ е растяща за } x > \dfrac{1}{2}, \text{ но } x > 1. \\ y_2 = x^2 + x - 1, \ \ x < 1 \Rightarrow y_2' = 2x + 1, \ \ y_2' > 0 \text{ за } x > -\dfrac{1}{2}, \text{ но } x < 1. \end{cases}$$

Следователно y_1 расте за $x \in [1; +\infty)$ и y_2 расте за $x \in \left(-\dfrac{1}{2}; 1\right)$, откъдето функцията y расте при $x \in \left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

17. Решение на задачата:

От $f'(x) = x^2 - 4px + 3p^2$ и $f'(2) = 4 - 8p + 3p^2$, $f''(x) = 2x - 4p$ и $f''(1) = 2 - 4p$ и от даденото неравенство получаваме $p^2 - 4p - 5 \leq 0 \Leftrightarrow p \in [-1; 5]$.

За $p = -1$ определяме $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x - 2$, $f'(x) = x^2 + 4x + 3$.

$f_{max}(-3) = -2$ и $f_{min}(-1) = -3\dfrac{1}{3}$.

За начертаване на графиката използвайте и точките $(0, -2)$, $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{24}\right)$.

18. Решение на задачата:

$\div a_1, a_1q, a_1q^2, \ldots$ и $\div a_1^2, a_1^2q^2, a_1^4q^4, \ldots$

Тогава $\left| \begin{array}{l} a_1 q = 6 \\ 8.\dfrac{a_1}{1-q} = \dfrac{a_1^2}{1-q^2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a_1 = \dfrac{6}{q} \quad q \neq 0, |q| < 1 \\ 8 = \dfrac{a_1}{1+q} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a_1 = 12 \\ q = \dfrac{1}{2} \end{array} \right. \cup \left| \begin{array}{l} a_1 = -4 \\ q = -\dfrac{3}{2} \end{array} \right.$,

но $q = -\dfrac{3}{2}$ = има $|q| > 1$ и не е решение.

Изпитен вариант №8

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Г	Б	Г	А	Б	В	А	Г	А	А	А	Б	Б	В	А

4. (А) Използвайте уравнението на права през две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ е: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

6. (В) Използвайте, че $(k+1)$-вият член в развитието на $(a+b)^n$ има вида $C_n^k a^{n-k} b^k$.

7. (А) Разширете израза с $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}$.

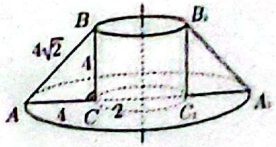
10. (А) Пресметнете границите на функцията при $x \to \pm\infty$.

11. (А) Използвайте, че ъгловите коефициенти на успоредните прави са равни.

12. (Б) Определете координатите на средата на отсечката AB и дължината ѝ. Използвайте уравнение на окръжност по дадени радиус и координати на центъра.

13. (Б) Най-голямата стойност на функцията $y = \dfrac{2}{1+\cos x}$ за $x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$ се получава за най-малката стойност на $\cos x$ в този интервал.

14. (В) $S_1 = S_{\text{пресечен конус}} + S_{\text{цилиндър}} + S_{\text{кръгов венец}}$



16. Решение на задачата:

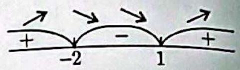
$y = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x - 1$ 1) $D_x : x \in R$.

2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x - 1\right) = \pm\infty$ няма асимптоти.

3) $y' = 3x^2 + 3x - 6 = 0$ $x_{1,2} = -2; 1$.

$3x^2 + 3x - 6 > 0$ за $x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty) \Rightarrow y \nearrow$.

$3x^2 + 3x - 6 < 0$ за $x \in (-2; 1) \Rightarrow y \searrow$.



$x = -2$ – точка на локален максимум;

$x = 1$ – точка на локален минимум;

$f(-2) = -8 + 6 + 12 - 1 = 9 \Rightarrow$ т. $A(-2; 9) \in \Gamma_y$ е точка на локален максимум.

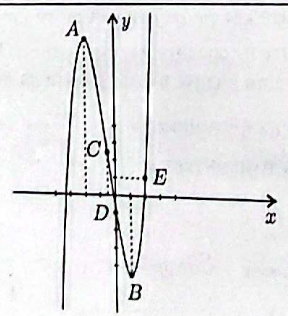
$f(1) = 1 + \frac{3}{2} - 6 - 1 = -\frac{9}{2} \Rightarrow$ т. $B\left(1; -\frac{9}{2}\right) \in \Gamma_y$ е точка на локален минимум.

4) $y'' = 6x + 3 = 0$ за $x = -\frac{1}{2}$, за $x \in (-\infty; -\frac{1}{2})$, $y'' < 0 \Rightarrow y$ е вдлъбната;

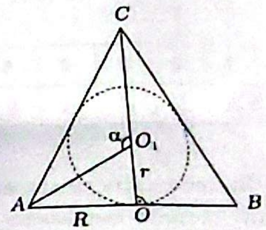
за $x \in (-\frac{1}{2}; +\infty)$ $y'' > 0 \Rightarrow y$ е изпъкнала, т. $C\left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{4}\right)$ е инфлексна точка.

$\Gamma_y \cap \vec{Oy} = D(0; -1); E(2; 1)$

			A		C		D		B		E		
x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		0		1		2		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	9	$\searrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\frac{9}{2}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
y'	$+$	$+$	0	$-$	$-$		$-$	$-$	0	$+$		$+$	$+$
y''	$-$	$-$		$-$	0		$+$		$+$	$+$		$+$	



17. Решение на задачата:



Нека R – радиус, H – височина на конуса.
Осното сечение на конуса пресича сферата в нейна голяма окръжност $\Rightarrow$ $k(O_1; r)$ и CO е височина в $\triangle ABC \Rightarrow \sphericalangle AO_1C = \alpha$

$\triangle AOO_1$: $\sphericalangle AOO_1 = 90°$.
$\sphericalangle AO_1O = 180° - \alpha$ (съседен на $\sphericalangle AO_1C$),
$OO_1 = r$.

$\Rightarrow AO = OO_1.\text{tg}\sphericalangle AO_1O \Rightarrow AO = r.\text{tg}\,(180° - \alpha) = -r.\text{tg}\,\alpha$.

$$\left.\begin{array}{r} AO = R = -r\,\text{tg}\,\alpha \\ R > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -r\,\text{tg}\,\alpha > 0 \\ r > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha < 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha > 90° \\ \alpha < 180° \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \in (90°; 180°).$$

$\sphericalangle O_1AO = 90° - \sphericalangle AO_1O = 90° - (180° - \alpha) = \alpha - 90°$.

O_1 е център на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност $\Rightarrow AO_1 = l_{\sphericalangle BAC} \Rightarrow \sphericalangle BAC = 2\sphericalangle O_1AO =$
$= 2(\alpha - 90°) = 2\alpha - 180°$.

Разглеждаме $\triangle AOC$: $\left.\begin{array}{l} \sphericalangle AOC = 90° \\ \sphericalangle OAC = 2\alpha - 180° \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle ACO = 90° - \sphericalangle OAC$.

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle ACO = 90° - (2\alpha - 180°) = 270° - 2\alpha \\ \sphericalangle ACO < 90° \end{array}\right\} \Rightarrow 0° < 270° - 2\alpha < 90° \Rightarrow 90° < \alpha < 135°.$$

$CO = AO.\text{tg}\sphericalangle OAC = R.\,\text{tg}\,(2\alpha - 180°) = -r.\,\text{tg}\,\alpha.\Big(-tg(180° - 2\alpha)\Big)$.

$H = CO = r.\text{tg}\,\alpha.\text{tg}\,(180° - 2\alpha) = -r.\text{tg}\,\alpha.\text{tg}\,2\alpha$.

$V = \frac{1}{3}B.H = \frac{1}{3}\pi.R^2.H = \frac{1}{3}\pi(-r.\text{tg}\,\alpha)^2.(-r.\text{tg}\,\alpha.\text{tg}\,2\alpha) =$
$= \frac{1}{3}\pi.r^2.\text{tg}^2\alpha.(-r.\text{tg}\,\alpha.\text{tg}\,2\alpha) = -\frac{1}{3}\pi.r^2.\text{tg}^2\,\alpha.\text{tg}\,2\alpha$ за $\alpha \in (90°; 135°)$.

18. Решение на задачата:

Ако топката се пусне от височина a_1 m, след първия отскок тя ще достигне височина $a_2 = 80\%a_1 = \frac{4}{5}a_1$ m. След втория отскок ще достигне височина a_3, където $a_3 = 80\%\frac{4}{5}a_1 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 a_1 = \frac{16}{25}a_1$ m и т.н.

$\Rightarrow$ Височините, до които топката достига след всеки отскок, образуват геометрична прогресия $\div\, a_1, q = \frac{4}{5}$.

а) Височината след третия отскок е $\left.\begin{array}{l} a_4 = a_1q^3 \\ a_1 = 50 \end{array}\right\} \Rightarrow a_4 = 50.\left(\frac{4}{5}\right)^3 = 2.5^2.\frac{4^3}{5^3} = \frac{2.(2^2)^3}{5}$,

$a_4 = \frac{2^7}{5} = \frac{128}{5}$.

След третия отскок топката достига височина $\frac{128}{5}$ m $= 25,6$ m.

б) Височината след четвъртия отскок е не по-малка от 4 m $\Rightarrow a_5 = a_1q^4 \geq 4$,

$a.q^4 \geq 4 \Rightarrow a.\left(\frac{4}{5}\right)^4 \geq 4 \Rightarrow a \geq \frac{4.5^4}{4^4}, a \geq \frac{5^4}{4^3}; a \geq \frac{625}{64} \approx 9,77$ m.

Изпитен вариант №9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
В	Б	В	А	В	Г	Б	Г	Б	В	А	Г	Г	Г	А

2. (Б) Използвайте, че ъгловите коефициенти на успоредните прави са равни.

3. (В) Ако всеки две равнини се пресичат в различни прави, то броят на правите е C_{10}^2. По условие четири от равнините се пресичат в една права, вместо в C_4^2, а две от равнините не се пресичат. Следователно броят на правите е $C_{10}^2 - C_4^2 - 1$.

4. (А) Приложете теоремата на Безу и пресметнете чрез схемата на Хорнер.

5. (В) Използвайте, че $(k+1)$-вият член в развитието на $(a+b)^n$ има вида $C_n^k a^{n-k} b^k$.

8. (Г) Ъгловият коефициент на допирателната към графиката на функцията $f(x)$ в точка $M(x_0, y_0)$ е равен на $f'(x_0)$.

10. (В) Използвайте втората производна на функцията $S(t)$.

11. (А) Най-малката стойност на функцията $y = \dfrac{3 - sin x}{2}$ за $x \in \left[-\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{3}\right]$ се получава за най-голямата стойност на $\sin x$ в този интервал.

12. (Г) Фокусите са $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$, където $c^2 = a^2 - b^2$.

13. (Г) Диагоналното сечение на пирамидата е равнобедрен триъгълник, вписан в голяма окръжност на сферата.

15. Упътване: Сечението на сферите е окръжност, която лежи в равнина, перпендикулярна на централата им.

16. Решение на задачата:

$y = \dfrac{x+2}{x-3}$, $D: x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+2}{x-3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)} = 1.$$

Следователно функцията има хоризонтална асимптота $y = 1$.

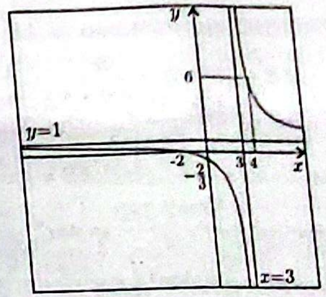
$$\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} \frac{x+2}{x-3} = -\infty \text{ и } \lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \frac{x+2}{x-3} = +\infty.$$

Следователно функцията има вертикална асимптота $x = 3$.

От $y' = \dfrac{-5}{(x-3)^2} < 0$ следва, че функцията е намаляваща във всеки от дефиниционните интервали.

От $y'' = \dfrac{10}{(x-3)^3}$ следва, че при $x > 3$, $y'' > 0$ и функцията е изпъкнала, а при $x < 3$, $y'' < 0$ и функцията е вдлъбната.

При начертаване на графиката на функцията ще използваме и точките, в които тя пресича координатните оси, т.е. $(0; -\frac{2}{3})$ и $(-2; 0)$. За по-голяма точност определяме и т. $(4; 6)$.



x	$-\infty$		3			$+\infty$
y	1	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	1
y'	−	−	−	−	−	−
y''	−	−	−	+	+	+

17. Решение на задачата:

$\div b_1, b_1q, b_1q^2, b_1q^3, b_1q^4, \ldots$

$$\left|\begin{array}{l} b_1 + b_1 q = 135 \\ S = \dfrac{b_1}{1-q} = 243 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} b_1 = \dfrac{135}{1+q} \\ b_1 = 243(1-q) \end{array}\right. \Rightarrow \frac{135}{1+q} = 243(1-q) \Rightarrow \frac{135}{243} = 1 - q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{4}{9}.$$

По условие редицата е с положителни членове. Следователно за $q = \dfrac{2}{3}$, $b_1 = \dfrac{135}{1+\frac{2}{3}} = 81$, а $q = -\dfrac{2}{3}$ не е решение.

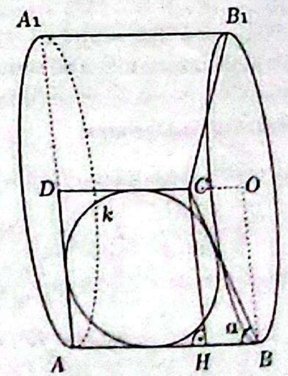
Тогава $a = b_1 q^2 = 81\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = 36$ $\quad b = b_1 q^4 = 81\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = 16$ и тогава

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - ax + \frac{17}{4}b}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 36x + \frac{17}{4}16}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 36x + 68}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-34)}{x-2} = 2 - 34 =$$

$= -32.$

18. Решение на задачата:

$V_{\text{ротационно тяло}} = V_{\text{цилиндър}ABB_1A_1} - V_{\text{конус}BB_1C}$.



$AD \perp AB$, окръжността $k(r)$ е вписана в $ABCD$ и $\Rightarrow AD = 2r \Rightarrow R_{\text{цилиндър}} = R_{\text{конус}} = 2r$.

Построяваме $CH \perp AB$.

От $\triangle CHB$, $\sphericalangle CHB = 90°$, $CH = 2r$, $\sphericalangle ABC = \alpha$ и

$\Rightarrow \dfrac{CH}{HB} = \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow HB = \dfrac{CH}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{2r}{\operatorname{tg}\alpha}$,

$\dfrac{CH}{BC} = \sin\alpha \Rightarrow BC = \dfrac{CH}{\sin\alpha} = \dfrac{2r}{\sin\alpha}$ и

$k(r)$ е вписана в $ABCD$

$\Rightarrow AB + CD = AD + BC = 2r + \dfrac{2r}{\sin\alpha}$.

От $AHCD$ правоъгълник $\Rightarrow AB - CD = AB - AH = HB = \dfrac{2r}{\operatorname{tg}\alpha}$ и следователно

$$+\left|\begin{aligned} AB + CD &= 2r + \frac{2r}{\sin\alpha} \\ AB - CD &= \frac{2r}{\operatorname{tg}\alpha}\end{aligned}\right. \Rightarrow 2AB = 2r + \frac{2r}{\sin\alpha} + \frac{2r}{\operatorname{tg}\alpha} \Rightarrow AB = r\left(1 + \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right).$$

$V_{\text{цилиндър}ABB_1A_1} = \pi(2r)^2.AB = 4\pi r^3\left(1 + \dfrac{1}{\sin\alpha} + \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)$. Тъй като $CO = HB$, то

$V_{\text{конус}BB_1C} = \dfrac{\pi(2r)^2.HB}{3} = 4\pi r^3\dfrac{2}{3\operatorname{tg}\alpha}$.

