① Регалия стр. 76 / 3

„Измежду всички триъгълници с периметър 20 и страна 5, да се намери този с най-голямо лице"

$\triangle ABC \quad P = 20;\ AB = 5;\ \boxed{BC = ?,\ AC = ? : S = S_{max}}$

Решение

Нека $BC = a;\ a \in (0; 15)$! ДМ

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-AB)(p-BC)} = \sqrt{10(10-a)(10-5)(10-(20-5-a))}$$

$$= \sqrt{10(10-a).5.(a-5)} = \sqrt{50(10-a)(a-5)}$$

$f(a) = (10-a)(a-5) \rightarrow a \in (5; 10)$! Д.М

$f'(a) \geq 0$

$[(10-a)(a-5)]' \geq 0$

$(-a^2 + 15a - 50)' \geq 0$

$-2a + 15 \geq 0$

$\cancel{a \in (}\quad a \leq 7,5$

$a \in (5; 7,5]$

$\Rightarrow f(a)$ расте в $(5; 7,5]$ и

намалява в $[7,5; 10)$

$f'(a)$: $+$ | 7,5 | $-$ → a

$f(a)$: $\nearrow$ | 7,5 | $\searrow$

$\Rightarrow f(a)$ достига максимум при $a = 7,5$

$\Rightarrow S = S(a)$ достига максимум при $a = 7,5$, тъй като $S = \sqrt{50 f(a)}$

1 $\Rightarrow BC = 7,5;\ AC = 20 - 5 - 7,5 = 7,5$

② Регалия стр. 77/ зад 1

"От всички правоъгълни триъгълници с даден периметър, намерете острите ъгли на този с най-голямо лице."

$\triangle ABC$: $AB+BC+CA = p$, $\sphericalangle ACB = 90^\circ$.

$\boxed{\sphericalangle BAC, \sphericalangle ABC = ? \quad : \quad S \to S_{max}}$

Решение.

$AC = a$; $AB = \sqrt{a^2+BC^2}$ по ПТ; $a \in (0; p)$ ДМ

$a + BC + \sqrt{a^2+BC^2} = p$

$(a+BC-p)^2 = \left(-\sqrt{a^2+BC^2}\right)^2$

$a^2+BC^2+p^2-2ap-2BCp+2aBC = a^2+BC^2$

$2aBC - 2pa - 2pBC + p^2 = 0$

$BC(2a-2p) = 2pa - p^2$

$BC = \dfrac{2pa-p^2}{2(a-p)} \Rightarrow$

$S = \dfrac{1}{2} a \cdot BC = \dfrac{1}{4} a \cdot \dfrac{2pa-p^2}{a-p} = \dfrac{p}{4} \cdot \dfrac{2a^2-pa}{a-p}$

$S'(a) \geq 0$

$\dfrac{p}{4} \cdot \left(\dfrac{2a^2-pa}{a-p}\right)' \geq 0$

$\dfrac{p}{2} \dfrac{\left(a^2-2pa+\frac{p^2}{2}\right)}{(a-p)^2} \geq 0$

$a^2-2pa+\dfrac{p^2}{2} \geq 0$

$a \in \left(-\infty; p-\dfrac{p}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(p+\dfrac{p}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$ но $a \in (0;p)$

$\Rightarrow a \in \left(0; p-\dfrac{p}{\sqrt{2}}\right)$

$\Rightarrow S(a)$ расте за $a \in \left(0; p-\dfrac{p}{\sqrt{2}}\right)$

$\Rightarrow S \to S_{max}$ за $a = p-\dfrac{p}{\sqrt{2}} = p\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\Rightarrow BC = \frac{2p^{\cancel{2}}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - p^{\cancel{2}}}{2\cancel{p}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)} = \frac{p\,(2-\sqrt{2}-1)}{2\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} =$$

$$= \frac{p\sqrt{2}\,(-1+\sqrt{2})}{2} = p\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = a;$$

$\Rightarrow \triangle ABC$ е равнобедрен

$\Rightarrow \sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC = 45^\circ$

③ Решете стр. 77/2

„От всички равнобедрени Δ с медиана към бедрото m, да се намери косинуса на ъгъла срещу основата на този с максимално лице."

