Точната формула за оценка се формира в зависимост от резултатите. За приблизителна, може да използвате 2 + брой точки. Време за работа: 210 минути. Успех.

Някои формули: за $|x| < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n! = e^x$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$, $\sum_{n=0}^{\infty} n^2x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \binom{n+k}{n} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.

Задача 1. (общо 1.75 т.)

1. (0.25) Нека $\mathbb{P}(A) = 0.4$, $\mathbb{P}(B) = 0.3$ и $\mathbb{P}(\overline{A \cup B}) = 0.42$. Независими ли са събитията A и B?
2. (0.25 т.) Петима участници се състезават в математическа викторина. Всяка задача в състезанието има 4 възможни отговора, като само един е верен. Всеки участник отговаря на 5 задачи, а изборът на отговор е случаен. Намерете вероятността даден участник да отговори правилно на точно 3 задачи. Каква е вероятността да е отговорил на задачи 1, 3 и 5, ако знаете, че е отговорил правилно на точно 3 въпроса?
3. (0.25 т.) Нека X, Y и Z са независими случайни величини. Докажете, че $Cov(X+Y, Z) = Cov(X, Z) + Cov(Y, Z)$. Вярно ли е това, ако X, Y и Z не са независими.
4. (0.25 т.) Честна монета се хвърля 10 пъти. Намерете корелацията на броя езита от първите 7 хвърляния и броя тура от последните 7 хвърляния.
5. (0.25 т.) Група от 10 души играят игра с теглене на карти. Всеки човек тегли карта от тесте с 52 карти (без замяна). Играч печели, ако тегли асо. Ако поне един играч печели, играта се прекратява, а ако никой не спечели, играта продължава с ново теглене от оставащите карти. Намерете вероятността играта да приключи след точно три рунда теглене.
6. (0.5 т.) Всяка от страните на зар с 6 страни е запълнена с равномерно случайно число от $\{1, \dots, 6\}$. Каква е вероятността да се падне 6-ца при хвърляне на зара? Колко е очакването на броя хвърляния до първия момент, в който произведението на всички резултати се дели на 6?

Задача 2. (общо 1.25 т.) Трима приятели решават да играят срещу казино на следната игра:

- Всеки от тях заплаща по 1 лев такса участие;
- След това се хвърля честна монета до първия път, когато се падне тура. За всяко ези казиното изплаща по 1 лев.
- При всяка печалба приятелите избират на случаен принцип кой да вземе този 1 лев.

1. (0.50 т.) Каква е вероятността всеки от тримата да не е на загуба?
2. (0.75 т.) Каква е очакваната печалба на всеки от приятелите? Намерете също и съответното разпределение и дисперсия.

Задача 3. (общо 1.60 т.) Ангел е млад треньор на покемони, който знае, че в околността на града има 10 вида летящи такива. По негова преценка, му е нужно около половин час, за да срещне покемон.

1. (0.50 т.) В такъв случай какво е очакваното време, което ще му е нужно, за да срещне всичките 10 вида покемони? Може да предположите, че различните видове са еднакво редки.
2. (0.25 т.) Нека X_i е броят видени покемони до първия от вид i. Какво е разпределението на X_i? Изразете чрез X_i търсеното в 1.
3. (0.10 т.) Интересен факт е, че формулата за включване и изключване е валидна в различни контексти. Например за max и min на числа: $\max\{x_1, x_2\} = x_1 + x_2 - \min\{x_1, x_2\}$. Обобщете последното за n числа.
4. (0.25 т.) Нека Y_1, Y_2 са независими геометрични сл. вел. с параметри p_1 и p_2. Намерете разпределението на $\min\{Y_1, Y_2\}$.
5. (0.50 т.) Ангел успешно е пресеметнал очакването от точка 1., но си дава сметка, че допускането му, че 10-ти вида покемони са еднакво редки е нереалистично. Можете ли да отговорите на въпроса от 1., ако вероятността случаен покемон да бъде от вид i е пропорционална на i? *(Ако искате да получите експлицитен отговор, решете задачата с 4 вида покемони.)*

Задача 4. *(Бонус 1.50 т.)* В тази задача ще дефинираме някои от основните понятия в така наречената *теория на информацията*, въведени от Шанън в средата на 20-ти век, като *ентропия* и *информация*.