$V_{\text{ротационно тяло}} = 4\pi r^3\left(1 + \dfrac{1}{\sin\alpha} + \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right) - 4\pi r^3\dfrac{2}{3\operatorname{tg}\alpha} = 4\pi r^3\left(1 + \dfrac{1}{\sin\alpha} + \dfrac{1}{3\operatorname{tg}\alpha}\right)$.

Изпитен вариант №10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
В	Г	Б	А	В	В	Б	Г	А	Г	В	Г	В	В	А

16. Решение на задачата:

За да пресметнем търсените стойности, използваме схемата на Хорнер.

	4	−8	−49	−22	−168	6	45
2	4	0	−49	−120	−408	−810	−1575
−3	4	−20	11	−55	−3	15	0
5	4	0	11	0	−3	0	
0,5	4	2	12	6	0		
−0,5	4	0	12	0			

а) $P(2) + P(-3) = -1575 + 0 = -1575$.

б) $P(x) = (x+3)(x-5)(2x-1)(2x+1)(x^2+3) = (x+3)(x-5)(x-0,5)(x+0,5)(4x^2+12)$.

в) От разлагането в б) и от метода на интервалите получаваме, че решенията на неравенството са $x \in [-3; -0,5] \cup [0,5; 5]$ и сумата на целите решения е $-3-2-1+0+1+2+3+4+5 = 9$.

17. Решение на задачата:

Опростяваме функцията $f(x) = \dfrac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{cotg}^2 x} - \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} 2x$ и намираме

$f'(x) = 2\operatorname{tg} x\dfrac{1}{\cos^2 x} - 2\dfrac{1}{\cos^2 2x}$. От условието и прилагането на универсална субституция получаваме $\sin 2\alpha = \dfrac{5}{13} = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} \Leftrightarrow 5\operatorname{tg}^2\alpha - 26\operatorname{tg}\alpha + 5 = 0$.

$\operatorname{tg}\alpha = 5$ или $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{5}$, но $\alpha < 45°$, следователно $\operatorname{tg}\alpha < 1$ и $\operatorname{tg}\alpha = 5$ не е решение.

Тогава $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{5}$, $\cos^2 2\alpha = 1 - \left(\dfrac{5}{13}\right)^2 = \left(\dfrac{12}{13}\right)^2$, $\cos^2\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{25}{26}$.

$f'(\alpha) = 2\operatorname{tg}\alpha\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 2\dfrac{1}{\cos^2 2\alpha} = \dfrac{2.26}{5.25} - \dfrac{2.169}{144} = -\dfrac{17381}{9000}$.

18. Решение на задачата:

а) Изразяваме последователно $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1}) = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$,

$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1D_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{D_1C_1} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. По теорема $\cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AK}}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{AK}|}$.

Първо намираме: $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 4$, $|\vec{c}| = 5$, $\vec{c}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{c} = 0$, $\vec{a}.\vec{b} = 4.4.\cos 60° = 8$.

тогава $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AK} = \left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) = \frac{1}{2}\vec{a}^2 + \frac{1}{2}\vec{b}^2 + \frac{1}{2}\vec{c}^2 + \frac{5}{4}\vec{a}.\vec{b} = 38,5$

$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{137}}{2}$, $|\overrightarrow{AK}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)^2} = \sqrt{53}$

$\cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AK}}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{AK}|} = \dfrac{\sqrt{154}}{7261}$.

б) Точките A, M и K лежат в равнината (A, B, C_1), където е и точка D_1. Следователно сечението е успоредникът ABC_1D_1, а неговото лице е $S = AB.AD_1 \sin\sphericalangle BAD_1$. Отново използваме вектори, за да намерим $\cos\sphericalangle BAD_1 = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD_1}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD_1}|} = \dfrac{\vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}}{4.\sqrt{41}} = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{4.\sqrt{41}} =$

$\dfrac{2}{\sqrt{41}}$.

$S = AB.AD_1 \sin\sphericalangle BAD_1 = 4\sqrt{37}$.

Изпитен вариант №11

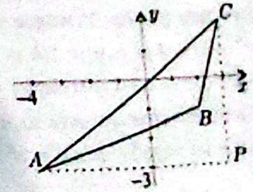
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Г	Б	В	Б	В	А	Г	А	Б	В	Б	Г	А	Г	В

1. (Г) $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos 30° = 2\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3$.

2. (Б) Каноничното уравнение на парабола има вида $y^2 = kx$.

3. (В) $\dfrac{5}{-30} = \dfrac{-3}{18} \neq \dfrac{1}{6} \Rightarrow p \parallel q$.

4. (Б)



$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle APC} - S_{\triangle APB} - S_{\triangle PCB} - S_{\triangle ACQ} =$

$= \dfrac{7.5}{2} - \dfrac{7.2}{2} - \dfrac{5.1}{2} = \dfrac{35 - 19}{2} = \dfrac{16}{2}$.

5. (В) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 - 2x - 1 + 2x}{x\left(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x}\right)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4}{\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x}} = 2$.

8. А) $f'(x) = (x^3\cos x)' = 3x^2 cosx - x^3 \sin x$.

9. (Б) Функциите $\cos x$ и x^2 са четни, а x и $\sin x$ – нечетни. Следователно $\dfrac{\cos x}{x}$, $\dfrac{\sin x}{x^2}$ и $f(x)$ са нечетни функции.

10. (В) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{x-2}\right)^x = e^3$.

11. Б) $y = \dfrac{x^3-9x^2+20x}{x^3-10x^2+25x} = \dfrac{x(x^2-9x+20)}{x(x-5)^2}$.

Следователно дефиниционното множество на функцията е $R/\{0;5\}$ и y има вертикална асимптота в $x=5$.

13. (А) Стойностите 0 и 5 се срещат по веднъж.

15. (В) $\widetilde{C}_3^5 = C^5_{3+5-1} = \dfrac{7!}{5!(7-5)!} = \dfrac{7.6}{2!} = 7.3 = 21$ начина.

16. Решение на задачата:

Полиномът $x^4-2x^3-13x^2+14x+24$ е от четвърта степен и има най-много 4 корена. Делителите на старшия коефициент са само числата ±1. Следователно рационални корени на полинома може да са само делителите на свободния член: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12$ и ±24.

Проверяваме дали те са корени чрез схемата на Хорнер:

	1	−2	−13	14	24	
−1	1	−3	−10	24	0	Следователно −1 е корен.
1	1	−2	−12	12		Следователно 1 не е корен.
−2	1	−4	−4	20		Следователно −2 не е корен.
2	1	−1	−12	0		Следователно 2 е корен.
−3	1	−4	0			Следователно −3 не е корен.

Вижда се, че последният корен е 4.

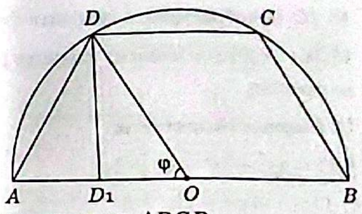
Разлагането на полинома е $x^4-2x^3-13x^2+14x+24 = (x+1)(x-2)(x+3)(x-4)$.

17. Решение на задачата:

Тъй като допирателните минават през началото на координатната система, уравненията им имат вида $y=kx$. Условието за допиране на правата $y=kx$ към параболата $y=x^2-2x+4$ (т. е. $a=1, b=-2, c=4$) е дискриминантата $D=0$, т. е. $(b-k)^2-4ac=0$, т. е. $(-2-k)^2-4.1.4=0 \Leftrightarrow 4+4k+k^2-16=0 \Leftrightarrow k^2+4k-12=0 \Leftrightarrow k_1=-6, k_2=2$.

Следователно уравненията на минаващите през началото на координатната система допирателни към параболата $y=x^2-2x+4$ са $y_1=-6x$ и $y_2=2x$.

18. Решение на задачата:



Нека в полукръга с център O и радиус 10 cm да е вписан трапецът $ABCD$. За да бъде лицето на $ABCD$ възможно най-голямо, трябва една от основите му да е диаметър на полукръга. Нека тя да е AB. Следователно O е среда на AB.

Ако $\sphericalangle AOD=\varphi$ и DD_1 е височина на трапеца, то в правоъгълния $\triangle D_1OD$ получаваме $DD_1=10\sin\varphi$ и $OD_1=10\cos\varphi$.

Всеки вписан в кръг трапец е равнобедрен. Следователно такъв е и $ABCD$.

Тогава $CD=OD_1=2.10.\cos\varphi=20\cos\varphi$ и лицето на трапеца $ABCD$ е

$S=\dfrac{AB+CD}{2}DD_1=\dfrac{20+20.\cos\varphi}{2}.10.\sin\varphi=100.(1+\cos\varphi)\sin\varphi$.

За да бъде лицето на $ABCD$ възможно най-голямо, трябва

$S'(\varphi)=(100(1+\cos\varphi)\sin\varphi)'=100\left((1+\cos\varphi)\sin\varphi\right)'=0$.

Тъй като $((1+\cos\varphi)\sin\varphi)'=-\sin\varphi+(1+\cos\varphi)\cos\varphi$, трябва да решим уравнението

$-\sin\varphi+(1+\cos\varphi)\cos\varphi=0$, в което $\cos\varphi>0$.

$-\sin^2\varphi+\cos\varphi+\cos^2\varphi=0$,

$\cos^2\varphi-1+\cos\varphi+\cos^2\varphi=0$,

$2\cos^2\varphi+\cos\varphi-1=0$.

След полагането $\cos\varphi=x$ получаваме квадратното уравнение $2x^2+x-1=0$, само един от корените на което е положителен. Той е $x=\dfrac{-1+\sqrt{1-4.2.(-1)}}{2.2}=\dfrac{1}{2}$.

Следователно лицето на $ABCD$ е най-голямо при $\cos\varphi=\dfrac{1}{2}$ и $\varphi=60°$. То е

$S=100(1+\cos 60°)\sin 60°=100\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\sqrt{3}}{2}=75\sqrt{3}$ cm².

Изпитен вариант №12

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Г	А	Б	В	В	Г	Г	Б	В	В	А	А	Г	Г	Б

5. (В) От уравнението $P(-2)=27$ намерете b.

6. (Г) Използвайте първата производна на $S(t)$.

7. (Г) Сечението е равностранен триъгълник.

9. (В) Използвайте $\lim\limits_{f(x)\to 0}\dfrac{\sin(f(x))}{f(x)}=1$.

11. (А) Условието $y''>0$ трябва да е изпълнено за всяко x.

12. (А) Функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката с абсциса x_0, ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

13. (Г) $V_{\text{рот. тяло}} = V_{\text{цилиндър}} - V_{\text{конус}}$.

14. (Г) Преобразувайте дадената функция до $f(x) = 4\sin x + 2\sin 2x$.

15. (Б) Осното сечение на конуса е равнобедрен триъгълник, вписан в голямата окръжност на сферата.

16. Решение на задачата:

$f(x) = ax^3 + bx^2 + 3x + 1$.

а) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 3$

От системата $\left|\begin{array}{l} f'(2) = 0 \\ f'(3) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} 12a + 4b + 3 = 0 \\ 27a + 6b + 3 = 0 \end{array}\right.$ получаваме $a = \frac{1}{6}$ и $b = -\frac{5}{4}$.

б) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + 3x + 1$.

Уравнението на допирателната в точката с абсциса $x = x_0$ е $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

При $x = 4$ $\quad y = f(4) + f'(4)(x-4)$, $f(4) = \frac{1}{6}4^3 - \frac{5}{4}4^2 + 3.4 + 1 = \frac{11}{3}$.

$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3$, $f'(4) = \frac{1}{2}.4^2 - \frac{5}{2}.4 + 3 = 1$, $y = \frac{11}{3} + 1.(x-4) = x - \frac{1}{3}$.

Уравнението на допирателната е $y = x - \frac{1}{3}$.

17. Решение на задачата:

$4x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 8x + 4 = 0$.

Очевидно $x = 0$ не е решение на уравнението. Тогава можем да разделим на x^2.

$\frac{4x^4}{x^2} - \frac{8x^3}{x^2} + \frac{3x^2}{x^2} - \frac{8x}{x^2} + \frac{4}{x^2} = 0$.

$4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 8\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = 0$.

Полагаме $x + \frac{1}{x} = y$, откъдето $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$.

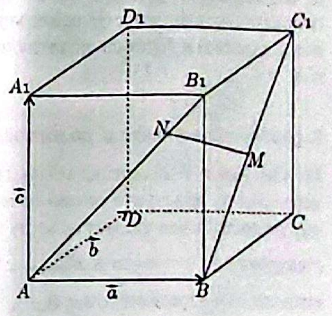
$4(y^2 - 2) - 8y + 3 = 0 \Leftrightarrow 4y^2 - 8y - 5 = 0 \Leftrightarrow y_1 = \frac{5}{2}$ и $y_2 = -\frac{1}{2}$.

От полагането $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2$ и $x_2 = \frac{1}{2}$,

$x + \frac{1}{x} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + x + 2 = 0$ няма решение.

Корените на даденото уравнение са $x_1 = 2$ и $x_2 = \frac{1}{2}$.

18. Решение на задачата:



Нека $M \in BC_1, N \in AB_1$ и MN е ос-отсечка на правите BC_1 и AB_1.

Избираме векторна база, съставена от векторите $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$.

Нека дължината на ръба на куба е x. Тогава $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = x^2$ и $\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{c} = \vec{b}.\vec{c} = 0$.

$\overrightarrow{AB_1} = \vec{a} + \vec{c}, \overrightarrow{BC_1} = \vec{b} + \vec{c}$.

Нека $\overrightarrow{BM} = m.\overrightarrow{BC_1}$ и $\overrightarrow{AN} = n.\overrightarrow{AB_1}$.

Тогава $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{a} + m.\overrightarrow{BC_1} = \vec{a} + m.(\vec{b} + \vec{c})$.

$\overrightarrow{AN} = n.\overrightarrow{AB_1} = n.(\vec{a} + \vec{c})$.

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = (n-1)\vec{a} - m\vec{b} + (n-m)\vec{c}$.

От $BC_1 \perp MN$ следва $\overrightarrow{BC_1}.\overrightarrow{MN} = 0$, откъдето $(\vec{b} + \vec{c}).\left((n-1)\vec{a} - m\vec{b} + (n-m)\vec{c}\right) = -m\vec{b}^2 + (n-m)\vec{c}^2 = -mx^2 + (n-m)x^2 = (-2m+n)x^2 = 0$. От $x^2 \neq 0$ следва $n - 2m = 0$.

Аналогично от $AB_1 \perp MN$ получаваме $(\vec{a} + \vec{c})\left((n-1)\vec{a} - m\vec{b} + (n-m)\vec{c}\right) = (n-1)\vec{a}^2 + (n-m)\vec{c}^2 = (n-1)x^2 + (n-m)x^2 = (2n-m-1)x^2 = 0$, откъдето $2n - m - 1 = 0$.

От системата $\left|\begin{array}{l} n - 2m = 0 \\ 2n - m - 1 = 0 \end{array}\right.$ получаваме $m = \frac{1}{3}$ и $n = \frac{2}{3}$.

Следователно $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{2}{3} - 1\right)\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} = -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$.

Тогава $\overrightarrow{MN}^2 = \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right)x^2 = \frac{1}{3}x^2$.

От условието $|\overrightarrow{MN}|^2 = d^2$. Следователно $\frac{1}{3}x^2 = d^2$ и $x = \sqrt{3}d$.

За обема на куба получаваме $V = x^3 = 3\sqrt{3}d^3$.