$\Delta ABC \quad AC = BC, \; AM = m, \; \cos\gamma = ? : S \to S_{max}$

Решение:

$N = пр._{AB} C \; (AN = BN, \; AB \perp CN)$ и $AN = u, \; AB = 2u, \; CN = h, \; u \in (0; \infty), \; h \in (0; \infty)$

$$4m^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$$

$$4m^2 = 2(u^2+h^2) \; 2(2u)^2 - (u^2+h^2)$$

$$4m^2 = 8u^2 + u^2 + h^2$$

$$h = \sqrt{4m^2 - 9u^2}$$

$$S = \frac{2uh}{2} = uh = u\sqrt{4m^2-9u^2}$$

$$S'(u) \geq 0$$

$$\frac{4m^2 - 18u^2}{\sqrt{4m^2-9u^2}} \geq 0$$

$u \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}m; \frac{\sqrt{2}}{3}m\right)$, но $u \in (0; \infty)$

$\Rightarrow u \in \left(0; \frac{\sqrt{2}m}{3}\right)$

$\Rightarrow S(u)$ расте в $\left(0, \frac{\sqrt{2}m}{3}\right) \Rightarrow S \to S_{max} : u = \frac{\sqrt{2}m}{3}$

$\Rightarrow h = \sqrt{4m^2 - 2m^2} = \sqrt{2}m \; ; \; c = \frac{2\sqrt{2}m}{3}$

$\Rightarrow a = b = \sqrt{h^2+u^2} = \sqrt{2m^2 + \frac{2m^2}{9}} = \frac{\sqrt{20}}{9}m$

$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \boxed{\frac{8}{10}}$

④ Регалия, стр. 77/3

"От всички равнобедрени Δ с радиус R, определете Δ с максимална сума на дължините на височините"

ΔABC $AC=BC$, $R_{ABC}=R$, $h_a+h_b+h_c \to max$?

Решение

~~Нека дължината на максималната $h_b + h_a$ (гениалн.)~~

$$h_c+h_a+h_b = h_c+2h_a = CB\cdot\sin\alpha + 2\cdot AC\cdot\sin\gamma =$$

$$= 2R\sin\alpha\cdot\sin\alpha + 2CB\cdot\sin(180-2\alpha) =$$

$$= 2R\sin^2\alpha + 2\cdot 2R\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha =$$

$$= 2R(\sin^2\alpha + 4\sin^2\alpha\cos\alpha) =$$

$$= 2R\sin^2\alpha(1+4\cos\alpha) =$$

$$= 2R(1-\cos^2\alpha)(1+4\cos\alpha) =$$

$$= 2R(1-x^2)(1+4x);$$

Като $\alpha\in(0;90) \Rightarrow x\in(0;1)$

$f(x)=(1-x^2)(1+4x) = -4x^3-x^2+4x+1$

$f'(x)\geq 0$

$-12x^2-2x+4\geq 0$

$x\in\left[-\frac{2}{3};\frac{1}{2}\right]$, но $x\in(0;1)$

$\Rightarrow x\in(0;\frac{1}{2}]$

$\Rightarrow h_c+h_a+h_b$ нараства за $x\in[0;\frac{1}{2}]$

$\Rightarrow h_c+h_a+h_b$ достига max за $\cos\alpha=\frac{1}{2}$

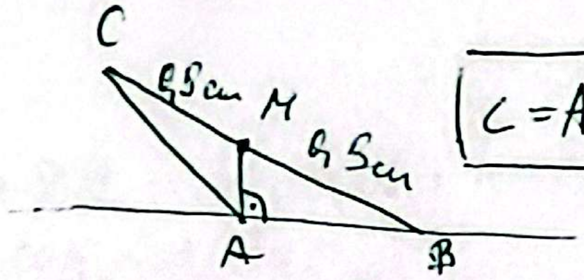
т.е. $\alpha=60^\circ$

т.е. сумата е максимална за равностр. Δ.

(5) Регания стр 77/зад 4

"В $\triangle ABC$ медианата $AM \perp AB$; $BC = 1$ см. Намерете $\cos\alpha$, за който периметърът е най-голям."

