НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ КОМПЛЕКС
"ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ"
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ УКРАЇНИ
"КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ
СІКОРСЬКОГО"
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

РОЗРАХУНКОВА РОБОТА
з предмету "Математична статистика"

Виконав студент групи
КА-81 Фордуй Нікіта
Перевірила Каніовська І.Ю.

Київ 2020

1 Завдання

Дана конкретна реалізація вибірки об'ємом n = 100:

2	0	8	0	15	1	1	1	7	1	0	0	3	1	1	1	0	0	3	1
2	4	10	6	1	0	1	0	0	2	0	1	5	0	1	9	4	2	11	3
2	0	8	1	6	3	0	1	1	4	0	9	5	3	3	0	0	10	2	0
3	11	0	9	0	1	4	1	0	2	0	1	1	3	4	7	1	3	3	0
4	7	6	0	3	0	1	15	11	1	2	4	0	2	0	0	0	26	4	0

1. Побудувати варіаційний (дискретний або інтервальний) ряд наданої вибірки.
2. Зробити графічне зображення вибірки.
3. Побудувати емпіричну функцію розподілу.
4. Обчислити значення вибіркової медіани, моди, асиметрії.
5. Знайти незміщену оцінку математичного сподівання та дисперсії.
6. Висунути гіпотезу про розподіл, за яким отримано вибірку.
7. Знайти точкові оцінки параметрів гіпотетичного закону розподілу та перевірити їх властивості.
8. Перевірити за допомогою критерію χ^2 (Пірсона) гіпотезу про розподіл з рівнем значущості $\alpha = 0,05$.
9. Знайти довірчий інтервал для параметрів гіпотетичного закону розподілу, взяв рівень надійності $\gamma = 0.95$.
10. Висновки.

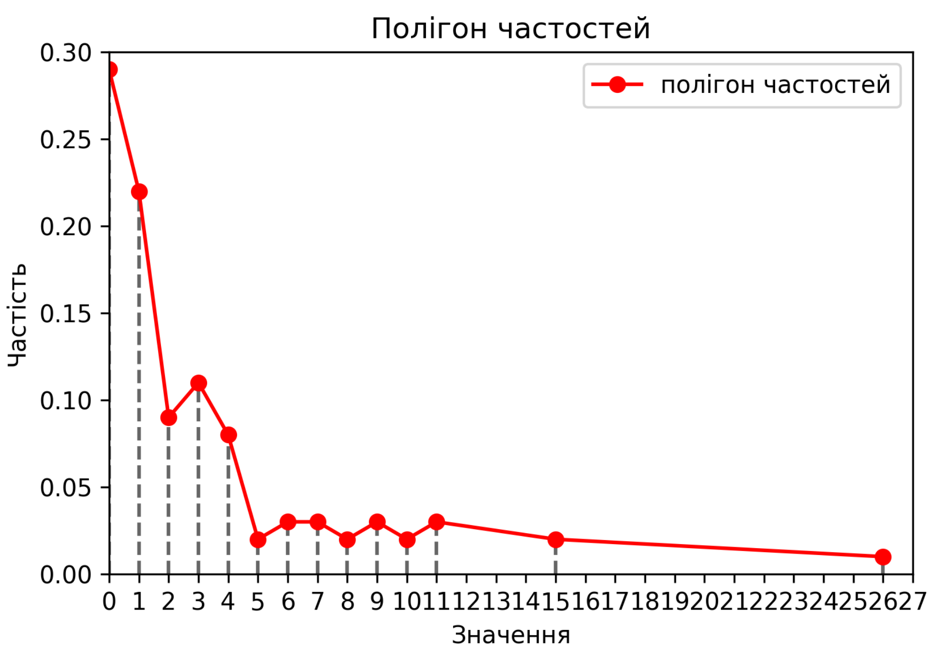
2 Побудова варіаційного ряду вибірки

Маємо невелику кількість різних значень - тому побудуємо дискретний варіаційний ряд. Підрахувавши кількість варіант (14) та їх частоти і знаючи об'єм вибірки побудуємо дискретний варіаційний ряд :