Изпитен вариант №13

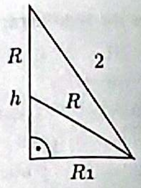
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Б	Г	Б	Г	В	В	Б	А	Г	Г	Б	В	Б	А	Б

2. (Г) Дължината на височината от върха $C(x_c, y_c)$ до правата $AB: ax + by + c = 0$ е $d = \frac{|ax_c + by_c + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

3. (Б) Намерете координатите на общите точки на двете параболи и уравнението на права през две точки.

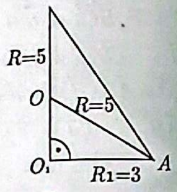
4. (Г) Събираемото, което съдържа x^0, има вида $C_{10}^m x^{10-m} x^{-4m}$, откъдето се намира $m = 2$.

5. (В) В полинома $P(x)$ се полага $t = 2x + 1$ и се получава $P(t) = t^4 + t^3 + t + 1 = 0$, откъдето $t_1 = t_2 = -1$.

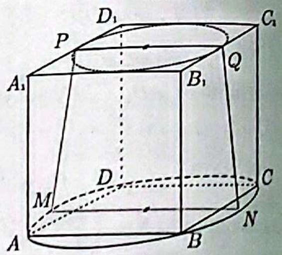


6. (В) Намерете радиуса R_1 на описаната около основата окръжност и от правоъгълния триъгълник с катети h и R_1 последователно пресметнете h и R.

8. (А) Преобразувайте y' до израза $\cos x - \sin 2x$.



11. (Б) Нека O е центърът на сферата, а O_1 е центърът на описаната около основата (квадрата) окръжност. Тогава диаметърът на тази окръжност е диагонал на основата и $B_{\text{основата}} = \frac{1}{2}.6.6 = 18$, а височината на пирамидата е $R + \sqrt{R^2 - R_1^2} = 9$.



12. (В) Използвайте, че осното сечение на пресечения конус е равнобедрен трапец $MNPQ$, където $MN = 2R = \sqrt{2}, PQ = 2r = 1, QH = 1$ и $MH = \frac{1}{2}(MN - PQ) = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$.

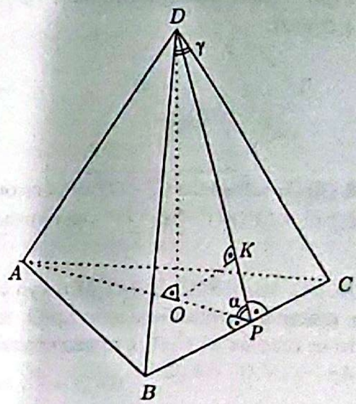
13. (Б) Използвайте първата производна на функцията $S(t)$.

14. (А) Функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката с абсциса $x = \frac{\pi}{4}$, когато $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

15. (Б) Преобразувайте израза $\left(1 + \frac{k}{x}\right)^{mx} = \left(\left(1 + \frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right)^{mk}$.

16. Упътване към задачата:
Положете $x^2 + 3x = t$ и решете неравенството $(t-3)(t+1) - 5 \leq 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 8 \leq 0$.
От $x \in [-4; -2] \cup [-1; 1]$ получаваме, че целите решения са 6.

17. Решение на задачата:
а) Нека $AB = BC = AC = x$.
От $\triangle BPD$ определяме $DP = \frac{x}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$,
и от $\triangle APC - OP = \frac{1}{3}AP = \frac{1}{3}\sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{3}}{6}$.
Тогава $\cos\alpha = \frac{OP}{DP} = \frac{x\sqrt{3}}{6} : \left(\frac{x}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$.
Така доказахме, че $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$.



б) От $\gamma = 90°$ намираме $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\frac{90°}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,
$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ и $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$, откъдето
в $\triangle OPK$ $\sin\alpha = \frac{OK}{OP} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{OP} \Leftrightarrow OP = 3$.
От $\triangle DOP$ имаме $\operatorname{tg}\alpha = \frac{OD}{OP} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{OD}{3}$
$\Leftrightarrow OD = 3\sqrt{2}$.

18. Решение на задачата:
За функцията $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ определяме $f(1) = a + b + c = 0$.
От $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$ и $f'(1) = 0$ следва, че $x = 0$ и $x = -\frac{2b}{3a}, a \neq 0$, откъдето $f(0) = c = 2$ и $-\frac{2b}{3a} = 2$.

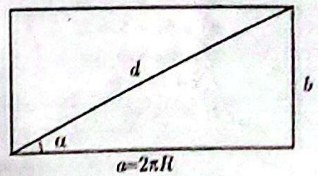
Решаваме системата $\left|\begin{array}{l} a + b + 2 = 0 \\ -\frac{2b}{3a} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a + b = -2 \\ 6a + 2b = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -3 \end{array}$.

Изпитен вариант №14

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Г	В	Б	А	Г	Г	В	Б	Г	А	В	Б	А	А	В

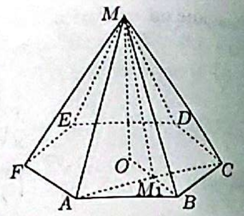
3. (Б) Нека $C(x_c, y_c)$ От $AC = BC$ се получава $\sqrt{(x_c - 2)^2 + (y_c - 4)^2} = \sqrt{x_c^2 + (y_c - 6)^2}$ и от $C \in g \Rightarrow 2x_c - y_c - 6 = 0$.

5. (Г) $a > b$.

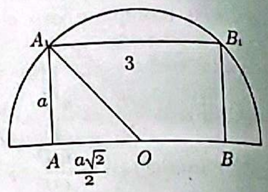


6. (Г) Използвайте, че $P(x) = \left((x^2 + 2x + 4) + (x - 2)\right)^2$.

7. (В) Ъгълът между равнините (ACM) и (ABC) е $\sphericalangle OM_1M$.



8. (Б) От условието $C_n^2 - C_n^n = 14$ се определя $n = 6$. Тогава от събираемото, което съдържа $C_6^m x^{\frac{2}{3}} = C_6^m (x^{\frac{1}{3}})^{6-m}(x^{-\frac{1}{3}})^m$, се определя $m = 1$.



10. (А) Ако $ABCDA_1B_1C_1D_1$е куб с ръб a, който е вписан в полукълбо с център O, то диагоналното му сечение ACC_1A_1 е правоъгълник със страни $AA_1 = a$ и $AC = a\sqrt{2}$.

11. (В) Използвайте $S''(t)$.

12. (Б) Осното сечение на конуса е равнобедрен триъгълник, който е описан около големия кръг на кълбото.

13. (А) Функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката с абсциса x_0, ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

14. (А) Използвайте достатъчното условие за намиране на локални екстремуми на функцията с производни от по-висок ред.

15. (В) Преобразувайте израза $\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$ до израза $\left(\left(1+\dfrac{3}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{3}}\right)^6 . \left(1+\dfrac{3}{x-2}\right)^3$.

16. Решение на задачата:

$(x+1)(x+2)(x+4)(x+5) = 40,$

$\big((x+1)(x+5)\big)\big((x+2)(x+4)\big) = 40,$

$(x^2+6x+5)(x^2+6x+8) = 40.$

Полагаме $x^2+6x+5 = y$ и получаваме

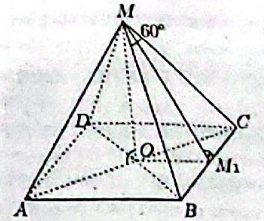
$y(y+3) = 40 \Leftrightarrow y^2+3y-40 = 0 \quad D = 9+160 = 169.$

$y_{1,2} = -\dfrac{3\pm 13}{2} \Leftrightarrow y_1 = -8 \cup y_2 = 5.$

$x^2+6x+5 = y_1$		$x^2+6x+5 = y_2$
$x^2+6x+5 = -8,$		$x^2+6x+5 = 5,$
$x^2+6x+13 = 0,$	$\cup$	$x^2+6x = 0,$
$D = 9-13 = -4 < 0$		$x(x+6) = 0,$
няма реални корени.		$x_1 = 0 \cup x_2 = -6.$

$x_1 + x_2 = 0 + (-6) = -6.$

17. Решение на задачата:



Разглеждаме $\triangle BCM$

$\left.\begin{array}{l} BM = CM \\ \sphericalangle BMC = 60^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow BM = CM = BC = \sqrt{3}$ cm.

$MM_1 \perp BC$(апотема на пирамидата).

$MM_1 = \dfrac{BC.\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2}, \qquad MM_1 = \dfrac{3}{2}$ cm.

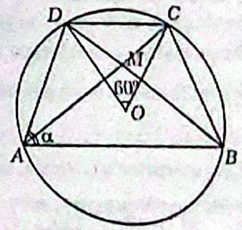
Разглеждаме $\triangle OM_1M$

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle M_1OM = 90^\circ \\ OM_1 = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{ cm (условие)} \\ MM_1 = \dfrac{3}{2}\text{ cm (доказателство)} \end{array}\right\} \Rightarrow H = OM = \sqrt{MM_1^2 - OM_1^2} = \sqrt{\dfrac{9}{4} - \dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}\text{ cm.}$$

$S_1 = 4.\dfrac{BC.MM_1}{2} + BC^2 = 4.\dfrac{\sqrt{3}.3}{2.2} + \sqrt{3}^2 = 3\sqrt{3} + 3 = 3(\sqrt{3}+1)$ cm.^{2}

$V = \dfrac{B.H}{3} = \dfrac{BC^2.H}{3} = \dfrac{\sqrt{3}^2.\sqrt{6}}{3.2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ cm^3.

18. Решение на задачата:



а) $ABCD$ вписан в $k(O; R = 2) \Rightarrow$

1)$AD = BC \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC} \Rightarrow \sphericalangle AOD = \sphericalangle BOC$

2)$AC = BD \Rightarrow$

$S = \dfrac{AC.BD \sin\sphericalangle(AC, BD)}{2} = \dfrac{AC^2 \sin\sphericalangle(AC, BD)}{2}$

Разглеждаме $\triangle ABD$ – вписан в $k(O; R = 2) \Rightarrow$

$\dfrac{BD}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow BD = 2.2.\sin\alpha = 4\sin\alpha$ и

$BD = AC = 4\sin\alpha.$

Разглеждаме $\triangle COD$:

$OD = OC = CO = 2 \Rightarrow \sphericalangle COD = 60^\circ.$

$\sphericalangle CAD$ – вписан в $k \Rightarrow \sphericalangle CAD = \dfrac{1}{2}\sphericalangle COD = \dfrac{1}{2}60^\circ = 30^\circ.$

Нека $AC \cap BD = M.$

От $\left.\begin{array}{l} \sphericalangle CAD = 30^\circ \\ \sphericalangle BAD = \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle AMD = 2\alpha - 60^\circ = \sphericalangle(AC, BD).$

$S = \dfrac{AC^2 \sin\sphericalangle AMD}{2} = \dfrac{(4\sin\alpha)^2.\sin(2\alpha - 60^\circ)}{2} = 8\sin^2\alpha.\sin(2\alpha - 60^\circ).$

б) $\left.\begin{array}{l} \alpha < 90^\circ\text{ (условие),} \\ \sphericalangle AMD = 2\alpha - 60^\circ \Rightarrow \alpha > 30^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \in (30^\circ, 90^\circ).$

Разглеждаме $S(\alpha) = 8\sin^2\alpha.\sin(2\alpha - 60^\circ)$ при $\alpha \in (30^\circ, 90^\circ)$

$S'(\alpha) = 16\sin\alpha\cos\alpha\sin(2\alpha - 60^\circ) + 16\sin^2\alpha\cos(2\alpha - 60^\circ) =$

$= 16\sin\alpha\,[\cos\alpha\sin(2\alpha - 60^\circ) + \sin\alpha\cos(2\alpha - 60^\circ)]$

$S'(\alpha) = 16\sin\alpha.\sin(3\alpha - 60^\circ)$

$S'(\alpha) = 0$ за $\sin\alpha = 0 \cup \sin(3\alpha - 60°) = 0$, т.е.
за $\alpha = k.180° \notin (30°, 90°) \cup 3\alpha - 60 = k.180°$, $\alpha = k.60° + 20°, k \in Z$.
$(k.60° + 20°) \in (30°, 90°)$ при $k = 1 \Rightarrow \alpha = 60° + 20° = 80°$.

$$\left.\begin{array}{ll} S'(\alpha) > 0, & \text{за } \alpha \in (30°, 80°) \\ S'(\alpha) < 0, & \text{за } \alpha \in (80°, 90°) \end{array}\right\} \Rightarrow \max S(\alpha) = S(80°), \alpha \in (30°, 90°).$$

При $\alpha = 80°$
$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC} = 2.80° - \overset{\frown}{CD} = 160° - 60° = 100°$.
$\overset{\frown}{AB}$, която не съдържа точки C и D е $\overset{\frown}{AB} = 360° - (\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DC} + \overset{\frown}{CB}) =$
$= 360° - (100° + 60° + 100°) = 100°$,
$\Rightarrow$ съществува трапец, който удовлетворява условието на задачата.

Изпитен вариант №15

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
А	В	В	Б	Г	Б	Г	А	Г	В	А	В	Б	В	Б

16. Решение на задачата:

а) От Теорема на Вариньон (или средни отсечки) получаваме, че $MNKP$ е ромб със страна на половината от диагонала на дадения правоъгълник, а $A_1B_1C_1D_1$ е правоъгълник със страни половината от страните на дадения правоъгълник. $MN = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{3\sqrt{34}}{2}$ cm.

$P_{MNKP} = 6\sqrt{34}$ cm.$S_{A_1B_1C_1D_1} = \dfrac{135}{4}$ cm^2.

б) От доказаното в а) следва, че лицата на всички правоъгълници образуват безкрайна геометрична прогресия с първи член 135 и частно $\dfrac{1}{4}$. Следователно сумата на лицата на всички правоъгълници е $S = \dfrac{135}{1 - \frac{1}{4}} = 180$ cm^2. Аналогично получаваме, че от ромба $MNKP$ се получават ромбове с два пъти по-къса страна. Следователно сумата от периметрите е сума на безкрайна геометрична прогресия с частно $0,5$ и $P = \dfrac{6\sqrt{34}}{1 - 0,5} = 12\sqrt{34}$ cm.

17. Решение на задачата:

а) Намираме производната $f'(x) = 3x^2 - 2$, определяме, че за $x \in \left(-\infty; -\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}; +\infty\right)$ функцията расте и за $x \in \left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}}; \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$ функцията намалява. Има локални екстремуми: в точката $x_1 = -\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ – локален максимум $f\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) = \dfrac{9 + 4\sqrt{6}}{9}$ и в $x_2 = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ – локален минимум $f\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) = \dfrac{9 - 4\sqrt{6}}{9}$. $f_{max} = \dfrac{9 + 4\sqrt{6}}{9}$ и $f_{min} = \dfrac{9 - 4\sqrt{6}}{9}$.

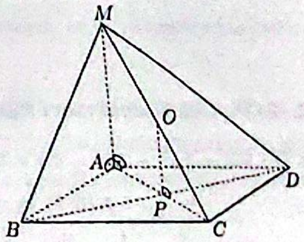
б) За да намерим допирателни успоредни на дадената права, решаваме уравнението $f'(x_0) = 3x_0^2 - 2 = 1$ и намираме абсцисите на точките $x_0 = -1$ или $x_0 = 1$. Съответните ординати са $f(-1) = 2$ и $f(1) = 0$. Допирателните са две и имат уравнения: $y = x + 3$ и $y = x - 1$.

в) Полагаме $t = 2^x$ и $.f(t) = t^3 - 2t + 1$ От а) подусловие следва, че графиката на функцията пресича оста x на три места. Още $f(0) = 1 > 0$, следователно две от пресечните точки са с положителни абсциси, по-голямата от които е 1. Имаме $2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ следователно по-големия корен е 0, а по-малкия е отрицателен.

