qdif

Гаянов Никита

February 2022

1 Определение

Уравнение

$$P(z, f(z), f(qz), \dots, f(q^n z)) = 0$$

Где P - полином называется q-разностным

2 Пространство

Решения будем искать в ввиде рядов

$$f(x) = \sum_{k,n \geq 0} c_{n,k} \log_q^{-k}(z)\, z^n$$

Рассмотрим множество таких рядов (power-log transseries), таких что

$$\sum_{n,k \geq 0} \frac{|c_{nk}|}{n!k!} < \infty \tag{1}$$

Назовём его $L_D^{(1,0)}$ и ввёдем норму как (1)

2.1 Свойства

2.1.1 Это действительно норма

Дописать

2.1.2 Это банахово пространство

Заметим что $||\log_q^{-k} x^n + \log_q^{-s} x^r|| = ||\log_q^{-k} x^n|| + ||\log_q^{-s} x^r||$ если $(p, s) \neq (q, n)$

Если $\{f_s\}_{s=1}^{\infty}$ фундаментальная последовательность, то и последовательность $\frac{c_{nk}^{(s)}}{n!k!}$ тоже фундаментальна для всех n, k, значит $c_{n,k}^{(s)} \to c_{n,k}^*$

Обозначим $f^* = \sum_{n,k \geq 0} c_{nk}^* \log_q^{-k} x^n$

$$||f^*|| = ||f^* - f_N + f_N|| \leq ||f^* - f_N|| + ||f_N|| \leq \varepsilon + C \tag{2}$$

2.1.3 Это банахова алгебра

Заметим что $|| \log_q^{-k} x^n + \log_q^{-s} x^r|| = || \log_q^{-k} x^n|| + || \log_q^{-s} x^r||$ если $(p, s) \neq (q, n)$

Пусть $f, g \in L_D^{(0,1)}$ обозначим за f_{nk} слагаемое $c_{n,k} \log_q^{-k}(z)\, z^n$

$||log_q^{-k} zz^n f|| \leq ||log_q^{-k} zz^n||||f||$ - мы просто делаем сдвиг вправо всех элементов f:

$$\hat{f}_{p,q} = f_{p-n,q-k}$$

Считаем значения для отрицательных индексов нулевыми

Так как при таком преобразовании коэффициенты не меняются, а n и k растет, то каждое слагаемое в норме невозрастает, то и вся сумма невозрастает, а значит неравенство выполняется.

$$||gf|| = || \sum_{n,k\geq 0} g_{n,k} f|| \leq \sum_{n,k\geq 0} ||g_{n,k} f|| <= \sum_{n,k\geq 0} ||g_{n,k}||||f|| = ||f|| \sum_{n,k\geq 0} ||g_{n,k}|| = ||f||||g|| \tag{3}$$

Первое неравенство – из-за неравенства треугольника и непрерывности нормы, второе – из-за замечания выше, а последнее равенство из-за замечания в начале текущего параграфа.

2.1.4 Производная Фреше оператора $Pf = f(z)f(qz)$

Если мы докажем что оператор $Af = f(qz)$ ограничен то мы можем с лёгкостью найти производную оператора P

$$(f(z) + h(z))(f(qz) + h(qz)) - f(z)f(qz) = f(z)h(qz) + f(qz)h(z) + h(z)h(qz)$$

$||h(z)h(qz)|| \leq ||h(z)||||h(qz)|| \leq ||A||||h||^2 = o(||h||), h \to 0$

Нужно показать ограниченность A

$$\begin{aligned} f(qz) = \sum_{n,k} q^n c_{nk} (1 + \log_q^x)^{-k} x^n = \sum_{n,k} q^n c_{nk} \log_q^{-k} x x^n \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-k}{i} \log_q^{-i} x = \\ = \sum_{n,k} q^n \left(\sum_{s=0}^{k} c_{ns} \binom{-s}{-k} \right) \log_q^{-k}(x)\, x^n \end{aligned} \tag{4}$$

Нужно оценить величину

$$\sum_{n,k} \frac{|q^n \left(\sum_{s=0}^{k} c_{n,s} \binom{-s}{-k} \right)|}{n!k!} \text{если} \sum_{n,k} \frac{|c_{nk}|}{n!k!} = 1$$

Посмотрим как ведёт себя оператор A на величину $\log_q^{-k}(x)$

$$\frac{1}{(1+\log_q x)^k} = \frac{1}{\log_q^k x}\frac{1}{(1+\frac{1}{\log_q x})^k} = \frac{1}{\log_q^k x}\sum_{i=0}^{\infty}\binom{-k}{i}\frac{1}{\log_q^i x} =$$

$$= \sum_{s=k}^{\infty}\binom{-k}{s-k}\frac{1}{\log_q^s x} = \sum_{s=k}^{\infty}\binom{-k}{-s}\frac{1}{\log_q^s x} \quad (5)$$

