Szczegółowy spis treści **[77]**

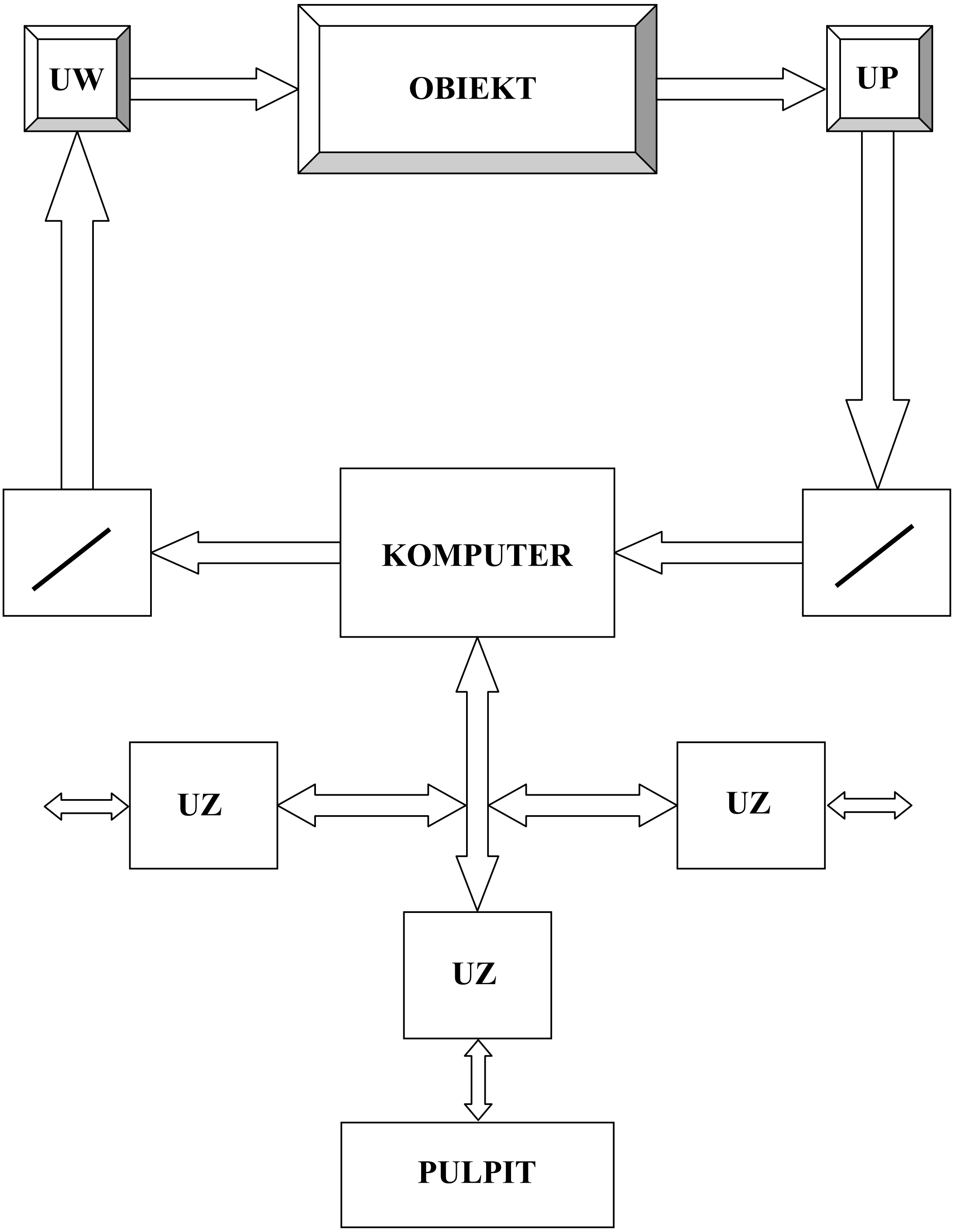
5.1.4. Sygnały impulsowe {1/2}
5.2. Twierdzenie o próbkowaniu
5.2.1. Związek widm s. dyskretnych i ciągłych {1}
5.2.2. Twierdzenie Snannona {1}
5.3. Dyskretne przekształcenie Fouriera
5.3.1. Definicje i interpretacje DFT {1}
5.3.2. Zastosowanie przekształcenia *Z* {1}
5.3.3. Szybka transformata – FFT obliczenia motylkowe, sortowanie, grupowanie {4}

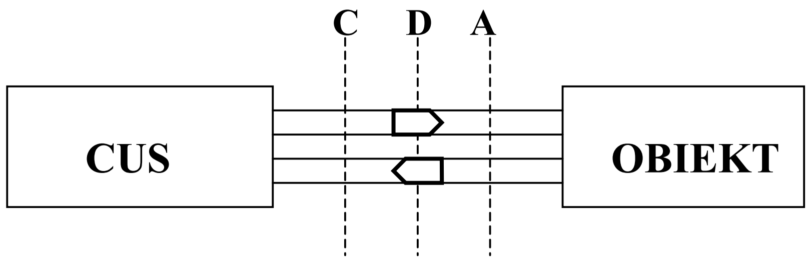
6. Teoria dyskretnych układów liniowych [35]
6.1. Osiągalność i sterowalność {1}
6.1.1. Warunki sterowalności {3}
6.2. Odtwarzalność i obserwowalność {1}
6.2.2. Warunki obserwowalności {3}
6.3. Stabilizowalność {1}
6.4. Kompletny opis układów {3}
6.5. Przekształcenia tożsamościowe {1}
6.5.1. Zasady {1}
6.5.2. Interpretacja graficzna i algebraiczna {1 ½}
6.5.3. Wyznaczanie transformacji podobieństwa {1 ½}
6.5.4. Własności układów podobnych {2}
6.6.1. Postać diagonalna (i macierz Van der Monde`a) {2}
6.6.1.1. Metoda wyznacznikowa {2}
6.6.1.1.2. Metoda wektorów własnych {2}
6.6.1.1.3. Metoda transmitancyjna {1+}
6.6.2. Postać normalna regulatorowa {1}
6.6.2.1. Wyznaczanie macierzy transformacji {1}
6.6.3. Postać normalna obserwatorowa {1}
6.6.3.1. Wyznaczanie macierzy transformacji {1}
6.6.4. Postać normalna sterowalna {1}
6.6.4.1. Wyznaczanie macierzy transformacji {1}
6.6.2. Postać normalna obserwowalna {1}
6.6.2.1. Wyznaczanie macierzy transformacji {1}

PODSTAWY STEROWANIA KOMPUTEROWEGO

Z. KOWALCZUK

Podstawowe elementy CUS





(U. HYBRYD.)

Sygnały

- **analogowe** $x(t)$
  - **kształt**
  - **energia**
  - x **&** t $\in$ **zbiór mocy continuum**

- **dyskretne** $x(t_i) = x(i)$
  - **kształt**
  - $x \in C_X \quad t_i \in D_t$

- **cyfrowe** $\underline{x}(i)$
  - **kształt**
  - $\underline{x} \in D_x \quad i \in D_i$

Układy

- **jednorodne**
- **niejednorodne (hybrydowe)**

⟶ **Analiza układów jednorodnych**

Metody analizy CUS:

- **(MC) m. czasu ciągłego**
- **(MD) m. czasu dyskretnego**

(CUS + KA) $\longrightarrow$ (MC)
(OBIEKT + KA) $\longrightarrow$ (MD)

Metoda czasu ciągłego
(obiektowy p. w.)

- **złożona analiza układów hybrydowych**

- **stosowany sposób projektów**
  (projekt, d. aproksymacja
  c. implementacja)

Metoda czasu dyskretnego
(komputerowy p. w.)

- **prosta analiza układu hybrydowego**
  po ustaleniu okresu próbkowania)

- **problematyczne wyniki syntezy**
  - **ustalenie okresu próbkowania**
  - **istnienie ef. nieuchwytnych.**

Metody opisu UC (U.D.)

- **Metody opisu układów dyskretnych (impulsowych)**
  - **podstawowe znaczenie**
  - **UC $\approx$ UD (ogran. dokładność)**

- **Funkcje logiczne (algebra Boole`a)**
  - **technika cyfrowa (proste elem. m. c.)**
  - **elementy języków programowania (niskiego i wysokiego rzędu, systemy ekspertowe)**

- **Metody numeryczne i języki programowania**
  - **„rozwinięcie” algebry Boole`a**
  - **stosowne do opisu UC i modelowania**
  - **perspektywy (rozwój zastosowań m. c., standaryzacja języków komput.).**

UKŁADY DYSKRETNE

$$\tilde{y}(t_n) = R\tilde{u}(t_n)$$

$$u \Rightarrow \boxed{R} \Rightarrow y$$

$$\tilde{y}(nT) = R\tilde{u}(nT)$$

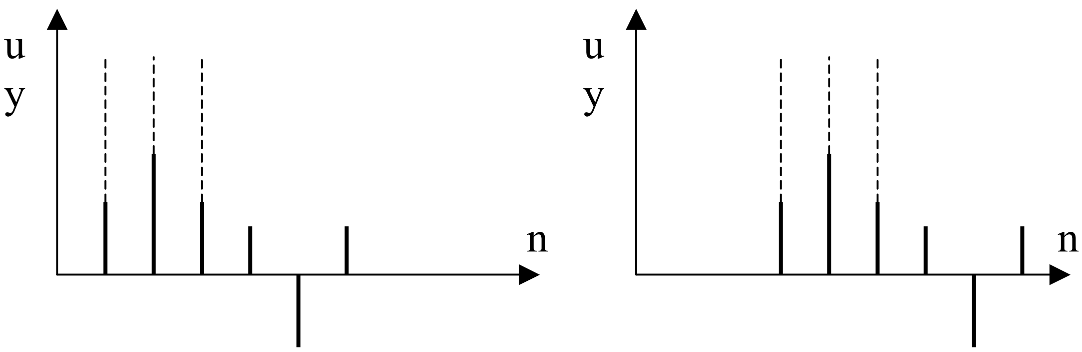
$$\tilde{f}(nT) \overset{\Delta}{=} f(n)$$

$$y(n) = Ru(n)$$

- **NIEZMIENNICZOŚĆ** $\boldsymbol{N}$

$R: u(n) = y(n) = 0 \;\;\text{dla}\;\; n < 0$ **(st. spocz.)**

$$R \in \mathsf{N} \;\Leftrightarrow\; Ru(n-k) = y(n-k) \quad \forall u \;\; \forall k \geq 0$$



- **LINIOWOŚĆ** L

$$R \in \boldsymbol{L} \;\Leftrightarrow\; w.l.$$

$$w.l.\begin{cases} R\alpha u(n) = \alpha Ru \\ R[u_1(n) + u_2(n)] = Ru_1(n) + Ru_2(n) \end{cases}$$

$$w.l.\ \{ R[\alpha u_1 + \beta u_2] = \alpha Ru_1 + \beta Ru_2$$

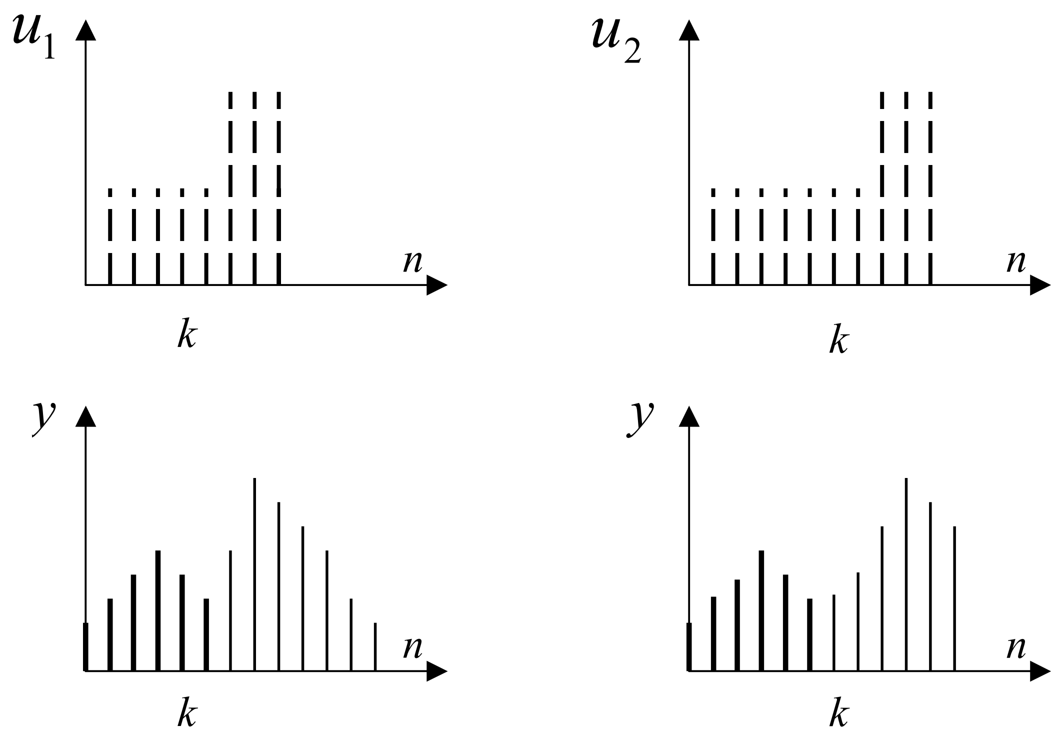
$$\forall u, u_1, u_2 \in D,\;\; \alpha, \beta \in \mathbf{R}$$