Решение



$\boxed{c = AB \quad \angle BM = \frac{1}{2}}$

$4m_a^2 = 2c^2 + 2b^2 - a^2$, по П.Т. $m_a^2 = 0{,}5^2 - AB^2$

$4\left(\frac{1}{4} - c^2\right) = 2c^2 + 2b^2 - 1$

$b^2 = 1 - 3c^2 \Rightarrow b = \sqrt{1 - 3c^2}$

$P = 1 + \sqrt{1 - 3c^2} + c$ // $c \in (0; \frac{1}{2})$ ДМ!

$P'(c) = \frac{\sqrt{1-3c^2} - 3c}{\sqrt{1-3c^2}} \geq 0$

$\sqrt{1-3c^2} - 3c \geq 0$ $\mid \uparrow^2, c > 0$!

$9c^2 \leq 1 - 3c^2$

$c^2 - \frac{1}{12} \leq 0$

$c \in \left(-\frac{1}{\sqrt{12}}; \frac{1}{\sqrt{12}}\right)$ но $c \in (0; \frac{1}{2})$

$\Rightarrow c \in \left(0; \frac{1}{\sqrt{12}}\right) \Rightarrow P$ расте в този интервал.

$\Rightarrow P$ достига максимум при $c = \frac{1}{\sqrt{12}}$ см

$\Rightarrow b = \sqrt{1 - \frac{3}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ см

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{3}$

⑥ Регама стр 77 зад. 5

"В правоъгълния ΔABC височината към хипотенузата $CD = h$. Намерете най малката възможна дължина на хипотенузата"

Решение:

$c = AD + BD = h\cot\alpha + h\cot\beta =$

$= h(\cot\alpha + \operatorname{tg}\alpha) =$

$= h\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\right) =$

$x = \operatorname{tg}\alpha;\ \alpha \in (0; 90^\circ) \Rightarrow x \in (0; +\infty)$

$= h\left(\frac{1}{x} + x\right)$

$c'(x) \geq 0$

$h\left(-\frac{1}{x^2} + 1\right) \geq 0$

$x^2 - 1 \geq 0$

$x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ но $x \in (0; +\infty)$

$\Rightarrow x \in (1; +\infty)$

т.е. $c(x)$ нараства за $(1; +\infty)$ и намалява за $(0; 1)$

т.е. $c(x)$ достига минимум за $\operatorname{tg}\alpha = x = 1$

/т.е. за $\alpha = 45^\circ$/

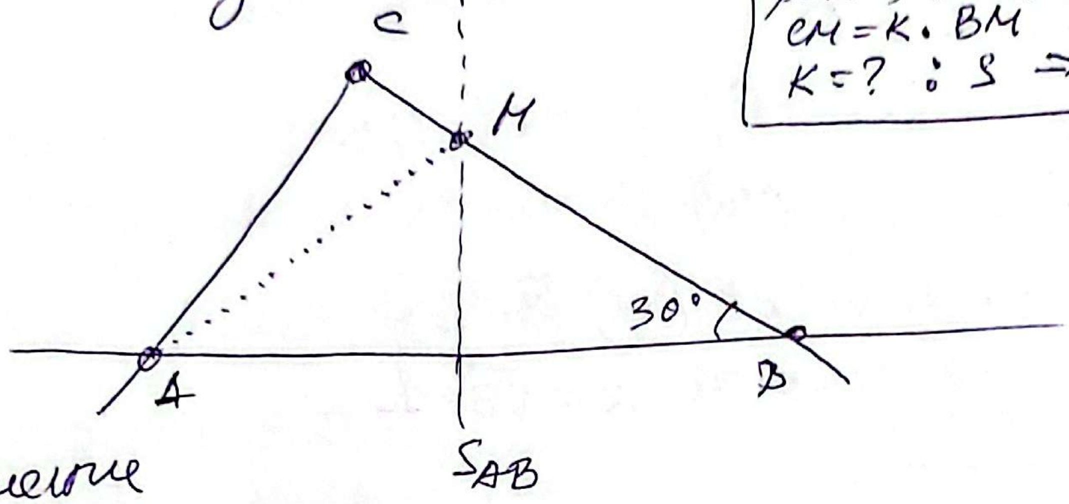
Съответната стойност следва, че е

$c = c_{min} = c(x=1) = h\cdot(1+1) = 2h$

(7) Регалия стр. 77 зад. 6

Радиусът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност е 2, $\angle ABC = 30^\circ$. Симетралата на AB пресича BC в т. M, като $CM = k \cdot BM$. Намерете k, така че лицето на $\triangle ABC$ да е максимално.

