

Точната формула за оценка се формира в зависимост от резултатите. За приблизителна, може да използвате $2 + \text{брой точки}$. Време за работа: 3 часа. Успех.

Задача 1. В урна има топки номерирани с числата $1, 2, \dots, 14$. Последователно се вадят топки без връщане. Да се определи вероятността на събитията:

1. (0.25 т.) $A = \{\text{трите номера са четни}\};$
2. (0.25 т.) $B = \{\text{най-големият номер е } 10\};$
3. (0.25 т.) $C = \{\text{произведението от номерата се дели на } 3\};$
4. (0.25 т.) $D = \{\text{извадени са последователни числа (без значение реда на изваждане)}\};$

(0.5 т.) Независими ли са A и B ? Каква е вероятността на C , ако знаем, че се е изпълнило A ?

Задача 2. Случайните величини X и Y имат следното съвместно разпределение:

$Y \setminus X$	1	2	4
-1	3/15	1/15	0
0	α	2α	3/15
1	1/15	0	1/15

Намерете:

1. (0.1 т.) Стойността на неизвестния параметър α и маргиналните разпределения на X и Y ;
2. (0.2 т.) $\mathbb{E}[X]$ и $\mathbb{E}[Y]$;
3. (0.5 т.) $\text{Cov}(X, Y)$ и $\rho_{X,Y}$ ¹;

Задача 3. Нека X_1, X_2, \dots, X_n са независими и еднакво разпределени случаини величини и $S_n := X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

1. (0.5 т.) Намерете $\mathbb{E}[X_i|S_n]$, $1 \leq i \leq n$.
2. (0.25 т.) Нека $X_1 \sim \text{Geo}(p)$. Намерете пораждащата функция $g_{S_n}(s)$ на S_n .
3. (0.25 т.) Пресметнете $\mathbb{P}(X_1 > X_2 + X_3)$ и $\mathbb{P}(X_1 > X_2 + X_3|S_3 = 15)$.

Задача 4. По случай празника на културата в местния театър има постановка, за която всички n места са резервириани. В деня на представлението, зрителите се събират пред входа и биват пускани един по един, като всеки от тях трябва да заеме мястото от резервацията си. Първият допуснат е разсеян и вместо да заеме своето място в публиката, избира произволно от n -те места и сядда на него. Всеки от следващите допуснати заема мястото си, в случай че е свободно, а иначе избира произволно *свободно* място.

1. (0.25 т.) Пресметнете вероятността поотделно първият, вторият и третият да заемат предвидените си места.
2. (0.25 т.) Васил имал изпит във ФМИ и се забавил за представлението. Каква е вероятността да заеме предвиденото си място?²
3. (0.5 т.) Намерете вероятността k -тият гост да заеме предвиденото си място.

¹Ако извършвате пресмятания с калкулатор, отговорите да са с точност 0.0001

²Приемаме, че Васил е последен.