x_i^*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	15	26
n_i	29	22	9	11	8	2	3	3	2	3	2	3	2	1
$\omega_i = \frac{n_i}{n}$	$\frac{29}{100}$	$\frac{22}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{11}{100}$	$\frac{8}{100}$	$\frac{2}{100}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{2}{100}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{2}{100}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{2}{100}$	$\frac{1}{100}$
ω_i^H	$\frac{29}{100}$	$\frac{51}{100}$	$\frac{60}{100}$	$\frac{71}{100}$	$\frac{79}{100}$	$\frac{81}{100}$	$\frac{84}{100}$	$\frac{87}{100}$	$\frac{89}{100}$	$\frac{92}{100}$	$\frac{94}{100}$	$\frac{97}{100}$	$\frac{99}{100}$	1

де x_i^* - варіанти, n_i - частота і-тої варіанти, $\omega_i = \frac{n_i}{n}$ - частість і-тої варіанти або відносна частота, ω_i^H - кумулятивна частість і-тої варіанти.

За дискретним варіаційним рядом побудуємо його геометричну інтерпретацію - полігон частостей:



Порівняємо полігон частостей нашої реалізації виборки із полігоном ймовірностей закону Паскаля при різних значеннях його параметра.

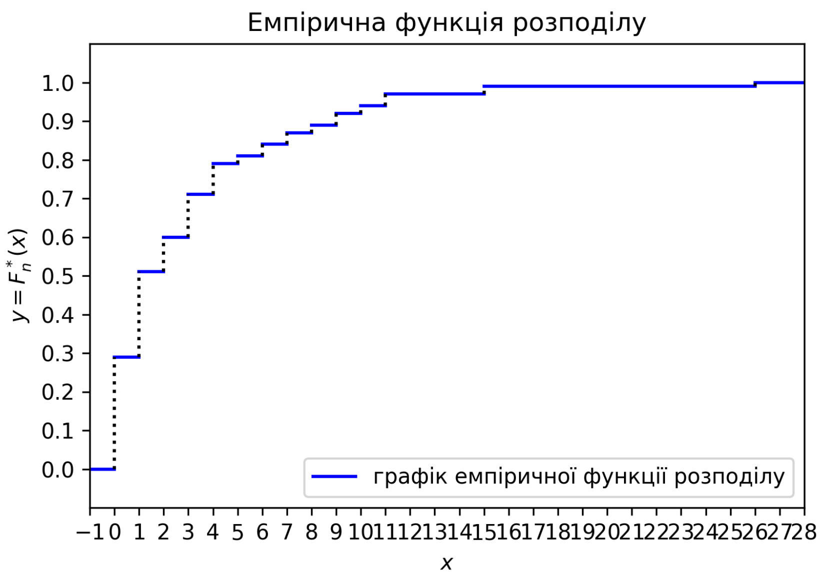
Можна зауважити, що полігон ймовірностей закону Паскаля при певних значеннях його параметра (a = 1, 2, 3) достатньо схожий на полігон частостей нашої реалізації вибірки.

3 Емпірична функція розподілу

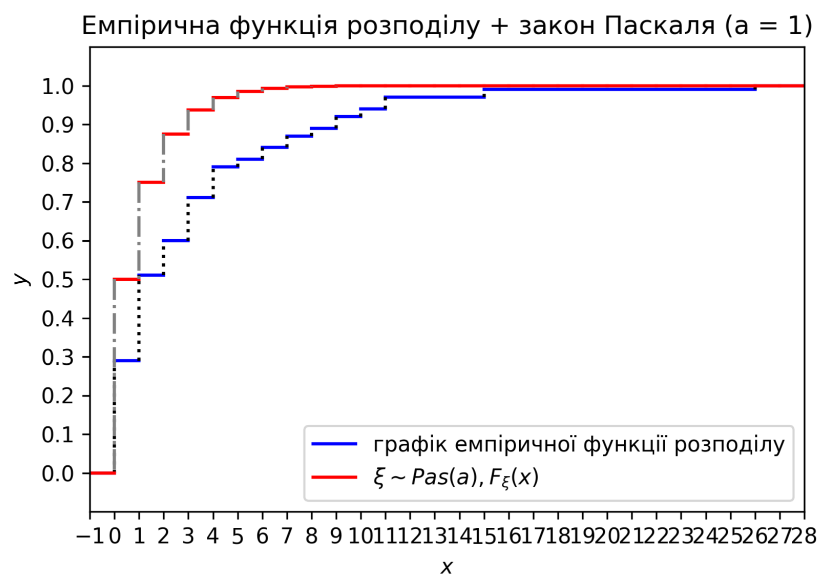
Побудуємо емпіричну функцію розподілу за вже побудованим дискретним варіаційним рядом:

