# Радиотехнические цепи и сигналы РТЦиС
# Спектральное описание случайных процессов
# Теорема Хинчина-Винера
# Узкополосные и широкополосные процессы

СибГУТИ,кафедра РТС

Спектральное описание сигнала можно использовать и для случайных процессов, если вместо спектральной плотности амплитуд рассматривать понятие спектральной плотности мощности процесса.

Если по уже известной из опыта реализации СП $\xi_i(t)$ вычислить ее спектральную плотность $S_{iT}(j\omega)$, то усредняя по всем реализациям можно получить **спектральную плотность мощности** или энергетический спектр стационарного случайного процесса

$$W(\omega) = \lim_{T\to\infty} m\{\frac{1}{T}|S_{iT}(j\omega)|^2\} \tag{1}$$

Спектральная плотность мощности имеет **размерность** мощности процесса на единицу полосы частот Вт/Гц.

Более строго энергетический спектр стационарного случайного процесса определяется теоремой Хинчина-Винера, по которой энергетический спектр и корреляционная функция являются парой преобразований Фурье:

$$W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = 2\int_{0}^{\infty} B(\tau)cos(\omega\tau)d\tau \qquad (2)$$

$$B(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} W(\omega)cos(\omega\tau)d\omega \qquad (3)$$

Энергетический спектр $W(\omega)$ показывает распределение средней мощности процесса по частотам элементарных гармонических составляющих сигнала.

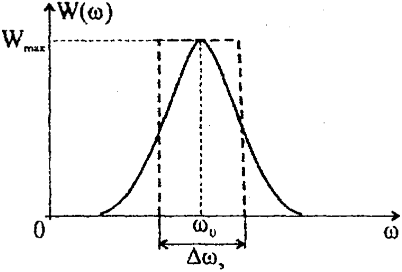
# Свойства энергетического спектра

1. Энергетический спектр является действительной и четной функцией частоты
$W(-\omega) = W(\omega)$
2. Средняя мощность стационарного СП равна интегралу от энегретического спектра по всем частотам
$P_{\sim} = B(0) = \sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) d\omega$
3. Мощность постоянной составляющей $P_{=}$ равна площади под кривой корреляционной функции процесса
$W(0) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) d\tau$
4. Интервал корреляции СП
$\Delta\tau = \frac{1}{B(0)} \int_{0}^{\infty} B(\tau) d\tau = \frac{W(0)}{2B(0)}$
5. Ширина спектра случайного процесса $\Delta\omega$ - ширина равномерного в полосе частот $\Delta\omega$ энергетического спектра процесса, эквивалентного данному по средней мощности

# Свойства энергетического спектра

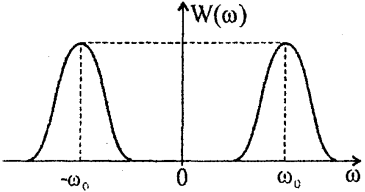
Ширина спектра случайного процесса

$\Delta\omega = \frac{\frac{1}{\pi}\int_0^\infty W(\omega)d\omega}{W_{max}(\omega)}$ -

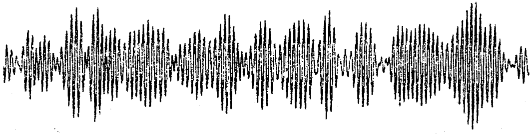



Чем шире спектр случайного процесса, тем уже его корреляционная функция и наоборот. Произведение интервала корреляции $\Delta\tau$ на ширину энергетического спектра $\Delta\omega$ есть величина постоянная для семейства энергетических спектров заданной формы: $\Delta\tau\Delta\omega = const$

Если энергетический спектр случайного процесса с непрерывным спектром сосредоточен в относительно узкой полосе частот $\Delta\omega$ около некоторой фиксированной частоты $\omega_0$ , причем $\Delta\omega \ll \omega_0$ , то такой процесс называется **узкополосным**.

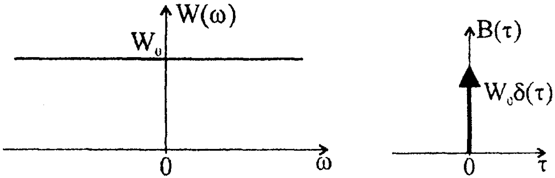



Пример реализации УП СП



Если же указанное условие не выполняется, то есть спектральная плотность средней мощности сохраняет постоянное значение до очень высоких частот, то случайный процесс называется широкополосным. Для узкополосных и широкополосных процессов корреляционные функции будут значительно отличаться по длительности.

Полезной математической идеализацией широкополосного процесса является **белый шум** - процесс, спектральная плотность которого равномерна во всей области частот $W(\omega) = W_0 = \frac{N_0}{2} = const$



**Корреляционная функция белого шума равна**

$$B(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega = \frac{1}{2\pi}\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau}d\omega = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

т.е. представляет собой дельта-функцию в начале координат, для белого шума значения процесса в любые сколь угодно близкие моменты времени не коррелированы. Поэтому белый шум иногда называют абсолютно случайным процессом.

Белый шум является **математической идеализацией**. В реальных процессах достаточно близкие значения практически зависимы. Кроме того, реальные процессы имеют конечную мощность, а для белого шума мощность процесса бесконечна $B(0) = \frac{N_0}{2}\delta(0) = \infty$ .

На практике рассматривают прохождение широкополосного процесса через радиотехнические устройства, полоса пропускания которых ограничена и много уже ширины энергетического спектра входного процесса.

В этом случае замена реального процесса идеальным белым шумом не вносит существенных погрешностей, значительно упрощая анализ преобразования.

Понятие "белый шум" относится только к спектральным свойствам случайного процесса и не затрагивает вопроса о законах распределения. Случайные процессы могут иметь одинаковые корреляционные функции и, следовательно, энергетические спектры, но различные законы распределения. Так и белые шумы с одинаковыми энергетическими спектрами могут иметь различные законы распределения.