Лабораторна робота з дисципліни "Стаціонарні випадкові процесси"

Фордуй Н.С.

11 жовтня 2021 р.

Зміст

1 Завдання

Розглянемо процес страхового ризику U, який згідно з моделлю Крамера-Лундберга має вигляд:

$$U(t) = u_0 + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \tag{1}$$

Тут $u_0 = U(0)$ – початковий капітал, c – сумарна величина страхових внесків в одиницю часу (т.з. premium rate), N – однорідний процес Пуассона з інтенсивністю λ, стрибки якого відбуваються в моменти настання страхових подій, X_I, $i \in \mathbb{N}$, – незалежні між собою та від N однаково розподілені м. н. невід'ємні страхові виплати. Надалі будемо розглядати такі два випадки – $u_0 = 1$, $\lambda = 1$ та $u_0 = 10$, $\lambda = 5$. Розподіл страхових витрат має вигляд:

$$0.2\delta_6 \dotplus 0.8U(1,5) \tag{2}$$

де δ_6 – розподіл випадкової величини, що дорівнює 6 майже напевно, $\dotplus$ – позначення для суміші розподілів.

Знаючи розподіл страхових витрат X_i, запишемо їх функцію розподілу:

$$F(x) = 0.2F_{\delta_6}(x) + 0.8F_{U(1,5)}(x) = \begin{cases} 0, & x < 6 \\ 0.2, & x \geq 6 \end{cases} + \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{x-1}{5}, & 1 \leq x < 5 \\ 0.8, & x \geq 5 \end{cases} = \tag{3}$$

$$= \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{x-1}{5}, & 1 \le x < 5 \\ 0.8, & 5 \le x < 6 \\ 1, & x \ge 6 \end{cases}$$

Також для подальших розрахунків необхідно знайти математичне сподівання X_i:

$$\mathbb{E}X_i = \mu = 0.2 \cdot 6 + 0.8 \cdot (\frac{1+5}{2}) = 1.2 + 2.4 = 3.6 \tag{4}$$

2 Умова NPC

Умова NPC має вигляд $c > \lambda\mu$. Підставивши числа для обох випадків, отримаємо такі умови NPC: $c > 3.6$ та $c > 5 \cdot 3.6 = 18$ відповідно. За умовою покладемо $c = 7.2$ в першому випадку та $c = 1.05 \cdot 18 = 18.9$ – в другому.

3 Інтегральне рівняння для ймовірності небанкрутства

Інтегральне рівняння в загальному випадку має вигляд:

$$\varphi(u) = \varphi(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \varphi(u-y)(1-F(y))dy, u \ge 0 \tag{5}$$

Запишемо:

$$1 - F(y) = \begin{cases} 1, & y < 1 \\ \frac{6-y}{5}, & 1 \le y < 5 \\ 0.2, & 5 \le y < 6 \\ 0, & y \ge 6 \end{cases} \tag{6}$$

Після підстановки матимемо наше інтегральне рівняння в такому вигляді:

$$\varphi(u) = \begin{cases} \varphi(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \varphi(u-y)dy, & u < 1 \\ \varphi(0) + \frac{\lambda}{c}(\int_0^1 \varphi(u-y)dy + \int_1^u \varphi(u-y)\frac{6-y}{5}dy), & 1 \le u < 5 \\ \varphi(0) + \frac{\lambda}{c}(\int_0^1 \varphi(u-y)dy + \int_1^5 \varphi(u-y)\frac{6-y}{5}dy + 0.2\int_5^u \varphi(u-y)dy), & 5 \le u < 6 \\ \varphi(0) + \frac{\lambda}{c}(\int_0^1 \varphi(u-y)dy + \int_1^5 \varphi(u-y)\frac{6-y}{5}dy + 0.2\int_5^6 \varphi(u-y)dy), & u > 6 \end{cases} \tag{7}$$

4 Перетворення Лапласа функції $\varphi(u)$

Для початку припустимо що умова NPC виконується. Завдяки цьому маємо, що $\varphi(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c}$. Застосувавши перетворення Лапласа на рівняння 5 отримаємо образ Лапласа $\Phi(p) = \mathcal{L}\{\varphi(u)\}$:

$$\Phi(p) = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right)\frac{1}{p} + \frac{\lambda}{c}\Phi(p)\mathcal{L}\{1 - F(y)\} \tag{8}$$