- **PRZYCZYNOWOŚĆ** P

$$R \in P \Leftrightarrow Ru_1(n) = Ru_2(n) \quad \forall n \le k \quad \forall u_1(n),\ u_2(n) \in D \ :$$

$$u_1(n) = u_2(n) \ \text{dla} \ \ n \le k$$

$$u_1(n) \ne u_2(n) \ \text{dla} \ \ n > k$$



UKŁADY NIEREKURSYWNE

$$y(n) = R\{\ldots, u(n-1), u(n), u(n+1), \ldots\}$$

- $R \in \boldsymbol{L},\ R \in \boldsymbol{N} \Rightarrow$

$$y(n) = R\{\ldots\} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i\, u(n-i)$$

- $R \in \boldsymbol{P} \Rightarrow$

$$y(n) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, u(n-i)$$

- $\left.\begin{cases} u(n) = 0 \quad \text{dla} \quad n < 0 \\ \qquad\quad \text{oraz} \\ a_i = 0 \quad \text{dla} \quad i > N \end{cases}\right\} \Rightarrow$

$$y(n) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, u(n-i) + \sum_{j=1}^{\infty} a_i\, u(-j) =$$

$$= \sum_{i=0}^{N} a_i\, u(n-i)$$

Liniowy, niezmienniczy czasowo, przyczynowy układ nierekursywny opisuje r. różnicowe N-tego rzędu (F. POPRZECZNY)

UKŁADY REKURSYWNE

$$y(n) = R\{\ldots, u(n-1), u(n), u(n+1)\ldots$$
$$\ldots, y(n-1), y(n), y(n+1)\ldots\}$$

$$R \in \mathbf{L}, \mathbf{N}, \mathbf{P}$$

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N} a_i\, u(n-i) - \sum_{i=1}^{M} b_i\, y(n-i)$$

Splot

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(k)\,\delta(n-k)$$

$$\delta_{n,k} = \delta(n-k)$$

Odpowiedź impulsowa:

$$h(n) = R\,\delta(n) \qquad \Rightarrow$$

$$y(n) = Ru(n) = R\sum_{k} u(k)\,\delta(n-k) =$$

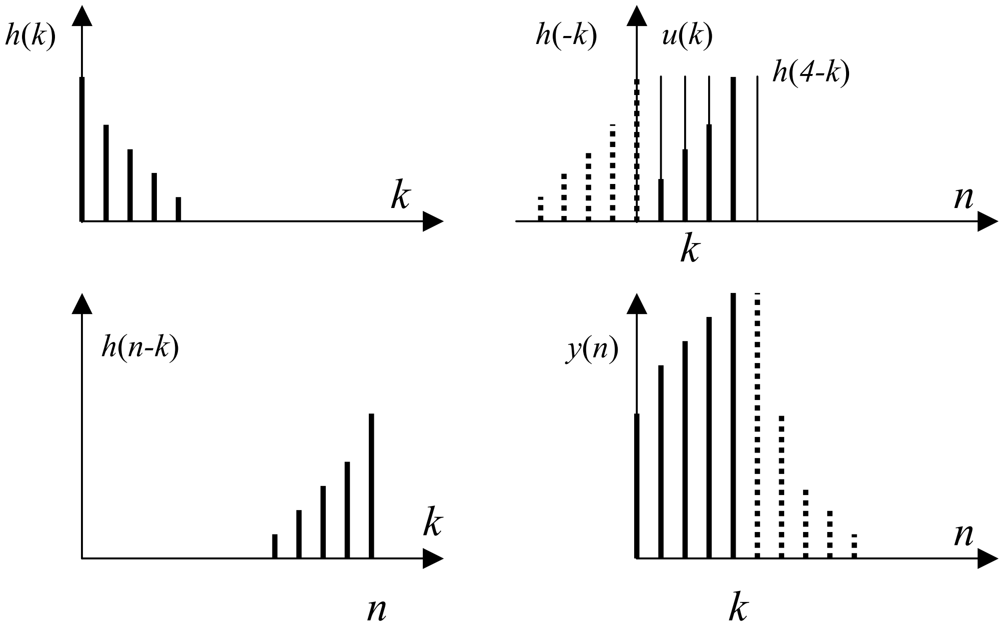
$$= \sum_{k} u(k)\,R\,\delta(n-k) = \sum_{k} u(k)\,h(n-k)$$

$$R \in P \Rightarrow \; y(n) \underset{-\infty}{\overset{n}{=}} \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\,u(n-k)$$

tzn. dla $u(n) = 0,\ n < 0$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} u(k)\,h(n-k) = \sum_{k=0}^{n} h(k)\,u(n-k) =$$
$$= h(n) * u(n)$$

GRAFICZNA REALIZACJA SPLOTU



Stabilność S

$$(\Delta) \quad R \in S \iff$$
$$\forall u \Big(\ \forall n, \ |u(n)| \le M < \infty \ \Rightarrow \forall n, \ |y(n)| < \infty) \ \Big)$$

$$R \in \mathbf{L, N, P} \ \Rightarrow$$
$$(*) \ (R \in S \iff l_1 \overset{\Delta}{=} \sum_{k=0}^{\infty} |\ h(k)| < \infty)$$

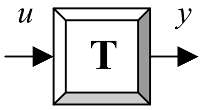
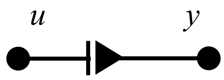
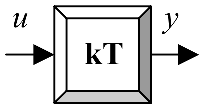
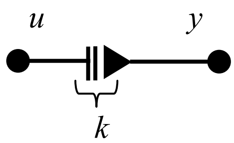
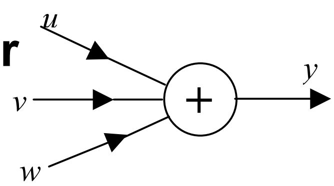
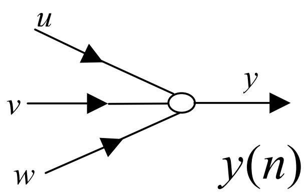
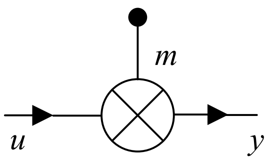
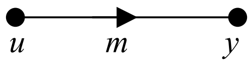
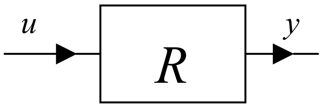
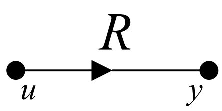
$$|y(n)| = |h * u| \le \sum_{k=0}^{\infty} |h(k)||u(n-k)| \le M \sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| = M \cdot l_1$$

Przykład

$$h(n) = \alpha^n 1(n) \quad (R \in L, P, N \ )$$

$$l_1 = \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha|^{\ k} = \frac{1}{1 - |\alpha\,|} \qquad \iff \ |\alpha\ | \ < 1$$

OPIS GRAFOWY/BLOKOWY

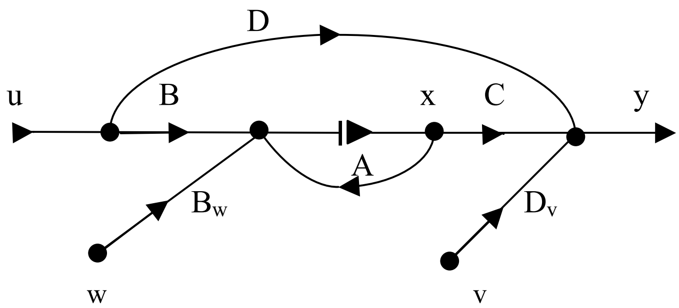
ELEMENT	BLOK	GRAF	R-NIE
Opóźnienie			$y(n)=u(n-1)$
Opóźnienie wielokrotne			$y(n)=u(n-k)$
Sumator			$y(n)=u(n)+v(n)+w(n)$
Mnożnik			$y(n)=mu(n)$
Układ			$y(n)=Ru(n)$

Równania stanu

$$R\begin{cases}\mathbf{x}(n+1) = f(\mathbf{x}(n),\ \mathbf{u}(n), \mathbf{w}(n)) \\ \mathbf{y}(n) = g(\mathbf{x}(n), \mathbf{u}(n), \mathbf{v}(n))\end{cases}$$

$$R \in \mathbf{L}, \mathbf{N}, \mathbf{P}$$

$$\begin{cases}\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}\mathbf{u}(n) + \mathbf{B}_{\mathbf{w}}\,\mathbf{w}(n) \\ \mathbf{y}(n) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(n) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(n) + \mathbf{D}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{v}(n)\end{cases}$$



$M(n) = M \;\rightarrow$ **niezmienniczość (stacjonarność)**

UKŁADY STOCHASTYCZNE

(w, v - s. przypadkowe)

Dyskretny proces Gaussa-Markowa

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}_n\,\mathbf{x}_n + \mathbf{B}_n\,\mathbf{w}_n$$

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{C}_n\,\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n$$

$\{\mathbf{w}_n\}, \{\mathbf{v}_n\}$ **- nieskorelowany stacjonarny proces stoch. z wart. średnią = 0 (biały szum)**

UKŁADY SISO

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(n) + \mathbf{b}\,u(n)$$

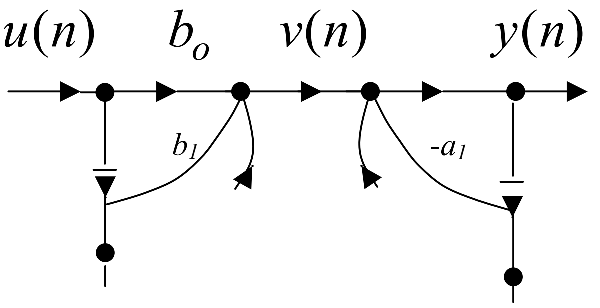
$$y(n) = \mathbf{c}\,\mathbf{x}(n) + \mathbf{d}\,u(n)$$

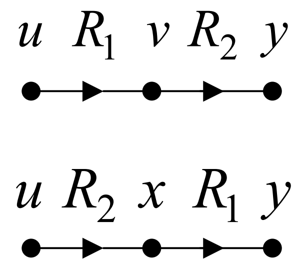
r.r. rzędu N $\longrightarrow$ N r.r. 1 – rzędu

$$y(n) = \underbrace{\sum_{i=0}^{N} b_i\, u(n-i)}_{v(n)} - \sum_{i=1}^{N} a_i\, y(n-i)$$

$$v(n) = R_1 u(n) = \sum_{i=0}^{N} b_i\, u(n-i)$$

$$y(n) = R_2 v(n) = v(n) - \sum_{i=1}^{N} a_i\, y(n-i)$$





$$x(n) = R_2\, u(n) = u(n) - \sum_{i=1}^{N} a_i x(n-i)$$

$$y(n) = R_1 x(n) = \sum_{i=1}^{N} b_i x(n-i) + b_o\, x(n)$$

$$= b_o\, u(n) + \sum_{i=1}^{N} (b_i - b_o a_i)\, x(n-i)$$

$$\mathbf{x}(n)=\begin{bmatrix} x(n-N) \\ x(n+1-N) \\ . \\ . \\ x(n-2) \\ x(n-1) \end{bmatrix} \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 1 & .. & 0 \\ . & . & & & . \\ . & . & & & . \\ . & . & & & 1 \\ -a_N & -a_{N-1} & .. & .. & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}=\begin{bmatrix} b_N-b_o a_N \\ . \\ . \\ . \\ . \\ b_1-b_o a_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}=\left[b_o\right]$$

p. regulatorowa

Wyznaczanie odpowiedzi

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(0) + \mathbf{b}\,u(0)$$

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(1) + \mathbf{b}\,u(1) =$$

$$= \mathbf{A}^2\,\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{b}\,u(0) + \mathbf{b}\,u(1)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}^n\mathbf{x}(0) + \sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{A}^{n-1-k}\,\mathbf{b}\,u(k)$$

$$\mathbf{A}^0 \equiv \mathbf{I}_{N\times N}$$

$$y(n) = \mathbf{c}\mathbf{x}(n) + \mathbf{d}u(n) =$$

$$= \mathbf{c}\mathbf{A}^n\mathbf{x}(0) + \mathbf{c}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{A}^{n-1-k}\mathbf{b}u(k) + \mathbf{d}u(n)$$

Odpowiedź impulsowa $[\mathbf{x}(0)=0]$

$$g(n) = \mathbf{c}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{A}^{n-1-k}\mathbf{b}\,\delta(k) + \mathbf{d}\delta(n)$$

$$g(n) = \begin{cases} \mathbf{d} & dla \quad n=0 \\ \mathbf{c}\,\mathbf{A}^{n\text{-}1}\mathbf{b} & dla \quad n=1,2,\ldots \end{cases} \qquad \mathbf{d} = [b_0]$$

Odpowiedź skokowa

$$h(n) = \mathbf{c}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{A}^{n-1-k}\,\mathbf{b} + \mathbf{d}$$

Dyskretne sygnały zdeterminowane

Impuls jednostkowy

$$\delta(nT) = \delta(n) = \delta_{n,0} \qquad \delta_{n,k} = \begin{Bmatrix} 1 \Leftrightarrow n = k \\ 0 \Leftrightarrow n \neq k \end{Bmatrix}$$

