Точната формула за оценка се формира в зависимост от резултатите. За приблизителна, може да използвате 2 + брой точки. Време за работа: 3 часа. Успех.

Задача 1.

1. (0.25 т.) В кутия има 12 различими болта, 5 от които са дефектни. Избираме на случаен принцип 4 от болтовете. Каква е вероятността да няма два дефектни болта един до друг в реда, в който сте ги избрали?

2. (0.25 т.) Случайните величини X и Y имат следното съвместно разпределение:

$Y \backslash X$	1	2	4
-1	$3/15$	$1/15$	0
0	α	2α	$3/15$
1	$1/15$	0	$1/15$

   Намерете α, маргиналните разпределения на X и Y, $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $Cov(X, Y)$ и $\rho_{X,Y}$

3. (0.25 т.) Фабрика произвежда артикули, които са дефектни с вероятност 0.02, независимо един от друг. Проверявате артикулите, докато намерите 3 дефектни. Нека сл.в. X е броят на проверените артикули. Намерете $\mathbb{P}(X > 100)$. Оценете вероятността да трябва да проверите по-малко от 500 артикула.

4. (0.25 т.) Нека $X \sim \text{Po}(\lambda_1)$ и $Y \sim \text{Po}(\lambda_2)$ са независими случайни величини. Дефинираме $T := X + Y$. Намерете условното разпределение и очакване на X спрямо T.

Задача 2. (1 т.) Млад брокер звъни подред на номерата в телефонния указател, докато не успее да продаде луксозен имот в кв. Къпинова равнина. Вероятността да успее на всяко обаждане е α. Нека сл. в. N е броят на хората, отклонили примамливата оферта. По време на всяко обаждане, младият брокер се опитва да събере допълнителна информация от отрязалите го хора, като ги пита за електронния им адрес с цел да ги включи в мейлинг списъка си. При $N = n$, вероятността всеки един от отхвърлилите офертата n човека да си даде имейла е β, независмо от останалите. Ако обозначим с X броят на събраните от брокера имейли, идентифицирайте разпределението на X и намерете неговото очакване и дисперсия.

Задача 3. (1 т.) Имаме следната игра: хвърляме правилен зар. В началото на играта разполагаме с 10 хвърляния. Когато се падне 6-ца получаваме 5 бонус игри, когато се падне 5-ца получаваме 3. Тези бонус игри могат да се дават до 2 пъти - ако вече 2 пъти сме получавали допълнително игри (било то по 5 или по 3) при следващата паднала се 5ца или 6ца няма да получим допълнително хвърляния. Да се намери очаквания брой изиграни игри.

Задача 4. Фламинго подскача върху целите числа по следния начин: започвайки от 0, на всяка стъпка фламингото избира равномерно едно от следващите 3 числа и скача върху него (т.е. ако в някой момент фламингото се намира върху $m \in \mathbb{N}_0$ в следващия момент ще се намира в $m+1, m+2$ или $m+3$, всяко с еднаква вероятност). Нека обозначим с X_n позицията на фламингото на n-ти ход, за $n \in \mathbb{N}$.

1. (0.25 т.) Намерете разпределението на X_2 и пресметнете $\mathbb{P}(X_3 = 6)$.

2. (0.25 т.) Намерете очакването и дисперсията на X_n.

3. (0.25 т.) Каква е корелацията $\rho_{X_n, X_{n+k}}$ между X_n и X_{n+k},? Какво се случва при $k \to \infty$?

Ще означим с τ_m случайната величина, отчитаща броя ходове, които отнемат на фламингото да стъпи върху $m \in \mathbb{N}$ ако това се случи, и полагаме $\tau_m = \infty$ иначе.

4. (0.25 т.) Пресметнете $\mathbb{P}(\tau_4 = 2)$, $\mathbb{P}(\tau_4 = 3)$ и $\mathbb{P}(\tau_4 < \infty)$.

5. (0.25 т.) Пресметнете $\mathbb{E}[\ \tau_5 \mid \tau_5 < \infty]$.