Изпит
Статистика и емпирични методи (СЕМ)

18.02.2023

Време за работа: 180 минути

Указания за работа

При работата върху задачите може да реферирате към теореми и твърдения, които помагат за извеждането на някоя стъпка. Точките имат индикативен характер, но за събеседване е необходима поне ***1 точка****.*

Задачи

Задача 1. *Разгледайте следните въпроси.*

(1) *Дайте дефиниция за случайна величина в дадено вероятностно пространство.* ***(0.1 т.)***

(2) *Въведете понятията очакване и дисперсия на дискретна случайна величина.* ***(0.1 т.)***

(3) *Нека Y_n е Гама разпределена с параметри $n, 1$ и $e_1 \sim Exp(1)$:*

- а) *намерете функцията на моментите на e_1;* ***(0.1 т.)***
- б) *намерете функцията на моментите $M_{Y_n}(t)$ на Y_n;* ***(0.2 т.)***
- в) *ако $X_n = Y_n/n$, покажете, че $M_{X_n}(t)$ се схожда;* ***(0.3 т.)***
- г) *ако $V_n = \sqrt{n}\,(X_n - 1)$, вярно ли е, че $M_{V_n}(t)$ се схожда?* ***(0.3 т.)***

Задача 2. *X, Y са случайни величини върху едно вероятностно пространство и $\mathbb{E}\left[|X|\right] < \infty$. Нека възможните стойности на Y са $\mathcal{X} = \{1, 2, 3\}$ с вероятности $\{p_1, p_2, p_3\}$.*

(1) *Въведете $\mathbb{E}\left[X|Y\right]$ като решение на оптимизационна задача.* ***(0.2 т.)***

(2) *Изведете формула за $\mathbb{E}\left[X|Y\right]$.* ***(0.2 т.)***

(3) *Ако $B \subseteq \mathcal{X}$, докажете, че $\mathbb{E}\left[1_B(Y)\mathbb{E}\left[X|Y\right]\right] = \mathbb{E}\left[1_B(Y)X\right]$.* ***(0.2 т.)***

(4) *Ако $X \sim N(Y, 1)$, намерете $\mathbb{E}\left[X\right]$.* ***(0.2 т.)***

(5) *Ако $Y' \stackrel{d}{=} Y$ и Y' е независима от (X, Y), намерете $\mathbb{E}\left[X\right]$, ако знаете, че $X \sim N(YY', 1)$.* ***(0.2 т.)***

Задача 3. *Нека $(X_n)_{n\geq 1}$ е редица от случайни величини. Нека $(e_n)_{n\geq 1}$ е редица от независими в съвкупност еднакво разпределени случайни величини с $e_1 \sim Exp(1)$, дефинирани върху общо вероятностно пространство.*

(1) *Чрез $(X_n)_{n\geq 1}$ въведете $X_n \xrightarrow{d} X$, където X е някаква случайна величина.* ***(0.2 т.)***

(2) *Нека $m_n = \max_{j\leq n}\left(e_j - \log(n)\right), n \geq 1$. Тогава:*

- а) *намерете функцията на разпределение на m_2;* ***(0.3 т.)***
- б) *покажете, че $(m_n)_{n\geq 1}$ се схожда по разпределение и намерете граничната случайна величина.* ***(0.5 т.)***

Задача 4. *Броят на катастрофи в България за n единици от време се моделира с $Y_n \sim Poi(n)$.*

(1) *Намерете пораждащата функция на Y_n.* ***(0.2 т.)***

(2) *За $n = 100000$ каква е вероятността (приблизително) да имаме повече от 100010 катастрофи?* ***(0.2 т.)***

(3) *За $n = 1000000$ каква е вероятността (приблизително) да имаме повече от 1005000 катастрофи?* ***(0.3 т.)***

(4) *Вярно ли е, че случайните величини* $\frac{Y_n}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}$ *се схождат по разпределение при* $n \to \infty$*?* ***(0.3 т.)***

Задача 5. *Нека* $U \sim U(0,1)$. *Нека* $X = U^\theta, \theta > 0$, *е случайна величина, чийто параметър* θ *следва да определим.*

(1) *Дайте обща дефиниция за максимално правдоподобна оценка.* ***(0.2 т.)***
(2) *Намерете максимално правдоподобна оценка за* θ *и намерете оценка по метода на моментите.* ***(0.4 т.)***
(3) *Вярно ли е, че максимално правподобната оценка и оценката по метода на моментите са силно състоятелни?* ***(0.4 т.)***

Задача 6. *Нека изследваме* X, *чиято функция на разпределение е параметризирана по* $\theta \in \mathbb{R}$. *Нека* $\overrightarrow{X}$ *е извадка на* X *с размерност* N.

(1) *Дефинирайте точкова оценка за* θ.***(0.1 т.)***
(2) *Дефинирайте понятието централна статистика и обяснете как тя се използва за конструирането на доверителен интервал.* ***(0.3 т.)***
(3) *Ако* $X \sim N(\mu, 1)$, *добийте доверителен интервал за* μ *с ниво на доверие* γ.***(0.2 т.)***
(4) *Ако знаем, че* $DX = \sigma^2 < \infty$ *и* $\mathbb{E}[X] = \mu < \infty$, *обяснете как можем да конструираме еквивалент на централна статистика за добиването на доверителен интервал за* μ *при неизвестно* σ^2.***(0.4 т.)***