Uskok jednostkowy

$$1(nT) = 1(n) = l(nT) = 1 \qquad n \geq 0$$

Sinusoida **unorm. dyskretna puls.**

$$u(n) = u_o \sin(\Omega n + \varphi) \qquad \Omega = \omega T$$

p. zespolona: $u(n) = u_o e^{j\Omega n}$ $\quad \varphi = 0$

s. dyskretny względem n
s. ciągły względem Ω
s. okresowy względem Ω

$$e^{j(\Omega + 2\pi)n} = e^{j\Omega n + j2\pi n} = e^{j\Omega n}$$

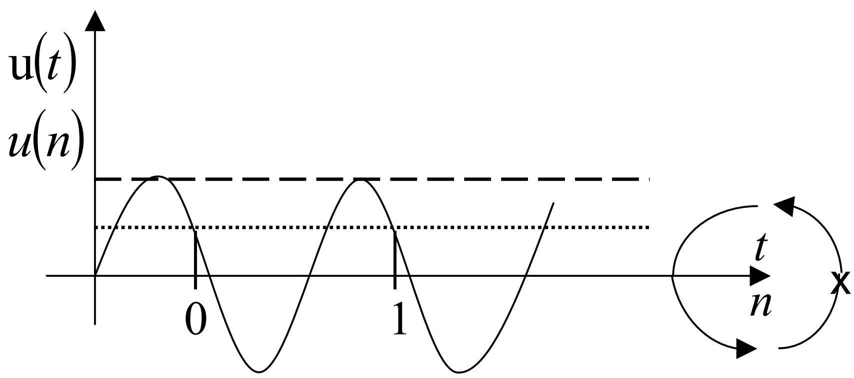
dyskretna pulsacja próbkowania ≡ okres

$$\Omega_T = \omega_T T = \frac{2\pi}{T} T = 2\pi$$

s. okresowy względem n

$$e^{j\Omega n} = e^{j(\Omega n + 2\pi N)} = e^{j\Omega(n + n_o)}$$ **o okresie** $n_0 \in D_n$

$$n_0 = \frac{2\pi}{\Omega} N = \frac{2\pi}{\omega T} N = \frac{\tau}{T} N \qquad \tau = \frac{2\pi}{\omega}$$



Przekształcenie Z

Dwustronna z-transformata funkcji d.t. $f(n)$

operator $\{z\}$

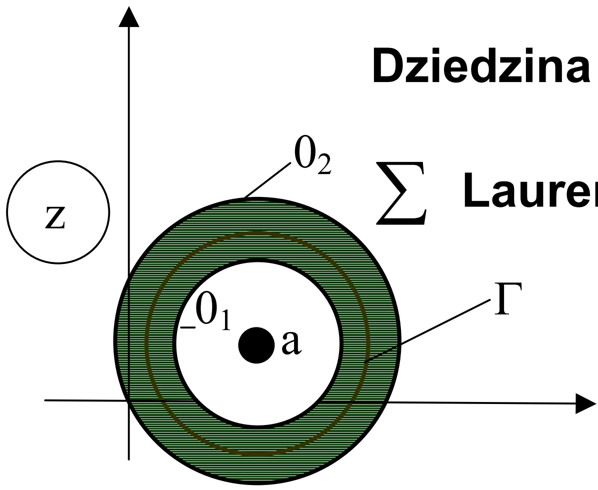
$$Z\{f(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) z^{-n} \quad = F(z)$$

$z \in \chi_z^F$ – **obszar zbieżności**

Twierdzenie Laurenta

1. **Jeśli $F(z)$ jest f. analityczną na dwu koncentrycznych okręgach 0_1 i 0_2**
(o środku w a) i w pierścieniu między nimi

Dziedzina $F(z)$



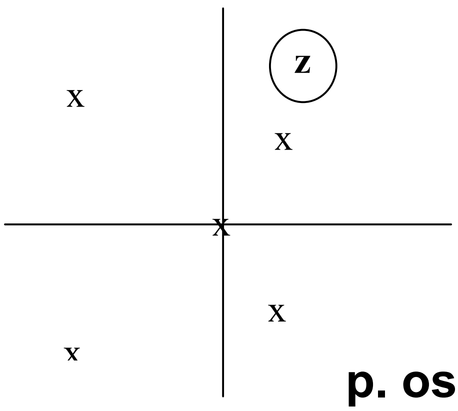
to $F(z)$ można (jednoznacznie) rozwinąć w szereg Laurenta ($\sum L$)

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n (z-a)^{-n}$$

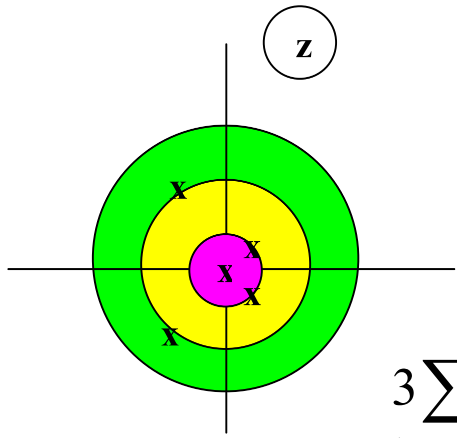
$$f_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z)(z-a)^{n-1} dz$$

2. $\sum L$ **jest zbieżny i reprezentuje** $F(z)$ **w otwartym pierścieniu:** $r(0_1)\downarrow, r(0_2)\uparrow$ **aż osiągną punkty osobliwości**

3. $\sum L$ **w swoim pierścieniu jest jednoznaczny. Zaś** $F(z)$ **w różnych pierścieniach ma różne** $\sum L$**.**



p. osobliwe



$3\sum L$

3 pierścienie

z**-transformata jest** $\sum L$ **dla** $F(z)$ **wokół** $z=0$

(*) Funkcje meromorficzne jedyne osobliwości dla $|z|\le\infty$ **to bieguny**

(*) $\neq\sum L$; **dlatego będziemy zakładać, że** z**-transf. jest** $\sum L$ **zbieżnym w otwartym pierścieniu**

$$r_1 < |z| < r_2 \to \infty$$

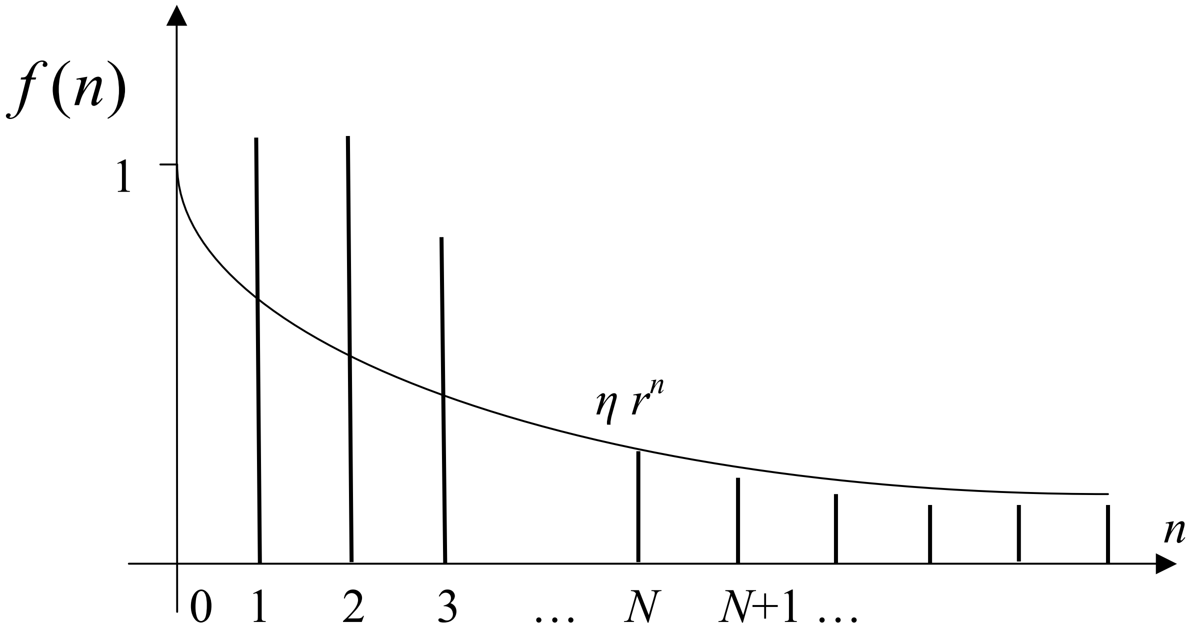
promień okręgu przechodzącego przez najbardziej odległy od p. $z=0$ **biegun** $F(z)$

(*) **Jeśli** $f(n) = 0$ dla $n < 0$**, ograniczona dla**

$\infty > n \geq 0$ **i** $|f(n)| \leq \eta\, r^n$ dla $n \geq N$

gdzie $\eta, r, N > 0$

to $\sum L$ **(**z**-transf.) jest zbieżny dla** $|z| > r$



Własności przekształcenia Z

- **Liniowość**

$$Z\left\{a\,f\left(n\right)+b\,g\left(n\right)\right\}=a\,F\left(z\right)+b\,G\left(z\right) \qquad a,b\in \mathrm{R}$$

- **Przesunięcie**

$$Z\left\{f\left(n+m\right)\right\}=z^{m}\,F\left(z\right) \qquad m\in \mathrm{Int}$$

- **Skalowanie zespolone**

$$Z\left\{w^{-n}\,f\left(n\right)\right\}=F\left(wz\right)$$

- **Różniczkowanie zespolone**

$$Z\left\{n\,f\left(n\right)\right\}=-z\frac{d}{dz}F\left(z\right)$$

$$Z\left\{nT\,f\left(nT\right)\right\}=-Tz\frac{d}{dz}F\left(z\right)$$

- **Splot rzeczywisty**

$$Z\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f\left(k\right)g\left(n-k\right)\right\}=F\left(z\right)G\left(z\right)$$

Jednostronne przekształcenie $\mathcal{Z}$

$$\mathcal{Z}\, f(n) \overset{\Delta}{=} \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, z^{-n} = F(z)$$

- **Przesunięcie** $\qquad m \in \mathcal{J}_+ = \mathcal{N}$

Jeśli $f(n)=0$ dla $n<0$ **to**

$$(\ )\quad \mathcal{Z}\, f(n+m) = z^{m}\left[F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k)\, z^{-k}\right]$$

$$(\ )\quad \mathcal{Z}\, f(n-m) = z^{-m} F(z)$$

- **Splot rzeczywisty**

$$\mathcal{Z}\sum_{k=0}^{n} f(k)\, g(n-k) = \mathcal{Z}\sum_{k=0}^{n} f(n-k)\, g(k) = F(z)\, G(z)$$

- **Wartość początkowa oryginału**

$$f(0^{+}) = \lim_{z\to\infty} F(z)$$

- **Wartość końcowa oryginału**

Jeśli $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} f(n) = f_{\infty}$

to $\qquad f_{\infty} = \lim\limits_{z\to 1} (z-1)\, F(z)$

Sygnały wielowymiarowe

$$u(t, x, y)$$

$\longrightarrow$ **s. trójwymiarowy (analogowy obraz)**

s. dyskretny (T, X, Y)

$$u(kT, mX, nY) = u(k, m, n)$$

Przekształcenie $\mathcal{Z}_3$

$$\mathcal{Z}_3 u(k,m,n) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u(k,m,n)\, z_1^{-k}\, z_2^{-m}\, z_3^{-n}$$

Splot zespolony (w dziedzinie częstotliwości)

$$Y(z) = Z\left[f(n)g(n)\right] = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_{\Gamma_1} F(v)\, G\left(\frac{z}{v}\right) \frac{dv}{v} =$$

$$= \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_{\Gamma_2} G(v)\, F\left(\frac{z}{v}\right) \frac{dv}{v}$$

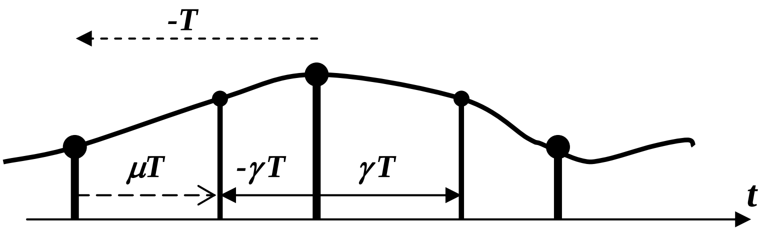
Γ_1 **- kontur⁺ we wspólnym obszarze zbieżności** $F(v)$ i $G(z/v)$ $\quad (\Gamma_2 : F(z/v)\ i\ G(v))$

Jeśli Γ_2 **- obszar zbieżności,** $v = \varsigma e^{j\Theta},\ z = re^{j\phi}$

$$Y(re^{j\phi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F\left(\frac{r}{\varsigma} e^{j(\phi-\Theta)}\right) G(\varsigma e^{j\Theta})\, d\Theta$$

(całka splotowa) $\quad \widehat{Y}(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widehat{F}(\phi - \Theta)\, \widehat{G}(\Theta)\, d\Theta$

