④ Кой от всички $\triangle$ с дадена хипотенуза има най-голямо лице?

**Дадено:** $\triangle ABC$, $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, $AB = 1$.

$\triangle ABC$ ?? : $S \to max$.

**Решение.**

Нека $\sphericalangle BAC = \alpha$.

Д.М. $\alpha \in (0; 90^\circ)$

- $\Rightarrow \dfrac{BC}{AB} = \sin\alpha \Rightarrow BC = \sin\alpha$
- $\Rightarrow \dfrac{AC}{AB} = \cos\alpha \Rightarrow AC = \cos\alpha$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{AC\,BC}{2} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2} = \frac{\sin 2\alpha}{4}$$

$\Rightarrow$ $S$ достига НГС, когато $\sin 2\alpha$ достига НГС

т.е. при $2\alpha = 90^\circ$, т.е при $\boxed{\alpha = 45^\circ}$

Алтернативно може

$$S = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}, \text{ където } \sin\alpha = x \in (0;1)$$

(4) За правоъгълен $\triangle$ с радиус вп. окр. $\sqrt{2}-1$, да се докаже, че $h \le 1$.

Дадено:

$\triangle ABC$, $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, $r_{ABC} = \sqrt{2}-1$,

ДСД, че $h \le 1$

Решение

- Нека $\sphericalangle CAB = \alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$
- изразяваме $h$ като функция на $\alpha$, и показваме, че НГС е $1$.

- $AB . h = 2S = P . r$
- $h = \dfrac{P . r}{AB} = \dfrac{(AB + BC + CA) . r}{AB} = \dfrac{(AB + AB \sin\alpha + AB\cos\alpha) . r}{AB} =$

$= r(1+\sin\alpha+\cos\alpha) = (\sqrt{2}-1)(1+\sin\alpha+\cos\alpha) =$

$= (\sqrt{2}-1)(1+\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4}))$

$h = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})+1)$

$\Rightarrow h$ достига НГС, когато $\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})$ достига НГС

т.е. при $\alpha+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

тогава $h_{max} = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2} . \sin\frac{\pi}{2}+1) =$

$= (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) =$

$= 2-1 = 1.$

$\Rightarrow h \le 1.$

Алтернативно, може

$h = (\sqrt{2}-1)\left(1+x+\sqrt{1-x^2}\right)$, където $x = \sin\alpha \in (0;1)$

Използваме, че

$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\,\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$