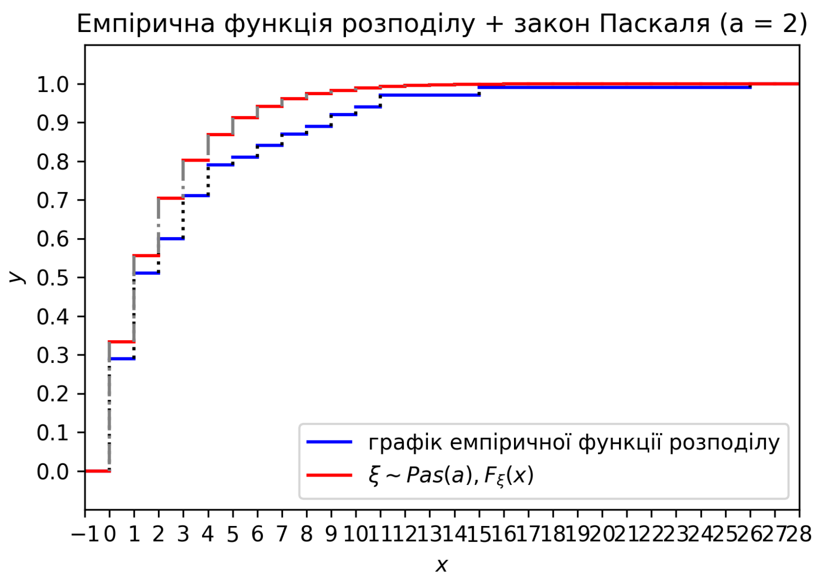
$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{29}{100}, & 0 < x \le 1 \\ \frac{29+22}{100} = \frac{51}{100}, & 1 < x \le 2 \\ \frac{51}{100} + \frac{9}{100} = \frac{60}{100}, & 2 < x \le 3 \\ \frac{60}{100} + \frac{11}{100} = \frac{71}{100}, & 3 < x \le 4 \\ \frac{71}{100} + \frac{8}{100} = \frac{79}{100}, & 4 < x \le 5 \\ \frac{79}{100} + \frac{2}{100} = \frac{81}{100}, & 5 < x \le 6 \\ \frac{81}{100} + \frac{3}{100} = \frac{84}{100}, & 6 < x \le 7 \\ \frac{84}{100} + \frac{3}{100} = \frac{87}{100}, & 7 < x \le 8 \\ \frac{87}{100} + \frac{2}{100} = \frac{89}{100}, & 8 < x \le 9 \\ \frac{89}{100} + \frac{3}{100} = \frac{92}{100}, & 9 < x \le 10 \\ \frac{92}{100} + \frac{2}{100} = \frac{94}{100}, & 10 < x \le 11 \\ \frac{94}{100} + \frac{3}{100} = \frac{97}{100}, & 11 < x \le 15 \\ \frac{97}{100} + \frac{2}{100} = \frac{99}{100}, & 15 < x \le 26 \\ \frac{99}{100} + \frac{1}{100} = 1, & x > 26 \end{cases} \tag{1}$$

