Различные формы задач линейного программирования и симплекс-метод их решения

Квашук I.O, Фордуй Н.С.

20 апреля 2021 г.

Задача линейного программирования

Целевая функция и ограничения представляют собой линейные функции и линейные неравенства соответственно.

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, & i = 1, \ldots, k \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & i = k+1, \ldots, m \end{cases}$$

Основная форма

- Условия - неравенства

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, i = 1, \ldots, m$$

Стандартная форма

- Ограничения исключительно неравенства
- Переменные - положительные

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, & i = 1, \ldots, k \\ x_j \geq 0, & j = 1, \ldots, n \end{cases}$$

Каноническая форма

- Ограничения - равенства
- Переменные - неотрицательные
- Правые части уравнений - также неотрицательны

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & i = 1, \ldots, m \\ x_j \geq 0, & j = 1, \ldots, n \\ b_i \geq 0, & i = 1, \ldots, m \end{cases}$$

Переход от Общей к Канонической

Задача:

$$-2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 1 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 \geq 7 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Переход от Общей к Канонической

Умножим первое уравнение на (-1):

$$2x_1 - 4x_2 + 3x_3 \to \min$$

Добавим к первому условию вспомогательну неотрицательную переменную u_1:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + u_1 = 1$$

Вычтем из второго условия вспомогательную неотрицательную переменную u_2:

$$2x_1 - 5x_2 + 4x_3 - u_2 = 7$$

Представим переменную x_3 как $x_3^1 - x_3^2$, $x_3^1 \geq 0$ $x_3^2 \geq 0$

Переход от Общей к Канонической

$$2x_1 - 4x_2 + 3x_3^1 - 3x_3^2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3^1 - x_3^2 + u_1 = 1 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3^1 - 4x_3^2 - u_2 = 7 \\ x_1, x_2, x_3^1, x_3^2, u_1, u_2 \geq 0 \end{cases}$$

Наводящие размышления

Допустимая область таких задач - фигура многогранник или же полиэдр. Одно из свойств таких фигур наличие углов:

- Точка v называется угловой точкой множества U, если представление $v = \alpha v_1 + (1-\alpha)v_2$, при $u_1, u_2 \in U$ и $0 < \alpha < 1$ возможно лишь при $v_1 = v_2$

Общий алгоритм

1. Начальное допустимое базисное решение.
2. По условию оптимальности определяется вводимая переменная. Если таких нет - алгоритм останавливается
3. На основе условия допустимости выбирается исключаемая переменная
4. Методом Гаусса-Жордана вычисляется новое базисное решение.

Условия

1. Условие отпимальности.
   Вводимая переменная в задаче максимизации является небазисная переменная, имеющая наибольший отрицательный (положительный) коэффицеиент в $z-$ строке
2. Условия допустимости.
   Исключающая переменная является базисной, для которого значение правой части ограничения к положительному коэффициенту ведущего столбца минимально.

Симплекс-метод

Алгоритм неформально:

- Построение симплекс таблицы
- Замена переменных в базисном наборе

Пример. Условие

Задача:

$$z = 5x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

Ограничения:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24 \\ x_1 + 2x_2 + s_2 = 6 \\ -x_1 + x_2 + s_3 = 1 \\ x_2 + s_4 = 2 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Таблица

Как базис: s_1, s_2, s_3, s_4

Базис	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Решение
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

Базис получше

Базис	x_1	Решение	Отношение (точка перес.)
s_1	6	24	$24/6 = 4$
s_2	1	6	$6/1 = 6$
s_3	-1	1	$1/(-1) = -1$
s_4	0	2	$2/0 = \infty$

Алгоритм Жордана-Гаусса

- Вычисление элементов новой ведущей строки. Новая ведущая строка = Текущая ведущая строка / Ведущий элемент
- Вычисления элементов остальных строк, включая $z-$ строку.
  Новая строка=Текущая строка - Её коэффициент в ведщем столбце $\times$ Новая ведущая строка.

Вторая Итерация Метода

Базис	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Решение
z	1	0	$-2/3$	$5/6$	0	0	0	20
x_1	0	1	$2/3$	$1/6$	0	0	0	4
s_2	0	0	$2/3$	$-1/6$	0	1	0	5
s_3	0	0	$5/3$	$1/6$	0	1	0	5
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

Третья Итерация Метода

Как базис x_1, x_2, s_3, s_4

Базис	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Решение
z	1	0	0	$3/4$	$1/2$	0	0	21
x_1	0	1	0	$1/4$	$-1/2$	0	0	3
x_2	0	0	1	$-1/8$	$3/4$	0	0	$3/2$
s_3	0	0	0	$3/8$	$-5/4$	1	0	$5/2$
s_4	0	0	0	$1/8$	$-3/4$	0	1	$1/2$