Точната формула за оценка се формира в зависимост от резултатите. За приблизителна, може да използвате 2 + брой точки. Време за работа: 3 часа. Успех.

Задача 1.

1. (0.25 т.) Във вътрешността на квадрат със страна R случайно се избират точките A и B. Да се намери вероятността окръжността с център A и радиус $|AB|$ да лежи във вътрешността на квадрата.

2. (0.5 т.) Нека $X \sim \mathrm{Unif}(0,1)$. Дефинираме сл.в. $Y := X(1-X)$. Намерете $f_y, F_Y, \mathbb{E}[Y], \mathrm{Var}(Y)$.

3. (0.5 т.) Нека сл.в. X и Y имат съвместна плътност

$$f_{XY}(x,y) := \begin{cases} c(x+y), & x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Дефинираме сл.в.

$$U := X + Y, \qquad V := 1 - \frac{Y}{U}.$$

Намерете $f_{U,V}$, $\mathrm{Cov}(U,V)$, $\mathbb{E}[X|U]$ и $\mathbb{E}[U|Y]$.

Задача 2. В метростанция е монтирано електронно табло с разписание, изградено от LED 48×40 пиксела. Приема се, че времената до изгаряне на отделните светодиоди са независими и могат да се моделират с експоненциално разпределение със средна продължителност на работа 40 000 часа за един светодиод. Таблото работи по 18 часа на ден. Практиката показва, че ако работят по-малко от 85% от светодиодите, текстът става трудночитаем и таблото трябва да се смени.

1. (0.25 т.) Дайте приблизителна оценка за вероятността да се наложи подмяна на таблото след 365 дни експлоатация.

2. (0.5 т.) Нека T_{min} е времето (в работни часове) до изгарянето на първия светодиод. Намерете разпределението на T_{min} и $\mathbb{E}[T_{min}]$. Намерете вероятността първата повреда да настъпи в рамките на първите k календарни дни експлоатация. Намерете медианата на T_{min}.

3. (0.5 т.) След 12 месеца се прави проверка и се установява, че точно 1700 от светодиодите работят. Какво е разпределението на времето до изгарянето на един отделен светодиод към този момент? Намерете вероятността таблото да стане нечетливо в рамките на следващите 3 месеца.

Задача 3. В завод за бутилиране на натурален сок, количеството сок X (в милилитри) в една бутилка може да се моделира с нормално разпределение с параметър $\sigma^2 = 12^2$.

1. (0.25 т.) Ако се знае, че 20% от бутилките съдържат по-малко от 485 ml сок, намерете параметъра μ. Намерете процента бутилки, които съдържат повече от 525 ml.

2. (0.25 т.) След технологична промяна да допуснем, че моделът става $X \sim \mathrm{N}(505, \sigma^2)$. Намерете σ, ако знаете, че 95% от бутилките съдържат между 490 ml и 520 ml сок.

3. (0.5 т.) След промяната $X \sim \mathrm{N}(505, \sigma^2)$, където σ е намерено в предишната подточка, се извършва двуфазов контрол на качеството. Първата фаза е следната – от една произведена партида се избират на случаен принцип $n = 30$ бутилки и се измерват обемите им. Партидата се отхвърля, ако има поне 3 бутилки с обем под 490 ml. Ако партидата не е отхвърлена по време на първата фаза, се преминава към втора фаза – от партидата се взимат още $m = 20$ бутилки и се изчислява средният обем на всички $m + n = 50$ бутилки. Ако общата им средна стойност е под 503 ml, партидата се отхвърля, а иначе се приема. Намерете вероятността партидата да бъде отхвърлена.

Задача 4. (0.75 т.) Нивото на натоварване на сървър Y е експоненциално разпределена случайна величина с параметър $\lambda > 0$. При дадено ниво на натоварване $Y = y$, времето за обработка на дадена изчислителна задача X (в секунди) е експоненциално разпределено с параметър y. Намерете f_X, $\mathbb{P}(X > x)$, $\mathbb{E}[X]$ и разпределението на $X + Y$. Непрекъсната сл.в. ли е $X + Y$?