Код ще наричаме множество от двоични думи, например $\{00, 01, 10, 11\}$, чиято идея е да бъдат предадени по канал за предаване на някаква информация. Например наляво/надясно/нагоре/надолу или каквито и да са други 4 опции.

Изискване за всички кодове, които ще разглеждаме е да бъдат *префиксни*. Това означава, че няма кодова дума, която да е префикс на друга кодова дума. Например не допускаме код $\{0, 00, 001\}$, тъй като 0 е префикс на 00 и 001, както и 00 е префикс на 001. Такава ситуация е предпоставка за проблеми при разкодирането на получаващия информацията.

Например ако искаме да предадем информация за изхода на случаен експеримент с 32 изхода, всички от които са равновероятни, можем да го направим чрез всички 5 битови думи.

Да предположим, че в състезание с 4 коня, вероятностите за победа са $(1/2, 1/4, 1/8, 1/8)$. Можем да кодираме информацията за печелившия кон чрез всички двубитови думи. Но можем да направим и нещо, което е по-оптимално в смисъл на очакван брой нужни битове за съобщението! Да кодираме кон 1 с 0, кон 2 с 10, кон 3 с 110 и кон 4 с 111.

- (0.25 т.) Префиксен ли е предложеният код? Какъв е очакваният брой нужни битове за съобщаването на печелившия кон?

Ентропията е понятие от термодинамиката, което най-често се описва неформално като *мярка за безпорядък* или също *мярка за случайност* във вероятностен контекст. Ако X е дискретна случайна величина и $p_X(k) := \mathbb{P}(X = k)$, то дефинираме ентропията на X чрез

$$H(X) := \mathbb{E}\left[-\log_2(p_X(X))\right] = -\sum_k \log_2(\mathbb{P}(X = k))\mathbb{P}(X = k).$$

По-инженерно тълкуване на ентропията на случайна величина е *минималното очакване на броя битове, който е нужен за предаването на информация за изхода на* X!

- (0.25 т.) Пресметнете ентропията на случайната величина от последния пример и сравнете с очакването от предишната точка.

Нека X и Y са дискретни случайни величини и $p_{X,Y}(k, l) := \mathbb{P}(X = k, Y = l)$. Дефинираме съвместна ентропия на X и Y,

$$H(X, Y) = -\mathbb{E}\left[\log_2(P_{X,Y}(X, Y)\right] = -\sum_{k,l} \log_2\left(P(X = k, Y = l)\right) P(X = k, Y = l)$$

и условна ентропия $H(X|Y)$ чрез

$$H(X|Y) = \sum_{k,l} \mathbb{P}(X = k, Y = l) \log_2\left(\frac{\mathbb{P}(X = k, Y = l)}{\mathbb{P}(X = k)}\right).$$

Случайната величина Y може да предоставя информация за случайната величина X и съответно да *„намалява случайността ѝ“*. Количеството промяна, наричаме *съвместна информация на* X *и* Y:

$$I(X, Y) = H(X) - H(X|Y).$$

- (0.25 т.) Докажете, че $H(X, Y) = H(X) + H(Y|X)$ и че $I(X, Y) = I(Y, X)$.

- (0.25 т.) Хвърляме се справедлива монета и нека X е броят хвърляния до първо ези. Намерете $H(X)$.

- (0.25 т.) За X от горната точка предложете „ефективна“ последователност от въпроси с отговори да–не от вида: „Съдържа ли се X в множеството S?“ Сравнете $H(X)$ с очаквания брой въпроси, необходими за определяне на X.

- (0.25 т.) Нека Y е дискретна случайна величина със стойности в $(0, 1)$. Сравнете $H(Y)$ и $H(Z)$, където $Z = 2Y$; както и $Z = \cos(Y)$. Обяснете полученото.