q-разностные уравнения

Гаянов Никита Владимирович

18 сентября 2023 г.

Аннотация

This is a draft about q-difference equations and asymptotic expansions of their solutions. Here you might see theory about linear q-difference equations, power expansions, and new approach for searching logarithmic solution.

1 Preliminary

What is q-difference? This is a little bit tricky question. First aff all we would need to define q-different operator σ_q(usually we well use only one q in equation and omit it), which is actually is family of operators, depending on q. And domain of such an operator may be really different. There are some examples.

Consider all functions acting from $\mathbb{C}$ to subset of $\mathbb{C}$. Then $\sigma_q[f](z) = f(qz)$.

Consider Hahn series $\mathbb{C}[\![z^{\mathbb{R}}]\!]$. A Hahn series f with complex coefficients and real exponents is a formal sum $f(z) = \sum_{\mu\in\mathbb{R}} f_\mu z^\mu$ whose coefficients f_μ are complex numbers and whose support, that is, the set $\{\mu \in \mathbb{R} : f_\mu \neq 0\}$, is a well ordered set.

For such Hahn series, σ is

$\sigma[f](z) = \sum_{\mu\in\mathbb{R}} f_\mu q^\mu z^\mu$. Note that Hahn series needn't to converge anywhere.

And for sake of power-log expansions consider power-log transeries: power log-transeries f is $\sum_{i,j=0}^{\infty} f_{ij} \log_q^j(x) z^i$.

Here we define $\sigma[f](z) = \sum_{i,j=0}^{\infty} f_{ij} (\log_q(z) + 1)^j z^i$.

Note that here definition is a a little bit trickier than in previous, because logarithm is a branching function, and $\sigma \log_q(z)$ not always equals $1 + \log_q(z)$. Also you may see, that if $q = 1$, then we actually don't have q-diffirences. Also, we don't use $q = 0$, since $\sigma[f](x) \equiv f(0)$.

So, we start from strict definitions.

Definition 1 (Dulac series)**.** Dulac series is a formal series of the form $\sum_{k=0}^{\infty} P_k(\log_q z) z^k$, where P_k is a polynomial.

Definition 2 (Equal Dulac series)**.** Two Dulac serias are formally equal $(\sum_{k=0}^{\infty} P_k(\log_q z) z^k$ and $\sum_{k=0}^{\infty} Q_k(\log_q z) z^k)$, if $P_k \equiv Q_k$ for all $k \in Z_+$.

For the rest of paper we will consider only formal equality of Dulac series, so we will use a different designations.

Definition 3 (Dulac series - 2)**.** Dulac series is a formal series of two independent variables of the form $\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) z^k$, where P_k is a polynomial.

Remark 1. You can see, that two trans-series are equial in values $z = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln^k z}{k!}, if |z - 1| < 1$, but they are not equal in the formal meaning.

If we look at q-difference for actual function. You see that $\sigma[z] = qz$, if we look at function $w = \log_q z = \frac{\ln_z}{\ln_q}$, where $\ln_z$ is defined in all complex plane exept the set $\mathbb{R}_-$, and $\log_q 1 = 0$, then you may see that $\log_q z = \log_q z + 1$ if $-\pi < \arg z + \arg q \leq \pi$. If inequality does not hold, then $|\log_q qz| = |\log_q z + 1|$, $\arg \log_q z = \arg(\log_q z + 1) + 2\pi n$ for some $n \in \mathbb{Z}$ such that $-\pi < \arg(\log_q z + 1) + 2\pi n \leq \pi$.

Definition 4 (q-difference operator for Dulac series)**.** Let $f = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) z^k$, then $\sigma[f] = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t+1) q^k z^k$ is a q-difference derivative of f.

Definition 5. An algebraic q-difference equation is equation of the form

$$y$$

Для такого класса уравнений существуют алгоритмы нахождения степенных разложений (см. cite), однако известно, что существуют нестепенные разложения, например уравнение

$$y(qx) - y(x) = 1$$

обладает решением $y(x) = \log_q x$ (главная ветвь), которое не представляется разложением степенного ряда в окрестности(в некотором секторе) нуля. Действительно:

$$y(qx)-y(x) = \log_q(qx)-\log_q x = \frac{\ln|qx| - \ln|x| + i\arg(qx) - i\arg(x)}{\ln|q| + i\arg(q)} = \\ = \frac{\ln|q| + i\arg(qx) - i\arg(x)}{\ln|q| + i\arg(q)} = 1$$

при условии, что $\arg(qx) = \arg(q) + \arg(x)$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $-\pi < \arg(q) + \arg(x) \leqslant \pi$, т.е $y(x) = \log_q x$, является решением уравнения $y(qx) - y(x) = 1$ в секторе $-\pi - \arg(q) < \arg(x) \leqslant \pi - \arg(q)$

Theorem 1. Уравнение вида

$$L(\sigma)y = xM(x, \log_q x, y, \sigma y, \dots, \sigma^n y), \tag{1}$$

где $L(\sigma) = \sum_{j=0}^{n} a_j(\sigma)^j$ – многочлен от оператора σ,

$M \in \mathbb{C}[x, t, y_0, \dots, y_n]$ – многочлен от $n+3$ переменных,

обладает N-параметрическим формальным решением уравнения (1) в виде ряда $\sum_{k=0}^{\infty} P_k(\log_q x)x^k$, где P_k – многочлены, N – количество корней $L(z)$, которые имеют вид $q^n, n \in \mathbb{N}$.

