1.5. Най-голяма и най-малка стойност на функция

1) Локален екстремум на функция

Определение. Точката x_0 се нарича **вътрешна** за множеството M, ако съществува отворен интервал U на x_0, който се съдържа в M, $U \subset M$.

Нека $M = [a;b]$. Всяка точка от отворения интервал $(a;b)$ е вътрешна за M, докато точките a и b не са вътрешни.

Определение. Нека функцията $f(x)$ е с дефиниционна област D и x_0 е вътрешна точка за D.

Казваме, че $f(x)$ има **локален максимум** в точката x_0, ако съществува отворен интервал U на x_0, съдържащ се в D, така че неравенството $f(x_0) \geq f(x)$ е изпълнено за всяко $x \in U$.

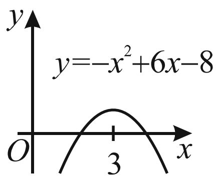
Означаваме $f_{\max} = f(x_0)$.

Казваме, че $f(x)$ има **локален минимум** в точката x_0, ако съществува отворен интервал U на x_0, съдържащ се в D, така че неравенството $f(x_0) \leq f(x)$ е изпълнено за всяко $x \in U$.

Означаваме $f_{\min} = f(x_0)$.

Ако $f(x)$ има локален максимум или локален минимум в точката x_0, казваме, че $f(x)$ има **локален екстремум** в тази точка.

Пример 1. Нека $f(x) = -x^2 + 6x - 8$.

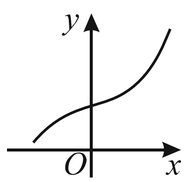


Върхът на параболата е в точката $x_0 = 3$ и

$f(x) \leq f(3) = 1$ за всяко $x \in (-\infty; +\infty)$.

Следователно $f(x)$ има локален максимум при $x = 3$ и $f_{\max} = f(3) = 1$.▲

Твърдение.
Ако функцията $f(x)$ е строго монотонна в интервал U, то $f(x)$ няма локален екстремум в U.



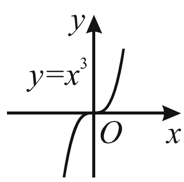
Доказателство. Нека, за определеност, $f(x)$ е строго растяща в U. Да допуснем, че $f(x)$ има локален екстремум, например локален максимум, в точката x_0 от U. Това означава, че съществува отворен интервал $(p;q) \subset U$ на x_0, такъв че

(1) $f(x) \leq f(x_0)$, за всяко $x \in (p;q)$.

Нека $x_1 \in (p;q)$ и $x_0 < x_1$. Функцията $f(x)$ е строго растяща $\Rightarrow$ $f(x_0) < f(x_1)$, което противоречи с (1).

Останалите случаи се разглеждат аналогично. Следователно $f(x)$ няма локален екстремум в U.▲

Пример 2. Нека $f(x) = x^3$.



Тъй като $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ и равенство има само при $x = 0$, то x^3 е строго растяща в $(-\infty; +\infty)$ и според доказаното твърдение няма локални екстремуми.▲

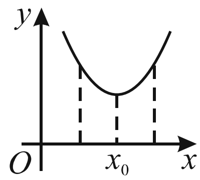
Теорема (Ферма – необходимо условие за съществуване на локален екстремум)

Ако функцията $f(x)$ има локален екстремум в x_0 и е диференцируема в x_0, то

$$f'(x_0)=0.$$

Доказателство. Нека $f(x)$ има локален минимум в x_0. Следователно съществува отворен интервал U на x_0, така че $f(x_0)\le f(x)$ за всяко $x\in U$ или $f(x)-f(x_0)\ge 0$.

За диференчното частно имаме:



$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0, & \text{за } x<x_0, (x-x_0<0)\\ \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0, & \text{за } x>x_0, (x-x_0>0)\end{cases}.$$

$f(x)$ е диференцируема в x_0, което означава, че лявата и дясната граница на диференчното частно съществуват и са равни на $f'(x_0)$, т.е:

Преговор:

$$f(x)\le g(x),\quad f(x)\to A,\ g(x)\to B \Rightarrow A\le B$$

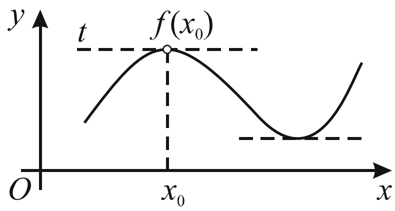
$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$ и поради теоремата за граничен преход в неравенства е изпълнено $f'(x_0)\le 0$ (1).

