Радиотехнические цепи и сигналы РТЦиС Прохождение случайных процессов через линейные цепи

СибГУТИ,кафедра РТС

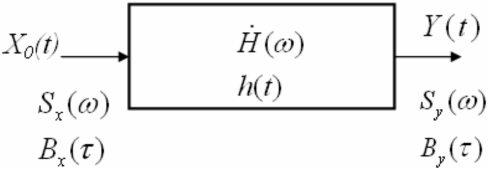
Прохождение случайных процессов через линейные цепи

Радиотехнические цепи содержат инерционные, безынерционные, нелинейные и линейные элементы с постоянными и переменными параметрами. Анализ прохождения случайных процессов через такие цепи сложен и может быть проведен только для отдельных частных случаев. Поэтому разделяют радиотехническую цепь на блоки, каждый из которых представляет безынерционное нелинейное преобразование или линейное инерционное преобразование случайного процесса.

Линейная цепь задается импульсной характеристикой h(t) или ее преобразованием Фурье - комплексной частотной характеристикой

$$H(j\omega) = \int_0^\infty h(t)e^{-j\omega t}dt \qquad (1)$$

На входе линейной цепи действует стационарный СП $x(t)$ со спектральной плотностью мощности $S_x(\omega)$ и корреляционной функцией $B_x(\tau)$. Определим статистические характеристики случайного процесса Y(t) на выходе линейной цепи - $S_y(\omega)$, $B_y(\tau)$.



Энергетический спектр процесса на выходе равен энергетическому спектру процесса на входе, умноженному на квадрат амплитудно-частотной характеристики системы, и не будет зависеть от фазочастотной характеристики

$$S_y(\omega) = S_x(\omega)H^2(\omega) \tag{2}$$

Корреляционная функция процесса на выходе линейной системы может быть определена как преобразование Фурье от энергетического спектра

$$B_y(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega \qquad (3)$$

Мощность процесса на выходе системы будет равна

$$\sigma_y^2 = B_y(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega)d\omega \qquad (4)$$

Корреляционная функция $B_y(\tau)$ выходного процесса Y(t) может быть определена непосредственно по заданной корреляционной функции $B_y(\tau)$ входного процесса $X(t)$ и импульсной характеристике линейной цепи h(t).

Реализация случайного процесса y(t) на выходе ЛИЦ равна свертке входной реализации $x(t)$ с импульсной характеристикой цепи h(t) $y(t) = x(t) * h(t)$.

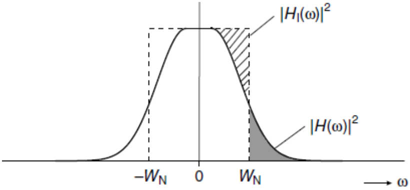
Корреляционная функция $B_y(\tau)$ выходного процесса Y(t) равна свертке корреляционной функции $B_x(\tau)$ входного процесса X(t) с функцией автокорреляции $\varphi(t)$ импульсного отклика линейной цепи $\varphi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)h(t-\tau)dt$

$$B_y(\tau) = \varphi(\tau) * B_x(\tau) \tag{5}$$

Если на входе цепи действует белый шум, то функция автокорреляции выходного процесса

$B_y(\tau) = \varphi(\tau) * B_x(\tau) = \varphi(\tau) * \frac{N_0}{2}\delta(\tau) = \frac{N_0}{2}\varphi(\tau)$

Шумовая полоса цепи - полоса частот, численно совпадающая с полосой пропускания идеального ФНЧ, дающего на выходе ту же мощность шума, что и данная цепь.



$$\Delta f_N = W_N = \frac{\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty H^2(\omega)d\omega}{H(\omega_0)} \tag{6}$$

Для примера рассмотрим спектрально-корреляционные характеристики случайного процесса Y(t) на выходе RC-цепи при действии на ее входе белого шума с $S_x(\omega) = \frac{N_0}{2}$ и $B_x(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$.

Частотная характеристика RC цепи $H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega RC}$, импульсная характеристика $h(t) = \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$.

Энергетический спектр на выходе цепи

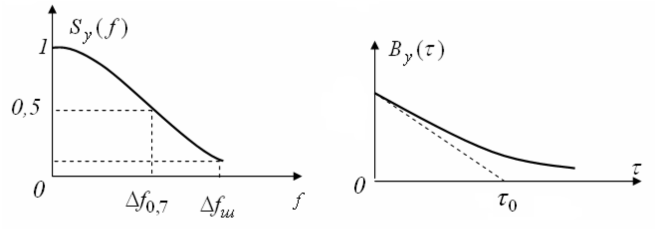
$S_y(\omega) = S_x(\omega)H^2(\omega) = \frac{N_0}{2}\frac{1}{1+(\omega RC)^2}$.