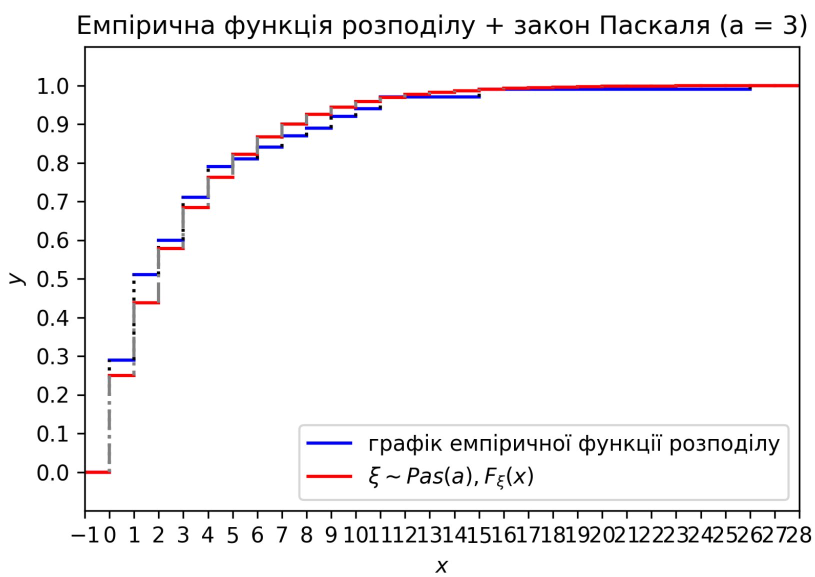
Зобразимо емпіричну функцію розподілу геометрично :



Порівняємо графік емпіричної функції розподілу варіаційного ряду з графіком функції розподілу закону Паскаля при різних параметрах(a = 1, 2, 3):







З рисунків вище можна побачити що графік емпіричної функції розподілу нашої реалізації вибірки певним чином схожий при певних значеннях параметра a на функцію розподілу закону Паскаля.

4 Обчислення вибіркових характеристик генеральної сукупності (медіана, мода, ассиметрія)

Для початку знайдемо $(Mo_\xi^*)_{\text{знач.}}$ - значення вибіркової моди (тієї варіанти, якій відповідає найбільша частість). Для знаходження цієї варіанти використаємо вже побудований дискретний варіаційний ряд (див. ст. 1 пункт 2). Проаналізувавши варіаційний ряд побачимо, що:

$$(Mo_\xi^*)_{\text{знач.}} = x_1^* = 0$$

Зауважимо, що випадкова величина μ, розподілена за законом Паскаля при будь-яких значеннях параметра a має моду $Mo_\mu = 0$.

Знайдемо значення вибіркової медіани $(Me_\xi^*)_{\text{знач.}}$ для нашої реалізації виборки. Вибірковою медіаною для ДВР називають середню за розташуванням варіанту(якщо кількість варіант непарна) або середнє арифметичне двох середніх варіант(якщо парна). З варіаційного ряду (див. ст. 1 пункт 2), враховуючи те, що кількість варіант - парна, знайдемо:

$$(Me_\xi^*)_{\text{знач.}} = \frac{x_7^* + x_8^*}{2} = 6.5$$

Маємо ще інший спосіб знаходження медіани - знайти першу з варіант, для яких накопичена частість перейде за відмітку 0.5. В данному випадку такою варіантою буде $x_2^* = 1$.
Для знаходження значення вибіркової ассиметрія спочатку потрібно знайти значення вибіркової дисперсії, а тому й вибір-

кового середнього:

$$\overline{x} = (E_\xi^*)_{\text{знач.}} = \frac{1}{100}\sum_{k=1}^{14} x_k^* n_k = 3.06$$

За допомогою цього знайдемо значення вибіркової дисперсії:

$$(D_\xi^*)_{\text{знач.}} = \frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100}(x_k - 3.06)^2 = 17.136400000000002$$

Отримавши значення вибіркової дисперсії, можна отримати значення вибіркової ассиметрії для даної реалізації вибірки:

$$(As_\xi^*)_{\text{знач.}} = \frac{\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100}(x_k - 3.06)^3}{(17.136400000000002)^{\frac{3}{2}}} = 2.504088773053977$$