18. Решение на задачата:

а) Ще използваме вектори: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AM} = \vec{c}$ $|\vec{a}| = |\vec{c}| = 3, |\vec{b}| = 4$,
$\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{c} = \vec{b}.\vec{c} = 0$

$\overrightarrow{AK} = \dfrac{2}{3}\vec{a} + \dfrac{1}{3}\vec{b} + \dfrac{1}{3}\vec{c}$ $\quad \overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{3}\vec{b} + \dfrac{1}{3}\vec{c}$ $\quad \cos(\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AK}) = \dfrac{\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AG}}{|\overrightarrow{AK}|.|\overrightarrow{AG}|} = \dfrac{5\sqrt{61}}{61}$.



б) Забелязваме, че центърът на описаната сфера е средата на ръба MC, защото тази точка лежи на правата, перпендикулярна на основата през пресечната точка на диагоналите, и е равно отдалечена от върховете C и M. От Питагорова теорема

$R = \dfrac{MC}{2} = \dfrac{\sqrt{MA^2 + AB^2 + BC^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{34}}{2}$ cm

и $V = \dfrac{4\pi R^3}{3} = \dfrac{17\pi\sqrt{34}}{3}$ cm^3.

Изпитен вариант №16

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Г	Б	А	В	Б	В	Г	А	Г	Б	А	Б	В	А	В

1. (Г) $\vec{p}(-1 - 2; 3 - 1) = \vec{p}(-3; 2)$.

2. (Б) Ако $p: y = k_1x + n_1$ и $q: y = k_2x + n_2$, то $p \perp q \Leftrightarrow k_1k_2 = -1$. Тъй като $\dfrac{2}{3}.\left(-\dfrac{3}{2}\right) = -1$, то $p \perp q$.

3. (А) Центърът на окръжността е пресечна точка на симетралите на хордите ѝ. Следователно координатите му са $\left(\dfrac{-3 + 5}{2}; \dfrac{0 + (-6)}{2}\right) = (1; -3)$.

4. (В) Страните на $\triangle ABC$ са 9 cm, 12 cm и 15 cm. Следователно $\triangle ABC$ е правоъгълен с лице $\dfrac{9.12}{2} = 54$ cm^2. Ако ъгълът между (ABC) и λ е φ, то лицето на ортогоналната проекция е $54\cos\varphi = 27$ cm^2. Следователно $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$ и $\varphi = 60°$.

5. (Б) $2304_{(5)} = 2.5^3 + 3.5^2 + 4 = 250 + 75 + 4 = 329$.

6. (В)

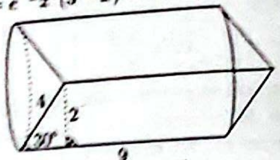
$$\begin{array}{l} 4x^5+0x^4-2x^3+0x^2+0x+4 \,\big|\, \underline{x^2-2} \\ -\underline{4x^5+0x^4-8x^3} \qquad\qquad\qquad\quad 4x^3+6x \\ \qquad\quad 6x^3+0x^2+0x \\ \qquad - \underline{6x^3+0x^2-12x} \\ \qquad\qquad\qquad 12x+4 \end{array}$$

7. (Г) $\binom{7}{3}.2^3 = \frac{7!}{3!.(7-3)!}.8 = \frac{7.6.5}{2.3}.8 = 280.$

8. (А) $S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{8}.$

9. (Г) $f'(x) = (x^3e^{-x})' = 3x^2e^{-x} + x^3(-e^{-x}) = e^{-x}x^2(3-x) \Rightarrow$ **1 инфлексна точка.**

10. (Б) $V = \pi.2^2.9 = 36\pi\ \text{cm}^3.$



12. (Б) Търсената вероятност е апостериорна. Тя е $\dfrac{\frac{10}{20}.\frac{25}{25}}{\frac{10}{20}.\frac{25}{25}+\frac{8}{20}.\frac{20}{25}+\frac{2}{20}.\frac{15}{25}} = \frac{25}{44}.$

13. (В) $EX = 2.k^2 + 3.k^2 + 4.k + 5k + 6k^2 = 11k^2 + 9k$, а $3k^2 + 2k = 1 \Rightarrow 3k^2 + 2k - 1 = 0$,
$k_{1,2} = \frac{-1 \pm 2}{3}, k_1 = -1 \notin (0;1), k_2 = \frac{1}{3} \in (0;1) \Rightarrow EX == 11.\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 9.\frac{1}{3} = 1\frac{2}{9} + 3 = 4\frac{2}{9}.$

14. (А) $EX = 1.\frac{1}{6} + 2.\frac{1}{6} + 3.\frac{1}{6} + 4.\frac{1}{6} + 5.\frac{1}{6} + 6.\frac{1}{6} = \frac{1}{6}.21 = \frac{7}{2}.$

$DX = \sum_i x_i^2p_i - (EX)^2 = \frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) - \frac{49}{4} =$

$\frac{91}{6} - \frac{49}{4} =$

$= \frac{182-147}{12} = \frac{35}{12} \approx 2,92.$

15. (В) $P = C_5^4\left(\frac{1}{2}\right)^4.\left(\frac{1}{2}\right)^1 + C_5^5\left(\frac{1}{2}\right)^5.\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{5+1}{2^5} = \frac{6}{2^5} = \frac{3}{2^4} = \frac{3}{16}.$

16. Решение на задачата:

При $n = 1$ имаме вярното числово равенство $\frac{1}{1.3} = \frac{1}{2.1+1}$.

Да предположим, че за някое естествено число k е вярно равенството

$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2k-1).(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}.$

Тогава за $n = k+1$ сборът на дробите е

$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2k-1).(2k+1)} + \frac{1}{(2(k+1)-1).(2(k+1)+1)} = \frac{k}{(2k+1)} + \frac{1}{(2k+1).(2k+3)} =$

$\frac{k(2k+3)}{(2k+1).(2k+3)} + \frac{1}{(2k+1).(2k+3)} = \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1).(2k+3)} = \frac{(2k+1).(k+1)}{(2k+1).(2(k+1)+1)} = \frac{(k+1)}{(2(k+1)+1)}$

Следователно равенството $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1).(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$ е вярно за всяко естествено число n.

17. Решение на задачата:

Дефиниционната област на функцията $f(x) = \frac{1-x}{x+2}$ е $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; \infty)$.

От $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1-x}{x+2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x\left(\frac{1}{x}-1\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = -1$ следва, че функцията има хоризонтална асимптота $y = -1$.

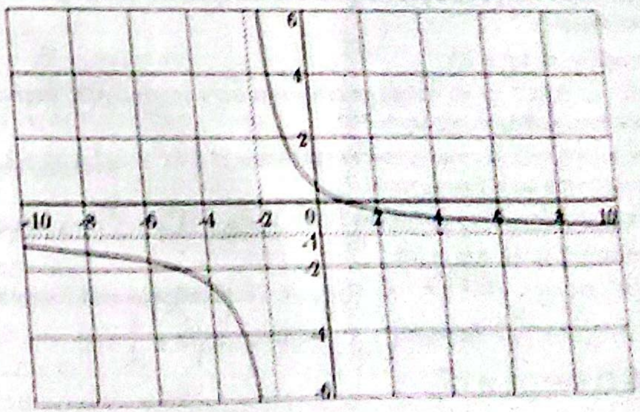
От $\lim\limits_{x\to-2} \frac{1-x}{x+2} = -\infty$ (при $x < -2$) и $\lim\limits_{x\to-2} \frac{1-x}{x+2} = +\infty$ (при $x > -2$) следва, че функцията има вертикална асимптота $x = -2$.

От $f'(x) = \left(\frac{1-x}{x+2}\right)' = \frac{-(x+2)-(1-x)}{(x+2)^2} = \frac{-3}{(x+2)^2} < 0$ следва, че функцията е намаляваща в дефиниционните си интервали.

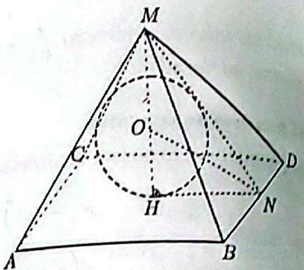
От $f''(x) = \left(\frac{1-x}{x+2}\right)'' = \left(\frac{-3}{(x+2)^2}\right)' = \frac{6}{(x+2)^3}$ следва, че при $x < -2$ получаваме, че $f''(x) < 0$ и функцията е вдлъбната, а при $x > -2$ имаме $f''(x) > 0$ и функцията е изпъкнала.

Тъй като $f(0) = \frac{1}{2}$ и $f(x) = \frac{1-x}{x+2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$, то графиката на $f(x)$ пресича координатните оси в точките с координати $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ и $(1; 0)$.

x	$-\infty$	-7	5	-2		0	1	$+\infty$
y	-1	-1.6	-2	$+\infty$	$-\infty$	0.5	0	-1
y'	$-$		$-$	$-$	$-$		$-$	$-$
y''	$-$		$-$	$-$	$+$		$+$	$+$



18. Решение на задачата:

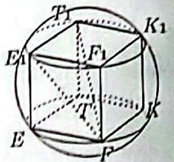


Правилната четириъгълна пирамида $ABCDM$ има основен ръб $AB = 60$ cm. Следователно разстоянието от петата на височината ѝ до основния ръб е $HN = 30$ cm.

Тъй като в $\triangle HNM \sphericalangle MHN = 90^\circ, MH = 40$ cm и $HN = 30$ cm, от Питагоровата теорема получаваме, че апотемата е $MN = 50$ cm.

Центърът O на вписаната сфера е пресечната точка на ъглополовящите равнини на двустенните ъгли на пирамидата и понеже пирамидата е правилна, то $O \in MH$ и отсечката NO е ъглополовяща в $\triangle HNM$.

От свойството на ъглополовящата в $\triangle HNM$ получаваме, че радиусът на сферата е $r = OH = \frac{3}{8}.40 = 15$ cm.



Нека вписаният в сферата куб е $EFKTE_1F_1K_1T_1$ с ръб a cm. Тогава диагоналът на стената EFF_1E_1 е $FE_1 = a\sqrt{2}$ cm, телесният диагонал е $FT_1 = a\sqrt{3}$ cm.

Тъй като $FT_1 = 2r$, то $a\sqrt{3} = 2.15 = 30$ и $a = 10\sqrt{3}$.

Следователно лицето на повърхнината на куба е $S = 6.a^2 = 6.(10\sqrt{3})^2 = 6.300 = 1800$ cm^2.

Изпитен вариант №17

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
А	А	Б	В	А	А	Б	Г	В	Б	В	Г	Г	Б	В

4. (В) Запишете правата g с декартово уравнение. За правите CH и g приложете условията за перпендикулярност.

5. (А) Използвайте, че $\widetilde{V}_n^k = n^k$.

7. (Б) Ако $DD_1 \perp (ABC)$, то D_1 е центърът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност. Намерете радиуса ѝ, чрез който се определя DD_1.

8. (Г) Намерете корените на симетричното уравнение $x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$ и от тях определете решението на неравенството.

9. (В) Приложете формулата за дисперсия $DX = \sum x_i^2 p_i - (\sum x_i p_i)^2$ след намирането на a.

10. (Б) Сечението е $\triangle ACM, AM = CM$.

11. (В) Разширете израза с $\sqrt{9x^2+5} - 3x$. При $x \to -\infty$ преобразувайте с израза

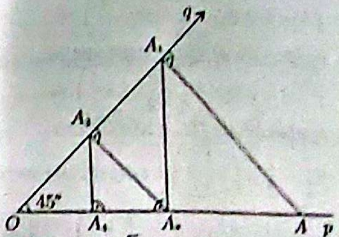
$$\sqrt{9x^2+5} - 3x = |x|\sqrt{9+\frac{5}{x^2}} - 3x = -x\sqrt{9+\frac{5}{x^2}} - 3x = -x(\sqrt{9+\frac{5}{x^2}} + 3).$$

13. (Г) Намерете дължината на PH.

14. (Б) Използвайте, че скоростта в края на втората секунда е $S'(2)$, а ускорението в края на третата секунда е $S''(3)$.

15. (В) Намерете $x_1 = 3$ чрез схемата на Хорнер и приложете метода за решаване на реципрочно уравнение от четна степен.

16. Решение на задачата:



$OA = 5\sqrt{2}$ $\quad AA_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + ... + = ?$

Разглеждаме $\triangle OAA_1$

$\sphericalangle O = 45^\circ; \sphericalangle A_1 = 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle OAA_1 = 45^\circ$

$\Rightarrow OA_1 = AA_1$

$2AA_1^2 = OA^2 \qquad 2AA_1^2 = (5\sqrt{2})^2$

$2AA_1^2 = 25.2 \Rightarrow \left.\begin{matrix} AA_1^2 = 25 \\ AA_1 > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow AA_1 = 5$ cm.

Разглеждаме $\triangle AA_1A_2$:

$\sphericalangle A_2 = 90^\circ; \sphericalangle A = 45^\circ \Rightarrow \sphericalangle A_2A_1A = 45^\circ \Rightarrow A_1A_2 = \frac{AA_1}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm.

Разглеждаме $\triangle A_1A_2A_3 : \sphericalangle A_3 = 90^\circ$

$\sphericalangle A_2A_1A_3 = 90^\circ - \sphericalangle A_2A_1A = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

$\Rightarrow \sphericalangle A_1A_2A_3 = 45^\circ \Rightarrow A_2A_3 = \frac{A_1A_2}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{5}{2}$ cm.

$$\left.\begin{matrix} AA_1 = 5 \\ A_1A_2 = \frac{5\sqrt{2}}{2} = 5.\frac{\sqrt{2}}{2} = AA_1.\frac{\sqrt{2}}{2} \\ A_2A_3 = \frac{5}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = A_2A_3.\frac{\sqrt{2}}{2} = AA_1.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ ... \\ \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{безкрайна} \div \begin{matrix} b_1 = 5 \\ q = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{и } |q| < 1 \end{matrix}$$

$\Rightarrow S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{5}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

$S = \frac{2.5}{2-\sqrt{2}}.\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{10(2+\sqrt{2})}{2} = 5(2+\sqrt{2})$.

$AA_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + ... = 5(2+\sqrt{2})$ cm.

17. Решение на задачата:

$f(x) = 2ax^3 - (4a+7)x^2 + 6ax + 4 \quad a \in R, a \neq 0$.

а) $a = -1 \Rightarrow f(x) = -2x^3 - 3x^2 - 6x + 4$,

$D_x : x \in (-\infty; +\infty)$,

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$. Няма асимптоти.

$f'(x) = -6x^2 - 6x - 6$

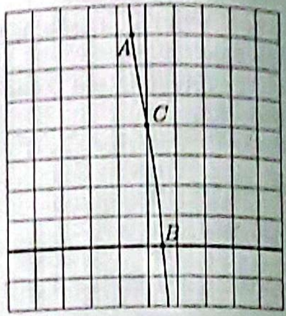
$-6x^2 - 6x - 6 > 0 / : (-6)$,

$x^2 + x + 1 < 0 \quad D = 1 - 4 < 0$.

Старшият коефициент е равен на $1 > 0 \Rightarrow -6x^2 - 6x - 6 > 0$ няма решения. Следователно $f'(x) < 0\ \forall x \Rightarrow f(x)$ е намаляваща и $f(x)$ няма локални екстремуми.

$f''(x) = -12x - 6$,

$-12x - 6 = 0$, $x = -\frac{1}{2}$.



$f''(x) > 0$ за $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$

графиката на $f(x)$ е изпъкнала.

$f''(x) < 0$ за $x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \Rightarrow$

графиката на $f(x)$ е вдлъбната.

$A\left(-\frac{1}{2}; f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ – инфлексна точка.

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 6\frac{1}{2} \Rightarrow A\left(-\frac{1}{2}; 6\frac{1}{2}\right); B\left(\frac{1}{2}; 0\right); C(0; 4)$.