Функция автокорреляции выходного процесса

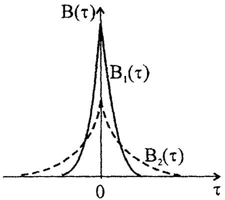
$B_y(\tau) = \frac{N_0}{2}\varphi(\tau) = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} h(t)h(t-\tau)dt = \frac{N_0}{2}\frac{e^{-\frac{\tau}{RC}}}{2RC}$

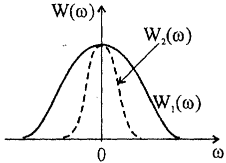
Шумовая полоса RC цепи равна $\Delta f_N = \frac{1}{4RC}$, интервал корреляции $\tau_0 = RC$.

Прохождение случайных процессов через линейные цепи



С уменьшением полосы пропускания RC цепи мощность выходного сигнала уменьшается и корреляционная функция меняется медленнее





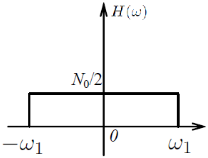
Функция корреляции БШ, ограниченного полосой частот $[-\omega_1 \div \omega_1]$

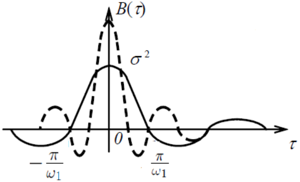
Подадим белый шум с $S_x(\omega) = \frac{N_0}{2}$ и $B_x(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$ на идеальный ФНЧ с верхней частотой полосы пропускания ω_1 и коэффициентом передачи 1.

Тогда спектр мощности на выходе ФНЧ равен $S_y(\omega) = \frac{N_0}{2}$.

Функция корреляции процесса на выходе ФНЧ

$$B_y(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_1}^{\omega_1} S_y(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega = \frac{N_0\omega_1}{2\pi}\frac{sin\omega_1\tau}{\omega_1\tau}$$





$B_y(0) = N_0 f_1 = \sigma_y^2$ - мощность процесса на выходе ФНЧ, увеличивается при увеличении полосы ω_1, интервал корреляции τ_0 уменьшается.

Функция корреляции БШ, ограниченного полосой частот $[\omega_1 \div \omega_2]$

По теореме Хинчина-Винера находим

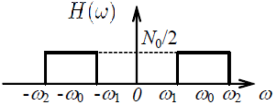
$$B_y(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} S_y(\omega) cos\omega\tau d\omega = \frac{N_0}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} cos\omega\tau d\omega = \\ = \frac{N_0}{2\pi\tau}(sin\omega_2\tau - sin\omega_1\tau) \tag{7}$$

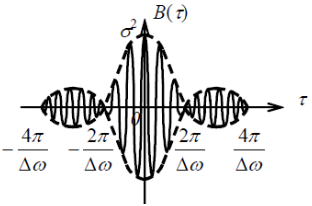
Применяя формулу тригонометрии
$sin\alpha - sin\beta = 2cos\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$$B_y(\tau) = \frac{N_0}{2\pi\tau} 2cos\omega_0\tau sin\frac{\Delta\omega\tau}{2} = \frac{N_0}{2}\frac{\Delta\omega}{\pi}\frac{sin\frac{\Delta\omega\tau}{2}}{\frac{\Delta\omega\tau}{2}} cos\omega_0\tau = \\ = \sigma_y^2\rho(\tau) cos\omega_0\tau \tag{8}$$

Функция корреляции БШ, ограниченного полосой частот $[\omega_1 \div \omega_2]$

$\rho(\tau) = \frac{sin\frac{\Delta\omega\tau}{2}}{\frac{\Delta\omega\tau}{2}}$ - огибающая функции автокорреляции $B_y(\tau)$





Если процесс на входе линейной системы имеет нормальное (гауссово) распределение, то он остается нормальным и на выходе системы. В этом случае изменяются только корреляционная функция и энергетический спектр процесса.

Нормализация СП в узкополосной цепи

Если случайный процесс воздействует на узкополосную линейную цепь, полоса пропускания которой много меньше ширины спектра, то на выходе системы имеет место явление нормализации закона распределения. Закон распределения на выходе узкополосной системы стремится к нормальному независимо от того, какое распределение имеет широкополосный случайный процесс на входе.

Процесс на выходе инерционной системы в некоторый момент времени представляет собой суперпозицию отдельных откликов системы на воздействия входного процесса в различные моменты времени. Чем уже полоса пропускания системы и шире спектр входного процесса, тем большим числом элементарных откликов образуется выходной процесс.

По центральной предельной теореме теории вероятностей закон распределения процесса, представляющего собой сумму большого числа элементарных откликов, будет стремиться к нормальному.