5 Незміщені оцінки математичного сподівання та дисперсії

ξ - генеральна сукупність, $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ - випадкова вибірка, n $=$ 100 - об'єм вибірки.
За точкову оцінку математичного сподівання візьмемо вибіркове середнє:

$$E_\xi{}^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$$

Перевіримо незміщенність цієї точкової оцінки:

$$E(E_\xi{}^*) = E(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E_{\xi_k} = \frac{1}{n}nE_\xi = E_\xi \qquad (2)$$

Відповідно, ця точкова оцінка матсподівання є незміщеною.
За точкову оцінку дисперсії візьмемо:

$$D_\xi{}^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \overline{\xi})^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}((\xi_k - E_\xi) - (\overline{\xi} - E_\xi))^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - E_\xi)^2 - 2(\overline{\xi} - E_\xi)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - E_\xi) + (\overline{\xi} - E_\xi)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - E_\xi)^2 - (\overline{\xi} - E_\xi)^2$$

Порахуємо матсподівання цієї оцінки:

$$E(D_\xi{}^*) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(\xi_k - E_\xi)^2 - E(\overline{\xi} - E_\xi)^2 = D_\xi - D_{\overline{\xi}}$$

Бачимо, що ця оцінка - зміщена. Знайдемо $D_{\overline{\xi}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} D_{\xi_k} = \frac{D_\xi}{n}$.

$$E(D_\xi^*) = D_\xi - \frac{D_\xi}{n} = \frac{n-1}{n}D_\xi$$

Тоді оцінка $D_\xi^{**} = \frac{n}{n-1}D_\xi^*$ буде незміщеною оцінкою дисперсії.

$$D_\xi^{**} = \frac{n}{n-1}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \overline{\xi})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \overline{\xi})^2$$

Обчислимо значення цих точкових оцінок на данній реалізації виборки:

$$(E_\xi^*)_{\text{знач.}} = \frac{1}{100}\sum_{k=1}^{14} x_k^* n_k = 3.06$$

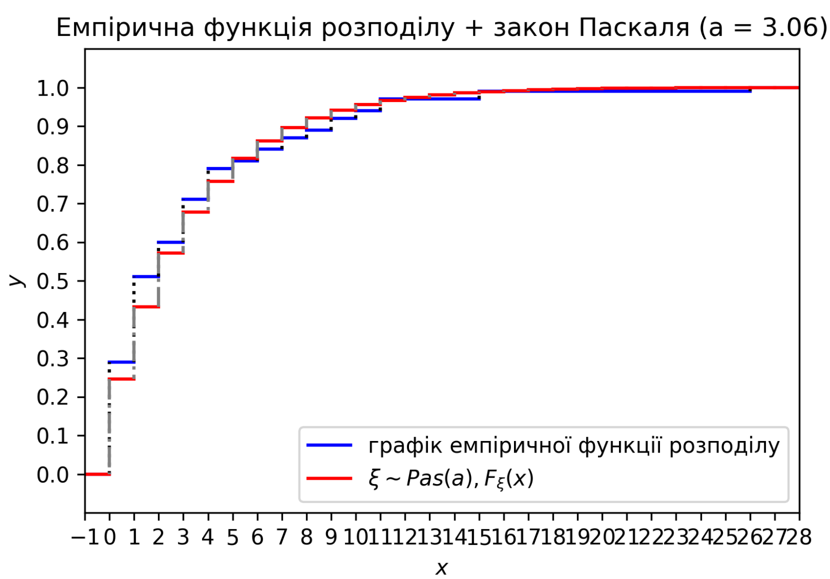
де x_k^* - к-та варіанта, n_k - частота вибірки.

$$(D_\xi^{**})_{\text{знач.}} = \frac{1}{99}\sum_{k=1}^{100}(x_k - 3.06)^2 = 17.30949494949495$$