$\beta = 30^\circ$, $R = 2$, $S_{AB} \cap BC = M$,
$CM = k \cdot BM$
$k = ?$: $S \Rightarrow max$



Решение

- $AC = 2R \sin\beta = 2$
- Нека $b = BC$; $b \in (0; +\infty)$

// тук b може да се ограничи още.

- $b = BM + CM = BM + k\,BM = (1+k)BM \Rightarrow k > -1$ т.е. $k \in (-1; +\infty)$

$BM = \dfrac{b}{1+k}$; $CM = \dfrac{k \cdot b}{1+k}$

- $M \in S_{AB} \Rightarrow AM = BM \Rightarrow \angle BAM = \angle ABM = 30^\circ$; $\angle AMB = 120^\circ \Rightarrow \angle AMC = 60^\circ$
- $AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2 \cdot AM \cdot MC \cdot \cos 60^\circ$

$$4 = \frac{b^2}{(1+k)^2} + \frac{k^2b^2}{(1+k)^2} - \frac{kb^2}{(1+k)^2} \Rightarrow b^2 = \frac{4(1+k)}{k^2-k+1}$$

- $AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2AM \cdot BM \cos\angle AMB$

$AB = \sqrt{3} \cdot \dfrac{b}{k+1}$

- $S = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\dfrac{b^2}{k+1} = \dfrac{\sqrt{3}(1+k)}{k^2-k+1}$

$S'(k) \geq 0$

$\left(\frac{1+k}{k^2-k+1}\right)' \geq 0$

$\frac{-k^2-2k+2}{(k^2-k+1)^2} \geq 0$

$k^2+2k-2 \leq 0$

$k \in (-1-\sqrt{3}; \sqrt{3}-1)$, но $k \in (-1; +\infty)$

$\Rightarrow k \in (-1; \sqrt{3}-1)$

$\Rightarrow S$ нараства за $k \in (-1; \sqrt{3}-1)$

$\Rightarrow S$ достига max за $k = \sqrt{3}-1$

(8) Реталия стр. 77/7

"Върху отсечка AB е взета точка M. Отсечката AM е страна на равностранен Δ, а отсечката BM - на квадрат. Ако сборът на лицата Δ и квадрата е най-малък, то какво е отношението на AM : MB?

<u>Решение</u>

$AB = a$; $AM = x$; $BM = a - x$; $S_\Delta = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$; $S_\square = (a-x)^2$

$S_{\Delta+\square} = S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + x^2 - 2ax + a^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}+1\right)x^2 - 2ax + a^2$

$\boxed{\begin{matrix} x \in (0; a) \\ a \in (0; +\infty) \end{matrix}}$

$S'(x) \leq 0$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)x - 2a \leq 0$

$x \in \left[-\infty; \frac{4a}{4+\sqrt{3}}\right]$, но $x \in (0; a)$

$\Rightarrow x \in \left(0; \frac{4a}{4+\sqrt{3}}\right]$

$\Rightarrow S$ намалява за $x \in \left(0; \frac{4a}{4+\sqrt{3}}\right]$

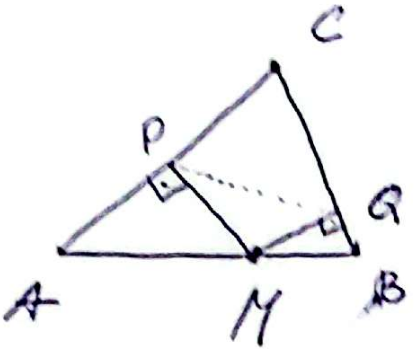
$\Rightarrow S$ достига минимум за $x = \frac{4a}{4+\sqrt{3}}$;

