НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ КОМПЛЕКС
"ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ"
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ УКРАЇНИ
"КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ
СІКОРСЬКОГО"
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

РОЗРАХУНКОВА РОБОТА
з теми "Регресійний аналіз"

Виконав студент групи
КА-81 Фордуй Нікіта
Перевірила Каніовська І.Ю.

Київ 2020

Зміст

1 Завдання 1

1.1 Завдання

1. Провести аналіз вибірки та вибрати підходящу лінійну регресійну модель.

2. За методом найменших квадратів знайти оцінки параметрів вибраної моделі.

3. На рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити адекватність побудованої моделі.

4. Для самого малого значення параметра побудованої моделі на рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити гіпотезу про його значущість.

5. Побудувати прогнозований довірчий інтервал з довірчою ймовірністю $\alpha = 0{,}95$ для середнього значення відклику та самого значення відклику в точці x =16.

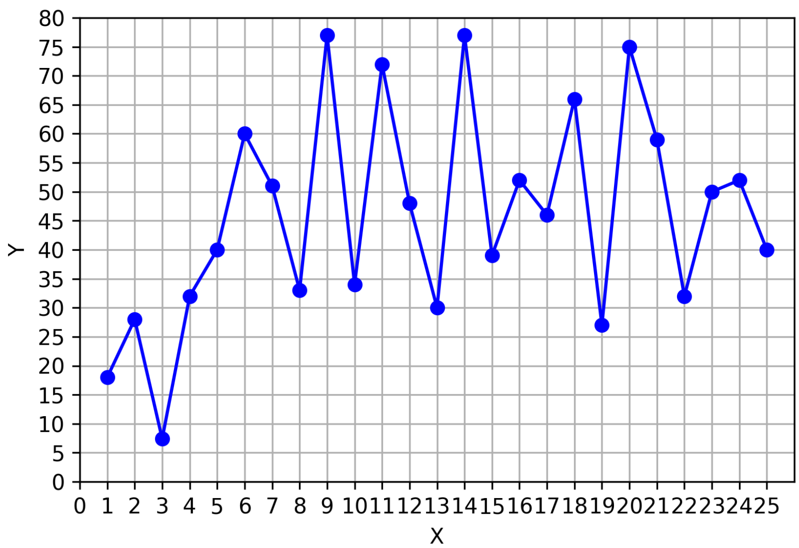
6. Написати висновки.

X	Y
1	18
2	28
3	7.4
4	32
5	40
6	60
7	51
8	33
9	77
10	34
11	72
12	48
13	30
14	77
15	39
16	52
17	46

X	Y
18	66
19	27
20	75
21	59
22	32
23	50
24	52
25	40

1.2 Аналіз вибірки та вибір регресійної моделі

Розглянемо розташування значень відкликів Y на площині:



За розташуванням значень відкликів на площині стає зрозуміло, що залежність є нелінійна і схожа на квадратичну. Тому розглянемо модель $f(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$

1.3 Знаходження за МНК оцінки параметрів вибраної моделі

Матриця плану для вибраної моделі матиме вигляд:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 25 \\ 1^2 & 2^2 & \dots & 25^2 \end{pmatrix}^T \tag{1}$$

Після цього використовуємо матрицю F для знаходження іформаційної матриці Фішера $A = FF^T$ та дисперсійну матрицю Фішера A^{-1}; обидві з них мають розмір 3×3. Обчислені матриці наведені у додатку 1.

Знайдемо значення оцінок параметрів регресійної моделі за формулою:

$$\vec{\beta}^*_{\text{знач.}} = A^{-1}F^T\vec{\eta}_{\text{знач.}}, \tag{2}$$

де $\vec{\eta}_{\text{знач.}} = (18, \quad 28, \quad \dots \quad 40)^T$ - вектор значень відкликів. Отримаємо $\vec{\beta}^*_{\text{знач.}} \approx (14.87, \ \ 5.24, \ \ -0.17)^T$. Тоді сама модель матиме вигляд:

$$f^*(x) = 14.87 + 5.24x - 0.17x^2 \tag{3}$$

1.4 Перевірка адекватності побудованої моделі

Перевіряємо на рівні значущості $\alpha = 0.05$ адекватність побудованої моделі. Задля перевірки побудованої регресійної моделі скористаємось тим факт, що випадкова величина

$$\gamma = \frac{D^{**}_{\eta}}{(\sigma^2)^{**}} \sim F(n-1, n-m) \tag{4}$$

У нашому випадку $n = 25, m = 3 \Rightarrow$ статистика γ буде розподілена за законом Фішера-Снедекора із 24 та 22 ступенями вільності відповідно. Знайдемо межу критичної області з виразу $\mathbb{P}(\gamma < t), \ t_{\text{кр.}} = 2.054$.

1.5 Перевірка гіпотези про значущість найменшого за значенням параметра

Перевіримо гіпотезу про значущість параметра для $(\beta^*_2)_{\text{знач.}} = -0.17$ на рівні значущості $\alpha = 0.05$. Основна гіпотеза $H_0 : \beta_2 = 0$ проти лівосторонньої альтернативи $H_1 : \beta_2 < 0$, відповідно, критична область - лівостороння. Для перевірки гіпотези скористаємося статистикою:

$$\gamma = \frac{\beta^*_2}{\sqrt{(\sigma^2)^{**}a_{22}}} \sim St_{n-m} \tag{5}$$

З таблиці розподілу Стьюдента з $n - m = 22$ ступенями вільності отримуємо критичне значення $t_{\text{кр.}} = 1.717$. Знаходимо $(\sigma^2)^{**} \approx 3.48, \ a_{22} = (A^{-1})_{22} \approx 1.858 * 10^{-5}$. Отримуємо $\gamma_{\text{знач.}} \approx -20.933$. Т.я. $\gamma_{\text{знач.}} < t_{\text{кр.}}$, то основна гіпотеза H_0 відхиляється на користь альтернативної. Таким чином, параметр β_2 є значущим, залишаємо побудовану модель незмінною.