6 Гіпотеза про розподіл, за яким отримано вибірку

Виходячи з того що:

- полігон частостей реалізації вибірки схожий на полігон ймовірностей закону Паскаля (див. с. 3-4)
- емпірична функцію розподілу реалізації вибірки схожа на функцію розподілу закону Паскаля (див. с. 6-7)
- мода випадкової величини, розподіленої за законом Паскаля дорівнює 0 при будь-яких параметрах закону; в той же самий час значення вибіркової медіани для нашої реалізації виборки також дорівнює 0.
- в наступному параграфі буде показано, що оцінка математичного сподівання закона Паскаля $E_\xi{}^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ є не тільки незміщенною, а й консистентною та ефективною. Тоді, якщо порівняти полігон частостей даної вибірки та полігон ймовірностей, графік емпіричної функції розподілу та графік функції розподілу закона Паскаля з відповідним параметром(значенням оцінки на данній реалізації вибірки),то вони будуть достатньо схожі(див. наступні рис.)



Таким чином висувається гіпотеза, що генеральна сукупність, якою породжена данна вибірка, розподілена за законом Паскаля.

7 Точкові оцінки параметру гіпотетичного закону розподілу

Спочатку скористаємось методом моментів для знаходження точкової оцінки параметра a закона Паскаля ($\mu \sim Pas(a)$). Прирівняємо емпіричний початковий момент 1-го порядку та математичне сподівання випадкової величини, розподіленої за законом Паскаля; отримаємо рівняння Пірсона:

$$E_\mu = E_\mu^*$$

$$E_\mu = a, E_\mu^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$$

$$(a^*)_{\text{мм}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \tag{3}$$

Отримали статистику - точкову оцінку параметра a закону Паскаля.
Тепер отримаємо точкову оцінку параметра a за допомогою методу максимальної правдоподібності (Фішера). Спочатку знайдемо функцію правдоподібності закона Паскаля:

$$\mathcal{L}(\vec{x}, a) = \prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}\{\xi = x_k\} = \prod_{k=1}^{n}\frac{a^{x_k}}{(1+a)^{x_k+1}} = \frac{a^{\sum_{k=1}^{n} x^k}}{(1+a)^{\sum_{k=1}^{n} x^k + n}}$$

$$\ln\mathcal{L}(\vec{x}, a) = (\sum_{k=1}^{n} x_k)\ln a - ((\sum_{k=1}^{n} x_k) + n)\ln(1+a)$$

$$\frac{\partial \ln\mathcal{L}(\vec{x}, a)}{\partial a} = \frac{1}{a(1+a)}\sum_{k=1}^{n} x_k - \frac{n}{1+a} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{1}{a(1+a)}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{n}{1+a}$$

$$a = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

Отримали оцінку параметра a закона Паскаля методом максимальної правдоподібності:

$$(a^*)_{\text{мп}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k \tag{5}$$

Перевіримо виконання достатньої умови:

$$\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}(\vec{x}, a)}{\partial^2 a} = -\frac{1+2a}{a^2(1+a)^2}\sum_{k=1}^{n} x^k + \frac{n}{(1+a)^2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}(\vec{x}, a)}{\partial^2 a}\right|_{a=a^*} = -\frac{n^2}{(1+a^*)^2}(\frac{1}{a^*}+1) < 0 \tag{6}$$

Достатня умова виконана.
Обома методами отримали однакову оцінку параметра a:

$$(a^*)_{\text{мм}} = (a^*)_{\text{мп}} = a^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k = \overline{\xi}$$

Перевіримо властивості цієї оцінки:

1. **Незміщенність.** Вже доведена раніше (див. 2 стор.9)

2. **Консистентність.** Так як $\{\xi_k\}$ - i.i.d[1] , для $\forall \xi_k : E_{\xi_k} = a < \infty, D_{\xi_k} = a^2 + a$ – рівномірно обмежені, то за ЗВЧ $a^* \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} E_{a^*} = a$. А це і означає що оцінка консистентна.