б) $f'(x) = 6ax^2 - 2(4a+7)x + 6a$

$D = (4a+7)^2 - 36a^2 = (4a+7+6a)(4a+7-6a) = (10a+7)(7-2a) \geq 0$

$a = -\frac{7}{10};\ a = \frac{7}{2}$

$-$	$+$	$-$
	$-\frac{7}{10}$	$\frac{7}{2}$

$\begin{vmatrix} a \in \left[-\frac{7}{10}; \frac{7}{2}\right] \\ a \neq 0 \end{vmatrix} \Rightarrow a \in \left[-\frac{7}{10}; 0\right) \cup \left(0; \frac{7}{2}\right]$.

$x_1 + x_2 = \frac{4a+7}{3a}$; $x_1x_2 = 1$. От това следва, че $9(x_1^2 + x_2^2) + 14.1 > 0$ за всяко a от намерените интервали.

в) $a \in \left[-\frac{7}{10}; 0\right) \cup \left(0; \frac{7}{2}\right]$ е решение на неравенството е б).

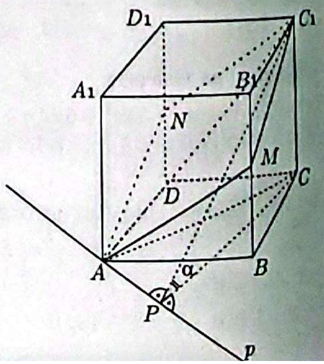
Най-голямото цяло число от интервала е 3, т.е. $a = 3$.

$F(x) = f'(x) = 6.3x^2 - 2(4.3+7)x + 6.3$,

$F(x) = 18x^2 - 38x + 18$, $F'(x) = 36x - 38 = 10$,

$36x = 48 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \Rightarrow F\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{2}{3} \Rightarrow A\left(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

18. Решение на задачата:



Нека сечението е AMC_1N.

От $(ABB_1A_1) \parallel (CDD_1A_1)$ и $(ADD_1A_1) \parallel (BCC_1B_1)$ $\Rightarrow AMC_1N$ е успоредник.

AMC_1N се проектира ортогонално върху $(ABCD) \Rightarrow S_{ABCD} = S_{AMC_1N} . \cos\alpha$ и

$S_{AMC_1N} = \frac{S_{ABCD}}{\cos\alpha}$.

S_{AMC_1N} ще бъде най-малко при $\cos\alpha$ най-голям $\Rightarrow \alpha$ е най-малък ($\alpha \in (0°; 90°)$ и $y = \cos x$ е намаляваща).

Нека $(AMC_1N) \cap (ABCD) = p$, $A \in p$.

Построяваме $C_1P \perp p \Rightarrow CP \perp p$ и $\sphericalangle C_1PC$ е линеен на двустенния $\sphericalangle ((AMC_1N), (ABCD))$ $\Rightarrow \sphericalangle C_1PC = \alpha$.

$\left.\begin{array}{l} \text{От } \triangle C_1PC : \cot\alpha = \frac{CP}{CC_1} \\ \text{От } \triangle APC(\sphericalangle P = 90°) : CP \leq AC \end{array}\right\} \Rightarrow \cot\alpha = \frac{CP}{CC_1} \leq \frac{AC}{CC_1}$ (1).

От $\triangle ACC_1 : \cot\sphericalangle C_1AC = \frac{AC}{CC_1}$ (2).

От (1) и (2) $\Rightarrow \cot\alpha \leq \cot\sphericalangle C_1AC$. Тъй като $\cot\alpha$ е намаляваща функция за $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\alpha \geq \sphericalangle C_1AC$, но тогава $\cos\alpha \leq \cos\sphericalangle C_1AC$.

Най-голямата стойност на $\cos\alpha$ е равна на $\cos\sphericalangle C_1AC = \frac{AC}{AC_1} = \frac{AB.\sqrt{2}}{AB.\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ $(\triangle ACC_1)$

$\Rightarrow S_{AMC_1N}$ е най-малко при $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Изпитен вариант №18

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
В	Г	Г	Б	А	В	Б	В	Г	А	В	А	А	А	Г

2. (Г) Разложете числителя и знаменателя на алгебричната дроб на множители.

3. (Г) Пресметнете $a = -\frac{5}{7}$ от условието, че $x = 5$ е корен на уравнението.

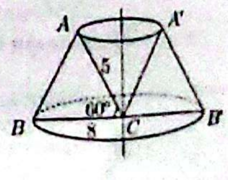
4. (Б) Нека $M_1(x; y)$ е ортогоналната проекция на $M(x_M; y_M)$ върху правата g с уравнение $ax + by + c = 0$. Тогава $MM_1 = d = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

5. (А) Намерете константата a и използвайте формулите за дисперсия $DX = \sum x_i^2 p_i^2 - (\sum x_i p_i)^2$ и за квадратично отклонение $\sigma = \sqrt{DX}$.

6. (В) Векторът $\overrightarrow{PQ}$ се изразява чрез векторите $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$ и се намира $\overrightarrow{PQ} = (a-b)\overrightarrow{AC} + \left(\frac{2}{3}b - \frac{1}{a}\right)\overrightarrow{AB}$, откъдето $\frac{2}{3}b - \frac{1}{2}a = 0$, защото $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{AC}$ са колинеарни.

7. (Б) Проектира се правоъгълният трапец в равнината $\alpha (AD \in \alpha)$ и се използва, че $B_{\text{проекция}} = B_{\text{трапеца}} . \cos\varphi$, където φ е ъгълът между равнината на трапеца и равнината α.

8. (В) Решете системата $\begin{vmatrix} \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \\ 4x + 9y + 9 = 0 \end{vmatrix}$.



10. (А) Чрез косинусова теорема се намира $AB = 7$.

Тогава $S_1 = S_{\text{пресечения конус}} + B_{\text{кръг с } r=8} + S_{\text{конус}}$.

11. (В) Ако точките G_1, G_2 и G_3 са съответно медицентровете на три от стените на правилния тетраедър, а точките D_1, D_2 и D_3 са съответно средите на страните на четвъртата стена, то $\triangle G_1G_2G_3 \sim \triangle D_1D_2D_3$ с коефициент на подобие $k_1 = \dfrac{2}{3}$ и $\triangle D_1D_2D_3 \sim \triangle ABC$ с $k_2 = \dfrac{1}{2}$.

12. (А) Разпределя се по една задача на всеки ученик и за останалите три задачи се използва формулата за комбинация с повторение $\widetilde{C}_n^k = \dfrac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$.

13. (А) Използвайте, че $y'(x) = \operatorname{tg}\alpha$.

15. (Г) Частното q се пресмята от равенството $a_n = 1\dfrac{1}{2}(a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots)$, където $a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots$ е сбор на безкрайно малка геометрична прогресия с първи член a_{n+1}.

16. Решение на задачата:
Чрез схемата на Хорнер определяме един от корените на уравнението, например -3, и получаваме реципрочното уравнение $15x^4 - 28x^3 - 230x^2 - 28x + 15 = 0$. Решението може да продължи чрез схемата на Хорнер или чрез полагането $x + \dfrac{1}{x} = t$.

Решенията на даденото уравнение са числата -3 (двукратен корен), $-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{5}$ и 5.

17. Решение на задачата:
а) От $\div a, b, c \Rightarrow b^2 = ac, \div a, b, c-64 \Rightarrow 2b = a+c-64$ и от $\div a, b-8, c-64 \Rightarrow (b-8)^2 = a(c-64)$. Трите равенства образуват система от втора степен с три неизвестни. Решението на тази система е удобно да започне от $(b-8)^2 = a(c-64) \Leftrightarrow b^2 - 16b + 64 = ac - 64a$ и от $b^2 = ac$ получаваме $b = 4(a+1)$.

Тогава от $\left|\begin{array}{l} b = 4(a+1) \\ 8(a+1) = a + c - 64 \\ 16(a+1)^2 = ac \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} b = 4(a+1) \\ c = 7a + 72 \\ 16(a+1)^2 = a(7a+72) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a = 4 \\ b = 20 \\ c = 100 \end{array}\right.$ или $\left|\begin{array}{l} a = \dfrac{4}{9} \\ b = \dfrac{52}{9} \\ c = \dfrac{676}{9} \end{array}\right.$.

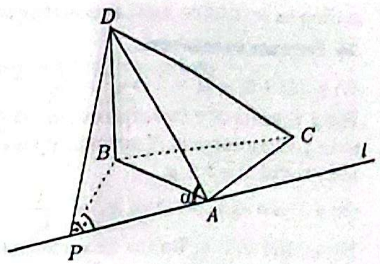
Определяме $q = 5$ или $q = 13$. $|13| > 6$ и $q = 13$ не е решение. Следователно коефициентите са $a = 4, b = 20$ и $c = 100$ и $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{5}{4}x^2 + x - \dfrac{1}{2}$.

б) От $f'(x) = x^2 - \dfrac{5}{2}x + 1$ и $f'(x) = 0$ намираме $x_1 = \dfrac{1}{2}$ и $x_2 = 2$.

Тогава за $x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$ $f(x)$ е растяща и за $x \in \left(\dfrac{1}{2}; 2\right)$ – намаляваща, откъдето $f_{min}(2) = -\dfrac{5}{6}$ и $f_{max}\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{13}{48}$. Следователно $f(x)$ достига локален минимум в точка $\left(2; -\dfrac{5}{6}\right)$ и локален максимум в точка $\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{13}{48}\right)$.

в) За определяне на абсолютните екстремуми в интервала $[0;3]$ пресмятаме $f(0) = -\dfrac{1}{2}$ и $f(3) = -\dfrac{5}{6}$ и ги сравняваме със стойностите на $f(x)$ при локалните екстремуми, откъдето намираме $f_{max}(x) = f(3) = \dfrac{1}{4}$ за $x \in [0;3]$ и $f_{min}(x) = f(2) = -\dfrac{5}{6}$ за $x \in [0;3]$.

18. Решение на задачата:
В равнината на $\triangle ABC$ построяваме права $l \left\{ \begin{array}{l} \ni A \\ \parallel BC \end{array} \right.$ и $BP \perp l$.



Тогава $\sphericalangle (AD; BC) = \sphericalangle (AD; l) = \sphericalangle PAD = \alpha$ и $DP \perp l$ (Защо?), откъдето $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{DP}{PA}$.

Означаваме $AB = BC = AC = BD = x$ и определяме $AP = \dfrac{x}{2}$, $BP = h_{BC} = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$ и $DP = \sqrt{DB^2 + BP^2} = \sqrt{x^2 + \dfrac{3}{4}x^2} = \dfrac{x\sqrt{7}}{2}$. Следователно $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{x\sqrt{7}}{2} : \dfrac{x}{2} = \sqrt{7}$.

Изпитен вариант №19

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
А	Г	Б	Б	А	Г	В	В	Г	А	Г	В	Г	В	Б

1. (А) Четните цифри са 0, 2, 4, 6, 8. На първо място не може да бъде нула.

3. (Б) Прилага се формулата за математическо очакване $EX = \sum X_i p_i$ след намирането на a.

5. (А) Използвайте $S''(t)$.

7. (В) Намерете $x_1 = 2$ чрез схемата на Хорнер и приложете метода за решаване на симетрични уравнения от четна степен.

8. (В) Въвежда се правоъгълна координатна система с оси AB и CD и единична отсечка $r = \dfrac{AB}{2}$. Съставят се уравненията на правите AM и CN. Намира се пресечната им точка, за която се доказва, че лежи на окръжността.

9. (Г) Преобразува се изразът $\dfrac{\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)}{2\cos x - 1} = \dfrac{2\sin\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right)}{2\left(\cos x - \dfrac{1}{2}\right)}$

до израза $\dfrac{-\cos\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right)}{2\sin\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right)}$.

10. (А) Използвайте, че $S_{\text{проекция}} = S_{\text{многоъгълник}} \cdot \cos\varphi$, където φ е ъгълът между равнината на многоъгълника и равнината α.

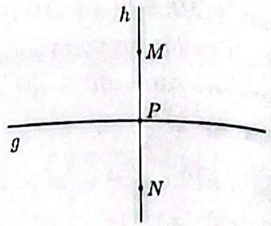
11. (Г) Уравнението е симетрично (частен случай на реципрочно) с корени $\sqrt{2}$ и $\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{5}{6}$ и $-\dfrac{6}{5}$.

12. (В) Ротационното тяло е комбинация от два конуса с обща основа.

13. (Г) Лицето на повърхнината на пирамидата е удвоеният сбор от лицата на равнобедрен и равностранен триъгълник.

15. (Б) Частното q се намира от равенството $\frac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}+\dots}=\frac{4}{7}$, където $a_{n+1}+a_{n+2}+\dots$ е сбор на безкрайно малка геометрична прогресия с първи член a_{n+1}.

16. Решение на задачата:



От $g: 2x+3y-21=0 \Rightarrow y=-\frac{2}{3}+7 \Rightarrow k_g=-\frac{2}{3}$.

Нека точката N е симетрична на M относно правата g. Следователно N лежи на права h, минаваща през точка M и $h \perp g$.

От $h \perp g \Rightarrow k_h.k_g=-1 \Rightarrow k_h=-\frac{1}{k_g}=\frac{3}{2}$.

Точка $M(1;2) \in h$. Тогава за уравнението на права $h: y=y_0+k_h(x-x_0)$ получаваме

$h: y=2+\frac{3}{2}(x-1) \Rightarrow h: 3x-2y+1=0$.

Нека h пресича g в точка P. Координатите на точка P са решение на системата

$\left|\begin{array}{l}2x+3y-21=0\\3x-2y+1=0\end{array}\right. \Rightarrow P(3;5)$.

За да бъде N симетрична на M относно g, трябва P да е среда на отсечката MN. Координатите на точка N определяме от равенствата

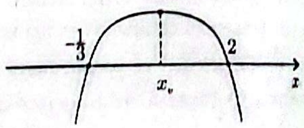
$\frac{x_M+x_N}{2}=x_P \Rightarrow \frac{1+x_N}{2}=3 \Rightarrow x_N=5$.

$\frac{y_M+y_N}{2}=y_P \Rightarrow \frac{2+y_N}{2}=5 \Rightarrow y_N=8$. Получихме $N(5;8)$.

17. Решение на задачата:

$f(x)=\sqrt{-3x^2+5x+2}$

а) $D: -3x^2+5x+2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{3}\right)(x-2) \leq 0$,



$x_1=-\frac{1}{3}$ и $x_2=2$.

$D: x \in \left[-\frac{1}{3};2\right]$.

За $x \in D$, $f(x)=\sqrt{-3x^2+5x+2} \geq 0 \Rightarrow f_{min}=0$.

Най-голямата стойност на $f(x)$ се достига във върха на параболата $x_v=-\frac{b}{2a}=\frac{5}{6}$.

$f_{max}=f\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{7\sqrt{3}}{6} \Rightarrow f(x) \in \left[0;\frac{7\sqrt{3}}{6}\right]$.

б) $f(x)=\sqrt{-3x^2+5x+2}=(-3x^2+5x+2)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x)=\frac{1}{2}(-3x^2+5x+2)^{-\frac{1}{2}}(-6x+5)=\frac{5-6x}{2\sqrt{-3x^2+5x+2}}$.

$f''(x)=-\frac{1}{4}(-3x^2+5x+2)^{-\frac{3}{2}}(-6x+5)^2+\frac{1}{2}(-3x^2+5x+2)^{-\frac{1}{2}}.(-6)=$

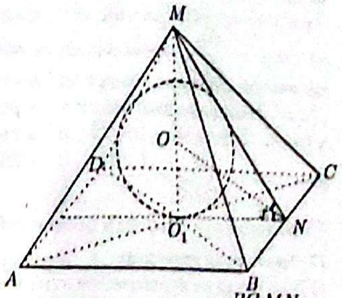
$=\frac{49}{4(3x^2-5x-2)\sqrt{-3x^2+5x+2}}$.