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$ и отново поради теоремата за граничен преход в неравенства, $f'(x_0)\ge 0$ (2).

От (1) и (2) получаваме, че $f'(x_0)=0$.

Когато $f(x)$ има локален максимум в x_0, доказателството е аналогично.▲

Геометрична интерпретация на теоремата на Ферма.



Нека $f(x)$ е диференцируема в x_0. Уравнението на допирателната към графиката ѝ в точката $(x_0, f(x_0))$ е $t:\ y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

Нека сега $f(x)$ има локален екстремум в x_0, следователно $f'(x_0)=0$ и уравнението на допирателната е $t:\ y=f(x_0)$, което е уравнение на права, успоредна на оста Ox.

И така, ако функцията е диференцируема в точките на локален екстремум, то допирателната към графиката на функцията в тези точки е успоредна на оста Ox.▲

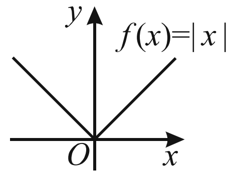
Коментар

– Теоремата на Ферма дава само необходимо условие една диференцируема функция да има локален екстремум. Това означава, че функцията $f(x)$ може да има локален екстремум само в точките, които са корени на уравнението $f'(x)=0$, (но може и да няма екстремуми в тези точки). Със сигурност може да се твърди, че в точките, които НЕ СА корени на уравнението $f'(x)=0$, диференцируемата функция $f(x)$ НЯМА екстремум.

– Теоремата на Ферма е само за диференцируема функция.

– Функцията може да има екстремум и без да е диференцируема.

Например $f(x)=|x|$. Както знаем, графиката на $f(x)=|x|$ е показаната на чертежа и очевидно при $x=0$ функцията има локален минимум.▲



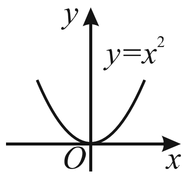
Определение. Вътрешна точка от дефиниционното множество на дадена функция, в която производната или е равна на нула, или не съществува, се нарича **критична точка** за функцията.

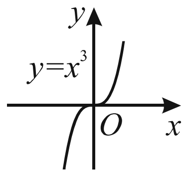
Да разгледаме още няколко примера.

1) $f(x)$ е диференцируема в $x_0=0$, $f'(x_0)=0$ и:

– $f(x)$ има екстремум в x_0. Пример $f(x)=x^2$.

– $f(x)$ няма екстремум в x_0. Пример $f(x)=x^3$.

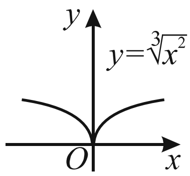


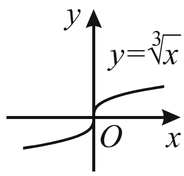


2) $f(x)$ не е диференцируема в $x_0=0$ и:

– $f(x)$ има екстремум в x_0. Пример $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$.

– $f(x)$ няма екстремум в x_0. Пример $f(x)=\sqrt[3]{x}$.





Едно достатъчно условие за съществуване на екстремум дава следната теорема.

Теорема. (Критерий за локален екстремум)

Нека $f(x)$ притежава производна в D, евентуално с изключение на точката x_0 (т.е. производната в x_0 може да не съществува).

Ако съществува отворен интервал (p,q) на x_0, такъв че:

1) $f'(x)>0$ за $x\in(p,x_0)$ и $f'(x)<0$ за $x\in(x_0,q)$, то $f(x)$ има локален максимум в x_0;

2) $f'(x)<0$ за $x\in(p,x_0)$ и $f'(x)>0$ за $x\in(x_0,q)$, то $f(x)$ има локален минимум в x_0;

3) $f'(x)>0$ за $x\in(p,x_0)$ и за $x\in(x_0,q)$ или $f'(x)<0$ за $x\in(p,x_0)$ и за $x\in(x_0,q)$, то $f(x)$ няма локален екстремум в x_0.

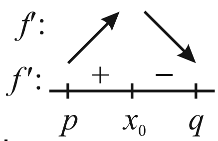
Доказателство.

