Аналитическая часть

1. Тригонометрический ряд Фурье

Для функции $f(x)$, определенной на отрезке $[0, 2\pi]$:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ 0, & x \in [\frac{\pi}{2}, 2\pi] \end{cases}$$

Определение коэффициентов ряда Фурье

Функция $f(x)$ периодична с периодом $T = 2\pi$. Коэффициенты тригонометрического ряда Фурье a_0, a_n и b_n определяются как:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

Вычисление коэффициента a_0

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx + \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} 0\, dx$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \left[\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2\pi}(1 - 0) = \frac{1}{2\pi}$$

Вычисление коэффициентов a_n

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cos(nx)\, dx$$

Используем формулу для произведения косинусов:

$$\cos(x)\cos(nx) = \frac{1}{2}(\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x))$$

Тогда:

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x))\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin((n+1)x)}{n+1} + \frac{\sin((n-1)x)}{n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

При подстановке пределов интегрирования:

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin((n+1)\frac{\pi}{2})}{n+1} + \frac{\sin((n-1)\frac{\pi}{2})}{n-1}\right)$$

Для четных n:

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{0}{n+1} + \frac{0}{n-1}\right) = 0$$

Для нечетных n:

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{(-1)}{n+1} + \frac{1}{n-1}\right)$$

Вычисление коэффициентов b_n

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\sin(nx)\,dx$$

Используем формулу для произведения синуса и косинуса:

$$\cos(x)\sin(nx) = \frac{1}{2}(\sin((n+1)x) - \sin((n-1)x))$$

Тогда:

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin((n+1)x) - \sin((n-1)x))\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\cos((n+1)x)}{n+1} + \frac{\cos((n-1)x)}{n-1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

При подстановке пределов интегрирования:

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{\cos((n+1)\frac{\pi}{2})}{n+1} + \frac{\cos((n-1)\frac{\pi}{2})}{n-1} \right)$$

Для нечетных n:

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{0}{n+1} + \frac{0}{n-1} \right) = 0$$

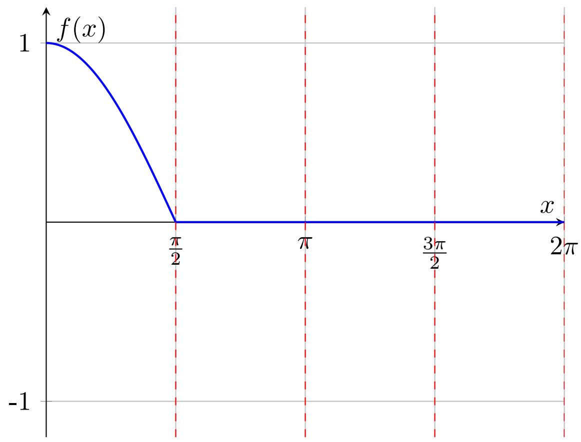
Для четных n:

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \right)$$

Таким образом, ряд Фурье для функции $f(x)$ будет выглядеть следующим образом:

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

График суммы ряда



2. Четное продолжение функции и ряд Фурье по косинусам

Четное продолжение функции $f(x)$:

$$f_e(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ 0, & x \in [\frac{\pi}{2}, 2\pi] \\ \cos(-x), & x \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \\ 0, & x \in [-2\pi, -\frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Функция $f_e(x)$ теперь четная, и ее ряд Фурье содержит только косинусные члены.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_e(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f_e(x) \cos(nx)\, dx$$

Вычисления аналогичны ранее приведенным, с учетом изменений:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx = \frac{2}{\pi}$$

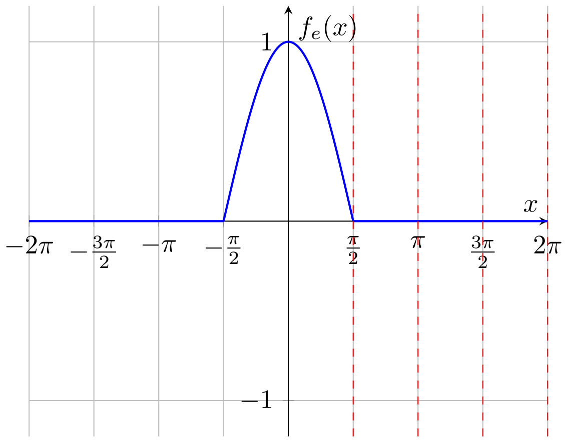
Для четных n:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left(\frac{(-1)^{n/2}}{n+1} + \frac{(-1)^{n/2}}{n-1} \right)$$

Для нечетных n:

$$a_n = 0$$

График суммы ряда



3. Нечетное продолжение функции и ряд Фурье по синусам

Нечетное продолжение функции $f(x)$:

$$f_o(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ 0, & x \in [\frac{\pi}{2}, 2\pi] \\ -\cos(-x), & x \in [-\frac{}{2}, 0] \\ 0, & x \in [-2\pi, -\frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Функция $f_o(x)$ теперь нечетная, и ее ряд Фурье содержит только синусные члены.