Виразивши $\Phi(p)$ з цього рівняння отримаємо:

$$\Phi(p) = \frac{1 - \frac{\lambda\mu}{c}}{p\left(1 - \frac{\lambda}{c}\mathcal{L}\{1-F(y)\}(p)\right)} \tag{9}$$

Для знаходження $\Phi(p)$ спочатку знайдемо:

$$\mathcal{L}\{1 - F(y)\} = \int_0^{+\infty} (1 - F(y))\, e^{-py}dy = \int_0^1 e^{-py}dy + \int_1^5 \frac{6-y}{5}e^{-py}dy + 0.2\int_5^6 e^{-py}dy = \tag{10}$$

$$= \left(-\frac{e^{-py}}{p} \right) \Bigg|_0^1 + 0.2 \left(-\frac{e^{-py}}{p} \right) \Bigg|_5^6 + \int\limits_1^5 \frac{6-y}{5} e^{-py} dy \doteq$$

$$\int\limits_1^5 \frac{6-y}{5} e^{-py} dy = \frac{1}{5} \int\limits_1^5 (6e^{-py} - ye^{-py}) dy = \frac{6}{5} \left(-\frac{e^{-py}}{p} \right) \Bigg|_1^5 - \frac{1}{5} \int\limits_1^5 ye^{-py} dy = \tag{11}$$

$$= \frac{6e^{-p}(1-e^{-4p})}{5p} + \frac{1}{5p} \left(\left(ye^{-py}\right)\Big|_1^5 - \int\limits_1^5 e^{-py} dy \right) = \frac{6e^{-p}(1-e^{-4p})}{5p} + \frac{5e^{-5p} - e^{-p}}{5p} -$$

$$-\frac{e^{-p}(1-e^{-4p})}{5p^2} = \frac{e^{-5p}\left(-p + e^{4p}(5p-1) + 1\right)}{5p^2}$$

$$\doteq \frac{1-e^{-p}}{p} + 0.2\frac{e^{-6p}(e^p-1)}{p} + \frac{e^{-5p}\left(-p + e^{4p}(5p-1)+1\right)}{5p^2} = \frac{0.2e^{-6p}(-p+e^p-e^{5p})}{p^2} + \frac{1}{p}$$

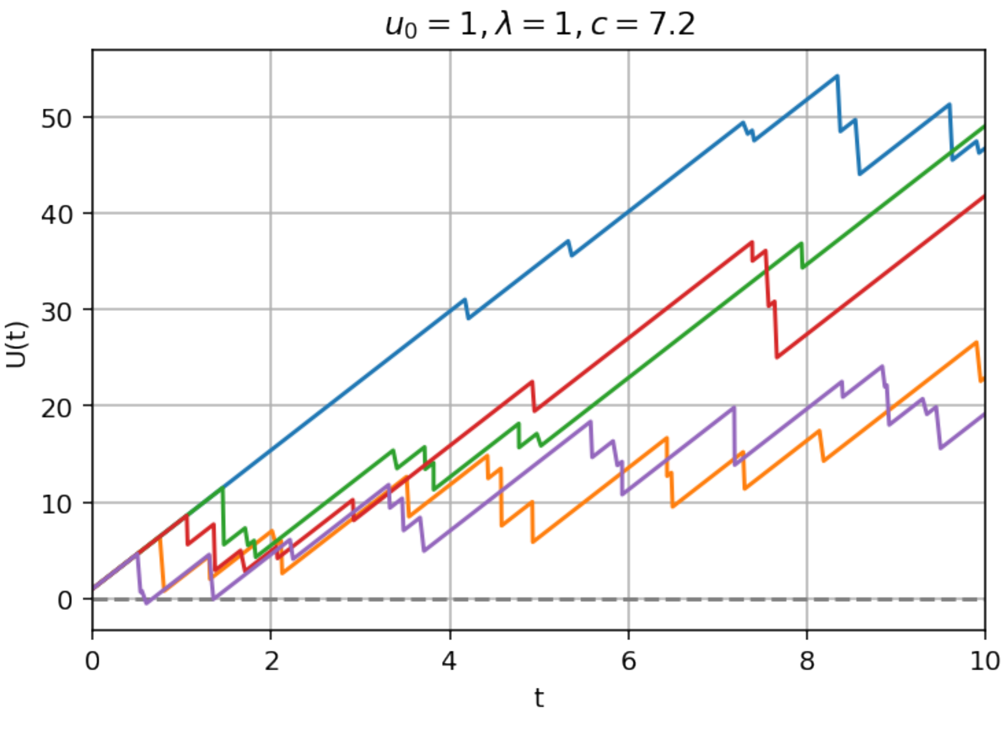
Підставимо отриманий образ Лапласа в 9:

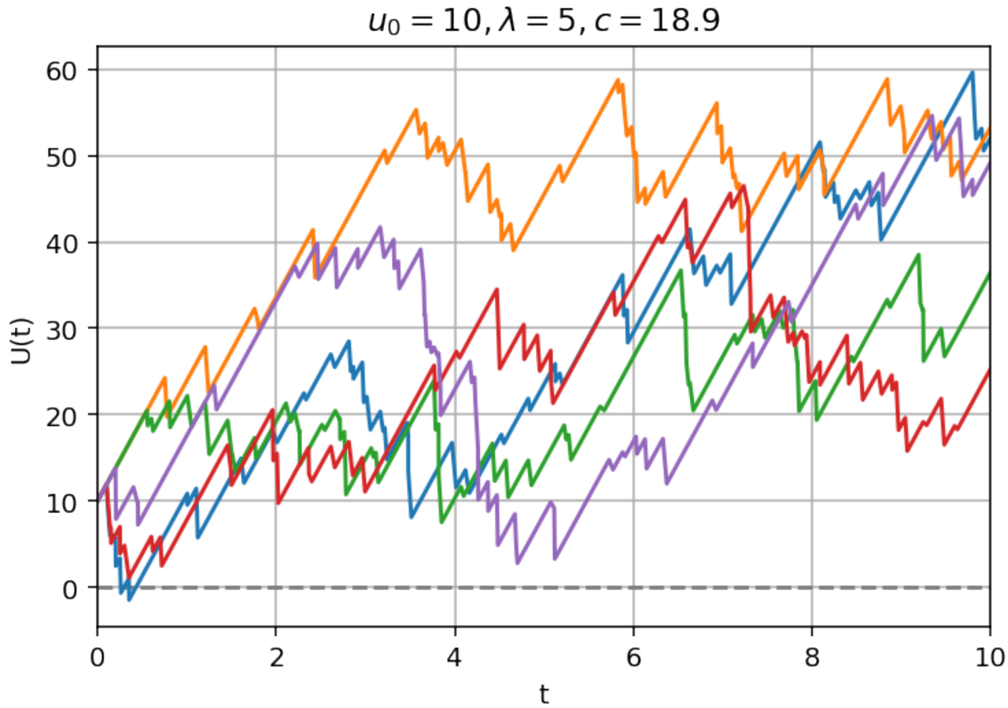
$$\Phi(p) = \frac{1 - \frac{\lambda\mu}{c}}{p\left(1 - \frac{\lambda}{c}\left(\frac{0.2e^{-6p}(-p+e^p-e^{5p})}{p^2} + \frac{1}{p}\right)\right)} = \tag{12}$$

$$= \frac{p(c-\lambda\mu)}{c} \cdot \frac{1}{p - 0.2\lambda e^{-6p}(-p+e^p-e^{5p}) - \lambda p}$$

5 Моделювання траєкторій процессу

На проміжку $[0, 10]$ я змоделював та побудував на спільному рисунку графіки 5 траєкторій процесу U.





6 Грубий метод Монте-Карло

Змоделювавши 1000 траекторій процесу U для першого випадку ($u_0 = 1$, $\lambda = 1$ та $c = 7.2$) отримали, що 421 з 1000 траекторій процесу збанкротували на цьому проміжку. Маємо оцінку ймовірності банкрутства $p_1^* = 0.421$.

Змоделювавши 1000 траєкторій процесу U для другого випадку ($u_0 = 10$, $\lambda = 5$ та $c = 18.9$) отримали, що 768 з 1000 траєкторій процесу збанкротували на цьому проміжку. Маємо оцінку ймовірності банкрутства $p_1^* = 0.768$.