1.6 Довірчий інтервал для середнього значення відклику та значення відклику в точці

2 Завдання 2

2.1 Завдання

1. За методом найменших квадратів знайти оцінки параметрів двофакторної регресійної моделі.

2. На рівні значущості $\alpha = 0.05$ перевірити адекватність побудованої моделі.

3. Для самого малого значення параметра побудованої моделі на рівні значущості $\alpha = 0.05$ перевірити гіпотезу про його значущість.

4. Побудувати прогнозований довірчий інтервал з довірчою ймовірністю $\gamma = 0.95$ для середнього значення відклику та самого значення відклику в деякій точці.

5. Написати висновки.

№	X_1	X_2	Y
1	1	8	6
2	4	2	8
3	9	-8	1
4	11	-10	0
5	3	6	5
6	8	-6	3
7	5	0	2
8	10	-12	-4
9	2	4	10
10	7	-2	-3
11	6	-4	5

2.2 Знаходження за МНК оцінки параметрів вибраної моделі

Матриця плану для вибраної моделі матиме вигляд:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 4 & 9 & \dots & 6 \\ 8 & 2 & -8 & \dots & -4 \end{pmatrix}^T \tag{6}$$

Після цього використовуємо матрицю F для знаходження іформаційної матриці Фішера $A = FF^T$ та дисперсійну матрицю Фішера A^{-1}; обидві з них мають розмір 3×3. Обчислені матриці наведені у додатку 1. Знайдемо значення оцінок параметрів регресійної моделі за формулою:

$$\vec{\beta}^*_{\text{знач.}} = A^{-1}F^T\vec{\eta}_{\text{знач.}}, \tag{7}$$

де $\vec{\eta}_{\text{знач.}} = (6, \quad 8, \quad \dots \quad 5)^T$ - вектор значень відкликів. Отримаємо $\vec{\beta}^*_{\text{знач.}} \approx (14, \ -2, \ -0.5)^T$. Тоді сама модель матиме вигляд:

$$f^*(x) = 14 - 2x_1 - 0.5x_2 \tag{8}$$

3 Завдання 3

3.1 Завдання

1. За методом найменших квадратів знайти оцінки параметрів трьохфакторної регресійної моделі.

2. На рівні значущості $\alpha = 0.05$ перевірити адекватність побудованої моделі.

3. Для самого малого значення параметра побудованої моделі на рівні значущості $\alpha = 0.05$ перевірити гіпотезу про його значущість.

4. Побудувати прогнозований довірчий інтервал з довірчою ймовірністю $\gamma = 0.95$ для середнього значення відклику та самого значення відклику в деякій точці (точку вибирайте самі).

5. Написати висновки.

№	X_1	X_2	X_3	Y	№	X_1	X_2	X_3	Y
1	173.50	83.00	22.0	169.91	16	281.69	0.00	259.0	254.34
2	194.05	74.25	48.0	138.22	17	283.58	0.00	282.0	205.54
3	209.37	65.00	56.0	69.01	18	285.21	4.00	288.0	238.28
4	221.52	56.25	81.0	72.50	19	286.62	7.00	304.0	222.52
5	231.49	45.00	89.0	40.83	20	287.81	11.00	320.0	235.60
6	239.88	38.25	100.0	96.49	21	288.81	11.00	353.0	208.35
7	247.04	36.00	126.0	82.22	22	289.63	16.00	353.0	249.94
8	253.22	27.25	132.0	115.50	23	290.28	21.00	377.0	208.17
9	258.59	16.00	151.0	126.87	24	290.78	27.00	402.0	260.02
10	263.29	12.25	174.0	160.31	25	291.13	33.00	402.0	217.63
11	267.42	9.00	186.0	159.74	26	291.35	39.00	418.0	216.33
12	271.05	6.25	203.0	215.98	27	291.43	44.00	438.0	208.81
13	274.24	-1.00	223.0	196.75	28	291.40	52.00	452.0	234.50
14	277.06	-1.75	238.0	237.24	29	291.25	60.00	477.0	212.37
15	279.53	-5.00	246.0	217.10	30	291.00	69.00	493.0	241.34

3.2 Знаходження за МНК оцінки параметрів вибраної моделі

Матриця плану для вибраної моделі матиме вигляд:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 173.5 & 194.05 & 209.37 & \dots & 291 \\ 83 & 74.25 & 65 & \dots & 69 \\ 22 & 48 & 56 & \dots & 493 \end{pmatrix}^T \tag{9}$$

Після цього використовуємо матрицю F для знаходження іформаційної матриці Фішера $A = FF^T$ та дисперсійну матрицю Фішера A^{-1}; обидві з них мають розмір 4×4. Обчислені матриці наведені у додатку 1. Знайдемо значення оцінок параметрів регресійної моделі за формулою:

$$\vec{\beta}^*_{\text{знач.}} = A^{-1} F^T \vec{\eta}_{\text{знач.}}, \tag{10}$$

де $\vec{\eta}_{\text{знач.}} = (169.91, \quad 138.22, \quad \dots \quad 241.34)^T$ - вектор значень відкликів. Отримаємо $\vec{\beta}^*_{\text{знач.}} \approx (1314.989, \quad -5.069, \quad -3.686, \quad 1.265)^T$. Тоді сама модель матиме вигляд:

$$f^*(x) = 1314.989 - 5.069x_1 - 3.686x_2 + 1.265x_3 \tag{11}$$