[1] i.i.d. - Independent and identically distributed random variables - незалежні та однаково розподілені випадкові величини

3. **Ефективність.** Розглянемо вираз $\frac{\partial \ln \mathcal{L}(\vec{x},a)}{\partial a}$. Його вже було знайдено раніше (див. 4 стор. 12).

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(\vec{x},a)}{\partial a} = \frac{1}{a(1+a)}\sum_{k=1}^{n} x_k - \frac{n}{1+a} =$$

$$= \frac{n}{a(1+a)}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - a) =$$

$$= C(n,a)(a^* - a)$$

Таким чином, за наслідком з нерівності Рао-Крамера, оцінка $a^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ є ефективною.

4. **Асимптотична нормальність.** Знайдемо дисперсію цієї оцінки:

$$D(a^*) = D(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k) = \left|\xi_k - \text{незалежні}\right| =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D_{\xi_k} = \frac{a^2+a}{n}$$

Перевіримо за визначенням асимптотичну нормальність оцінки:

$$\frac{a^* - E_{a^*}}{\sqrt{D_{a^*}}} = \frac{(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k) - a}{\sqrt{\frac{a^2+a}{n}}} = \frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k - a}{n}}{\sqrt{\frac{a^2+a}{n}}} =$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a)}{\sqrt{n(a^2+a)}} = \frac{\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a^2+a)}} =$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - E_{\xi_k})}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} D_{\xi_k}}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{F}} N(0,1)$$

Останній граничний перехід має місце згідно з наслідку з теореми Ляпунова для однаково розподілених випадкових величин. Таким чином, оцінка a^* є асимптотично нормальною.

Таким чином, маємо незміщенну, консистентну, ефективну та асимптотично нормальну оцінку параметра a закона Паскаля.

8 Перевірка гіпотези про розподіл

Перевірка гіпотези про розподіл генеральної сукупності буде здійснюватись за допомогою критерію χ^2 (Пірсона) з рівнем значущості $\alpha = 0.05$.
Висунемо гіпотезу $H_0 : \xi \sim Pas(3.06)$. Згідно нашої гіпотези, генеральна сукупність може приймати такі значення: $\{0, 1, 2, \dots\}$. Розіб'ємо цю множину на такі підмножини X_i, $i = \overline{0, 5}$:

- $X_0 = \{0\}$
- $X_1 = \{1\}$
- $X_2 = \{2\}$
- $X_3 = \{3\}$
- $X_4 = \{4, 5\}$
- $X_5 = \{6, 7, \dots\}$

Обчислимо ймовірності $p_i = \mathbb{P}(\xi \in X_i/H_0)$ та n_i - кількість значень реалізації вибірки, що потрапили в X_i.

X_i	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4,5\}$	$\{6,7,\dots\}$
p_i	0.2463	0.1856	0.1399	0.1055	0.1394	0.1833
$n \cdot p_i$	24.63	18.56	13.99	10.55	13.94	18.33
n_i	29	22	9	11	10	19

Бачимо, що $\sum_{i=0}^{5} p_i = 1$, r = 6, і виконується умова $\forall i : np_i \geq 10$. Обчислимо значення статистики:

$$\eta = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

$$\eta_{\text{знач.}} = \frac{(29-24.63)^2}{24.63} + \frac{(22-18.56)^2}{18.56} + \frac{(9-13.99)^2}{13.99} +$$
$$+\frac{(11-10.55)^2}{10.55} + \frac{(10-13.94)^2}{13.94} + \frac{(19-18.33)^2}{18.33} \approx 4.35007$$

$r - s - 1 = 6 - 1 - 1 = 4, \alpha = 0.05$, тому за таблицею розподілу Пірсона знайдемо значення $t_{0.05,4} = 9.5$. Бачимо, що $\mu_{\text{знач.}} < t_{0.05,4}$. Робимо висновок, що на рівні значущості 0.05 дані не суперечать висунутій гіпотезі про те, що генеральна сукупність розподілена за законом Паскаля($\xi \sim Pas(3.06)$).