Результати обрахунків можна побачити на скріншоті нижче:

Грубый метод Монте-Карло

In 61
```
bancrupt_1 = 0
for i in trange(1000):
    time, u = U(1000, 1, 7.2, 1)
    if np.any(np.array([i < 0 for i in u])):
        bancrupt_1 += 1
bancrupt_1
```

```
100%|██████████| 1000/1000 [01:15<00:00, 13.29it/s]
```

Out 61
```
421
```

In 62
```
bancrupt_2 = 0
for i in trange(1000):
    time, u = U(1000, 10, 18.9, 5)
    if np.any(np.array([i < 0 for i in u])):
        bancrupt_2 += 1
bancrupt_2
```

```
100%|██████████| 1000/1000 [06:21<00:00,  2.62it/s]
```

Out 62
```
768
```

7 Більш точний метод Монте-Карло

Оцінити ймовірність банкрутства за допомогою більш точного методу Монте-Карло: для цього спочатку записати функцію розподілу модифікованої величини $\hat{X}$, а потім змоделювати геометрично розподілену кількість незалежних копій цієї величини.

Згідно з лекційному матеріалу функція розподілу $\hat{X}$ має вигляд

$$F_{\hat{X}}(x) = \frac{1}{\mathbb{E}X} \int\limits_0^x (1 - F_X(y))dy \tag{13}$$

Вираз для $1 - F_X(y)$ було знайдено раніше, запишемо функцію розподілу:

$$F_{\hat{X}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{3.6} \int\limits_0^x 1dy = \frac{10x}{36}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3.6}(\int\limits_0^1 1dy + \int\limits_1^x \frac{6-y}{5} dy) = \frac{-x^2+12x-1}{36}, & 1 \leq x < 5 \\ \frac{1}{3.6}(\int\limits_0^1 1dy + \int\limits_1^5 \frac{6-y}{5} dy + \int\limits_5^x 0.2dy) = \frac{34+2(x-5)}{36}, & 5 \leq x < 6 \\ \frac{1}{3.6}(\int\limits_0^1 1dy + \int\limits_1^5 \frac{6-y}{5} dy + \int\limits_5^6 0.2dy) = 1, & x \geq 6 \end{cases} \tag{14}$$

Записавши функцію розподілу - можемо записати і обернену функцію:

$$F_{\hat{X}}^{-1}(y) = \begin{cases} 3.6y, & y \in [0, \frac{10}{36}) \\ 6 - \sqrt{35 - 36y}, & y \in [\frac{10}{36}, \frac{34}{36}) \\ 18y - 12, & y \in [\frac{34}{36}, 1) \end{cases} \tag{15}$$

За допомогою оберненої функції розподілу зможемо змоделювати цю випадкову величину.

Згідно лекційного матеріалу запишемо формулу ймовірності банкрутства:

$$\psi(u) = 1 - \varphi(u) = 1 - \mathbb{P}\{\sum_{i=1}^{G} \hat{X}_i \leq u_0\} = \mathbb{P}\{\sum_{i=1}^{G} \hat{X}_i > u_0\} \tag{16}$$

u_0 – стартовий капітал, $G \sim Geom(1 - \frac{\lambda\mu}{c})$. Змоделюємо 1000 реалізацій G окремо для першого та другого випадку та для кожної з реалізацій G^* змоделюємо відповідну сумму $\sum\limits_{i=1}^{G^*} \hat{X}_i$.

Для першого випадку ($u_0 = 1$, $\lambda = 1$ та $c = 7.2$) отримали оцінку ймовірності на проміжку $[0, 1000]$ банкрутства $p_1^* = 0.413$.

Для другого випадку ($u_0 = 10$, $\lambda = 5$ та $c = 18.9$) отримали оцінку ймовірності на проміжку $[0, 1000]$ банкрутства $p_2^* = 0.892$.

In 91
```python
# First case
# 1 - (\lambda\mu) / c = 1/2
bancrupt_better_1 = 0
p1 = 1 - (LAMBDA_1*MU) / C_1
for trials_num in tqdm(geom.rvs(p1, loc=-1, size=1000)):
    x_hat = hat_rvs(trials_num)
    if x_hat.sum() > 1:
        bancrupt_better_1 += 1
bancrupt_better_1 / 1000
```

```
100%|██████████| 1000/1000 [00:00<00:00, 16318.03it/s]
```

Out 91
```
0.434
```

In 89
```python
# Second case
# 1 - (\lambda\mu) / c = 1 - 18/18.9
bancrupt_better_2 = 0
p2 = 1 - (LAMBDA_2*MU) / C_2
for trials_num in tqdm(geom.rvs(p2, loc=-1, size=1000)):
    x_hat = hat_rvs(trials_num)
    if x_hat.sum() > 10:
        bancrupt_better_2 += 1
bancrupt_better_2 /1000
```

```
100%|██████████| 1000/1000 [00:00<00:00, 11581.77it/s]
```

Out 89
```
0.883
```

8 Знаходження оберненого перетворення Лапласа

Знайшовши обернене перетворення Лапласа від $\Phi_1(p)$ та $\Phi_2(p)$ - отримаємо функції $\varphi_1(u)$ та $\varphi_2(u)$ в які підставимо відповідні початкові умови та отримаємо ймовірність банкрутства як $\psi_1^* = 1 - \varphi_1(u_0)$ та $\psi_2^* = 1 - \varphi_2(u_0)$.