в) $f'(x)=\frac{5-6x}{2\sqrt{-3x^2+5x+2}}=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{6}$.

x	$-\frac{1}{3}$			$\frac{5}{6}$			2
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\underset{6}{\overset{max}{7\sqrt{3}}}$		$\searrow$	0
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$

Функцията има локален максимум в точката $\left(\frac{5}{6};\frac{7\sqrt{3}}{6}\right)$.

18. Решение на задачата:



Нека N е среда на BC и O_1 среда на AC. Тогава $MN \perp BC$ и $O_1N \perp BC$.

Следователно $\sphericalangle((ABCD),(BCM))=\sphericalangle O_1NM$.

Ако O е центърът на сферата, то NO е ъглополовяща на $\sphericalangle O_1NM$. Нека $\sphericalangle O_1NO=\sphericalangle ONM=x$.

От ΔO_1NO, $\frac{O_1N}{O_1O}=\operatorname{cotg} x \Rightarrow O_1N=r.\operatorname{cotg} x \Rightarrow$

$BC=AB=2r.\operatorname{cotg} x$.

От ΔO_1NM, $\frac{O_1N}{MN}=\cos 2x \Rightarrow$

$MN=\frac{O_1N}{\cos 2x}=\frac{r\operatorname{cotg} x}{\cos 2x}$.

За лицето на околната повърхнина на пирамидата $ABCDM$ получаваме $S=4\frac{BC.MN}{2}=\frac{4r^2.\operatorname{cotg}^2 x}{\cos 2x}$.

Разглеждаме функцията $f(x)=\frac{\operatorname{cotg}^2 x}{\cos 2x}=\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x(1-2\sin^2 x)}$ в интервал $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$.

Полагаме $\sin^2 x=u$. Нека $\varphi(u)=\frac{1-u}{u(1-2u)}=\frac{u-1}{2u^2-u}$, $u \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$.

$\varphi'(u)=\frac{2u^2-u-(u-1)(4u-1)}{(2u^2-u)^2}=\frac{-2u^2+4u-1}{(2u^2-u)^2}$.

$\varphi'(u)=0 \Leftrightarrow -2u^2+4u-1=0$, откъдето $u_1=\frac{2-\sqrt{2}}{2} \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$ и $u_2=\frac{2+\sqrt{2}}{2} \notin \left(0;\frac{1}{2}\right)$.

u	0		$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$		$\frac{1}{2}$
$\varphi(u)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	
$\varphi'(u)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$

$\varphi_{min}=\varphi\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)=3+2\sqrt{2}$.

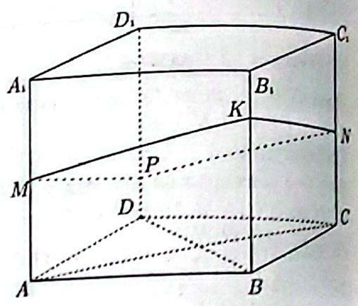
Функцията $\sin^2 x$ е растяща в интервала $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$.

Следователно $S_{min}(x)=4r^2\varphi_{min}(u)=4r^2(3+2\sqrt{2})$.

Изпитен вариант №20

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
В	Г	А	Г	А	Б	В	Б	А	В	А	Б	В	А	Г

16. Решение на задачата:



а) За да построим сечението, използваме теорема, че успоредните равнини дават успоредни пресечници и получаваме, че сечението $PNKM$ е ромб. За намиране на ъгъла ще използваме теоремата, че $\cos\alpha = \dfrac{S_{пр}}{S_{сеч}}$. Ортогоналната проекция на сечението е основата на призмата, а тя има лице $25\,cm^2$. Намираме диагоналите на ромба $5\sqrt{2}$ cm и $\sqrt{66}$ cm. Лицето му е $10\sqrt{33}\,cm^2$, а търсеният ъгъл има $\cos\alpha = \dfrac{25}{10\sqrt{33}} = \dfrac{5\sqrt{33}}{66}$.

б) Двете тела са еднакви и обемите им са равни на $\dfrac{V}{2} = 100\,cm^2$.

17. Решение на задачата:

а) Решенията на неравенството са $x \in (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$. Отг. $x = 1$

б) ДС са $x \geq -3,5$. Решаваме уравнението $9^{\sqrt{2x+7}} = 3^{x+4}$

$\Leftrightarrow 8x + 28 = x^2 + 8x + 16 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 2\sqrt{3}$ – и двете числа са от ДС и са корени.

Решаваме и уравнението $x^2 - 16 = 0$ и получаваме $x_{1,2} = \pm 4$, но $x_2 = -4 \notin$ ДС и не е корен.

Произведението на корените е $(2\sqrt{3})(-2\sqrt{3}) = -48$.

в) Полагаме $\cos x = y \in [-1; 1]$ и получаваме квадратното уравнение $3ky^2 + 3y - 1 = 0$.

Търсим за кои стойности на параметъра k това уравнение има поне един корен от интервала $[-1; 1]$.

Нека $f(y) = 3ky^2 + 3y - 1$ и разглеждаме случаите:

1) $k = 0$, тогава уравнението е линейно и коренът му е $y = \dfrac{1}{3} \in [-1; 1]$.

2) Нека уравнението има корен -1, тогава $3k - 4 = 0 \Rightarrow k = \dfrac{4}{3}$, а ако има корен 1, тогава $3k + 2 = 0 \Rightarrow k = -\dfrac{2}{3}$.

3) Нека има точно един корен на уравнението в интервала $[-1; 1]$. От теоремите за разположение на корени на квадратно уравнение получаваме, че $f(-1).f(1) > 0$, $(3k - 4)(3k + 2) < 0 \Rightarrow k \in \left(-\dfrac{2}{3}; \dfrac{4}{3}\right)$.

4) Нека двата корена на уравнението са в интервала $[-1; 1]$. Отново прилагаме теоремите за разположение на корени: $\begin{cases} D > 0 \\ a.f(-1) > 0 \\ a.f(1) > 0 \\ -1 < \dfrac{b}{2a} < 1 \end{cases}$ и получаваме системата $\begin{cases} 9 + 12k > 0 \\ 3k(3k - 4) > 0 \\ 3k(3k + 2) > 0 \\ -1 < -\dfrac{1}{2k} < 1 \end{cases}$.

Решението и е $k \in \left(\dfrac{4}{3}; +\infty\right)$.

Като обобщим получените резултати, отговорът е $k \in \left[-\dfrac{2}{3}; +\infty\right]$.

18. Решение на задачата:

Дефиниционната област на функцията е: $1 \leq x \leq 2\sqrt{5}$. Производната на функцията е $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} - \dfrac{x}{\sqrt{20 - x^2}} = \dfrac{\sqrt{20 - x^2} - 2x\sqrt{x-1}}{2\sqrt{(x-1)(20-x^2)}}$. Решаваме уравнението $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$ $-4x^3 + 3x^2 + 20 = 0 \Leftrightarrow (2 - x)(4x^2 - 5x + 10) = 0$. Следователно функцията расте за $1 \leq x \leq 2$ и намалява за $2 \leq x \leq 2\sqrt{5}$. Най -голямата стойност е $f(2) = 1 + \sqrt{20 - 4} = 5$. Най-малката стойност намираме, като сравним $f(1) = 0 + \sqrt{19} > f(2\sqrt{5}) = \sqrt{2\sqrt{5} - 1} + 0$.

За да намерим броя на корените на уравнението, сравняваме $f(2\sqrt{5}) = \sqrt{2\sqrt{5} - 1} < 3 < \sqrt{19} = f(1)$. Следователно функцията $f(x)$ достига стойност 3 само за една стойност на променливата.

Изпитен вариант №21

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Б	В	А	Б	Г	Г	Г	А	Г	Б	А	Б	В	В	А

1. (Б) $\vec{m}.\vec{n} = (-\vec{a} + 3\vec{b}).(2\vec{a} - 3\vec{b}) = -2\vec{a}^2 + 3\vec{a}\vec{b} + 4\vec{a}\vec{b} - 6\vec{b}^2$

$\vec{a}.\vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{m}.\vec{n} = -2 - 6 = -8, \quad |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$

$|\vec{m}| = \sqrt{\vec{m}^2} = \sqrt{(-\vec{a} + 2\vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 - 4\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2} = \sqrt{5}$

$|\vec{n}| = \sqrt{\vec{n}^2} = \sqrt{(2\vec{a} - 3\vec{b})^2} = \sqrt{4\vec{a}^2 - 12\vec{a}\vec{b} + 9\vec{b}^2} = \sqrt{13}$

$\Rightarrow \cos\sphericalangle(\vec{m}, \vec{n}) = \dfrac{\vec{m}.\vec{n}}{|\vec{m}|.|\vec{n}|} = -\dfrac{8}{\sqrt{5}\sqrt{13}} = -\dfrac{8\sqrt{65}}{65}$.

2. (В) $PQ = \sqrt{(3-1)^2 + (5+3)^2} = \sqrt{2^2 + 8^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$

$S_{PQMN} = \dfrac{PQ^2}{2} = \dfrac{68}{2} = 34$.

3. (А) $\dfrac{3}{6} = \dfrac{5}{10} \neq -\dfrac{4}{7}$.

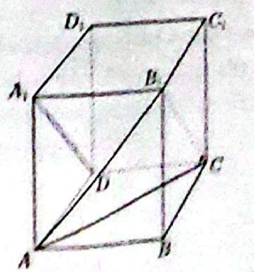
4. (Б) Постройте $B_1C \parallel A_1D$

$\Rightarrow \sphericalangle(AC; DA_1) = \sphericalangle(AC; B_1C) = \sphericalangle ACB_1$

$\triangle ACB_1$ – равностранен

(AC, B_1C и AB_1 диагонали, еднакви квадрати)

$\Rightarrow \sphericalangle ACB_1 = 60^\circ$.



5. (Г) $p: \pm1; \pm2; \pm4; \pm8$ $q: \pm1; \pm2 \Rightarrow \frac{p}{q}: \underbrace{\pm1; \pm\frac{1}{2}; \pm2; \pm4; \pm8.}_{\text{може да са корени}}$

6. (Г) $\lim\limits_{x\to6}\frac{x^2-36}{3-\sqrt{x+3}} = \lim\limits_{x\to6}\frac{(x-6)(x+6)(3+\sqrt{x+3})}{(3-\sqrt{x+3})(3+\sqrt{x+3})} = \lim\limits_{x\to6}\frac{(x-6)(x+6)(3+\sqrt{x+3})}{9-x-3} =$

$= \lim\limits_{x\to6}\frac{\cancel{(x-6)}(x+6)(3+\sqrt{x+3})}{-\cancel{(x-6)}} = \lim\limits_{x\to6}\left[-(x+6)(3+\sqrt{x+3})\right] = -(6+6)(3+\sqrt{9}) = -12.6 =$
$= -72.$

7. (Г) $f'(x) = 3\sin^2 5x.(\sin 5x)'.(5x)'$ $f'(x) = 15\sin^2 5x.\cos 5x.$

8. (А) $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sin 2(x-5)}{x-5} = \lim\limits_{x\to5} 2.\frac{\sin 2(x-5)}{2.(x-5)} = 2 \Rightarrow 3m+5=2 \Rightarrow 3m=-3 \Rightarrow m=1.$

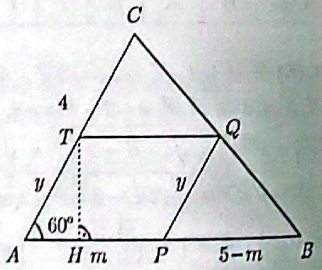
9. (Г) $f'(x) = 3x^2-12x+m$; при $f'(3)=0$; $3.3^2-12.3+m=0 \Rightarrow 27-36+m=0 \Rightarrow m=9.$

10. (Б) $\lim\limits_{x\to\pm2} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm2}\frac{5x}{(2-x)(2+x)} = \infty.$

11. (А) $\widetilde{C_4^7} = C_{4+7-1}^7 = C_{10}^7 = C_{10}^{10-7} = C_{10}^3 = \frac{10.9.8}{1.2.3} = 120.$

12. (Б) $x^2+4x+4-4+y^2-10y+25-25+13=0$
$(x^2+2)^2+(y-5)^2-16=0$
$(x^2+2)^2+(y-5)^2=4^2 \Rightarrow R=4.$

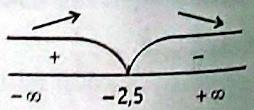
13. (В) $AB = 5$ cm $\Rightarrow PB = 5-m$;
Означаваме $AT=y$.
$\triangle AHT$:
$\sin 60° = \frac{TH}{AT}; \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{TH}{y} \Rightarrow TH = \frac{\sqrt{3}}{2}y.$
$\triangle ABC \sim \triangle PBQ$
$\frac{AB}{PB} = \frac{AC}{PQ} \Rightarrow \frac{5}{5-m} = \frac{4}{y} \Rightarrow y = \frac{20-4m}{5}$



$\Rightarrow TH = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{20-4m}{5}\right)$

$S_{APQT} = AP.TH = m.\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{20-4m}{10}\right) =$

$= \frac{\sqrt{3}}{20}(20m-4m^2).$

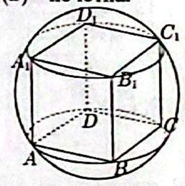


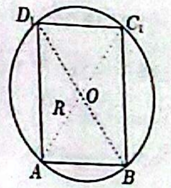
$f'(m) = 20-8m \Rightarrow m = 2,5$, т.е. за $m = 2,55$ S е max.

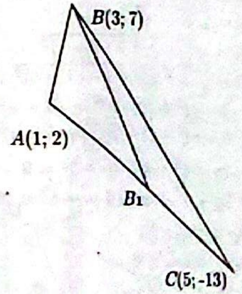
14. (В) А) $f(-x) = 5(-x)^2 = 5x^2 = f(x) \Rightarrow f(x)$ – четна.
Б) $f(-x) = (-x).\cotg(-x) = -x(-\cotg x) = x\cotg x = f(x) \Rightarrow f(x)$ – четна.

В) $f(-x) = -x\cos 2(-x) = -x\cos 2x = -f(x) \Rightarrow f(x)$ – нечетна.

15. (А)
Радиусът R на кълбото е и радиус на описаната около ABC_1D_1 окръжност.
$AC_1 = a\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\sqrt{3} = 6 \Rightarrow R=3,$
$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{\cancel{3}}\pi\cancelto{9}{27} = 36\pi.$

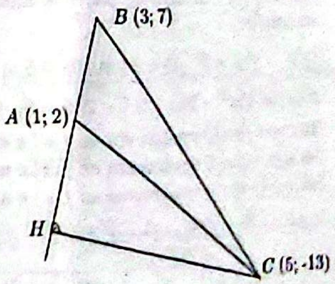






16. Решение:
а) $B_1\left(\frac{1+5}{2}; \frac{2-13}{2}\right)$, $B_1\left(3; \frac{-11}{2}\right)$ и $B(3;7)$.
Тъй като имат една и съща първа координата ⇒
$BB_1: x=3.$

б) $A(1;2), B(3;7)$ $AB: \frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A}.$
$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-2}{7-2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{5} \Leftrightarrow 5x-5 = 2y-4 \Leftrightarrow AB: 5x-2y-1=0.$
$B(3;7), C(5;-13)$ $\frac{x-3}{5-3} = \frac{y-7}{-13-7} \Leftrightarrow \frac{x-3}{2} = \frac{y-7}{-20},$
$-20x+60 = 2y-14 \Leftrightarrow 20x+2y-74=0 \Leftrightarrow BC: 10x+y-37=0.$
$AC: A(1;2), c(5;-13)$ $\frac{x-1}{5-1} = \frac{y-2}{-13-2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-15}$
$\Leftrightarrow -15x+15 = 4y-8 \Leftrightarrow AC: 15x+4y-23=0.$



в) $AB: 5x-2y-1=0$, за $a=5$ и $b=-2$
и получаваме $k = -\frac{a}{b}$, $k_{AB} = \frac{5}{2}$,
$k_{AB}.k_{CH} = -1 \Rightarrow k_{CH} = -\frac{2}{5}.$
$CH: y = k_{CH}x+n$, точка $C \in CH$
$\Rightarrow -13 = -\frac{2}{5}.5+n \Rightarrow n=-11 \Rightarrow CH: y = -\frac{2}{5}x-11,$
$CH: 2x+5y+55=0.$

г) $AB: 5x-2y-1=0.$

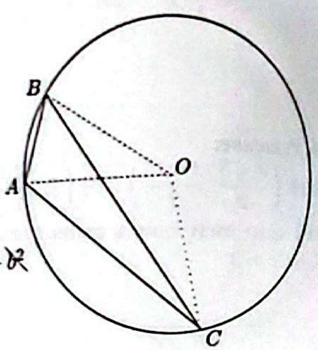
точка $C(5;-13)$, $|CH| = \left|\frac{5.5-2.(-13)-1}{\sqrt{5^2+(-2)^2}}\right|$, $|CH| = \frac{50}{29}$, $CH = \frac{50\sqrt{29}}{29}$,

$|AB| = \sqrt{(3-1)^2+(7-2)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$.