1) Нека $f'(x)>0$ за $x\in(p,x_0)$

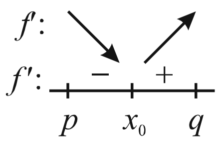
$\Rightarrow f(x)$ е растяща в (p,x_0) и $f(x)<f(x_0)$.

Нека $f'(x)<0$ за $x\in(x_0,q)$ $\Rightarrow f(x)$ е намаляваща в (x_0,q) и $f(x)<f(x_0)$.

Следователно $f(x)$ има локален максимум в x_0 (според определението).

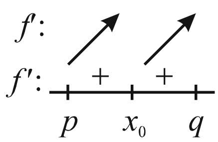


2) Аналогично се установява, че $f(x)$ има локален минимум във втория случай на теоремата.



3) Нека сега $f'(x)>0$ за $x\in(p,x_0)$ и за $x\in(x_0,q)$.

Тогава $f(x)$ расте в (p,x_0) $\Rightarrow f(x)<f(x_0)$ за всяко $x\in(p,x_0)$ и $f(x)$ расте в (x_0,q) $\Rightarrow f(x_0)<f(x)$ за всяко $x\in(x_0,q)$, което показва, че функцията няма нито локален максимум, нито локален минимум в x_0.



Аналогични са разсъжденията, когато $f'(x)<0$ за $x\in(p,x_0)$ и $f'(x)<0$ за $x\in(x_0,q)$.▲

Ще формулираме още един критерий за екстремум с използване на втора производна.

Теорема. (Критерий за локален екстремум)

Нека функцията $f(x)$ притежава втора производна в точката x_0.

Ако $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)>0$, то $f(x)$ има локален минимум в x_0.

Ако $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)<0$, то $f(x)$ има локален максимум в x_0.

При решаване на задачи ще използваме следното практическо правило:

а) Една функция $f(x)$ може да има локален екстремум само в критична точка.

б) Ако около критична точка x_0 производната $f'(x)$:

– си сменя знака от **+** на **–**, то в x_0 има локален максимум, т.е. $f_{\max}=f(x_0)$;

– си сменя знака от **–** на **+**, то в x_0 има локален минимум, т.е. $f_{\min}=f(x_0)$;

– не си сменя знака, то в x_0 няма локален екстремум.

в) Ако $f'(x_0)=0$ и съществува $f''(x_0)$, то:

– при $f''(x_0)>0$ $f(x)$ има локален минимум в x_0, т.е. $f_{\min}=f(x_0)$;

– при $f''(x_0)<0$ $f(x)$ има локален максимум в x_0, т.е. $f_{\max}=f(x_0)$.

г) Ако $f(x)$ е строго монотонна в интервал U, то $f(x)$ няма локален екстремум в U.▲

1. Да се намерят локалните екстремуми на функцията $f(x)$.

а) $f(x)=2x^3-6x^2-18x-5$;

б) $f(x)=(x-2)^2(x+1)^3$.

Решение. а) Функцията е дефинирана и диференцируема за всяко x. Намираме производната и решаваме уравнението $f'(x)=0$:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
f':		$+$		$-$		$+$	

$f'(x)=6x^2-12x-18=6(x^2-2x-3)=0$, $x_1=-1$, $x_2=3$.

Производната си сменя знака около точката $x_1=-1$ от + на –, следователно $f_{\max}=f(-1)=5$, а около точката $x_2=3$ си сменя знака от – на +, следователно $f_{\min}=f(3)=-59$.▲

Решение. б) Функцията е дефинирана и диференцируема за всяко x и:

$f'(x_0)=2(x-2)(x+1)^3+3(x-2)^2(x+1)^2=$

$=(x-2)(x+1)^2(5x-4)=0$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{4}{5}$		2		$+\infty$
f':		$+$		$+$		$-$		$+$	

Корените на уравнението $f'(x)=0$ са $x_1=-1$, $x_2=\dfrac{4}{5}$ и $x_3=2$.

Около $x_1=-1$ производната не си сменя знака $\Rightarrow$ в $x_1=-1$ $f(x)$ няма локален екстремум.

Около $x_2=\dfrac{4}{5}$ производната си сменя знака от + на – $\Rightarrow$ $f_{\max}=f\left(\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{4.3^8}{5^5}$.