Remark 2. Если $N = 0$, то говорим, что отсутствует резонанс.

Remark 3. Если $N = 0$, а в правой части отсутствуют логарифмы, то уравнение обладает степенным решением.

Remark 4. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} P_k(\log_q x)x^k$ называется рядом Дюлака.

Example 1 (резонанса нет и в правой части нет логарифма, решение выражается в виде степенного ряда(многочлена)).

$$\sigma y - 2y = qx,$$
$$y(x) = \begin{cases} \frac{q}{q-2}x, q \neq 2; \\ x \log_2 x, q = 2. \end{cases}$$

Example 2 (резонанса нет и в правой части логарифм, решение выражается в виде ряда).

$$\sigma y - (q+2)y = x \log_q x + xy,$$
$$y(x) = -\left(\frac{1}{2}\log_q x + q/4\right) x + o(x)\,, x \to 0.$$

Example 3 (резонанса нет, справа логарифм, можно посчитать решение).

$$\sigma y - 2y = x \log_q x,$$
$$qP_1(t+1) - 2P_1(t) = t,$$
$$y(x) = \begin{cases} x\left(\frac{\log_q x}{q-2} + \frac{q}{(q-2)^2}\right), q \neq 2 \\ x\left(\log_q^2 x/4 - 1/4\log_q x + C\right), q = 2. \end{cases}$$

Example 4 (резонанса нет, справа логарифм, можно посчитать решение).

$$\sigma y - 2y = x \log_q x,$$
$$y(x) = x\left(\frac{\log_q x}{q-2} + \frac{q}{(q-2)^2}\right), q \neq 2.$$

Example 5 (Есть резонанс, в правой части нет логарифма, есть решение в виде ряда Дюлака).

$$\sigma y - qy = x,$$
$$y(x) = (C + \log_q x)\frac{x}{q}.$$

Уравнение (1) не является алгебраическим, так как в правой части присутствует логарифм. Однако была доказано, что при существовании решения в виде ряда Дюлака для некоторые алгебраические q-разностные уравнения сводятся заменой к виду (1).

Theorem 2. Пусть q-разностное алгебраическое уравнение (**??**)

обладает формальным решением в виде ряда Дюлака.

$$F(x, \Phi) = 0, \Phi = (\varphi, \sigma\varphi, \dots, \sigma^n\varphi).$$

Пусть также $\frac{\partial F}{\partial y_j}(x,\Phi) = a_j x^m + b_j(\log_q x)x^{m+1} + \dots$ и пусть не все $a_j = 0$. Тогда существует замена, которая приводит уравнение к специальному виду (1).

Example 6. Уравнение

$$\sigma y - qx - y^2 = 0$$

сводится заменой $y = 1 + \frac{q}{q-2}x + xv$ к виду

$$q\sigma v = x\left(\left(\frac{q}{q-2}\right)^2 + 2v\frac{q}{q-2} + v^2\right).$$

Для нахождения начальных членов разложеня предлагается использовать метод многоугольников Ньютона:

Definition 6. Для алгебраического уравнения

$$F(x, y, \sigma y, \dots, \sigma^n y) = \sum_{k=1}^{n} C_k x^{a_k} y^{\alpha_{k0}} \dots (\sigma^n y)^{\alpha_{kn}} = 0$$

многоугольником Ньютона называется

$$N(F) = Conv\left(\left\{\left(a_k, \sum_{i=0}^{n} \alpha_{ki}\right)\right\}_{k=1}^{N}\right),$$

то есть каждому моному F ставится в соответствие точка на плоскости. Выпуклая оболочка этих точек прендставляет собой многоугольнгик Ньютона.

Lemma 1. Степенными преобразованиями:

1. $y = x^s \hat{y}$,
2. $F(x, y, \dots, \sigma^n y) = x^s \hat{F}(x, y, \dots, \sigma^n y)$.

Можно привести любое негоризонтальное ребро в многоугольнике Ньютона к вертикальному.

Вертикальным ребрам соответствует укороченное уравнение

$$G(P(t), \dots, P(t+n)) = \sum_k \gamma_k q^\lambda P^{\alpha_{k_0}}(t) \dots P^{\alpha_{k_n}}(t+n) = 0.$$

Это алгебраическое разностное автономное уравнение. Для данного уравнения ищются решения в виде многочленов.

Как было показано в (cite), если $n = 1$, тоб если решение в виде многочлена $P(t)$ существует, то $\deg P \leq \deg G$. В случае $n > 1$ существуют уравнения, для которых не будет верхней оценки степени решения.

Example 7.

$$\begin{gathered} G(P(x), P(x-1), P(x-2), P(x-3)) = P(x)P(x-2)P(x-3) - \\ - 2P(x-1)^2 P(x-3) + P(x-1)P(x-2)^2 + \\ + P(x)P(x-1)P(x-3) - 2P(x)P(x-2)^2 + P(x-1)^2 P(x-2) = 0 \end{gathered}$$

имеет решение в виде факториальной степени:

$g_n(x) = (x+1)(x+a-1)\dots(x+a-(n-1))$.