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f_o(x) \sin(nx)\, dx$$

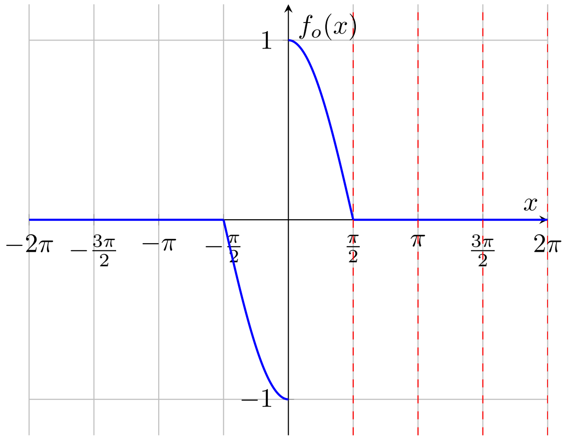
Вычисления аналогичны ранее приведенным, с учетом изменений:
Для четных n:

$$b_n = 0$$

Для нечетных n:

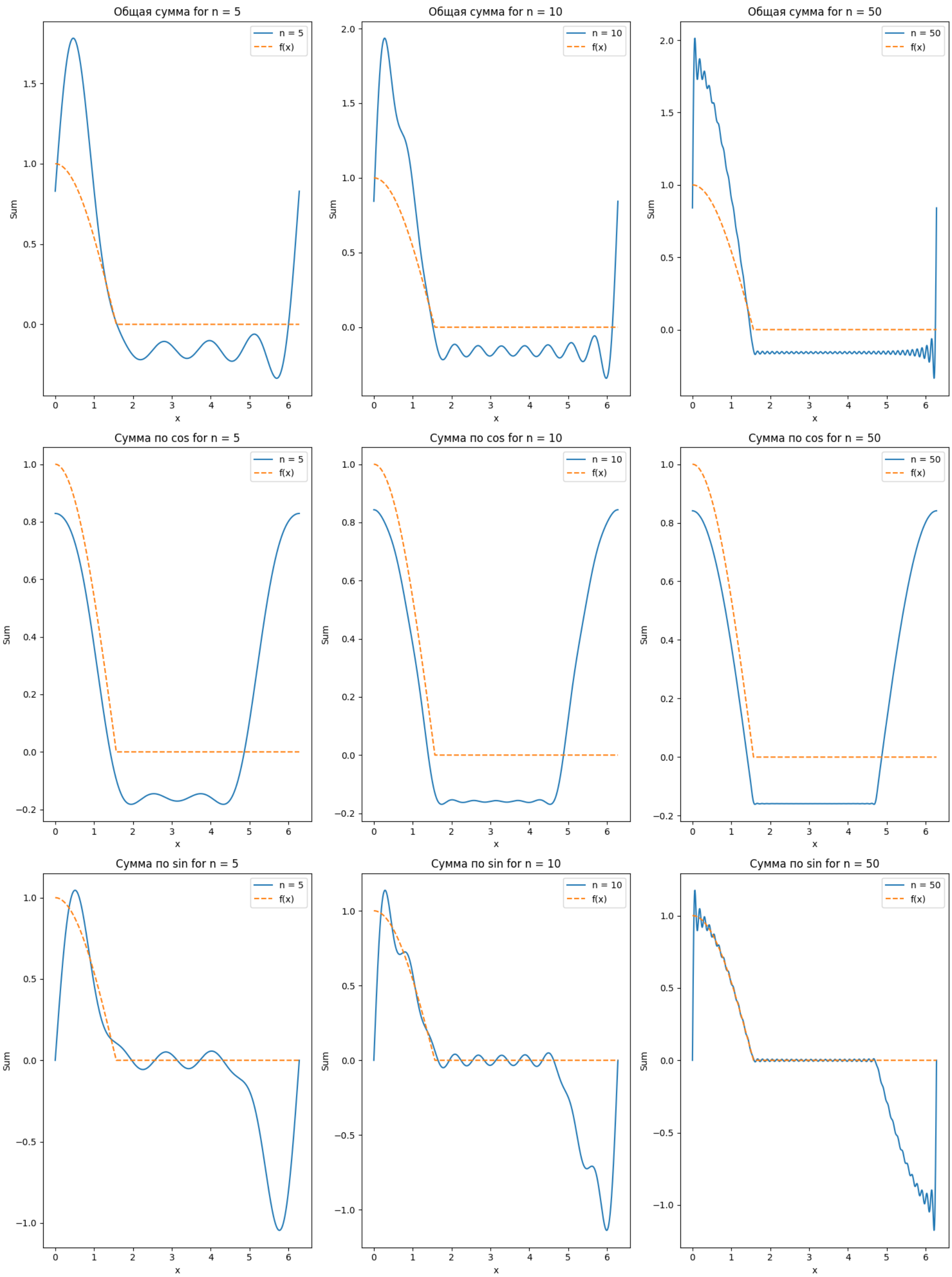
$$b_n = \frac{2}{\pi} \left(\frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n+1} + \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n-1} \right)$$

График суммы ряда



Графическая часть

2. Графики для каждой частичной суммы при разном числе слагаемых


Общая сумма for n = 5
n = 5
f(x)
Sum
x
Общая сумма for n = 10
n = 10
f(x)
Sum
x
Общая сумма for n = 50
n = 50
f(x)
Sum
x
Сумма по cos for n = 5
n = 5
f(x)
Sum
x
Сумма по cos for n = 10
n = 10
f(x)
Sum
x
Сумма по cos for n = 50
n = 50
f(x)
Sum
x
Сумма по sin for n = 5
n = 5
f(x)
Sum
x
Сумма по sin for n = 10
n = 10
f(x)
Sum
x
Сумма по sin for n = 50
n = 50
f(x)
Sum
x