Zmodyfikowane przekształcenie $\mathcal{Z}$



$$0 \le \gamma < 1$$

$$0 \le \mu < 1$$

$(k-1)T \qquad kT \qquad (k+1)T$

$$t = kT + \gamma T = (k+\gamma)T$$

$$t = kT - \gamma T = (k-1)T + \mu T = kT + (\mu - 1)T =$$
$$= \left[k + (\mu - 1)\right]T$$

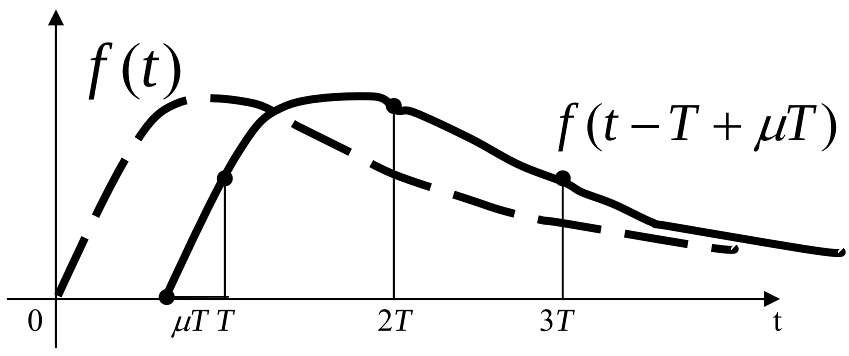
$$\mathcal{Z}_\gamma\, f(t) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{n=0}^{\infty} f(nT + \gamma T) z^{-n} = F(z,\gamma)$$

$$\mathcal{Z}_\mu\, f(t) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f(nT - T + \mu T) z^{-n}$$

$$= z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} f(nT + \mu T) z^{-n} = F(z,\mu) = z^{-1} F(z,\gamma)\Big|_{\gamma := \mu}$$

$$F(z) = \lim_{\gamma \to 0} F(z,\gamma) \qquad \text{dla } f(0) = 0$$

$$= \lim_{\mu \to 0} z F(z,\mu) = \lim_{\mu \to 1} F(z,\mu)$$



Odwrotne przekształcenie $\mathcal{Z}$

Ponieważ $\mathcal{Z}\left(\sum L\right)$ **jest zbieżny w pierścieniu**

$|z_i|_{\max} \le |z| \le r_2 \to \infty$ **oryginał** $\mathcal{Z}$ **może być jednoznacznie określony:**

$$f(n) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_\Gamma F(z)\, z^{n-1} dz = \mathcal{Z}^{-1} F(z)$$

Γ – **kontur⁺ obejmujący wszystkie osobliwości (bieguny)** $F_n(z)$**:**

Jeśli $F_n(z) \overset{\Delta}{=} F(z)\, z^{n-1} = \dfrac{N(z)}{D(z)} = \dfrac{N(z)}{\prod_{i=1}^{k} (z - z_1)^{m_i}}$

$$i,\, k,\, m_i \in \mathrm{Z}_+$$

wówczas

$$f(n) = \sum_{i=1}^{k} res_{z=z_i} [F_n(z)]$$

gdzie

$res_{z=z_i} [F_n(z)] =$

$$= \frac{1}{(m_i - 1)!} \lim_{z \to z_i} \frac{d^{m_i - 1}}{dz^{m_i - 1}} [(z - z_i)^{m_i} F_n(z)]$$

$$res_{z=z_i} [F_n(z)] = \lim_{z \to z_i} (z - z_i) F_n(z) = \left[\frac{N(z)}{D'(z)} \right]_{z = z_i}$$

Uwaga:

- **dla** $n = 0,\ F_n(z) \leftarrow$ **biegun** $z_i = 0$
- **dla** $n < 0$, **bieguny wielokrotne!**

$$f(0)\ \ f(-1)\ \ f(-2)\ \ldots$$

Odwrotne przekształcenie $\mathcal{Z}$ (c.d.)

Metody wyznaczania $\mathcal{Z}^{-1}$

- **Porównanie współczynników (m. tablicowa)**

$$F_o(z,\alpha,\beta,\gamma,...) \sim F(z)$$

- **Rozkład na ułamki proste**

$$\mathcal{Z}^{-1}F(z) = \mathcal{Z}^{-1}\sum_{k=1}^{K} F_k(z) = \sum_{k=1}^{K} \mathcal{Z}^{-1}F_k(z)$$

- **Dwumianowe rozwinięcie funkcji jednobiegunowej**

$$F(z) = \frac{x}{z-w} = \frac{x}{z}\frac{1}{1-wz^{-1}} = \frac{x}{z}(1+wz^{-1}+w^2z^{-2}+...)$$
$$= x\sum_{n=1}^{\infty} w^{n-1}z^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty}(xw^{n-1})z^{-n}$$

- **Splot rzeczywisty**

$$\mathcal{Z}^{-1}[F(z)G(z)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)g(n-k)$$

- **Dzielenie wielomianowe**

$$F(z) = \frac{F_1(z)}{F_2(z)} = ..\alpha + \beta z^{-1} + \gamma z^{-2} + ...$$

Zastosowania transformacji $\mathcal{Z}$

Funkcja przenoszenia

Niech $R \in \mathcal{L}, \mathcal{N}$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(k)h(n-k) \qquad \Big| \mathcal{Z}$$

$$Y(z) = H(z)U(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

Niech $R \in \mathcal{P}$

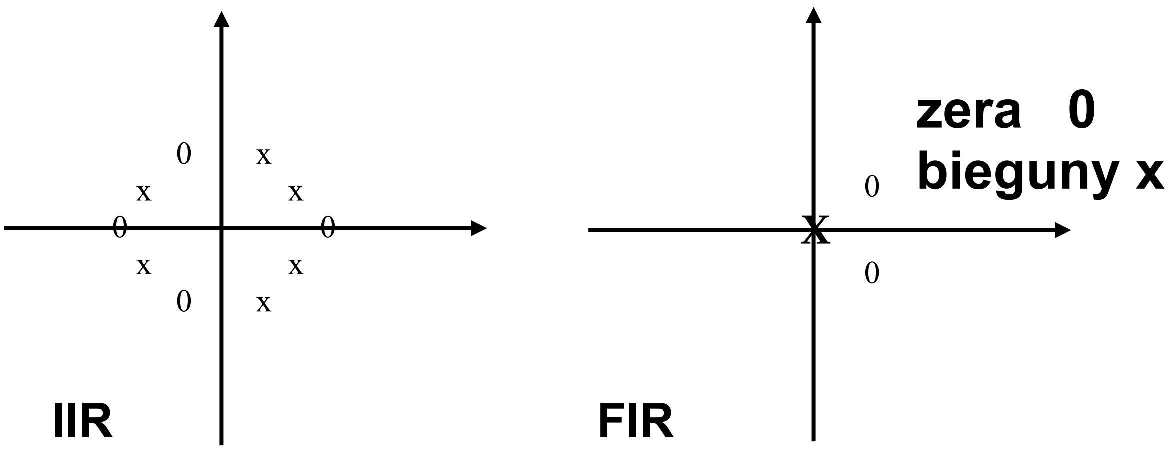
- **równanie różnicowe**

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} b_k u(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k\, y(n-k) \qquad \Big| \mathcal{Z}$$

$$\mathcal{Z}\, y = \sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k} \mathcal{Z}\, u - \sum_{k=1}^{N} a_k\, z^{-k}\, \mathcal{Z}\, y$$

$$H(z) = \frac{\mathcal{Z}\, y}{\mathcal{Z}\, u} = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k z^{N-k}}{z^N + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{N-k}}$$

$$H(z) = \frac{H_o \prod_{k=1}^{N} \left(z - z_k^0\right)}{\prod_{k=1}^{N} \left(z - z_k\right)}$$



- **równania stanu**

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(n)$$

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{C}^T\mathbf{x}(n) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(n)$$

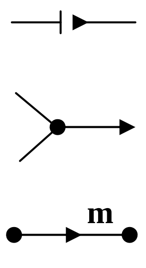
$$z\mathbf{X}(z) = \mathbf{A}\,\mathbf{X}(z) + \mathbf{B}\,\mathbf{U}(z)$$

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}^T\mathbf{X}(z) + \mathbf{D}\,\mathbf{U}(z)$$

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\,\mathbf{U}(z)$$

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{C}^T(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

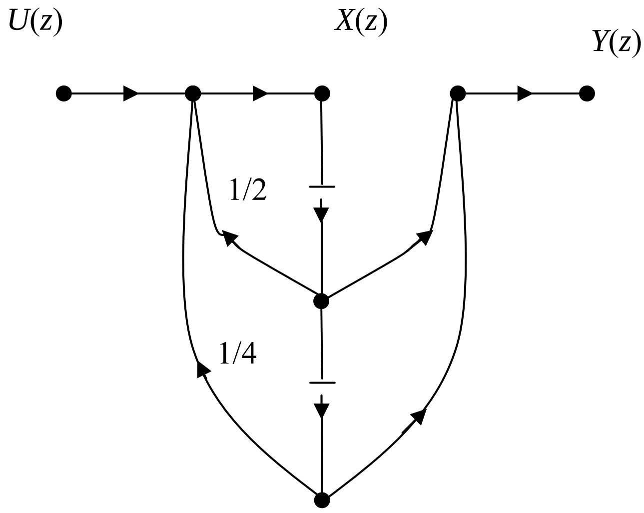
- **graf liniowy**



$$X(z) = z^{-1}V(z)$$

$$= \sum V_i(z)$$

$$= mV(z)$$



$$X = U + \frac{1}{2} z^{-1} X - \frac{1}{4} z^{-2} X$$

$$Y = z^{-1} X + z^{-2} X$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1} + \frac{1}{4} z^{-2}} = \frac{z + 1}{z^2 - \frac{1}{2} z + \frac{1}{4}}$$

Stabilność

$$H(z)=\frac{\prod_{k=1}^{N-1}(z-z_k^0)}{\prod_{k=1}^{N}(z-z_k)}$$

$\mathscr{P}\ (\mathscr{R})$
(bieguny pojedyncze)

$$h(n)=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_{\Gamma} H(z)\, z^{n-1} dz$$

- $n=0, \quad h(0)=\underset{z=0}{res}\,\frac{H(z)}{z}+\sum_{k=1}^{N}\underset{z=z_k}{res}\,\frac{H(z)}{z}$
- $n>0, \quad h(n)=\sum_{k=1}^{N}\varsigma_k\, z_k^{n-1}\,, \quad \varsigma_k=\underset{z=z_k}{res}\ H(z)$

$$z_k=r_k\, e^{j\varphi_k} \qquad \boxed{r_k\le r_{mx}<1} \qquad k=1,2,\ldots,N$$

$$l_1=\sum_{n=0}^{\infty}\left|h(n)\right|=\left|h(0)\right|+\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{N}\varsigma_k\, r_k^{n-1}\, e^{j(n-1)\varphi_k}\right|$$

$$\le\left|h(0)\right|+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{N}\left|\varsigma_k\right| r_k^{n-1}\le\left|h(0)\right|+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{N}\left|\varsigma_k\right| r_{mx}^{n-1}$$

$H(z)$ **- analityczna w otoczeniu** $z=0,\ z=z_k$

$$\rightarrow\left|h(0)\right|=\eta_o<\infty \qquad \left|\varsigma_k\right|\le R_{mx}\,,\ k=1,\ldots,N$$

$$l_1\le\eta_o+NR_{mx}\sum_{n=1}^{\infty}r_{mx}^{n-1}<\infty \qquad \frac{1}{1-r_{mx}}$$

tzn. $\boxed{\textbf{warunek wystarczający}}$

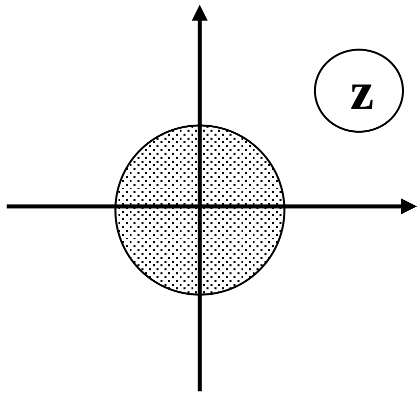
Niech $r_i \geq 1 \qquad\qquad (i \leq N)$

$$n \to \infty \qquad |h(n)| \approx |\varsigma_i|\ r_i^{n-1}$$

$$l_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} |\varsigma_i| r_i^{n-1} \to \infty$$

Warunek konieczny i dostateczny

$$|z_k| < 1 \quad k = 1,2,\ldots,N$$



Kryteria stabilności

- **wyznaczenie (lokalizacja) biegunów układu dyskretnego**
- **transformacja i badanie stabilności w dziedzinie** w **(„s”)**
- **pośrednie metody badania u.d.**
  - **kryterium Nyquista (amplitudowo-fazowe)**
  - **kryteria Jury’ego**
    - **wyznacznikowe**
    - **tablicowe**