$S_{ABC} = \frac{AB.CH}{2}$, $S = \cancel{\sqrt{29}}.\overset{25}{\cancel{50}}.\frac{\cancel{\sqrt{29}}}{\cancel{29}}.\frac{1}{\cancel{2}}$.

$S_{\triangle ABC} = 25$ кв. м. ед.

д) $OA = OB = OC = R$. точка $O(a;b)$



$|OA| = \sqrt{(1-a)^2+(2-b)^2}$.

$|OB| = \sqrt{(3-a)^2+(7-b)^2}$.

$|OC| = \sqrt{(5-a)^2+(-13-b)^2}$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} (1-a)^2+(2-b)^2 = (3-a)^2+(7-b)^2 \\ (3-a)^2+(7-b)^2 = (5-a)^2+(-13-b)^2 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} 1-2a+\cancel{a^2}+4-4b+\cancel{b^2} = 9-6a+\cancel{a^2}+49-14b+\cancel{b^2} \\ 9-6a+\cancel{a^2}+49-14b+\cancel{b^2} = 25-10a+\cancel{a^2}+169+26b+\cancel{b^2} \end{array} \right.$$

$$- \left| \begin{array}{l} 4a+10b = 53 \\ 4a-40b = 136 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} 50b = -83 \\ 4a+10b = 53 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} b = -\frac{83}{50} \\ a = \frac{87}{5} \end{array} \right.$$

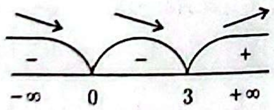
$\Rightarrow$ точка $O\left(\frac{87}{5};-\frac{83}{50}\right)$.

17. $f(x) = x^4-4x^3-5$, $\lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x) = +\infty$,

$f'(x) = 4x^3-12x^2$, $4x(x-3) = 0$, $x_{1,2} = 0$, $x_3 = 3$.

Ако $x \in (-\infty;3)$, то $f(x)$ намалява.

Ако $x \in (3;+\infty)$ то $f(x)$ расте $\Rightarrow$ при $x = 3$ $f(x)$ има минимум.



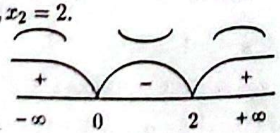
$f(3) = 3^4-4.3^3-5 = 81-108-5 = -32 \Rightarrow f_{min} = f(3) = -32$

$f''(x) = 12x^2-24x$. $12x^2-24x = 0$, $12x(x-2) = 0$, $x_1 = 0, x_2 = 2$.

За $x \in (-\infty;0)$ графиката на $f(x)$ е изпъкнала.

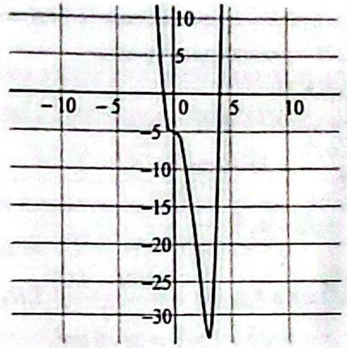
За $x \in (-\infty;3)$ графиката на $f(x)$ е вдлъбната.

За $x \in (-\infty;3)$ графиката на $f(x)$ е изпъкнала.



$f(0) = -5$, $f(2) = 2^4-4.2^3-5$, $f(2) = -21$.

x	$-\infty$ -1 0 2 3 $+\infty$
$f'(x)$	$-$ $-$ $-$ $-$ 0 $-$ $-$ 0 $+$ $+$
$f''(x)$	$+$ $+$ $+$ 0 $-$ $-$ 0 $+$ $+$ $+$
$f(x)$	$+\infty \searrow 0 \searrow -5 \searrow -21 \searrow -32 \nearrow +\infty$



18. Решение на задачата: Нека равнината е α. $PQ \parallel D_1A$. и $C_1B \parallel D_1A \Rightarrow PQ \parallel C_1B$.

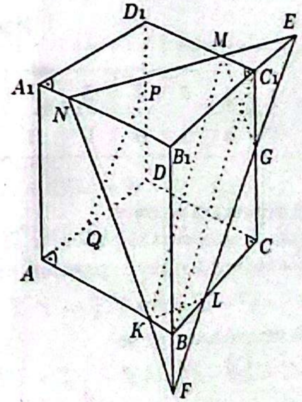
Тъй като $PQ \parallel \alpha$, то $C_1B \in \alpha$ или $C_1B \parallel \alpha$.

$C_1B \notin \alpha$, защото $\alpha \cap (A_1B_1C_1) = MN$ и $C_1 \notin MN \Rightarrow C_1B \parallel \alpha$.

Това означава, че пресечницата на α и (BB_1C_1C) е успоредна на C_1B.

Нека $MN \cap B_1C_1 = E$ (т. $E \in \alpha$) $\Rightarrow$ пресечницата на α и (BB_1C_1C) е права, минаваща през т. E и успоредна C_1B.

Нека тази права пресича C_1C, BC и B_1B съответно в точките G, L и F. Тогава пресечницата на α и (ABB_1A_1) ще бъде NF. Но $FN \cap AB = K \Rightarrow$ сечението на α с куба е $MGLKN$.



$MC_1 = 2$ cm, $NB_1 = 6$ cm.

$\triangle MC_1E \sim \triangle NB_1E$

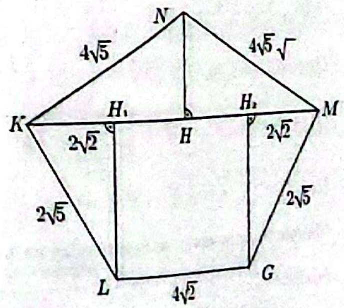
$\frac{MC_1}{NB_1} = \frac{EC_1}{EB_1}$, $\frac{1}{3} = \frac{EC_1}{EC_1+8} \Rightarrow EC_1 = 4$ cm.

$EF \parallel C_1B \Rightarrow \sphericalangle FEB_1 = \sphericalangle BC_1B_1 = 45^\circ \Rightarrow$

$C_1G = 4$ cm, $GL = 4\sqrt{2}$ cm и $BL = BF = 4$ cm.

$MG = \sqrt{MC_1^2+C_1G^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ cm.

$\triangle BKF \sim \triangle B_1NF \Rightarrow$



$\Rightarrow \frac{BF}{FB_1} = \frac{BK}{B_1N}$, $\frac{4}{12} = \frac{BK}{6} \Rightarrow BK = 2$ cm $\Rightarrow KL = 2\sqrt{5}$ cm.

Тъй като $NB_1 = 6$ cm, $MC_1 = 2$ cm и $D_1A_1 = 8$ cm, $MN = \sqrt{8^2+4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ cm и

$KB = 2$ cm, $NB_1 = 6$ cm, $AA_1 = 8$ cm $\Rightarrow NK = \sqrt{8^2+4^2} = 4\sqrt{5}$.

За петоъгълника $MGLKN$ имаме $MG = KL = 2\sqrt{5}$ cm, $NK = MN = 4\sqrt{5}$ cm и $GL = 4\sqrt{2}$ cm.

$MC_1 \parallel KB$ и $MC_1 = KB \Rightarrow MC_1BK$ – правоъгълник $\Rightarrow MK = C_1B = 8\sqrt{2}$ cm.
$GL \parallel C_1B, MK \parallel GL \Rightarrow KLGM$ – равнобедрен трапец.
Построяваме $NH \perp KM$ в $\triangle NKM$
$KH = HM = 4\sqrt{2}$ cm и $NH = \sqrt{KN^2 - KH^2} = \sqrt{80-32} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ cm.
$\Rightarrow S_{NKM} = \dfrac{KM.NH}{2} = \dfrac{8\sqrt{2}.4\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{6}$ cm^2.
LH_1 и GH_2 – височини в $KLGM$
$KH_1 = H_2M = \dfrac{KM - LG}{2} = \dfrac{8\sqrt{2} - 4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ cm.
$\Rightarrow LH_1 = \sqrt{KL^2 - KH_1^2} = 2\sqrt{3}$ cm и $S_{KLGM} = \dfrac{(KM + LG)}{2}.LH_1 = \dfrac{12\sqrt{2}.2\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{6}$ cm^2
$\Rightarrow S_{NKLGM} = S_{NKM} + S_{KLGM} = 16\sqrt{6} + 12\sqrt{6} = 28\sqrt{6}$ cm^2.

Изпитен вариант №22

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Г	В	Б	В	Г	В	Г	А	Б	Г	Б	А	Г	Г	В

16. Решение на задачата:
Нека p е дължината на ръбовете. Полагаме $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{y} = \overrightarrow{AC}$ и $\vec{z} = \overrightarrow{AD}$.
Понеже тетраедърът е правилен, имаме, че
$\vec{x}^2 = \vec{y}^2 = \vec{z}^2 = p^2$ и $\vec{x}.\vec{y} = \vec{x}.\vec{z} = \vec{y}.\vec{z} = \dfrac{1}{2}p^2$.
От условието следва, че
$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = -\vec{x} + \dfrac{1}{3}\vec{y} + \dfrac{1}{3}\vec{z}$,
$\overrightarrow{AN} = \dfrac{1}{2}\vec{x} + \dfrac{1}{2}\vec{y}$ и $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{2}\vec{x} + \dfrac{1}{2}\vec{y} - \vec{z}$
Пресмятаме, че $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{DN} = \left(-\vec{x} + \dfrac{1}{3}\vec{y} + \dfrac{1}{3}\vec{z}\right).\left(\dfrac{1}{2}\vec{x} + \dfrac{1}{2}\vec{y} - \vec{z}\right) = -\dfrac{1}{3}p^2$

$$|\overrightarrow{BM}|^2 = \left(-\vec{x} + \frac{1}{3}\vec{y} + \frac{1}{3}\vec{z}\right)^2 = \frac{2}{3}p^2$$

$$|\overrightarrow{DN}|^2 = \left(\frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y} - \vec{z}\right)^2 = \frac{3}{4}p^2$$

Оттук се пресмята, че косинусът на ъгъла θ между векторите $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{DN}$ е

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{DN}}{|\overrightarrow{BM}|.|\overrightarrow{DN}|} = -\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Отговор: $-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съответстващи решението:

Избор на векторна база в пространството, така че за всеки два вектора от тази база да е известно тяхното скаларно произведение (например базата $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{y} = \overrightarrow{AC}$ и $\vec{z} = \overrightarrow{AD}$).	5 точки
Правилно изразяване на векторите $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{DN}$ чрез избрания базис.	5 точки
Правилно пресмятане на $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{DN}$, $\lvert\overrightarrow{BM}\rvert^2$, $\lvert\overrightarrow{DN}\rvert^2$ и $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{DN}}{\lvert\overrightarrow{BM}\rvert.\lvert\overrightarrow{DN}\rvert} = -\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.	5 точки

17. Решение на задачата:
а) От условието следва, че $P(-1) = P(1) = 0$. Тогава $a + b = 7$ и $b - a = 3$, откъдето $a = 2$ и $b = 5$.
б) Използване схемата на Хорнер и получаване, че $P(x) = (2x+5)(x-1)(x+1)$. За да се намерят нулите на $Q(x)$ се решава уравнението $10x^3 + 39x^2 + 39x + 10 = 0$, което е реципрочно от нечетна степен $\Rightarrow$ има корен $x = -1$ и тогава
$Q(x) = (x+1)(10x^2 + 29x + 10)$. Тогава $Q(x) = (x+1)(2x+5)(5x+2)$.
в) Имаме $f(x) = \dfrac{(2x+5)(x-1)(x+1)}{(x+1)(2x+5)(5x+2)}$, чието дефиниционно множество е
$x \in R \setminus \left\{-1; -\dfrac{2}{5}; -\dfrac{5}{2}\right\}$.
Получаваме $f(x) = \dfrac{x-1}{5x+2}$, за производната имаме

$$f'(x) = \frac{(x-1)'(5x+2) - (x-1)(5x+2)'}{(5x+2)^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{7}{(5x+2)^2}.$$

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съответстващи решението:

а) За получаване на неравенствата	2 точки
За получаване на коефициентите	2 точки
б) За довършване разлагането на $P(x)$	2 точки
За извода, че -1 е нула на $Q(x)$, получаване на $Q(x) = (x+1)(10x^2 + 29x + 10)$ и довършване разлагането на $Q(x)$	5 точки
в) За ДМ и получаване на $f(x) = \dfrac{x-1}{5x+2}$	1 точка
За правилно получаване на производната	3 точки

18. Решение на задачата:

а) Четириъгълникът $MPCQ$ е правоъгълник.

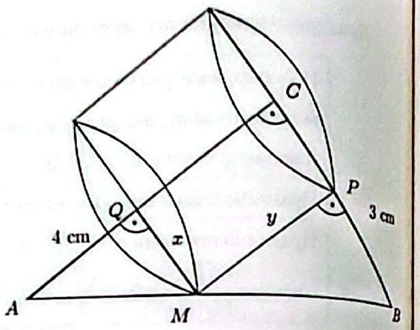
Означаваме $QC = MP = y$.

$V = Bh = \pi r^2 h = \pi x^2 y$

$PC = MQ = x$, следователно $BP = 3 - x$

$QC = MP = y$, следователно $AQ = 4 - y$

$\triangle AMQ \sim \triangle MBP$, следователно $\dfrac{AQ}{MP} = \dfrac{MQ}{BP}$



$$\frac{4-y}{y} = \frac{x}{3-x} \Leftrightarrow xy = (4-y)(3-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{xy} = 12 - 4x - 3y + \cancel{xy} \Leftrightarrow y = \frac{12-4x}{3}$$

$$MP = \frac{12-4x}{3} \qquad V = \pi x^2 y = \pi x^2 \frac{12-4x}{3} = \frac{4\pi}{3}x^2(3-x) \qquad x \in [0;3]$$

б) Означаваме $f(x) = \dfrac{4\pi}{3}x^2(3-x)$.

За да намерим максималния обем, трябва да намерим най-голямата стойност на $f(x)$ при $x \in [0;3]$.

$$f'(x) = \frac{4\pi}{3}2x(3-x) + \frac{4\pi}{3}x^2(-1) \qquad f'(x) = \frac{4\pi}{3}\left[2x(3-x) - x^2\right] = \frac{4\pi}{3}(6x - 3x^2)$$

$$f'(x) = 4\pi(2x - x^2) = 4\pi x(2-x)$$

$f(x)$ има локален максимум при $x = 2$ и този локален максимум е най-голямата стойност на $f(x)$ при $x \in [0,3]$.