Около $x_3=2$ производната си сменя знака от – на + $\Rightarrow$ $f_{\min}=f(2)=0$. ▲

2. Да се намерят локалните екстремуми на функцията $f(x)$.

а) $f(x)=2x^3-15x^2+36x+1$;

б) $f(x)=3x^4-36x^3+156x^2-288x+1$;

в) $f(x)=3x^5-15x^3-60x+1$.

3. Да се намерят локалните екстремуми на функцията $f(x)$.

а) $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x+1}$; б) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$; в) $f(x)=\sin 2x+x$, $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$.

Решение. а) $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x+1}$. $f(x)$ е дефинирана и диференцируема в $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.

$f'(x)=\dfrac{(2x-2)(x+1)-(x^2-2x)}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x-2}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+\sqrt{3}+1)(x-\sqrt{3}+1)}{(x+1)^2}=0$. Около точката $x_1=-\sqrt{3}-1$ производната си сменя знака от + на – $\Rightarrow$ $f_{\max}=f(-\sqrt{3}-1)=-2\sqrt{3}-4$.

Около точката $x_2=\sqrt{3}-1$ производната си сменя знака от – на + $\Rightarrow$ $f_{\min}=f(\sqrt{3}-1)=2\sqrt{3}-4$.▲

Решение. б) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$.

Функцията е дефинирана и непрекъсната в $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$ и диференцируема в $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

$f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$. Числителят се анулира в точката $x=0$, която не принадлежи на дефиниционното множество на функцията.

Следователно $f'(x)\neq 0$ $\Rightarrow$ функцията няма локални екстремуми.▲

Решение. в) $f(x)=\sin 2x+x$. Функцията е дефинирана и диференцируема в $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$.

$f'(x)=2\cos 2x+1=0$, $\cos 2x=-\dfrac{1}{2}$, $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$ $\Rightarrow$ $2x\in[0,\pi]$ $\Rightarrow$ $2x=\dfrac{2\pi}{3}$ $\Rightarrow$ $x=\dfrac{\pi}{3}$.

Ще използваме втора производна, за да установим дали функцията има локален екстремум. $f''(x)=-4\sin 2x$ и $f''(\dfrac{\pi}{3})=-4\sin\dfrac{2\pi}{3}=-4.\dfrac{\sqrt{3}}{2}<0$.

$\Rightarrow$ $f(x)$ има локален максимум и $f_{\max}=f(\dfrac{\pi}{3})=\sin\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{3}$.▲

4. Да се намерят локалните екстремуми на функцията $f(x)$.

а) $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x+1}$; б) $f(x)=\sqrt{x^2-2}$; в) $f(x)=\sin 3x-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}x$, $x\in[0,\dfrac{\pi}{3}]$.

5. Да се намерят интервалите на монотонност и локалните екстремуми на функцията $f(x)$.

а) $f(x)=\dfrac{x^2-2x-2}{x^2+2x+2}$; б) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+3}{x^2-3x+2}$; в) $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-2x-3}$.

2) Най-голяма и най-малка стойност на функция в краен и затворен интервал

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в краен и затворен интервал $[a,b]$.

Досега изучавахме локалните екстремуми на функцията.

Сега ще разгледаме въпроса за намиране на най-голямата и най-малката ѝ стойност в целия интервал $[a,b]$.

Такива стойности съществуват според теоремата на Вайерщрас.

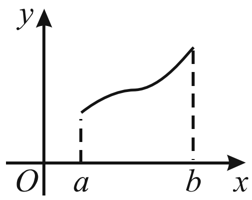
Преговор. Теорема на Вайерщрас. Ако една функция е дефинирана и непрекъсната в краен и затворен интервал, то тя достига в него най-голямата и най-малката си стойност.

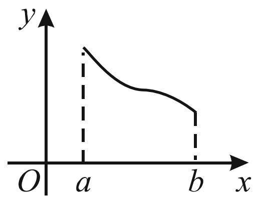
Най-голямата и най-малката стойност на $f(x)$ в интервала $[a,b]$ ще означаваме съответно $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Най-голямата и най-малката стойност на една функция могат да се достигат или в локалните екстремуми, или в краищата на интервала. В задачи ще използваме следните практически правила.