- **Metoda płaszczyzny w**

Przekształcenie

$$z := \frac{w+1}{w-1} \qquad\qquad w := \frac{z+1}{z-1}$$

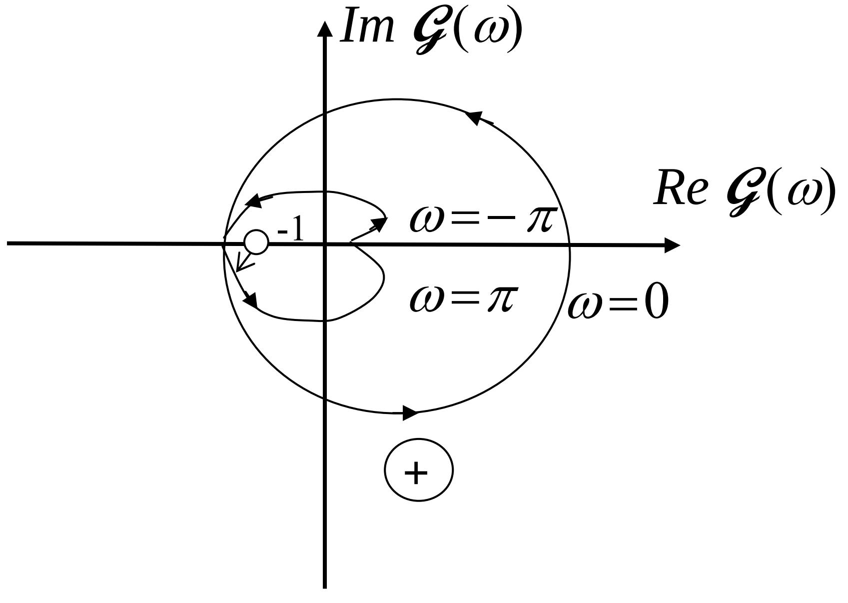
$$z = \alpha + j\beta \rightarrow \quad w$$

$$w = \frac{1+\alpha+j\beta}{-1+\alpha+j\beta} = \frac{\alpha^2+\beta^2-1}{(1-\alpha)^2+\beta^2} - j\frac{2\beta}{(1-\alpha)^2+\beta^2}$$

Jeśli $|z| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \le 1$ to $Re\, w < 0$

$$\mathcal{G}(w) = G(z)\Big|_{z=\frac{w+1}{w-1}}$$

- **Metody częstotliwościowe**



- **Kryterium Nyquista (Michajłowa)**

Niech $$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B_N(z)}{A_N(z)}$$

wówczas

$$K(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{B(z)}{A(z)+B(z)}$$

T: Jeśli

$$A(z) = 0 \text{ dla } z = z_i \,, |z_i| > 1 \quad i = 1,\dots, m$$

oraz $$z = z_j \,, |z_j| < 1 \quad j = 1,\dots, N-m$$

to $$1+G(z) = 0 \text{ dla } z = z_l \,, |z_l| < 1 \quad l = 1,\dots, N$$

N: $$\underset{-\pi \le \Omega \le \pi}{\Delta \arg} \left[1+G(e^{j\Omega})\right] = 2\pi\, m$$

$$\Updownarrow \qquad \Omega = \omega T = 2\pi f T$$

Mi: $$\underset{-\pi \le \Omega \le \pi}{\Delta \arg} \left[A(e^{j\Omega}) + B(e^{j\Omega})\right] = 2\pi\, N$$

$$\Updownarrow$$

D:

$$\underset{-\pi \le \Omega \le \pi}{\Delta \arg} \left[1+G\right] = \underset{-\pi \le \Omega \le \pi}{\Delta \arg} \frac{A+B}{A} = 2\pi\left(N-(N-m)\right)$$

- **Kryteria Jury'ego**

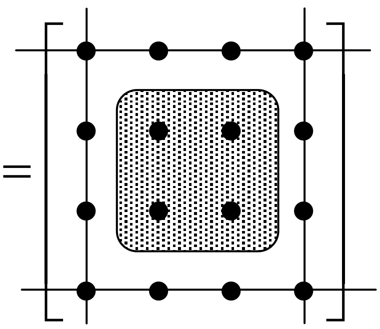
$$A(z) = a_o + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_N z^N$$

Metoda wyznacznikowa

$$X_{N\text{-}1} = \begin{bmatrix} a_N & a_{N-1} & \cdots & a_2 \\ 0 & a_N & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{N-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_N \end{bmatrix},$$

$$Y_{N\text{-}1} = \begin{bmatrix} a_{N-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ a_{N-3} & a_1 & a_0 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ a_0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$Z_k^{\pm} = X_k \pm Y_k \text{ **dla** } k = N-1,\ N-3, \dots$$

$Z_k =$  $\Rightarrow$ $Z_{k\text{-}2}$

Def.: $Z_K > 0$ **jest wew. dodatnio określone**
jeśli $\det Z_k > 0$ **dla** $k = K,\ K-2, \dots$

Tw. $A(z) = 0$ (ze wsp. $a_N > 0$)

dla $z = z_i : \; |z_i| < 1 \quad i = 1,2,...,N$

$$\Updownarrow$$

1 $A(1) > 0$

2 $(-1)^N A(-1) > 0$

3 $Z^{\pm}_{N-1}$ **- wewnętrznie dodatnio określone**

Semi- przykład

$$A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + a_5 z^5 + a_6 z^6$$

$$a_6 > 0$$

$$\left|Z_5^{\pm}\right| = \begin{vmatrix} a_6 \pm a_4 & a_5 \pm a_3 & a_4 \pm a_2 & a_3 \pm a_1 & a_2 \pm a_0 \\ \pm a_3 & a_6 \pm a_2 & a_5 \pm a_1 & a_4 \pm a_0 & a_3 \\ \pm a_2 & \pm a_1 & \boxed{a_6 \pm a_0} & a_5 & a_4 \\ \pm a_1 & \pm a_0 & 0 & a_6 & a_5 \\ \pm a_0 & 0 & 0 & 0 & a_6 \end{vmatrix}$$

Warunki stabilności:

$A(1) > 0$

$A(-1) > 0$

$|Z|_1^{\pm} = a_6 \pm a_0 > 0$

$|Z|_3^{\pm} = z_3^{+} \pm z_3^{-} > 0$

$|Z|_5^{\pm} = z_5^{+} \pm z_5^{-} > 0$

- **Metoda tablicowa (Jury-Marden)**

$$A(z) = 0 \quad \text{(ze wsp. } a_N > 0)$$

1	a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_{N-1}	a_N
2	a_N	a_{N-1}	a_{N-2}	$\cdots$	a_1	a_0
3	b_0	b_1	$\cdots$	b_{N-1}		
4	b_{N-1}	b_{N-2}	$\cdots$	b_0		
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$		
$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$		
$2N-5$	x_0	x_1	x_2	x_3		
$2N-4$	x_3	x_2	x_1	x_0		
$2N-3$	y_0	y_1	y_2			
$2N-2$	y_2	y_1	y_0			
$2N-1$	z_0	z_1				
$2N$	z_1	z_0				
$2N+1$	v_0					

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{N-k} \\ a_N & a_k \end{vmatrix}$$

$$c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{N-1-k} \\ b_{N-1} & b_k \end{vmatrix}$$

$$y_0 = \begin{vmatrix} x_0 & x_3 \\ x_3 & x_0 \end{vmatrix}, y_1 = y_2 = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ x_3 & x_2 \end{vmatrix}$$

$$z_0 = \begin{vmatrix} y_0 & y_2 \\ y_2 & y_0 \end{vmatrix}, \quad v_0 = \begin{vmatrix} z_0 & z_1 \\ z_1 & z_0 \end{vmatrix},$$

$$\operatorname{sign} v_0 = \operatorname{sign}\left[A(1)A(-1)\right]$$

Warunki stabilności

1 $\quad A(1) > 0$

2 $\quad (-1)^N A(-1) > 0$ **(*N*-1) warunków**

3 $\quad \{a_N > 0, b_0 < 0, c_0 > 0, d_0 > 0, \ldots x_0 > 0, y_0 > 0, z_0 > 0$

$(P_1 = b_0, P_2 = P_1 c_0, \ldots, P_{N-1} = P_{N-2} z_0, P_N = P_{N-1} v_0)$ $P_i < 0$ $i = 1, \ldots N,$

Jeśli $P_i \neq 0, \forall i \Rightarrow$ Liczba „niestabilnych” pierwiastków =

= Liczba niespełnionych warunków $(Pi > 0)$

- **Metoda dzielenia (Jury)**

$$A(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{N-1} z^{N-1} + a_N z^N$$

$$A^*(z) = a_N + a_{N-1} z + \ldots + a_1 z^{N-1} + a_0 z^N \qquad A^*(z) = z^N A(z^{-1})$$

$$\frac{A^*(z)}{A(z)} \to \alpha_0 + \frac{A_1(z)}{A_1^*(z)} \to \alpha_0 + \alpha_1 + \frac{A_2(z)}{A_2^*(z)} \to \ldots$$

$$\ldots \to \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{N-2} + \frac{A_{N-1}(z)}{A_{N-1}^*(z)}$$

gdzie $\frac{A_k(z)}{A_k^*(z)} = \alpha_k + \frac{A_{k+1}(z)}{A_k^*(z)}$

Kryterium stabilności

1 $A(1) > 0$

2 $(-1)^N A(-1) > 0$

3 $|\alpha_k| < 1$ $\qquad k = \underbrace{0, 1, 2, \ldots, N-2}_{N\text{ - }1}$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{a_0}{a_N} \\ \alpha_1 &= \frac{b_{N-1}}{b_0} \\ \alpha_{N-2} &= \frac{y_2}{y_0} \end{aligned}\right\} N-1$$

Widma sygnałów

- Sygnał ciągły nieokresowy (całka $\mathcal{F}$)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \qquad 2\pi f = \omega$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \mathcal{F} x(t)$$

f. zespolona, ciągła i nieokresowa (gęstość widm.)

- s. ciągły okresowy (szereg $\mathcal{F}$)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(kf_\tau) e^{j2\pi kf_\tau t}$$

$$x(t + i\tau) = x(t)$$

$$i = 0, \pm 1, \ldots$$

$$f_\tau = \frac{1}{\tau}, \ \omega_\tau = \frac{2\pi}{\tau}$$

$$X(kf_\tau) = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} x(t) e^{-j2\pi kf_\tau t} dt = \mathcal{F}_\tau x(t)$$

f. zespolona, dyskretna i nieokresowa (widmo amplitud.)

f_τ - **rozdzielczość widmowa**

- **przedział próbkowania częstotliwości.**

Widma sygnałów

- **S. dyskretny nieokresowy (DF - Dyskretne $\mathscr{F}$)**

$$x(nT) = \frac{1}{f_T} \int_{-f_T/2}^{f_T/2} X(f) e^{j2\pi f nT} df$$

$$f_T = \frac{1}{T} \quad \omega_T = \frac{2\pi}{T} \quad f_N = \frac{f_T}{2} \quad \omega_N = \frac{\omega_T}{2}$$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) e^{-j2\pi f nT} = \mathscr{F}\, x(nT)$$

$$X(f + if_T) = X(f) \quad i = 0, \pm 1, \ldots$$

f. zespolona, ciągła i okresowa

f_T **– częstotliwość próbkowania**

T **– okres próbkowania w dziedzinie t**

- **S. dyskretny okresowy (DFT)**

$$x(nT) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k f_N) e^{j2\pi k f_N nT} \quad \text{lub} \quad e^{(j\frac{2\pi}{N}kn)}$$

$$f_\tau = \hat{f}_N = \frac{1}{NT} := \frac{1}{N} \quad \text{oraz} \quad \hat{\omega}_N = \frac{2\pi}{N}$$

$$X(kf_N) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \mathscr{F}_N \, x(nT)$$

$$x(nT + NT) = x(nT)$$

$$X(kf_N) = X(kf_N + f_T)$$

DF **s. nieokresowych**

$$\mathscr{F}\, x(n) = X(\omega) = \sum_{-}^{+} x(n) e^{-j\overbrace{\omega T}^{\Omega} n} \qquad = \mathscr{F}_0^{-1} x(n)$$

$$\mathscr{F}^{-1} X(\omega) = \frac{1}{\omega_T} \int_{-\omega_N}^{\omega_N} X(\omega) e^{+j\omega T n} d\omega = x(n) \qquad = \mathscr{F}_0 \, X(\omega)$$

Ω-transformata

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\Omega n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

Lemat (oczywisty):

Funkcja $x(n)$ **posiada Ω-transformatę** X **<=>**

$\sum \mathscr{F}$ **jest zbieżny**

Warunki zbieżności:

***Jeśli** $x \in l_1 \;:\; l_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| < \infty$

to $\sum \mathcal{F}$ **jest jednostajnie zbieżny do** $X \in C_\Omega$

*** Jeśli** $x \in l_2 :\quad l_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 < \infty$

to $\sum \mathcal{F}$ **jest zbieżny w sensie śr-kwadratowym do**

$$X(\Omega) \in L_2 \qquad : \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 \, d\Omega < \infty$$

- $l_2^2 \le l_1^2$
- $1(nT), \cos(\Omega_o n),$ **... nie mają Ω- transformat**
- **Jeśli** $X \in L_1 : \; \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)| d\Omega < \infty$

to $\sum \mathcal{F}$ **jest zbieżny.**

Widmo poprzez przekształcenie $\mathcal{Z}$

$$X(\Omega) = \mathcal{Z}\, x(n)\Big|_{z=e^{j\Omega}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}\Big|_{z=e^{j\Omega}}$$

$$(x(n) = 0 \text{ dla } \quad n < 0)$$

- **~ gęstości widmowej (Całki $\mathcal{F}$)**
- l_2^2 **ma sens energii (ale jej nie reprezentuje!)**