$AM = \frac{4a}{4+\sqrt{3}}$; $BM = a - \frac{4a}{4+\sqrt{3}} = \frac{(4+\sqrt{3})a - 4a}{4+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}a}{4+\sqrt{3}}$

$\frac{AM}{BM} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

(9) Решения стр. 78 / зад. 9

"От точка M, която лежи на страната AB на остроъгълен $\triangle ABC$ са спуснати перпендикуляри $MP \perp AC$, $P \in AC$, $MQ \perp BC$, $Q \in BC$. При какво положение на M дължината на отсечката PQ е минимална?"



Дадено: $\triangle ABC$ (остр.) $M \in AB$, $P \in AC$, $Q \in BC$, $MP \perp AC$, $MQ \perp BC$

? M : $PQ \to min$.

Решение.

$\sphericalangle MPC = \sphericalangle MQC = 90^\circ \Rightarrow M, P, C, Q$ лежат на окръжност с диаметър $CM = 2R$.

$\Rightarrow$ в $\triangle CPQ$ $\quad \dfrac{PQ}{\sin \sphericalangle PCQ} = 2R_{\triangle CPQ} = 2R = CM$, т.е.

$PQ = CM \cdot \sin \sphericalangle PCQ = CM \cdot \sin \sphericalangle ACB$

по условие $\sphericalangle ACB$ е фиксиран, т.е.

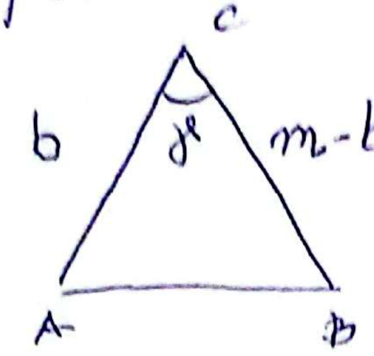
$PQ \to min \Leftrightarrow CM \to min$.

От всички възможни позиции на точка M върху правата AB, когато $CM \perp AB$ отсечката CM достига най-малка стойност (съответно и отс. PQ). Отговор:

$\boxed{\text{при } CM \perp AB \Rightarrow PQ \to min}$

Решения стр 78/10. (10)

Измежду всички триъгълници с един ъгъл γ и фиксиран сбор m на страните, които заграждат този ъгъл, намерете най-малката ст-ст на дължината на третата страна.



Дадено: $\sphericalangle ACB = \gamma$; $AC + BC = m$. $AB = ?$: $AB \to \min$

Решение

Нека $AC = b \Rightarrow BC = m - AC = m - b$; от cos T:

$AB^2 = 2(1+\cos\gamma)b^2 - 2m(1+\cos\gamma)b + m^2 = f(b)$

$f'(b) = 4(1+\cos\gamma)b - 2m(1+\cos\gamma)$

Д.М. ! $m \in (0; \infty)$

$\gamma \in (0; 180^\circ)$

$\cos\gamma \in (-1; 1)$

$b \in (0; m)$

$f'(b) \leq 0$

$4(1+\cos\gamma)b - 2m(1+\cos\gamma) \leq 0 \quad | : 1+\cos\gamma \neq 0, \ | : 2$

$2b - m \leq 0$

$b \in \left(-\infty; \frac{m}{2}\right)$ но $b \in (0; m) \Rightarrow$

$\Rightarrow b \in \left(0; \frac{m}{2}\right)$

$\Rightarrow f$ намалява за $\left(0; \frac{m}{2}\right) \Rightarrow AB^2$ намал. за $\left(0; \frac{m}{2}\right)$

$\Rightarrow AB$ намалява за $\left(0; \frac{m}{2}\right) \Rightarrow AB$ достига min за $b = \frac{m}{2}$

$AB^2 = \left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{m}{2}\right)\cos\gamma = m^2\left(\frac{1-\cos\gamma}{2}\right) =$

$= m^2 \sin^2\frac{\gamma}{2}$

$\Rightarrow AB = m \sin\frac{\gamma}{2}$