3 Пример

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sum_{n,k\geq 1}\log_q^{-k}(x)\, x^n = \frac{x}{1-x}\frac{1}{\log_q x}\frac{1}{1-\frac{1}{\log_q x}}$$

Пусть $q \in (0,1)$

$$\begin{cases} x > 0 \\ |x| < 1 \\ |\frac{1}{\log_q x}| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0,1) \\ x \in (0,q) \cup (1/q,\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0,q) \quad (6)$$

$$f(qx) = \frac{qx}{1-qx}\frac{1}{\log_q qx}\frac{1}{1-\frac{1}{\log_q qx}}$$

$$\begin{cases} qx > 0 \\ |qx| < 1 \\ |\frac{1}{\log_q qx}| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0,1) \\ x \in (0,1) \cup (1/q^2,\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0,1) \quad (7)$$

Общая область определения для обеих функций
$x \in (0,q)$
Пусть $q > 1$

$$\begin{cases} x > 0 \\ |x| < 1 \\ |\frac{1}{\log_q x}| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0,1) \\ x \in (0,1q) \cup (q,\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0,1/q) \quad (8)$$

$$\begin{cases} qx > 0 \\ |qx| < 1 \\ |\frac{1}{\log_q qx}| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0,1) \\ x \in (0,1/q^2) \cup (1,\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0,1/q^2) \quad (9)$$

Общая область определения для обеих функций
$x \in (0,1/q^2)$

3.1 Статья 9064, о ряде Дюлака

Уравнение

$$qxy_0 - qx^2y_0 - xy_1 + qx^2y_1 - y_0y_1 + xy_0y_1 + qxy_0y_1 - qx^2y_0y_1 = 0$$

$$\frac{\partial F}{x} = qy_0 - 2qxy_0 - y_1 + 2qxy_1 + y_0y_1 + qy_0y_1 - 2qxy_0y_1$$

$$\frac{\partial F}{y_0} = qx - qx^2 - y_1 + xy_1 + qxy_1 - qx^2y_1$$

$$\frac{\partial F}{y_1} = -x + qx^2 - y_0 + xy_0 + qxy_0 - qx^2y_0$$

$m = 1$, $a_0 = 0$, $a_1 = q, a_2 = -1 \neq 0$ то есть все формальные решения сходятся где то (наверное)

3.2 Неограниченность оператора в пространстве рядов Дюлака

Пусть у нас будут ряды вида

$$f(x) = \sum_{n\geq 0, k\geq 1} c_{nk} \log_q^n x^k \tag{10}$$

С нормой

$$||f|| = \sum_{n\geq 0, k\geq 1} \frac{|c_{nk}|}{n!k!} \tag{11}$$

Тогда оператор $f(qx)$

Рассмотрим последовательность функций $\varphi_n(x) = n! \log_q^n x \, ||\varphi_n|| = 1$

$A[\varphi_n](x) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k!} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} = n! L_n(-1) \to \infty$,

где $L_n(x)$ - многочлены Лаггера

3.3 Равномерная норма

Рассмотрим такие ряды

$$f(x) = \sum_{n\geq 0, k\in Z} c_{nk} \log_q^n x^k$$

, которые состоят из непрерывных(за исключением устранимого разрыва в нуле) слагаемых и сходятся равномерно на отрезке $[0, \alpha]$, и определим норму как максимум модуля

Сумма таких рядов также будет равномерно непрерывным сходящимся рядом на отрезке $[0, \alpha]$ как и произведение. $||fg|| \leq ||f|| \cdot ||g||$ $||1|| = 1$

При $q \in (0, 1) ||f(qx)|| \leq ||f(x)||$

Если у f(x) особенность в точке a, то у ряда f(qx) особенность в точке $a/q > a$, значит оператор действует из пространства в себя