I. $f(x)$ е растяща или намаляваща в $[a,b]$.

Тогава $f(x)$ няма локални екстремуми в $[a,b]$ и ако $f(x)$ е растяща, то $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(b)$ и $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(a)$; ако $f(x)$ е намаляваща, то $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(a)$ и $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(b)$.

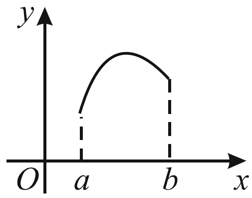


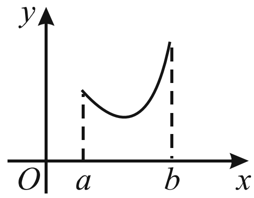


II. $f(x)$ има единствена критична в (a,b) и в нея има локален екстремум.

Ако локалният екстремум е максимум, то $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f_{\max}$, а $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ е по-малкото от числата $f(a)$ и $f(b)$.

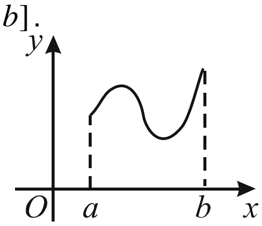
Аналогично се разсъждава при локален минимум.

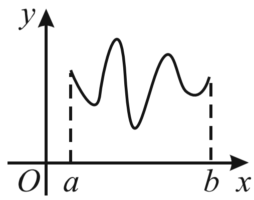




III. $f(x)$ има повече от един локален екстремум в $[a,b]$.

Тогава $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ е най-голямото от числата: локалните максимуми, $f(a)$ и $f(b)$, а $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ е най-малкото от числата: локалните минимуми, $f(a)$ и $f(b)$.





<u>Коментар</u>. Случаят III може да се използва и вместо случай I и случай II.▲

Ще използваме следните означения: с $\max\{a,b,c\}$ ще означаваме най-голямото от числата a, b и c; с $\min\{a,b,c\}$ ще означаваме най-малкото от числата a, b и c.

6. Да се намери най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x) = x + 3$ в интервала $[-1,3]$.

Решение. $f(x)$ е растяща в $[-1,3]$ $\Rightarrow$ $\max\limits_{x\in[-1,3]} f(x) = f(3) = 6$ и $\min\limits_{x\in[-1,3]} f(x) = f(-1) = 2$.▲

7. Да се намери най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x) = x^2 - 2x - 8$ във всеки от интервалите $[-3,6]$, $[2,6]$ и $[-4,1]$.

Решение. При изследване на квадратна функция ще използваме свойствата на параболата.
Върхът на параболата в този случай е локален минимум при $x = 1$ и $f_{\min} = f(1) = -9$.

Нека $x \in [-3,6]$.

В този интервал е върхът на параболата следователно $\min\limits_{x\in[-3,6]} f(x) = f_{\min} = f(1) = -9$.

Пресмятаме $f(-3) = 7$ и $f(6) = 16$ $\Rightarrow$ $\max\limits_{x\in[-3,6]} f(x) = f(6) = 16$.

Нека $x \in [2,6]$.

В този интервал $f(x)$ е растяща.

Пресмятаме $f(2) = -8$ и $f(6) = 16$ $\Rightarrow$ $\max\limits_{x\in[2,6]} f(x) = f(6) = 16$ и $\min\limits_{x\in[2,6]} f(x) = f(2) = -8$.

Нека $x \in [-4,1]$.

В този интервал функцията е намаляваща.

Пресмятаме $f(-4) = 16$ и $f(1) = -9$ $\Rightarrow$ $\max\limits_{x\in[-4,1]} f(x) = f(-4) = 16$ и $\min\limits_{x\in[-4,1]} f(x) = f(1) = -9$.▲

8. Да се намери най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x)=x^4-14x^2-24x+50$ във всеки от интервалите $[-3,4]$, $[-2,4]$ и $[1,4]$.

Решение. Намираме екстремумите на функцията.

$f'(x)=4x^3-28x-24=4(x+1)(x+2)(x-3)=0$, $x_1=-2$, $x_2=-1$, $x_3=3$

Получаваме:

$f_{\min}=f(-2)=58$; $f_{\max}=f(-1)=61$; $f_{\min}=f(3)=-67$.

$$f':\quad \underset{-\infty}{} \; - \; \underset{-2}{|} \; + \; \underset{-1}{|} \; - \; \underset{3}{|} \; + \; \underset{+\infty}{}$$

Нека $x\in[-3;4]$.

