Изпит
Вероятности и статистика (СЕМ)

23.08.2022

Време за работа: 180 минути

Указания за работа

При работата върху задачите може да реферирате към теореми и твърдения, които помагат за извеждането на някоя стъпка. Точките имат индикативен характер, но за събеседване е необходима поне една точка.

Задачи

Задача 1. *Нека X, Y са случайни величини.*

- *а) Дайте дефиниция за случайна величина.* ***(0.1 т.)***
- *б) Дайте дефиниция за очакване и дисперсия на случайната величина X, ако тя е непрекъсната.* ***(0.1 т.)***
- *в) Ако $Y \sim Ber(p), p \in (0,1)$, то въведете случайната величина $\mathbb{E}[X|Y]$ като решение на оптимизационна задача.* ***(0.2 т.)***
- *г) В горния случай изведете формула за $\mathbb{E}[X|Y]$.****(0.2 т.)***
- *д) Ако Y е дискретна случайна величина, то покажете, че $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$, ако X не зависи от Y и $\mathbb{E}[X|Y] = X$, ако $X = f(Y)$, където f е произволна функция.* ***(0.4 т.)***

Задача 2. *Нека $(e_n)_{n\geq 1}$ е редица от независими в съвкупност експоненциално разпределени случайни величини, съответно с параметри $(\lambda_n)_{n\geq 1}$.*

- *(1) Намерете $\mathbb{P}(e_1 > x), x \geq 0$, и изчислете $\mathbb{E}[e_1]$.* ***(0.1 т.)***
- *(2) Намерете функцията на моментите на e_1.****(0.1 т.)***
- *(3) Нека $m_n = \min\{j \leq n : e_j\}$. Тогава:*
  - *а) намерете разпределението на m_n;****(0.2 т.)***
  - *б) покажете, че m_n се схожда по вероятност към 0 тогава и само тогава, когато $\sum_{n\geq 1} \lambda_n = \infty$;****(0.3 т.)***
  - *в) ако $\lambda_j = j$, то покажете, че $Y_n = n^2 m_n$ се схожда по разпределение и намерете граничната случайна величина.* ***(0.3 т.)***

Задача 3.

- *(1) Разпишете Централна Гранична Теорема и дискутирайте накратко нейните приложения.* ***(0.3 т.)***
- *(2) Една система, дискретна по времето, е подложена последователно на следните сили: във всеки момент от време, да кажем $j \geq 1$, независимо от предходни и бъдещи моменти от време, действат две независими случайни сили с разпределения $X_j \sim U(0,10)$ и $Y_j \sim N(-5,1)$; общата сила, действаща върху системата до момент $n \geq 1$, е $S_n = \sum_{j=1}^n X_j + \sum_{j=1}^n Y_j$.*
  - *а) За големи n каква е вероятността $\mathbb{P}(S_n > 0)$?* ***(0.2 т.)***
  - *б) За големи n намерете приблизително $\mathbb{P}(S_n > 2\sqrt{n})$.****(0.3 т.)***
  - *в) Ако разгледаме поотделно двата компонента на S_n, т.е. $\sum_{j=1}^n X_j$ и $\sum_{j=1}^n Y_j$, кой от тях ще е по-лесен за прогнозиране?****(0.2 т.)***

Задача 4. *Нека стрелец стреля последователно към центъра на мишена. За $j-$тата стрелба нека означим $X_j, j \geq 1$, случайната величина, измерваща квадратичното отстояние на попадението от центъра. Нека допуснем, че $(X_j)_{j\geq 1}$ са независими в съвкупност и еднакво разпределени, така че $X_1 \overset{d}{=} Z^2$, $Z \sim N(0,1)$. Нека сумарната грешка от първите $N \geq 1$ стрелби е E_N.*

а) *Какво е разпределението на E_N?* ***(0.1 т.)***

б) *Намерете $\mathbb{E}\left[E_N\right]$.* ***(0.2 т.)***

в) *Вярно ли е, че $\lim_{N\to\infty} \frac{E_N}{N}$ съществува и каква е нейната стойност?* ***(0.2 т.)***

г) *Докажете, че*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{E_N}{N} - 1\right| > N^{-\frac{1}{4}}\right) = 0.$$ ***(0.5 т.)***

Задача 5. *Нека X има плътност $f(x;\theta) = C_\theta x^2, x \in (-\theta, 2\theta), \theta > 0$.*

а) *Намерете C_θ.* ***(0.1 т.)***

б) *При извадка $\overrightarrow{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ намерете оценка на θ по метода на моментите.* ***(0.2 т.)***

в) *Вярно ли е, че горната оценка е неизместена и състоятелна?* ***(0.2 т.)***

г) *Намерете максимално правдоподобна оценка за θ.* ***(0.5 т.)***

Задача 6. *Нека тестваме проста хипотеза срещу проста хипотеза за едномерен параметър θ на случайна велиина X с плътност, параметризирана по θ, т.е. $f(x;\theta)$. Нека $\overrightarrow{X}$ е извадка на X с размерност N.*

а) *Дефинирайте грешка от първи и грешка от втори род за дадена критична област.* ***(0.2 т.)***

б) *Дефинирайте оптимална критична област при зададена грешка от първи род.* ***(0.1 т.)***

в) *Разпишете лемата на Нейман-Пирсън.* ***(0.2 т.)***

г) *Докажете лемата на Нейман-Пирсън.* ***(0.5 т.)***