3.4 Норма из суммы ряда и производной

Рассмотрим

$$f(x) = \sum_{n\geq 0, k\geq 0} c_{nk} \log_q^{-n} x^k \tag{12}$$

С нормой

$$||f(x)||_1 = \sum_{n\geq 0, k\geq 1} \frac{|c_{nk}|}{n!k!} \tag{13}$$

$$||f(x)|| = ||f(x)||_1 + ||f(qx)||_1 \tag{14}$$

Тогда пространство не полное

3.5 Уравнение с решением – рядом Дюлака

$f(x) = \sum_{k\geq 1}(x/\log_q x)^k$ Тогда уравнение имеет вид

$$qxY_0 + qxY_0Y_1 - Y_0Y_1 - xY_0Y_1 - xY_1 = 0$$

Линейная часть:

$$qxY_0 + Y_1 = 0$$

Производная Фреше(Для равномерной нормы):

$$qxH_0 + qxY_0H_1 + qxH_0Y_1 - Y_0H_1 - Y_1H_0 - xY_0H_1 - xY_1H_0 - xH_1 = 0$$

Вычисление решения с помощью многоугольника Ньютона
Шаг 1
Считаем многоугольник Ньютона для начального уравнения
Вершины : $(0, 2), (1, 1), (1, 2)$ Пересечению с осью абсцисы $2, 0$ Укороченное уравнения для мономов проходящих через $(0, 2), (1, 1)$:

$$qxY_0 - Y_0Y_1 - xY_1$$

$$Y_0 = p_1(\log_q x)x^1$$

Получаем нелинейное разностное уравнение

$$p_1(t) - p(t)p(t + 1) - p(t + 1) = 0$$

$$p_1(t)(\frac{1}{p(t + 1)} - 1) = 1$$

$$\frac{1}{p(t + 1)} - 1 = \frac{1}{p(t)}$$

Замена $\frac{1}{p(t)} = f(t)$ сводит уравнение к линейному:

$$f(t+1)-f(t)-1=0$$

Решение:

$$f(t)=t+c, p(t)=\frac{1}{t+c}$$

Возьмем решение удовлетворяющее

$$t=0$$

2. Делаем замену

$$Y_0 \mapsto Y_0+\frac{x}{t}, t=\log_q x$$

Раскрывая скобки и домнажая всё на

$$t(t+1)$$

, Получаем уравнение

$$\begin{aligned} -qx^3+q^2x^3+qt^2xY_0-qtx^2Y_0+q^2tx^2Y_0-xY_1- \\ 2txY_1-t^2xY_1-x^2Y_1+qx^2Y_1-tx^2Y_1+qtx^2Y_1- \\ -tY_0Y_1-t^2Y_0Y_1-txY_0Y_1+qtxY_0Y_1-t^2xY_0Y_1+qt^2xY_0Y_1=0 \end{aligned} \tag{15}$$

Строим многоугольник Ньютона, считая t как параметр

Вершины: $(0,2),(1,1),(1,2),(3,0)$

Продолжение одной грани пересекает $x=2$ но 2 уже было, поэтому переходим к следующей точке

ВОПРОС: если делать замену по другому – делить на степень и вычитать константу то можно ли требовать просто неотрицательность абсциссы

Следующая точка это $(0,3)$

укороченное уравнение для грани с точками $(1,1)(0,3)$:

$$-qx^3+q^2x^3+qt^2xY_0-xY_1-2txY_1-t^2xY_1$$

$$Y_0=p(t)x^2$$

Делим на qx^3:

$$-1+q+t^2p(t)-qp(t+1)-2tqp(t+1)-t^2qp(t+1)=0$$

$$-q(1+t)^2p(t+1)+q+t^2p(t)+-1$$

Уравнение разностное линейное

Замечаем что мономы содержащие $p(t+1)$ содержат q, а $p(t)$ не содержат q. Поэтому если искать решения для произвольного q то для любой нетождественно равной нулю (НЕ УВЕРЕН В ФОРМУЛИРОВКЕ) функции $-q(1+t)^2p(t+1)+q$ и $t^2p(t)+-1$ функционально независимы. Получаем тогда систему согласованных линейных уравнений:

$$\begin{cases} t^2p(t) = 1 \\ q(1+t)^2p(1+t) = q \end{cases}$$

Значит $p(t) = \frac{1}{t^2}$

3. Проводим замену: $Y_0 = Y_0 + x^2/t^2$

Аналогичными действиями получаем систему согласованных уравнений

$$-1 - t + q^2t + t^3p(t) + t^4p(t) - tq^2p(t+1) - 3t^2q^2p(t+1) - \\ - 3t^3q^2p(t+1) - t^4q^2p(t+1) = 0 \quad (16)$$

$$\begin{cases} t^3p(t) + t^4p(t) - 1 - t = 0 \\ q^2t - q^2p(t+1) - 3t^2q^2p(t+1) - 3t^3q^2p(t+1) - t^4q^2p(t+1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p(t) = \frac{1}{t^3} \\ p(t+1) = \frac{1}{(t+1)^3} \end{cases}$$

$$h^* = \arg\max_{h \in H} S(h)$$