Получава се, че $f_{max}(x) = f(2) = \dfrac{16\pi}{3}$.

Максималният обем на ротационното тяло е $\dfrac{16\pi}{3}$, който се достига при $x = 2$.

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) Полученото ротационно тяло е прав кръгов цилиндър	1 точка
За $\triangle AMQ \sim \triangle MBP$ и $\dfrac{AQ}{MP} = \dfrac{MQ}{BP}$	5 точки
За получаване на $V = \dfrac{4\pi}{3}x^2(3-x)$	3 точка
б) Намиране на локален максимум при $x \in [0;3]$ и максималния обем на ротационното тяло $\dfrac{16\pi}{3}$, който се достига при $x = 2$	6 точки

Изпитен вариант №23

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
В	В	Г	В	Б	Б	В	Г	Г	Б	Б	А	Г	А	В

16. Решение на задачата: *I. начин:*

Доказване на равенството по индукция.

За $n = 2$ твърдението е вярно.

Нека е вярно за някое $n \geq 2$. Ще го докажем за $n + 1$. Последователно се преобразува:

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{n+1}{n}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n}\frac{n^2+2n}{(n+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{2}\frac{(n+1)+1}{n+1}.$$

Следователно твърдението е вярно и за $n + 1$. С това индукционната стъпка е завършена.

Следователно твърдението е вярно за всяко $n \geq 2$.

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

База на индукцията	2 точки
Индукционна стъпка	12 точки
Краен извод	1 точка

II. начин:

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n}\right).\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\ldots.\frac{n-1}{n}\right).\left(\frac{3}{2}.\frac{4}{3}.\ldots.\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n}.\frac{n+1}{2}$$

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

Разлагане	2 точки
Прегрупиране и пълно съкращаване	12 точки
Краен извод	1 точка

17. Решение на задачата:

а) Окръжността има уравнение $(x-1)^2+(y-2)^2=R^2$. Точка B е от окръжността и се замества с нейните координати $(5-1)^2+(-1-2)^2=R^2 \Rightarrow R=5$

$(x-1)^2+(y-2)^2=25$.

За получаване на координатите на пресечните точки се решава системата

$\begin{vmatrix} (x-1)^2+(y-2)^2=25 \\ y=3x+4 \end{vmatrix}$ чрез заместване:

$\begin{vmatrix} (x-1)^2+(3x+4-2)^2=25 \\ y=3x+4 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} (x-1)^2+(3x+2)^2=25 \\ y=3x+4 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x^2+x-2=0 \\ y=3x+4 \end{vmatrix}$

За решение се получават двете наредени двойки $(x;y)$, съответно $(1;7)$ и $(-2;-2)$.

Тъй като точка C лежи в първи квадрант, координатите са съответно $C(1;7)$ и $A(-2;-2)$.

б) *I. начин:*

$\overrightarrow{CA}(x_A-x_C;y_A-y_C) \Rightarrow \overrightarrow{CA}(-3;-9)$

$\overrightarrow{CB}(x_B-x_C;y_B-y_C) \Rightarrow \overrightarrow{CB}(4;-8)$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=x_{CA}x_{CB}+y_{CA}y_{CB} \Rightarrow \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=60$

$|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{x_{CA}^2+y_{CA}^2} \Rightarrow |\overrightarrow{CA}|=3\sqrt{10}$

$|\overrightarrow{CB}|=\sqrt{x_{CB}^2+y_{CB}^2} \Rightarrow |\overrightarrow{CB}|=4\sqrt{5}$

$\cos\sphericalangle(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\dfrac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|} \Rightarrow \cos\sphericalangle(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\dfrac{60}{3\sqrt{10}.4\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sphericalangle(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=45^\circ$.

II. начин:

$AC=\sqrt{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2} \Rightarrow AC=3\sqrt{10}$

$BC=\sqrt{(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2} \Rightarrow BC=4\sqrt{5}$

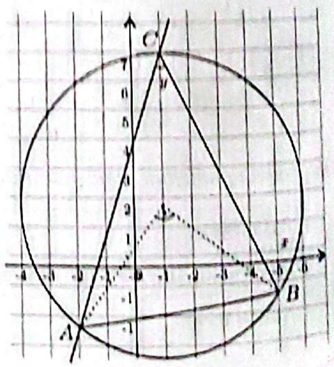
$BA=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} \Rightarrow BA=5\sqrt{2}$

Начин II. 1

От обратната теорема на Питагор се получава, че $\triangle AO_1B$ е правоъгълен, където точка O_1 е център на окръжността.

От връзката между вписан и централен ъгъл

$\sphericalangle ACB=\dfrac{1}{2}\sphericalangle AO_1B=45^\circ$.



Начин II. 2

От косинусова теорема

$\cos\sphericalangle ACB=\dfrac{AC^2+BC^2-AB}{2AC.BC}$

$\cos\sphericalangle ACB=\dfrac{90+80-50}{2.3\sqrt{10}.4.\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sphericalangle ACB=45^\circ$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{CA}|.|\overrightarrow{CB}|\cos\sphericalangle(\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB})=$

$=3\sqrt{10}.4\sqrt{5}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=60$.

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съответният решения

а) Определяне на R	1 точка
Съставяне и вярно решаване на подходяща система	5 точки
Определяне на координатите на A и C (вкл. уточняване на точките)	2 точки
б) *I начин:* Пресмятане на скаларното произведение	3 точки
Пресмятане на косинус	3 точки
Намиране на ъгъла	1 точка
II начин: Намиране на трите страни	3 точки
Доказване, че $\sphericalangle AOB=90^\circ$ или записване на косинусова теорема	2 точки
Намиране на ъгъла	1 точка
Пресмятане на скаларното произведение	1 точка

18. Решение на задачата:

Дефиниционното множество на функцията $f(x)=\dfrac{2x+3}{1-x}$ е $x\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

Функцията не е нито четна, нито нечетна $(f(-x)\neq\pm f(x))$, нито периодична.

Изследване на функцията към краищата на дефиниционната ѝ област:

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{2x+3}{1-x}=-\infty$, следователно правата $x=1$ е вертикална асимптота при $x\to1, x>1$;

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x+3}{1-x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{x\left(\frac{1}{x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\left(2+\frac{3}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}-1\right)}=-2$, следователно правата $y=-2$ е хоризонтална асимптота при $x\to\pm\infty$;

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{2x+3}{1-x}=+\infty$, следователно правата $x=1$ е вертикална асимптота и при $x\to1, x<1$.

Пресмятане на производната $f'(x)=\dfrac{2(1-x)-(2x+3).(-1)}{(1-x)^2}=\dfrac{5}{(1-x)^2}$.

Понеже $f'(x)=\dfrac{5}{(1-x)^2}>0, x\neq1$, то функцията $f(x)=\dfrac{2x+3}{1-x}$ е растяща във всеки интервал, в който е дефинирана.

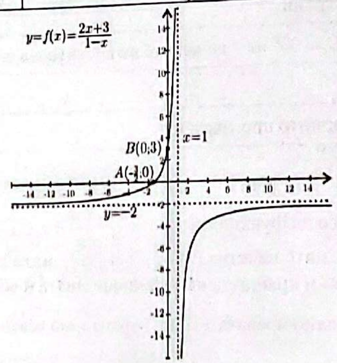
Пресмятане на втората производна на $f(x)$: $f''=\left(\dfrac{5}{(1-x)^2}\right)'=\dfrac{5.(-2).(-1)}{(1-x)^3}=\dfrac{10}{(1-x)^3}$

Понеже $f''(x) = \frac{10}{(1-x)^3} > 0, x < 1$ и $f''(x) = \frac{10}{(1-x)^3} < 0, x > 1$, то функцията $f(x)$ е изпъкнала за $x < 1$ и вдлъбната за $x > 1$.

Намиране на пресечните точки с координатните оси. Оста Ox има уравнение $y = 0$, следователно пресечната точка на $y = f(x) = \frac{2x+3}{1-x}$ и Ox има координати $\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$.

Оста Oy има уравнение $x = 0$, следователно пресечната точка на $y = f(x) = \frac{2x+3}{1-x}$ и Oy има координати $(0; 3)$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f	-2 $+\infty$ расте, изпъкнала		$-\infty$ -2 расте, вдлъбната
f'	$+ \quad + \quad +$		$+ \quad + \quad +$
f''	$+ \quad + \quad +$		$- \quad - \quad -$



Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съответстващи решението:

За намиране на ДМ $x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$	2 точки
За изследване на функцията в краищата на интервалите на ДМ и определяне на асимптотите	6 точки
За определяне на интервалите на растене и намаляване	2 точки
За намиране на втората производна и определяне на изпъкналост и вдлъбнатост	2 точки
За систематизиране на информацията и построяване на графиката	3 точки

Изпитен вариант №24

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Г	Г	Б	А	Б	В	А	В	В	Б	Г	Б	Б	А	В

16. Решение на задачата:

а) $y = ax^3 - 3x^2 + 3a^2 \qquad y' = 3ax^2 - 6x = 3x(ax - 2)$

Производната има корени $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{2}{a}$

При $a > 0$ имаме:

$+ \quad 0 \quad - \quad \frac{2}{a} \quad +$

$y_{max} = y(0) = 3a^2$

$y_{min} = y\left(\frac{2}{a}\right) = a.\frac{8}{a^3} - 3.\frac{4}{a^2} + 3a^2 = \frac{8}{a^2} - \frac{12}{a^2} + 3a^2 = -\frac{4}{a^2} + 3a^2$

б) $y_{min} + y_{max} = 2 \Rightarrow 3a^2 - \frac{4}{a^2} + 3a^2 = 2$

$6a^2 - 2 - \frac{4}{a^2} = 0 | .a^2 > 0$

$6a^4 - 2a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 3a^4 - a^2 - 2 = 0$

Полагаме $a^2 = b > 0$

Уравнението $3b^2 - b - 2 = 0$ има корени $b_1 = -\frac{2}{3} < 0$ не е решение и $b_2 = 1$.

Тогава $a^2 = b = 1$ и $a = \pm 1, a > 0$.

Отговор: $a = 1$.

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съответстващи решението:

а) Намираме на производната; разлагане и нулиране при $a > 0$	3 точки
Нанасяне на числовата ос; определяне на знаците; локалните екстремуми и интервалите на растене и намаляване	3 точки
Пресмятане на локалните екстремуми	2 точки
б) Съставяне и решаване на зададеното уравнение. Определяне на ДС	5 точки
Отхвърляне на грешните и определяне на отговора $a = 1$.	2 точки

17. Решение на задачата:

а) AM – медиана, следователно т. M е среда на страната BC. Намиране координатите на $M\left(\frac{6+10}{2}; \frac{-3-2}{2}\right)$, т.е. $M\left(8; -\frac{5}{2}\right)$.

Намиране уравнението на правата AM през две точки:

$$\frac{x-1}{8-1}=\frac{y-1}{-\frac{5}{2}-1}\Leftrightarrow\frac{x-1}{7}=\frac{y-1}{-\frac{7}{2}}\Leftrightarrow-\frac{7}{2}x+\frac{7}{2}=7y-7\Leftrightarrow$$

$$-7x+7=14y-14\Leftrightarrow-7x-14y+21=0\Leftrightarrow x+2y-3=0.$$

Така се получава $AM: x+2y-3=0$.

б) Намиране декартовото уравнение на правата, на която лежи страната BC:

$$\frac{x-6}{10-6}=\frac{y+3}{-2+3}\Leftrightarrow\frac{x-6}{4}=\frac{y+3}{1}\Leftrightarrow x-6=4y+12\Leftrightarrow x-4y-18=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x-\frac{9}{2}$$

$AD\perp BC$ следователно $AD: y=-4x+b$.

Използване, че $A\in AD$, за да се намери коефициента b в декартовото уравнение, т.е. $1=-4.1+b$, откъдето $b=5$.

$AD: y=-4x+5$

в) Намиране колинеарни вектори с правите AM и AD, например $\overrightarrow{a}(-2;1)$ и $\overrightarrow{b}(-1;4)$.

$\sphericalangle(AM;AD)=\sphericalangle(\overrightarrow{a};\overrightarrow{b})$

Използване скаларното произведение:

$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}|.|\overrightarrow{b}|\cos\sphericalangle(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b})$

$$\cos\sphericalangle MAD=\cos\sphericalangle(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b})=\frac{\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|.|\overrightarrow{b}|}$$

$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}=-2.(-1)+1.4=6$

$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$

$|\overrightarrow{b}|=\sqrt{(-1)^2+4^2}=\sqrt{17}$

$$\cos\sphericalangle MAD=\frac{2+4}{\sqrt{5}.\sqrt{17}}=\frac{6}{\sqrt{85}}=\frac{6\sqrt{85}}{85}$$

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) Намиране координатите на M и общото уравнение на правата AM	3 точки
б) Намиране декартовото уравнение на правата AD	4 точки
в) Намиране колинеарни вектори с правите AM и AD или техни нормални вектори	3 точки
Използване скаларното произведение $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}|.|\overrightarrow{b}|\cos\sphericalangle(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b})$ и намиране на $|\overrightarrow{a}|$ и $|\overrightarrow{b}|$	3 точки
Намиране на $\cos\sphericalangle MAD$	2 точки

Забележка: За в) При вярно намиране чрез ъгловите коефициент на правите на $\text{tg}\sphericalangle MAD$ и оттам на $\cos\sphericalangle MAD$ – 8 точки.

18. Решение на задачата:

$2x^4-13x^3+24x^2-13x+2=0|:x^2\neq0$

$$2x^2-13x+24-\frac{13}{x}+\frac{2}{x^2}=0$$

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-13\left(x+\frac{1}{x}\right)+24=0$$

Полагане: $x+\frac{1}{x}=z$ и изразяване: $x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2$

Получаване: $2(z^2-2)-13z+24=0$

$2z^2-13z+20=0\quad D=169-4.40=9$

$$z_{1;2}=\frac{13\pm3}{2};z_1=4;z_2=\frac{5}{2}$$

След заместване:

$x+\frac{1}{x}=4$ при $x\neq0\Rightarrow x^2-4x+1=0$

$D=16-4=12\qquad x_{1;2}=\frac{4\pm2\sqrt{3}}{2}=2\pm\sqrt{3}$

$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$ при $x\neq0\Rightarrow 2x^2-5x+2=0$

$D=25-16=9\qquad x_{3;4}=\frac{5\pm3}{4}=2$ и $\frac{1}{2}$

За неравенството $x^2-6x+5\leq0$ имаме: $x_{1;2}=1$ и 5

Решението му е между корените $\Rightarrow x\in[1;5]$

От $x_1=2-\sqrt{3}<1;\quad x_2=2+\sqrt{3}\in[1;5]$

$x_3=\frac{1}{2}<1$ и $x_4=2\in[1;5]$

Отговор: $x=2+\sqrt{3}$ и $x=2$.

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

Определяне, че уравнението е реципрочно ($x\neq0$), деление на $x^2\neq0$, групиране по коефициенти	2 точки
Полагане на $x+\frac{1}{x}=z$; определяне на $x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2$; заместване	3 точки
Решаване на уравнението $2z^2-13z+20=0$ и определяне на $z_1=4; z_2=\frac{5}{2}$	2 точки
Заместване и решаване на уравненията $x+\frac{1}{x}=4$ и $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$ Определяне на $x_{1;2}=2\pm\sqrt{3}; x_{3;4}=2$ и $\frac{1}{2}$	4 точки
Решаване на неравенството $x^2-6x+5\leq0\Rightarrow x\in[1;5]$ Определяне на корените, които са решения на неравенството	3 точки
Определяне на решенията на задачата $x=2+\sqrt{3}; x=2\in[1;5]$	1 точка

Забележка: Решенията на уравнението могат да се определят и по схемата на Хорнер.