Радиотехнические цепи и сигналы РТЦиС
Функция корреляции УП процесса
Нормальный случайный процесс

СибГУТИ,кафедра РТС

Вычислим по теореме Хинчина-Винера функцию корреляции УП СП со спектральной плотностью $W(\omega)$ с центральной частотой спектра ω_0

$$B(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} W(\omega)cos(\omega\tau)d\omega \tag{1}$$

введем новую переменную $\omega' = \omega_0 - \omega$

$$B(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} W(\omega_0 - \omega')cos(\omega_0 - \omega')\tau d\omega' \tag{2}$$

Обозначим $W^*(\omega) = W(\omega_0 - \omega)$, тогда

$a_c(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W^*(\omega)cos\omega\tau d\omega$

$a_s(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W^*(\omega)sin\omega\tau d\omega$ и тогда функция корреляции УП СП равна

$$B(\tau) = a_c(\tau)cos\omega_0 t + a_s(\tau)sin\omega_0 t \tag{3}$$

Так как энергетический спектр $W(\omega)$ сосредоточен в узкой полосе частот около ω_0, а спектр $W^*(\omega) = W(\omega_0 - \omega)$ расположен в низкочастотной области, то функции $a_c(\tau)$ и $a_s(\tau)$ будут медленно меняющимися функциями по сравнению с $cos\omega_0 t$ и $sin\omega_0 t$.

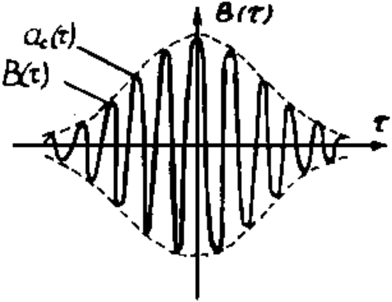
Если энергетический спектр узкополосного процесса симметричен относительно центральной частоты ω_0, то энергетический спектр $W^*(\omega)$ будет симметричен относительно начала координат. Тогда функция $a_s(\tau) = 0$, так как для нее подынтегральное выражение является нечетной функцией и

$$B(\tau) = a_c(\tau) cos\omega_0 t \qquad (4)$$

Следовательно, корреляционная функция узкополосного случайного процесса с симметричным относительно средней частоты ω_0 энергетическим спектром равна умноженной на $cos\omega_0 t$ корреляционной функции $a_c(\tau)$

Функция корреляции узкополосного случайного процесса

которая соответствует низкочастотному процессу со спектром $W^*(\omega)$, полученному из исходного процесса смещением спектра на величину ω_0 в область низких частот.



Интервал корреляции узкополосного процесса равен
$\Delta\tau = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$

Нормальный случайный процесс и его свойства

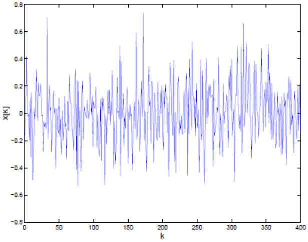
В радиотехнических и других приложениях наиболее часто встречается гауссов случайный процесс с нормальным распределением вероятностей, описывающий широкий класс физических явлений.

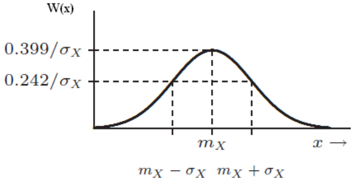
Гауссов процесс - это случайный процесс, все n-мерные плотности вероятности которого имеют нормальные законы распределения. Одномерный нормальный закон распределения плотности вероятности имеет вид

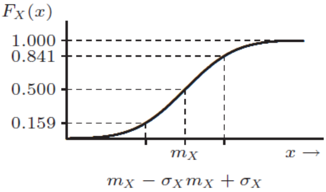
$$W(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}} \tag{5}$$

Функция распределения выражается интегралом

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}} dx \tag{6}$$


x[K]
k


W(x)
$0.399/\sigma_X$
$0.242/\sigma_X$
m_X
$x \rightarrow$
$m_X - \sigma_X$ $m_X + \sigma_X$


$F_X(x)$
1.000
0.841
0.500
0.159
m_X
$x \rightarrow$
$m_X - \sigma_X m_X + \sigma_X$

В элементарных функциях интеграл не берется, поэтому при расчетах используется интеграл вероятностей с заменой переменных $\frac{x-m_x}{\sigma} = t, x = \sigma t + m_x, dx = \sigma dt$

функция Лапласа

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \tag{7}$$

или функция Крампа

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \tag{8}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}[1 + \Phi(\frac{x-m_x}{\sigma})] = F(\frac{x-m_x}{\sigma}) \tag{9}$$

Нормальный случайный процесс и его свойства

1. Нормальный закон распределения является предельным, то есть к нему стремится распределение суммы произвольно распределенных случайных величин при неограниченном увеличении числа слагаемых
2. Любая линейная операция над нормальным случайным процессом, (усиление, дифференцирование, интегрирование и т.д.) не изменяет его закона распределения
3. При прохождении широкополосного случайного процесса с любым распределением через узкополосную избирательную систему процесс на ее выходе имеет тенденцию к нормализации
4. Для нормального закона стационарность в широком и узком смысле совпадают

Плотность распределения суммы гармонического колебания и нормального СП

Плотность вероятностей суммы независимых случайных процессов может быть вычислена при помощи интеграла свертки. Для процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$

$$W(x) = \int_{-\infty}^{\infty} W_1(z) W_2(x-z) dz.$$

Если $\xi_1(t) = U cos(\omega t + \phi)$ - гармоническое колебание с равномерно распределенной фазой ϕ, а $\xi_2(t)$ - нормальный случайный процесс, то плотность верятности их суммы равна

$$W(x) = \frac{1}{\pi\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} e^{-\frac{(x-U cos(\omega t+\phi))^2}{2\sigma^2}} d\phi$$

Зависимости W(x) при различных соотношениях амплитуды гармонического колебания U и дисперсии σ^2 нормального процесса показаны на рисунке

Плотность распределения суммы гармонического колебания и нормального СП