В този интервал $f(x)$ има три локални екстремума – един локален максимум и два локални минимума.

Намираме стойностите в краищата на интервала: $f(-3)=77$ и $f(4)=-14$.

$\max\limits_{[-3;4]} f(x)=\max\{61,\ 77,\ -14\}=77$, $\min\limits_{[-3;4]} f(x)=\min\{58,\ -67,\ 77,\ -14\}=-67$.

Нека $x\in[-2,4]$.

В този интервал $f(x)$ има два локални екстремума – локален максимум и локален минимум съответно в точките -1 и 3.

Пресмятаме стойностите на функцията в краищата на интервала $f(-2)=58$ и $f(4)=-14$.

Тогава

$\max\limits_{[-2;4]} f(x)=\max\{61,\ 58,\ -14\}=61=f_{\max}=f(-1)$,

$\min\limits_{[-2;4]} f(x)=\min\{-67,\ 58,\ -14\}=-67=f_{\min}=f(3)$.

Нека $x\in[1,4]$.

В отворения интервал $(1,4)$ производната има единствен корен и в него $f(x)$ има локален минимум. Следователно $\min\limits_{[1,4]} f(x)=f_{\min}=f(3)=-67$.

Пресмятаме $f(x)$ в краищата на интервала $f(1)=13$ и $f(4)=-14$ $\Rightarrow$ $\max\limits_{[1,4]}=f(1)=13$.▲

9. Да се намери най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x)=x^3-12x+1$ в интервала $[a;b]$. В кои точки се достигат тези стойности?

а) $[a,b]=[-3,3]$; б) $[a,b]=[-3,4]$; в) $[a,b]=[-3,5]$.

10. Да се намери най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x)=6x^5-15x^4-70x^3+120x^2+360x-200$ в интервала $[-2,3]$. В кои точки се достигат тези стойности?

3) Най-голяма и най-малка стойност на функция в отворен или безкраен интервал

Ако разглеждаме една функция в отворен интервал (a,b) или в безкраен интервал, тя може да има най-малка и най-голяма стойност, но може и да няма.

Примери.

1) Най-малката и най-голямата стойност на функцията $\sin x$, $x\in(-\infty,+\infty)$ са съответно -1 и 1. Записваме $\min\limits_{(-\infty,+\infty)} \sin x=-1$ и $\max\limits_{(-\infty,+\infty)} \sin x=1$.

2) Функцията $\ln x$, $x\in(0,+\infty)$ няма нито най-малка, нито най-голяма стойност.

3) Функцията x^2, $x\in(-\infty,+\infty)$ има най-малка стойност 0, но няма най-голяма стойност.

11. Да се намери най-малката стойност на функцията $f(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x$.

Решение. Намираме локалните екстрмуми на $f(x)$: $f'(x)=(x+2)(x+1)(x-1) \Rightarrow f(x)$ има локални минимуми при $x=-2$ и $x=1$ и локален максимум при $x=-1$.

Тъй като $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$, то най-малката стойност на $f(x)$ ще се достига в някой от локалните ѝ минимуми: $f(-2)=\frac{2}{3}$, $f(1)=-\frac{19}{12} \Rightarrow \min\limits_{(-\infty,+\infty)} f(x)=-\frac{19}{12}$.▲

Ще формулираме едно твърдение, което ще използваме при решаване на задачи.

Твърдение. Нека $f(x)$ е дефинирана и диференцируема в интервал (a,b) (който може да бъде и безкраен) и уравнението $f'(x)=0$ има единствен корен $x_0\in(a,b)$.

Ако $f(x)$ има локален минимум в x_0, то $\min\limits_{x\in(a,b)} f(x)=f_{\min}=f(x_0)$.

Ако $f(x)$ има локален максимум в x_0, то $\max\limits_{x\in(a,b)} f(x)=f_{\max}=f(x_0)$.

12. Да се намери най-малката стойност на функцията $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3x-2-x^2}}$.

Решение. Функцията е дефинирана и диференцируема при $x\in(1,2)$.

$f'(x)=\frac{2x-3}{2\sqrt{(3x-2-x^2)^3}}$. Определяме знака на числителя: $2x-3=0$, $x=\frac{3}{2}$.