Sygnały impulsowe

$$x^*(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t-nT) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{nT}^*(t)$$

$$X^*(\omega) = \mathcal{F}\, x^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{nT}^*(t)\, e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) e^{-j\omega T n} = X(\Omega)$$

- $x^*(t)$ **sygnał 'energetyczny'**
- $x(nT)$ **(o identycznym kształcie i widmie) nie posiada energii (zerowa odp. ukł. analogowego)**

Związek widm s. $x(nT)$ i $x(t)$

s. okresowy

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$$

ma widmo ampl.

$$F_T\delta_T(t) = \Delta(k\omega_T) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)e^{-j\omega_T kt}dt = \frac{1}{T}$$

Stąd

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}e^{j\omega_T kt} \qquad \omega_T = \frac{2\pi}{T}$$

Zatem sygnał energetyczny (c. nieokr.)

$$x^*(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{j\omega_T kt}$$

charakteryzuje gęstość widmowa

$$Fx^*(t) = X^*(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j\omega_T kt}e^{-j\omega t}dt =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j(\omega-k\omega_T)t}dt$$

tzn. $X^*(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\omega-k\omega_T)$

Widmo s. dyskretnego $X(\Omega) = Fx(nT) = X^*(\omega)$

Równe sumie przesuniętych (o $k\omega_T$) widm

$X(\omega) = Fx(t)$

$X(\Omega)$, $X^*(\omega)$ **- widma okresowe**

ToP: Twierdzenie o próbkowaniu (Shannon,...)
Jeśli

$$X(\omega) \equiv 0 \text{ dla } |\omega| > \omega_g \le \omega_N = \frac{\omega_T}{2} = \frac{\pi}{T}$$

to

$$X(\omega T) = X^*(\omega) = \frac{1}{T} X(\omega) \text{ dla } |\omega| < \omega_N$$

to znaczy na podstawie $x(n) = x(nT)$ można odtworzyć $x(t)$ (dokładnie).

Załóżmy, że $x(t)$ spełnia warunki ToP, wówczas

$$x(t) = F^{-1} X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_N}^{\omega_N} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Ponieważ DF sygnału nieokresowego

$$X(\omega) = TX(\Omega) = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) e^{-j\omega nT}$$

to

$$x(t) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_N}^{\omega_N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{j\omega(t-nT)} d\omega =$$

$$= \frac{T}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \int_{-\omega_N}^{\omega_N} e^{j\omega(t-nT)} d\omega$$

Czyli

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \frac{\sin \omega_N (t - nT)}{\omega_N (t - nT)}$$

tzn. że próbkowany sygnał $x(t)$ może być odtworzony na podstawie swoich próbek $x(nT)$

DFT (skończona DTFT)

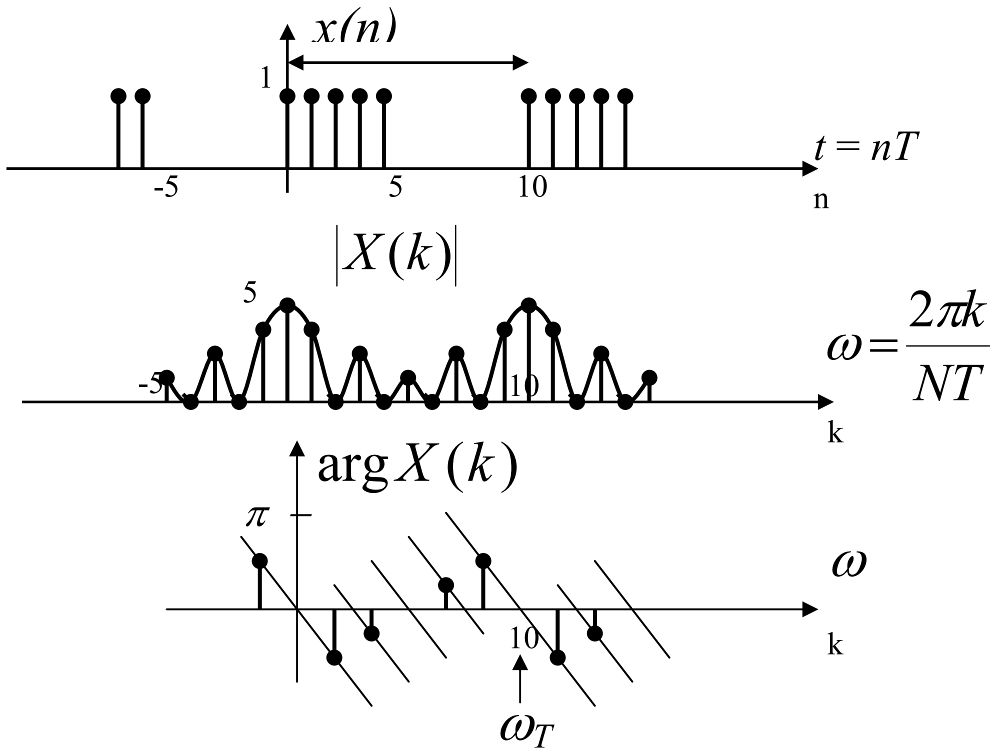
$$\begin{cases} X(k\omega_N) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)\, e^{-j\omega_N kn} \\ x(nT) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k\omega_N) e^{j\omega_N nk} \end{cases} \qquad \omega_N = \frac{2\pi}{NT}$$

Fazor: $$W_N = e^{-j\omega_N} = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$\begin{cases} X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \\ x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} \end{cases}$$

Okresowe ciągi (próbek i prążków widma).

Przykład $(N = 10)$



$$X(k) = \sum_{n=0}^{4} W_{10}^{nk}$$

... (kolejne) .... **Zastosowanie $\mathcal{Z}$**

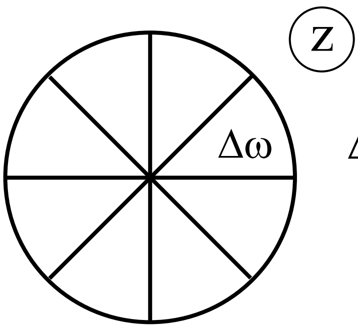
Przekształcenie 1 okresu (o długości N)

$$Z_N\, x(n) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, z^{-n} = X_N(z)$$

Zauważmy

$$X(k) = X_N(z)\Big|_{z=e^{j\omega T}}\Big|_{\omega = k\omega_N} = \frac{2\pi k}{TN} = W_N^{-k}$$

$X_N(z)$ **– próbkowanie w *N* punktach równomiernie rozłożonych na okręgu jednostkowym**



$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{N} = \Omega_N$$

Współczynniki $\sum F \longrightarrow$ **ciąg skończony [DF(F)T]**

(albo $\longrightarrow$ ciąg okresowy)

***** sygnał o skończonym czasie trwania posiada widmo o nieograniczonym paśmie! *****

Szybka transformacja Fouriera (FFT)

DFT: $X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{nk} \qquad x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k W_N^{-nk}$

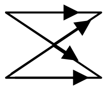
1 prążek: $N \times \otimes$ **i** $(N-1)\times \oplus$ **(zespol.)**

***N* prążków:** $N^2 \times \otimes$ **i** $(N^2 - N)\times \oplus$

FFT:

***N* prążków:** $\otimes$ **-** $N \log_2 N \Big|_{N=2^{\nu}} = \nu N$

- **grupowanie w dziedzinie czasu**
- **grupowanie w dziedzinie częstotliwości**
- **grupowanie w dziedzinie** t/ω przy $N \neq 2^{\nu}$
- **metoda macierzowa**

* **Operacje**  **motylkowe (AM)**

$\downarrow$

τ_z

* **Analizatory widma:**

- **Sekwencyjne** → **1 arytmometr AM**
  → $\tau_z (N/2)\log_2 N$
- **Kaskadowe** → $\nu \times AM$
  → $1{,}5\nu\tau_z$ **(pół-równ.)**
- **Równoległe** → $N/2 \to \nu N/2$
  → $\nu\tau_z \to$

* **FFT: grupowanie próbek (**$N=2^{\nu}$)

→ **próbki parzyste** x_{2r}

→ **próbki nieparzyste** x_{2r+1}

$$X_k \overset{(\cdot)}{=} \sum_r x_{2r} W_N^{2rk} + \sum_r x_{2r+1} W_N^{(2r+1)k} =$$

$$= \sum_r x_{2r} (W_N^2)^{rk} + W_N^k \sum_r x_{2r+1} (W_N^2)^{rk} =$$

$$\overset{(\cdot\cdot)}{=} \sum_r x_{2r} W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_r x_{2r+1} W_{N/2}^{rk}$$

$$(\cdot) \sum_r \equiv \sum_{r=0}^{N/2-1} \qquad (\cdot\cdot) \qquad W_N^2 = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}} = W_{N/2}$$

tzn. $X_k = Y_k + W_N^k Z_k \quad k=0,1,\ldots N-1$

$Y_k, Z_k - \dfrac{N}{2}$ **- punktowe DFT parz./nieparz.** x_n

- okresowe względem k (o okresie *N*/2)

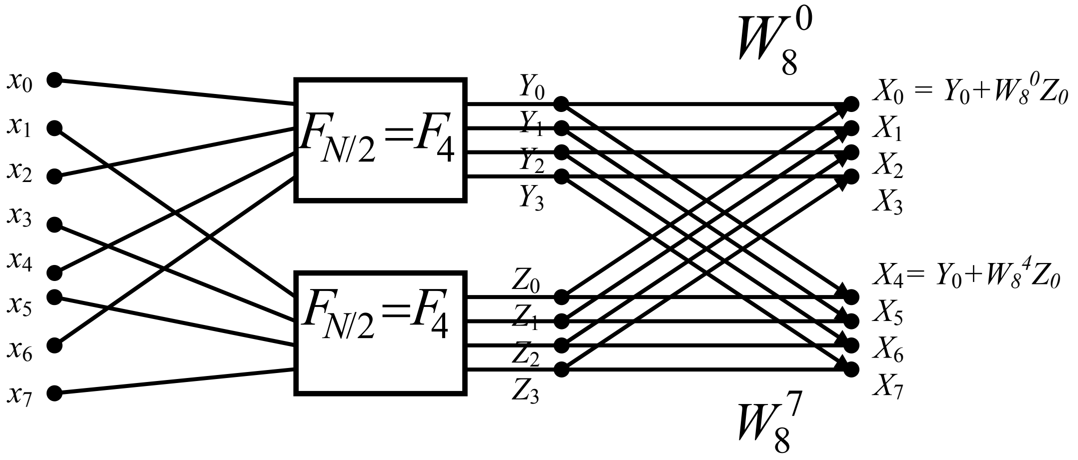
Zatem
$$\begin{cases} X_k = Y_k + W_N^k Z_k & k=0,1,\ldots,\dfrac{N}{2}-1 \\ X_k = Y_{k-\frac{N}{2}} + W_N^k Z_{k-\frac{N}{2}} & k=\dfrac{N}{2},\ldots,N-1 \end{cases}$$

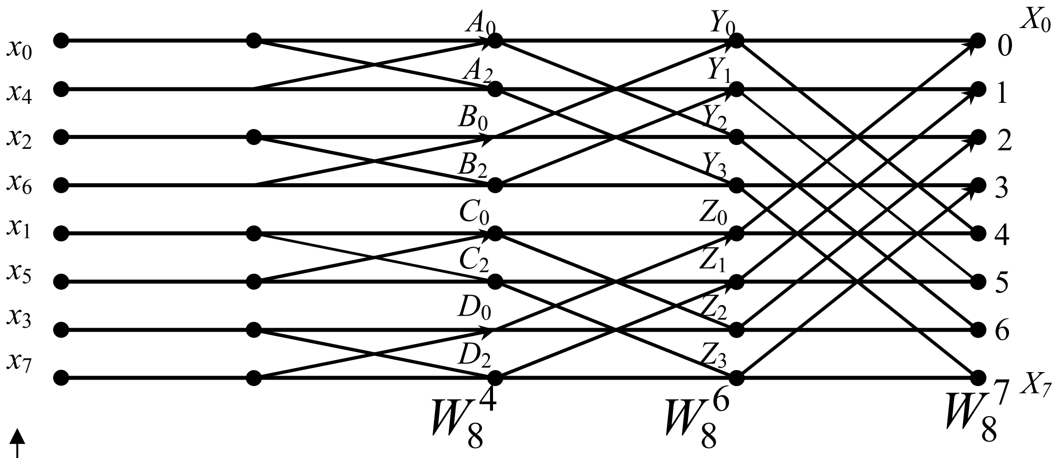
* **l. mnożeń:** $2\left(\dfrac{N}{2}\right)^2 + N = \underline{N(N/2+1)} << N^2$ **(DFT)**

zagnieżdżanie DFT $\quad Y_k = \ldots$ (ν **etapów)**

$Z_k = \ldots \quad \ldots$

Przykład $N=8=2^3$



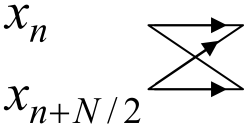


SORTOWANIE
przez odwrócenie kolejności bitów
w binarnym kodzie l. porządkowej

$$I(n) = x_{n^*} \qquad n \rightarrow n^*$$

$$001 \rightarrow 100$$
$$011 \rightarrow 110$$
$$110 \rightarrow 011$$

Zauważmy: dla $n=0,1,\ldots,N/2-1$

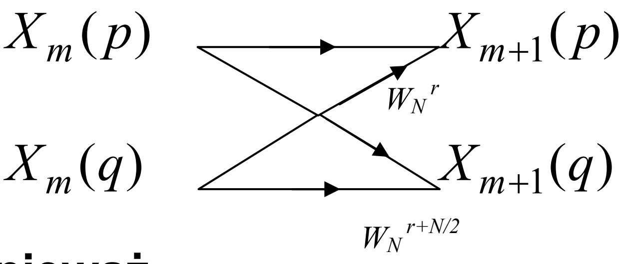


$$W_N^0 = 1$$
$$W_N^{N/2} = W_2 = e^{-j\pi} = -1$$

Obliczenia motylkowe

Elementarny układ równań

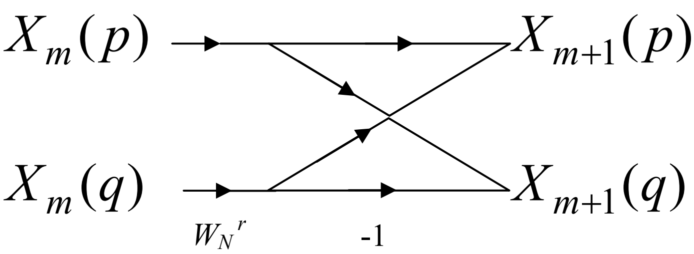
$$\begin{cases} X_{m+1}(p) := X_m(p) + W_N^r X_m(q) \\ X_{m+1}(q) := X_m(p) + W_N^{r+N/2} X_m(q) \end{cases}$$