9 Довірчий інтервал для параметра гіпотетичного закону розподілу

За рівень надійності довірчого інтервалу беремо $\gamma = 0.95$. За точкову оцінку параметра а візьмемо $a^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$. Для цієї оцінки вже була знайдена її дисперсія та доведена асимптотична нормальність оцінки.
Побудуємо такий довірчий інтервал, що:

$$\mathbb{P}\{|a^* - a| < \varepsilon\} = \gamma = 0.95$$

З асимптотичної нормальності оцінки випливає те, що:

$$\mathbb{P}\{\frac{|a^* - a|}{\sqrt{D_{a^*}}} < t\} \approx \Phi(t) + \frac{1}{2},$$

де $\Phi(t) = \int_0^t e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$. За допомогою таблиці значень функції Лапласа приблизно знайдемо таке t, що $\Phi(t) + \frac{1}{2} = 0.95$; $\Phi(t) = 0.45$; $t \approx 1.65$.
Тепер розв'яжемо нерівність $\frac{|a^* - a|}{\sqrt{D_{a^*}}} < t$ відносно а, враховуючи те, що $D_{a^*} = \frac{a^2 + a}{n}$:

$$|a^* - a| < t\sqrt{\frac{a^2 + a}{n}}$$

$$(a^* - a)^2 < t^2(\frac{a^2 + a}{n})$$

$$(a^*)^2 - 2aa^* + a^2 < t^2(\frac{a^2 + a}{n})$$

$$a^2(1 - \frac{t^2}{n}) + a(-2a^* - \frac{t^2}{n}) + (a^*)^2 < 0$$

$$\mathcal{D} = (2a^* + \frac{t^2}{n})^2 - 4(a^*)^2(1 - \frac{t^2}{n})$$

$$a_{1,2} = \frac{(2a^* + \frac{t^2}{n}) \pm \sqrt{(2a^* + \frac{t^2}{n})^2 - 4(a^*)^2(1 - \frac{t^2}{n})}}{2(1 - \frac{t^2}{n})}$$

$$a \in \left(\frac{(2a^*_{\text{зн}} + \frac{t^2}{n}) - \sqrt{(2a^*_{\text{зн}} + \frac{t^2}{n})^2 - 4(a^*_{\text{зн}})^2(1 - \frac{t^2}{n})}}{2(1 - \frac{t^2}{n})}, \right.$$

$$\left. \frac{(2a^*_{\text{зн}} + \frac{t^2}{n}) + \sqrt{(2a^*_{\text{зн}} + \frac{t^2}{n})^2 - 4(a^*_{\text{зн}})^2(1 - \frac{t^2}{n})}}{2(1 - \frac{t^2}{n})} \right)$$

Підставивши значення, отримаємо:

$$a \in (2.5616, 3.7576) \text{ з ймовірністю } 0.95$$

10 Висновки

Під час виконання даної розрахункової роботи було проведено обробку деякої реалізації вибірки, побудовано дискретний варіаційний ряд та емпіричну функцію розподілу, зображено їх геометрично у вигляді полігону частостей та графіку емпіричної функції розподілу, порівняно їх з полігоном ймовірностей та графіком функції розподілу відповідно закону Паскаля при деяких значеннях його параметра, обчислено значення вибіркової медіани, моди та асиметрії данної реалізації вибірки, знайдено незміщені точкові оцінки матсподівання та дисперсії. Наслідком цих дій було висунення гіпотези про розподіл за законом Паскаля генеральної сукупності, з якої була отримана реалізація вибірки. Було знайдено таку точкову оцінку параметра гіпотетичного закону розподілу, що є не тільки незміщенною, а й консистентною, ефективною та асимпто нормальною. За допомогою критерію χ^2(Пірсона) було виявлено, що на рівні значущості 0.05 дані не суперечать висунутій гіпотезі про те, що генеральна сукупність розподілена за законом Паскаля з параметром a $=$ 3.06. Останнім було отримано довірчий інтервал (2.5616, 3.7576) для параметра a з рівнем надійності 0.95.