Формулата за оценка е: 2 + точки. Време за работа: 3 часа. Успех!

Задача 1. (0.75 т.) Разглеждаме опит с последователно хвърляне на монета, при която вероятността за ези е p, а за тура е $1-p$. Нека Y означава броя хвърляния, нужни за да се появят точно 3 езита.

1. (0.25 т.) Намерете $\mathbb{P}(Y=n)$ и $\mathbb{E}[Y]$.
2. (0.5 т.) Изразете $\mathbb{P}(Y \le 2k)$, а за $p=1/2$ и голямо k, дайте приблизителна негова оценка.

Задача 2. (1 т.) В кутия А има листчета, на които са записани целите числа от 1 до 10 вкл. Ангел избира равномерно случайно число K от 1 до 10 и тегли K случайно избрани листчета от кутия А, които след това поставя в кутия Б.

1. (0.25 т.) Какво е очакването на числото, записано на случайно листче от кутия Б?
2. (0.25 т.) Каква е вероятността да има две числа със сбор 11 в кутия Б?
3. (0.5 т.) Нека X е минималното число в кутия Б и нека N е броят тегления с връщане от кутия Б до първия път, когато изтеглим X. Геометрично разпределено ли е N и ако да, с какъв параметър? Намерете $\mathbb{E}[N]$.

Задача 3. (1.25 т.) Нека X, Y и Z са случайни величини със съответни плътности

$$f_X(x) \;=\; \begin{cases} k\,x\,e^{-x} & x \ge 0 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \qquad \text{и} \qquad f_{Y,Z}(x,y) \;=\; \begin{cases} c\,(x+y) & x>0,\ y>0,\ x+y<1 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

където k и c са константи, и X е независима от (Y,Z).

1. (0.25 т.) Намерете k, c, както и очакванията на X, Y и Z.
2. (0.25 т.) Намерете вероятностите $\mathbb{P}(X>2)$ и $\mathbb{P}(Y>1/2)$.
3. (0.5 т.) Вярно ли е, че Y и Z са независими? Намерете ковариацията им. Пресметнете $\mathbb{E}\left[Z|Y\right]$, $\mathbb{E}\left[X|Y\right]$ и $\mathbb{E}\left[Z|(Y=\mathbb{E}\left[Y\right])\right]$.
4. (0.25 т.) Намерете плътността на случайната величина $\eta := YZ$.

Задача 4. (1.0 т.) Нека σ е пермутация на множеството $\{1,2,\dots,n\}$, избрана равномерно от всички $n!$ възможности. За пълнота, да напомним, че пермутация на $\{1,2,\dots,n\}$ е биективна функция

$$\sigma : \{1,2,\dots,n\} \to \{1,2,\dots,n\},$$

т.е. на всяко число от 1 до n се задава точно един образ и обратното. Всяка пермутация може да се разложи на несъвместими множества, наречени цикли. Един цикъл от дължина k е редица от различни елементи $(a_1, a_2, \dots, a_k)$, за която е изпълнено:

$$\sigma(a_1)=a_2, \quad \sigma(a_2)=a_3, \quad \dots, \quad \sigma(a_{k-1})=a_k, \quad \sigma(a_k)=a_1.$$

Да дефинираме случайните величини

$$c(\sigma) := \text{брой на циклите в } \sigma, \quad F(\sigma) := \text{броят на фиксираните точки, т.е. } i \text{ за които } \sigma(i)=i.$$

1. (0.25 т.) Покажете, че за всяко $1 \le k \le n$, вероятността числото 1 да е в цикъл от дължина k е $1/n$.
2. (0.25 т.) Намерете $\mathbb{E}\big[c(\sigma)\big]$ и $\mathbb{E}\big[F(\sigma)\big]$.
3. (0.25 т.) Намерете вероятността σ да няма нито една фиксирана точка и намерете границата на тази вероятност при $n \to \infty$.
4. (0.25 т.) Вярно ли е, че
$$\frac{c(\sigma)-\log n}{\sqrt{\log n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1)?$$
Обосновете отговора си напълно, като посочите какви допускания и теореми биха били нужни и извършите съответните пресмятания.