Производната сменя знака си около точката $x=\frac{3}{2}$ от – на + $\Rightarrow$ $f_{\min}=f\left(\frac{3}{2}\right)=2$.

Тогава $f'(x)=0$ има единствен корен в интервала $(1,2)$ и $f(x)$ има локален минимум и според твърдението $\min\limits_{(1,2)} f(x)=f_{\min}=f\left(\frac{3}{2}\right)=2$.▲

13. Да се намери най-голямата стойност на функцията $f(\alpha)=\sqrt{\sin^2\alpha-\sin^3\alpha}$ в интервала $(0,\frac{\pi}{2})$.

Решение. Тъй като $\sin^2\alpha-\sin^3\alpha=\sin^2\alpha(1-\sin\alpha)>0$, то $f(\alpha)$ е дефинирана за всяко α.

Да означим $\varphi(\alpha)=\sin^2\alpha-\sin^3\alpha$.

Тъй като функцията $y=\sqrt{x}$ е растяща в цялата си дефиниционната област, то $f(\alpha)$ и $\varphi(\alpha)$ ще приемат най-голямата си стойност при едно и също число α. Ето защо ще изследваме функцията $\varphi(\alpha)$.

$\varphi'(\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha-3\sin^2\alpha\cos\alpha=\sin\alpha\cos\alpha(2-3\sin\alpha)=0$.

В интервала $(0,\frac{\pi}{2})$ $\sin\alpha\neq 0$ и $\cos\alpha\neq 0$ $\Rightarrow \sin\alpha=\frac{2}{3}$ и $\varphi'(\alpha)=0$ има единствен корен.

За да изследваме $\varphi(\alpha)$ в критичната точка, за която $\sin\alpha=\frac{2}{3}$, ще използваме втора производна: $\varphi''(\alpha)=2\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha-6\sin\alpha\cos^2\alpha+3\sin^3\alpha$.

При $\sin\alpha=\frac{2}{3}$, $\cos^2\alpha=\frac{5}{9}$ и $\varphi''(\alpha)=-\frac{10}{9}<0$ $\Rightarrow$ при $\sin\alpha=\frac{2}{3}$ функцията $\varphi(\alpha)$ има локален максимум, който е и най-голямата ѝ стойност в $(0,\frac{\pi}{2})$.

Това означава, че най-голямата стойност на $f(\alpha)$ се достига при $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ и $\max\limits_{(0,\frac{\pi}{2})} f(\alpha) = \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{8}{27}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$.▲

14. Да се намери най-малката стойност на функцията $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5-x^2}}$.

15. Да се намери най-голямата стойност на функцията $f(x)$.

а) $f(x) = \ln(3-x^2)$; б) $f(x) = \ln(x+2-x^2)$.

16. Да се намери най-малката стойност на функцията $f(x)$.

а) $f(x) = x - \ln x$; б) $f(x) = x - \ln(x+1)$; в) $f(x) = 2x^2 - \ln x$.

17. Да се намерят най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x) = -\frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{2} - \frac{11x^3}{3} + 3x^2 + 1$ в интервала $[a,b]$, ако:

а) $[a,b] = [-1,1]$; б) $[a,b] = [0,2]$; в) $[a,b] = [1,4]$.

18. Да се намерят най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$ в интервала $[a,b]$, ако:

а) $[a,b] = [-2,-1]$; б) $[a,b] = [-1,1]$; в) $[a,b] = [-1,2]$.

19. Дадена е функцията $f(x) = \sqrt{x^2 + bx + 4}$. Да се изследват интервалите на монотонност и екстремумите, ако:

а) $b = 3$; б) $b = 4$; в) $b = 5$.

20. Дадена е функцията $f(x)$. Да се намери:

а) най-голямата стойност на $f(x)$, ако $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - x + 3}}$;

б) най-малката стойност на $f(x)$, ако $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$;

в) най-малката стойност на $f(x)$, ако $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 6x - 5}}$;

г) най-голямата стойност на $f(x)$, ако $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 4x + 3}}$.

21. Да се намери най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x) = \sqrt{\sin^2 x + \cos x}$ в интервала $[0, \frac{\pi}{2}]$.

22. Да се определят интервалите на монотонност, най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 + ax^2}}$ в интервала $[-1,1]$, ако:

а) $a = 1$; б) $a = -1$.