: jeden
: zestaw
: rejestrów

Ponieważ

$$W_N^{N/2} = e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}} = e^{-j\pi} = -1$$



Jeśli $X_m = X_m^{'} + jX_m^{''}$ **to**

$$x_{m+1}^{'}(p) = x_m^{'}(p) + x_m^{'}(q)\cos\alpha_r - x_m^{''}(q)\sin\alpha_r$$
$$x_{m+1}^{''}(p) = x_m^{''}(p) + x_m^{'}(q)\sin\alpha_r + x_m^{N}(q)\cos\alpha_r$$
$$x_{m+1}^{'}(q) = x_m^{'}(p) - x_m^{'}(q)\cos\alpha_r + x_m^{''}(q)\sin\alpha_r$$
$$x_{m+1}^{''}(q) = x_m^{''}(p) - x_m^{'}(q)\sin\alpha_r - x_m^{''}(q)\cos\alpha_r$$

$$\alpha_r = \frac{2\pi r}{N}$$

Teoria układów liniowych

$R \in \mathcal{L}, \mathcal{N}, \mathcal{P}$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{B}\mathbf{u}_n \qquad \mathbf{u}[p \times 1]$$

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{C}^T\mathbf{x}_n + \mathbf{D}\mathbf{u}_n \qquad \mathbf{x}[k \times 1]$$

$$\mathbf{y}[q \times 1]$$

R:

$$(\mathbf{A}_{k\times k}, \mathbf{B}_{k\times p}, \mathbf{C}_{k\times q}, \mathbf{D}_{q\times p})$$

Def. R **(Para** $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$**) jest całkowicie osiągalne, jeśli dla dowolnego** $\mathbf{x}_0$ **istnieje ogr.** $\{\mathbf{u}_n\}$ **dla** $n \in [0, \mathrm{k}-1]$ **takie, że** $\mathbf{x}_\mathrm{k}$ **przyjmuje dowolną zadaną wartość.**

Def. Układ ($[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$**) jest całkowicie sterowalny, jeśli dla dowolnego** $\mathbf{x}_0$ **istnieje takie** $\{\mathbf{u}_n\}$ **dla** $n \in [0, \mathrm{k}-1]$**, że** $\mathbf{x}_\mathrm{k}=0$**.**

$\longrightarrow$ **Osiągalność/sterowalność kompletna lub (**$\mathbf{x}_\mathrm{i}$**/** $\mathbf{y}_\mathrm{i}$**) stanów/sygnałów**

Jeśli $\det\mathbf{A} \neq 0$**, to stany sterowalne są osiągalne, tzn. sterowalność ≡ osiągalność.**

Jeśli para $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ **nie jest całkowicie osiągalna, to istnieje nieosobliwe** T**, że**

$$\mathbf{TAT}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ 0 & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{TB} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

oraz para $[\mathbf{A}_{11}, \mathbf{B}_1]$ **jest całkowicie osiągalna.**

Warunki sterowalności

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}^{n-1-i} \mathbf{B} \mathbf{u}_i$$

Przyjmując $n = k$ **i** $\mathbf{x}_k = 0$

$$-\mathbf{A}^k \mathbf{x}_0 = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-1-i} \mathbf{B} \mathbf{u}_i$$

lub

$$-\mathbf{A}^k \mathbf{x}_0 = \mathbf{H}\mathbf{u}$$

gdzie $\mathbf{H} = [\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \mathbf{A}^2\mathbf{B}\ \ldots\ \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}]$

wektor sterowania: $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_{k-1}^T\ \mathbf{u}_{k-2}^T\ \mathbf{u}_{k-3}^T \ldots \mathbf{u}_0^T]^T$

Tw. **Układ [A, B] jest całkowicie sterowalny** $\Leftrightarrow rank\, \mathbf{H} = k$

H : k liniowo niezależnych kolumn $\longrightarrow$

$\mathbf{H}_0$: $\det \mathbf{H}_0 \neq 0$ **i wówczas** $\mathbf{H}_0 \mathbf{U}_0 = -\mathbf{A}^k \mathbf{x}_0$

$$\mathbf{U}_0 = -\underbrace{\mathbf{H}_0^{-1}} \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0 \quad \text{albo} \quad \underbrace{\mathbf{H}^+} = \mathbf{H}^T (\mathbf{H}\mathbf{H}^T)^{-1}$$

k **– wymiarowy wektor**

- brak jednoznacznego rozwiązania
- rozwiązanie minimalno-normowe (underdet.)

Układy SIMO

$\mathbf{H} = [\mathbf{b}\ \ \mathbf{A}\mathbf{b} \ldots \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{b}]$ **oraz** $rank\,\mathbf{H} = k$

k **– liniowo niezależnych wektorów.**

Układ może być przeprowadzony do stanu końcowego $x_k=0$ za pomocą ograniczonego sterowania dopiero po k okresach próbkowania

Układy MIMO – szybciej

np. $k = p\ :\ \mathbf{B}_{k\times k}$ **i** $\det\mathbf{B} \neq 0$

to wysterowanie może nastąpić po 1 okresie, gdyż dla $n=0$

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}_0 = 0$$

stąd

$$\mathbf{u}_0 = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{x}_0$$

Przykład (SI)

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{b}\mathbf{u}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

SI $\Rightarrow$ **Można wyznaczyć sterowanie dwukrokowe**

$k = 2$

$$\mathbf{H} = [\mathbf{b}\ \ \mathbf{Ab}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\det\mathbf{H} = -1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad rank\mathbf{H} = 2$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}^2\mathbf{x}_0 = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_0 \end{bmatrix}$$

sprawdzenie

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0 + \mathbf{A}\mathbf{b}\mathbf{u}_0 + \mathbf{b}\mathbf{u}_1 =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} 5 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 2 =$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & +5 & +0 \\ 13 & -15 & +2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Def: R **(para** A, C^T**) jest całkowicie obserwowalne, jeśli dla dowolnego** $\mathbf{x}_0$ **i sterowania** $\{\mathbf{u}_n\}$**, istnieje takie** k**, że na podstawie** $\{\mathbf{u}_n\}$ i $\{\mathbf{y}_n\}$ **w przedziale** $n \in [0, \mathrm{k}]$ **można wyznaczyć** $\mathbf{x}_0$**.**

Def: R **jest całkowicie odtwarzalne, jeśli (...) można wyznaczyć** $\mathbf{x}_\mathrm{k}$**.**

- **Niecałkowita obs./odtw.**
  $\equiv$ **obserw./odtwarz. poszczeg. stanów**
- **Jeśli** $\det \mathrm{A} \neq 0$**, to stany obserwowalne są odtwarzalne, tzn.**
  obserwowalność $\equiv$ **odtwarzalność**

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}^{n-1-i} \mathbf{B} \mathbf{u}_i$$

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{C}^T \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{n-1-i} \mathbf{B} \mathbf{u}_i + \mathbf{D} \mathbf{u}_n$$

Składnik obserwacji stanu (x_0)

$$\mathbf{z}_n = \mathbf{y}_n - \mathbf{y}_n \Big|_{\mathbf{x}_0 = 0} = \mathbf{C}^T \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0$$

Wektor obserwacji stanu

$$\mathbf{z} = \mathbf{G}\,\mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \\ \mathbf{z}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{k-1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{k-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}^T = \left[\mathbf{C} \quad (\mathbf{A}^T)\mathbf{C} \;\ldots\; (\mathbf{A}^T)^{k-1}\mathbf{C}\right]$$

Tw: **Układ** $[\mathbf{A}, \mathbf{C}^T]$ **jest całkowicie obserwowalny**

$\Leftrightarrow rank\, \mathbf{G} = k$

G: k **liniowo niezależnych wierszy** $\longrightarrow$

$\mathbf{G}_0 \;:\; \det \mathbf{G}_0 \neq 0$ **i wówczas**

$\mathbf{G}_0\, \mathbf{x}_0 = \mathbf{Z}_0 \longleftarrow$ ***k* wym. wekt.**

Czyli $\mathbf{x}_0 = \mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{Z}_0$ albo $\mathbf{G}^+ = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T$

- brak jednoznacznego rozwiązania
- rozwiązanie najmn. kwadratów LS (overdet.)

Układy MISO $(q=1)$

Całkowita obserwowalność $rank\,\mathbf{G}=k$

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C}^T\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}^T\mathbf{A}^{k-1} \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \\ \leftarrow \end{matrix}$$

k **liniowo niezależnych wierszy**

Wówczas $\mathbf{x}_0$ może być wyznaczone na podstawie znajomości sterowania i odpowiedzi w k-krokowym przedz.

Układy MIMO – szybciej

np. $q=k\,:\,\mathbf{C}_{k\times k}$

i $\det\mathbf{C}\neq 0$

to wyznaczenie $\mathbf{x}_0$ po 1 okresie, gdyż dla $n=0$

$$\mathbf{y}_0=\mathbf{C}^T\mathbf{x}_0+\mathbf{D}\mathbf{u}_0$$

$$\mathbf{x}_0=\left(\mathbf{C}^T\right)^{-1}\left(\mathbf{y}_0-\mathbf{D}\mathbf{u}_0\right)$$

Przykład (SISO)

$$y_n = \mathbf{y}_n = \mathbf{x}_n' - \mathbf{x}_n'' = [1 - 1]\mathbf{x}_n + [0]\mathbf{u}_n$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}^T = [1 \ -1] \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$u_0 = 5 \quad u_1 = 2$ **(z poprzedniego przykładu)**

SO
$k = 2$ $\Longrightarrow$ **wystarczą dwa pomiary** $\{y_0, y_1\}$

np.: $y_0 = 0 \quad y_1 = 1$

$$z_0 = y_0 = 0$$

$$z_1 = y_1 - \mathbf{C}^T \mathbf{b} u_0 = 1 - [1 - 1]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 5 = 6$$

Zatem

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{z}$$

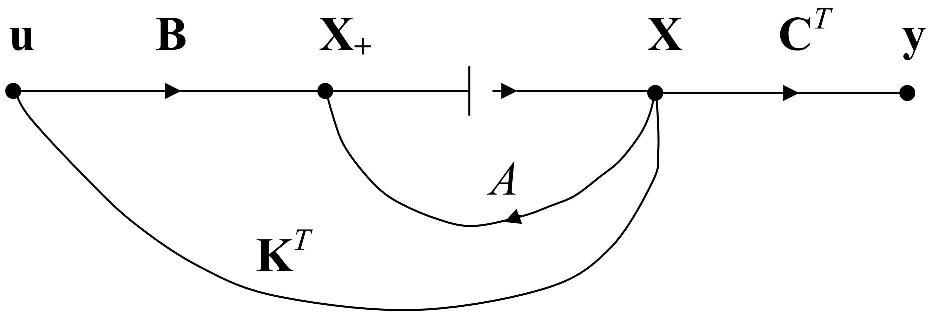
gdyż $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C}^T\mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$\det \mathbf{G} = 6$$

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(poprzedni przykład)

Stabilizowalność



sprzężenie zwrotne od wektora stanu

Macierz wzmocnienia $\mathbf{K}_{k\times p}$ **(jak B)**

Ponieważ $\mathbf{u} = \mathbf{K}^T\mathbf{x}$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_n + \mathbf{B}\mathbf{K}^T\mathbf{x}_n = \left[\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}^T\right]\mathbf{x}_n$$