Після чисельного знаходження оберненого перетворення Лапласа отримано результати $\psi_1^* = 0.434$ та $\psi_2^* = 0.883$.

Результати можна побачити нижче.

In 17
```python
def phi(lmbda, mu, c, p):
    in_denom = 1/p + (0.2 * mp.exp(-6*p) * (-p + mp.exp(p) - mp.exp(5*p)))/(p * p)
    denom = p * (1 - (lmbda/c) * in_denom)
    nom = 1 - (lmbda*mu)/c
    return nom / denom
```

In 18
```python
1 - mp.invertlaplace(lambda p: phi(LAMBDA_1, MU, C_1, p), U0_1, method='dehoog')
```

Out 18
```
mpf('0.42550175952316416')
```

In 19
```python
1 - mp.invertlaplace(lambda p: phi(LAMBDA_2, MU, C_2, p), U0_2, method='dehoog')
```

Out 19
```
mpf('0.77062099879673707')
```

9 Висновки

В таблиці нижче приведені результати досліджень:

Грубий ММК	Більш точний ММК	Обернене перетворення Лапласа
$\lambda = 1$, $u_0 = 1$, $c = 7.2$		
0.421	0.434	0.426
$\lambda = 5$, $u_0 = 10$, $c = 18.9$		
0.768	0.883	0.771

В ході роботи було розглянуто три методи підрахунку ймовірності банкрутства: два ММК та за допомогою знаходження оберненого перетворення Лапласа.

Грубий метод ММК є дуже ресурсозатратним (т.я. на кожній ітерації необхідно отримати траєкторію процеса страхового ризику). В силу обчислювальної складності моделювання самого процесу виникає проблема, що навіть при виборці в 1000 траєкторій грубий ММК відпрацьовує в залежності від параметрів від 2 до 4 хвилин на відміну від більш точного методу МНК. Зрозуміло, що «точний» метод МНК буде мати більш наближені до дійсності результати в силу того, що він враховує увесь проміжок $[0, \infty)$, а не тільки $[0, 1000)$ як перший метод в силу своєї побудови. З іншого боку «точний» метод МНК є більш аналітично складним і потребує попередню підготовку до моделювання у вигляді знаходження функції розподілу величин $\hat{X}$.

Хочется зазначити, що обидва з методів Монте-Карло при розмірі виборки в 1000 елементів є достатньо мінливими. Значення оцінок ймовірності можуть суттєво змінюватись при різних запусках обох методів. Якщо ж взяти вибірку в 10^6 елементів – справи стають набагато краще (можемо бачити на прикладі нижче).

```
In 73
# First case
# 1 - (\lambda\mu) / c = 1/2
bancrupt_better_1 = 0
p1 = 1 - (LAMBDA_1*MU) / C_1
for trials_num in tqdm(geom.rvs(p1, loc=-1, size=1000000)):
    x_hat = hat_rvs(trials_num)
    if x_hat.sum() > 1:
        bancrupt_better_1 += 1
bancrupt_better_1 / 1000000

100%|██████████| 1000000/1000000 [00:53<00:00, 18519.72it/s]

Out 73    0.425602
```

В такому разі результати обох методів стають набагато ближче до найкращого з методів - використання оберненого перетворення Лапласа. За допомогою цього метода ми можемо:

- у деяких випадках навіть знайти функцію $\varphi(u)$ аналітично (дуже рідкі такі випадки, але ймовірність така є);
- коли не можемо знайти аналітично (практично завжди) – можемо застосувати чисельні методи обчислення оберненого перетворення Фур'є, для яких ми не тільки можемо задати точність виконання, а й за допомогою отриманих результатів інтерполювати функцію $\varphi(u)$ і таким чином зрозуміти залежність між початковим капіталом та ймовірністю небанкрустства;