

*Точната формула за оценка се формира в зависимост от резултатите. За приблизителна, може да използвате  $2 +$  брой точки. Време за работа: 3 часа. Успех.*

**Задача 1.** (0.5 т.) Животът на принтер, струващ 100 лв, е експоненциално разпределена случайна величина с очакване 3 години. Според двугодишна гаранция, търговецът връща цялата сума, ако принтерът се повреди през първата година, и половината сума, ако повредата настъпи през втората година. Ако  $S_{100}$  е сумата, която ще върне търговецът, ако е продал 100 принтера, намерете очакването и дисперсията на  $X$ .

**Задача 2.** Два инструмента се използват за определяне на височината  $h$  на сграда. Грешката и при двета е нормално разпределена с очакване 0 и стандартно отклонение  $0.04h$  за първия и  $0.05h$  за втория. Приемаме, че измерванията са независими.

1. (0.25 т.) За всеки уред намерете  $\mathbb{P}(|\text{грешка}| < 0.03h)$ .
2. (0.25 т.) Каква е вероятността аритметичното средно от двете измервания да се отличава от  $h$  с не повече от  $0.03h$ ?
3. (0.25 т.) Ако правите точно по едно измерване с двата удара на дадена сграда. Коя тяхна линейна комбинация би била с очакване  $h$  и най-малко стандартно отклонение?
4. (0.5 т.) Ако работите само с уред 1, приблизително колко измервания биха били нужни, за да бъде грешката под  $0.01h$  с вероятност поне 95 %.

**Задача 3.** Нека непрекъснатият двумерен вектор  $(X, Y)$  има съвместна плътност

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{c}{y^2}, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

1. (0.75 т.) Да се намерят  $c$ ,  $\mathbb{E}[X]$  и  $\mathbb{E}[X|Y = 1/3]$ .
2. (0.25 т.) Да се намери разпределението на  $Z := X/Y$ .

**Задача 4.** Нека  $U \sim U(0, 1)$  и  $V \sim U(-\pi/2, \pi/2)$ .

1. (0.5 т.) Метод за генериране на псевдослучайно число между 0 и 1 чрез  $U$  е да се избере (обикновено голямо) естествено число  $M$  и да се пресметне дробната част на  $MU$ ,  $X := \{MU\}$ . Намерете  $\mathbb{E}X$ ,  $DX$  и  $\text{Cor}(U, X)$ . Какво е мнението ви за този метод?
2. (0.25 т.) Нека  $U_1, \dots, U_{100} \sim U$  са iid. Какво е очакването на всяко от тях? А на най-голямото и най-малкото измежду им?
3. (0.5 т.) Намерете плътността, очакването и дисперсията на сл. вел  $Y := \tan V$ .
4. (0.25 т.) Нека  $Z \sim \text{Cauchy}(1)$ , т.e.  $f_Z(x) = 1/(\pi(1+x^2))$  за  $x \in \mathbb{R}$ . Докажете, че сл.вел.  $1/Z$ ,  $2Z/(1-Z^2)$  и  $(3Z - Z^3)/(1 - 3Z^2)$  имат еднакви разпределения.

*Бонус:*

**Задача 5.** (0.25 т.) Намерете границата

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \left( \frac{n^1}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \dots + \frac{n^n}{n!} \right).$$