Def.: R **(para** $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$**) jest całkowicie stabilizowalne, jeśli istnieje takie s.z.** $\mathbf{K}$**, które stabilizuje układ** R **, tzn.**

$$\left|\lambda_i(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}^T)\right| < 1 \qquad \forall_i$$

Tw.: Para $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ **jest**
całkowicie stabilizowalna $\Leftrightarrow \exists \mathbf{T} : \det \mathbf{T} \neq 0$

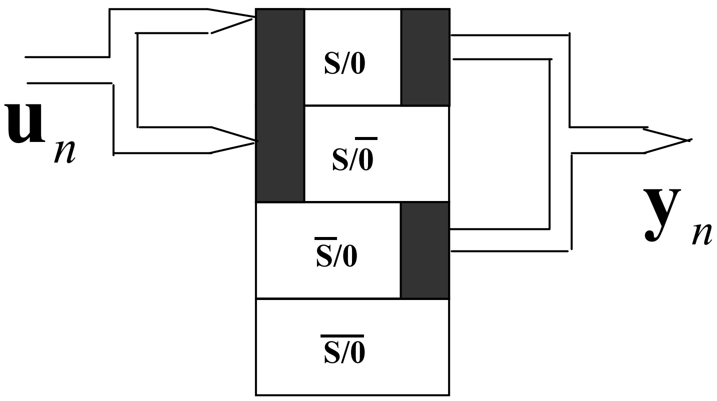
$$\mathbf{TAT}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ 0 & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \ \mathbf{TB} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\left[\mathbf{A}_{11}, \mathbf{B}_1\right] -$ **całkowita sterow.,** $\left|\lambda_i(\mathbf{A}_{22})\right| < 1$

niesterow.
stabilne

Kompletny opis układu

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{SO} \\ \mathbf{x}_{S\bar{0}} \\ \mathbf{x}_{\bar{S}0} \\ \mathbf{x}_{\bar{S}\bar{0}} \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_n + \mathbf{B}\mathbf{u}_n \\ \mathbf{y}_n = \mathbf{C}^T \mathbf{x}_n + \mathbf{D}\mathbf{u}_n \end{cases}$$

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{H}(z)\,\mathbf{u}(z) \qquad\qquad \mathbf{H}(z) = \mathbf{C}^T (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Ponieważ

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}^{n-1-i}\mathbf{B}\mathbf{u}_i$$

to odpowiedź impulsowa

$$\mathbf{h}_n = \begin{cases} \mathbf{0} & n<0 \\ \mathbf{D} & n=0 \\ \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} & n>0 \end{cases} \qquad (*)$$

Def.: Zespół ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}^T$, $\mathbf{D}$) spełniający (*) nazywamy realizacją odpowiedzi imp. $\mathbf{h}_n$ (lub fun. przen. $\mathbf{H}(z)$).

Realizację ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{D}$) :

$$\dim \mathbf{A} = k = \min$$

nazywamy realizacją minimalną.

$\longrightarrow$ **Realizacja minimalna opisuje s/o**

Tw. Macierz $\mathbf{A}$ ma wymiar minimalny

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [\mathbf{A},\ \mathbf{B}] & \text{- całk. osiągalna} \\ [\mathbf{A}, \mathbf{C}^T] & \text{- całk. obserwowalna} \end{cases}$$

*** Zwykle $\mathbf{D}=0$ i mówimy, że ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$) jest realizacją $\mathbf{H}(z)$**

Tw.: Dla dwóch realizacji minimalnych

$$\left(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1^T\right) \text{ i } \left(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2^T\right), \ \exists \mathbf{T}: \ \det \mathbf{T} \neq 0$$

$$\mathbf{T}\mathbf{A}_1 \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{A}_2, \quad \mathbf{T}\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2, \ \mathbf{C}_1^T = \mathbf{C}_2^T \mathbf{T}$$

Zasady przekształceń tożsam.

Lemat: R **posiada równoważne opisu w różnych przestrzeniach stanu**

$\equiv$ **Wiele wektorów współrzędnych stanu, które równoważnie opisują układ.**

Twierdzenie: Między dwoma wektorami stanu

$$\mathbf{x} \text{ i } \mathbf{x}^*$$

równoważnie opisującymi układ istnieje wzajemnie jednoznaczne przekształcenie

$$\mathbf{T}: \quad \mathbf{x}^* = \mathbf{T}\{\mathbf{x}\}$$

a w szczególności przekształcenie liniowe (afiniczne)

$$\mathbf{T}\{\mathbf{x}\} = \mathbf{T}\,\mathbf{x} + \mathbf{w}$$

$\mathbf{T}_{k\times k}$ **- nieosobliwa macierz kwadratowa**

$\mathbf{w}_{k\times 1}$ **- wektor współczynników**

które odpowiada przesunięciu i obrotowi układu współrzędnych

(trajektoria stanu nie zmienia się!)

($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{D}$) nie jest realiz. minim.

$$\Rightarrow R:\ R \in \{s/o, s/\bar{o}, \bar{s}/o, \bar{s}/\bar{o}\}$$

ale

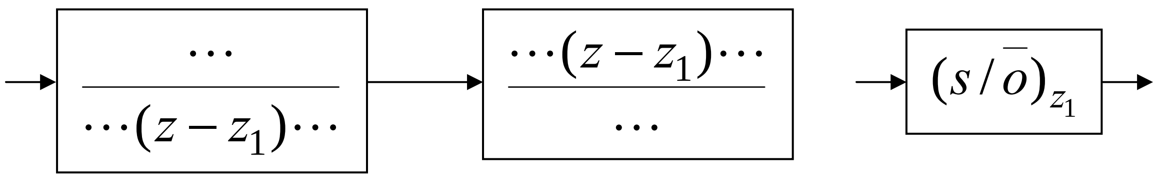
$$\mathbf{h}_n;\ \mathbf{H}(z) \equiv \mathrm{s/o}$$

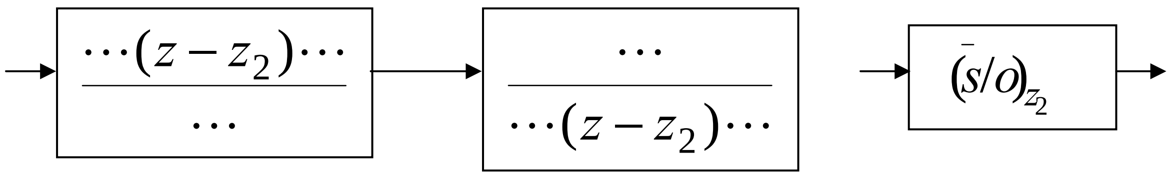
Czy przy opisie we/wy
pojęcia osiągalności/sterowalności
obserwowalności/odtwarzalności
są bezprzedmiotowe ?

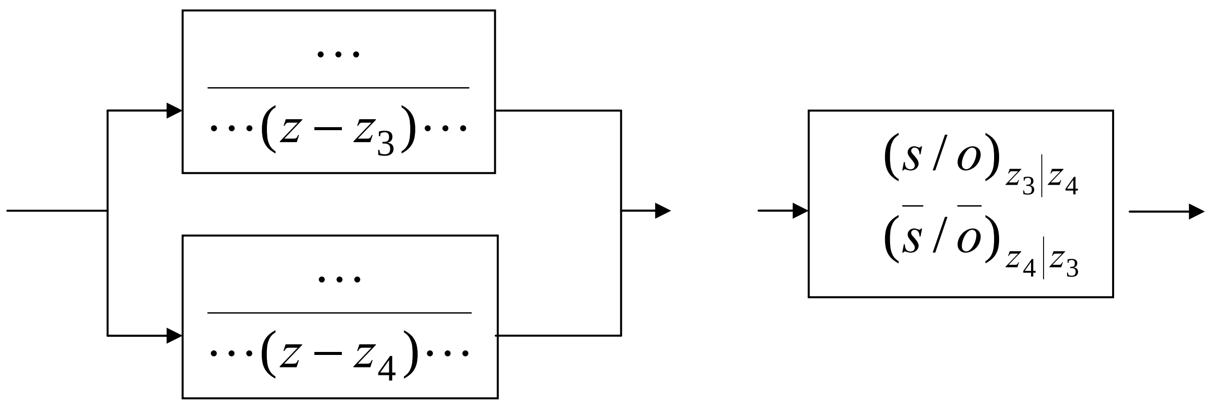
$\sum$ **ukł. minim. (s/o)** $\longrightarrow$

$\longrightarrow$ **układ nieminimalny ($\bar{s}/\bar{o}$)**

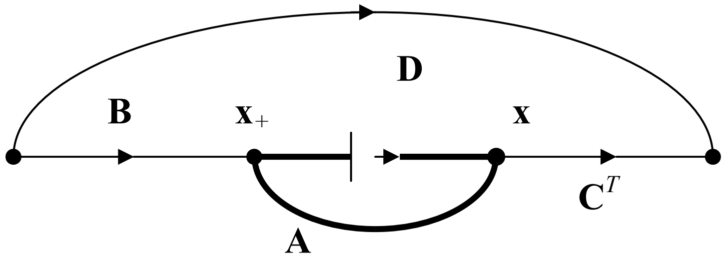
[rząd transm. < rzędu r. stanu]

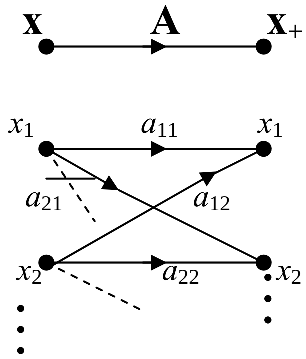






Przekształcenia u. lin. stacjon.





$R \in \mathcal{L},\mathcal{N}$

Równanie charakterystyczne A

$$\Delta(z) = \det[z\mathbf{I} - \mathbf{A}] = 0$$

określa podstawowe własności dynamiczne (bieguny układu / wartości własne macierzy A)

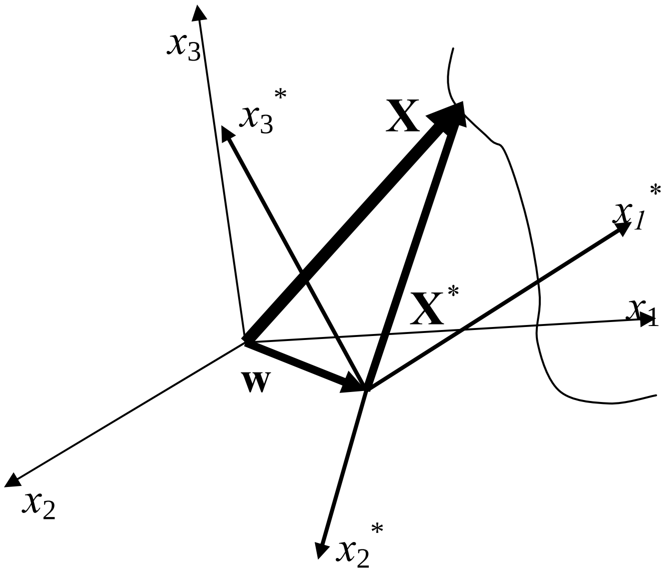
Def.: Układy równoważne – układy o takich samych równaniach charakterystycznych

$$\Delta(z) = (z - z_1)\dots(z - z_\delta) = 0$$

wszystkie bieguny
(bez skreśleń)

Przekształcenia tożsamościowe
$\longrightarrow$ **Układów równoważnych o róznych realizacjach (strukturach)**

Interpretacja graficzna przekształcenia



trajektoria stanu

Zwykle przesunięcie w=0

Wówczas $\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}^*$

$$\begin{cases} \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_{n+1}^* = \mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_n^* + \mathbf{B}\mathbf{u}_n \\ \mathbf{y}_n = \mathbf{C}^T\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_n^* + \mathbf{D}\mathbf{u}_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{n+1}^* = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_n^* + \mathbf{T}\mathbf{B}\,\mathbf{u}_n \\ \mathbf{y}_n = \mathbf{C}^T\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_n^* + \mathbf{D}\mathbf{u}_n \end{cases}$$

Równoważny opis

$$\mathbf{x}_{n+1}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{x}_n^* + \mathbf{B}^*\mathbf{u}_n$$
$$\mathbf{y}_n = \mathbf{C}^{*T}\mathbf{x}_n^* + \mathbf{D}^*\mathbf{u}_n$$

gdzie

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}$$
$$\mathbf{B}^* = \mathbf{T}\mathbf{B}$$
$$\mathbf{C}^{*T} = \mathbf{C}^T\mathbf{T}^{-1} \quad \text{lub} \quad \mathbf{T}^T\mathbf{C}^* = \mathbf{C}$$
$$\mathbf{D}^* = \mathbf{D}$$

Równanie charakterystyczne $\mathbf{A}$

$$\varDelta^{*}(z) = \det\left[z\mathbf{I} - \mathbf{A}^{*}\right] = \det\left[z\mathbf{I} - \mathbf{TAT}^{-1}\right] =$$
$$= \det\left[z\mathbf{TIT}^{-1} - \mathbf{TAT}^{-1}\right] = \det\left[\mathbf{T}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{T}^{-1}\right] =$$
$$= \det\mathbf{T}\det\left[z\mathbf{I} - \mathbf{A}\right]\det\mathbf{T}^{-1} = \det\left[z\mathbf{I} - \mathbf{A}\right] =$$
$$= \varDelta(z) = 0$$

Identyczne równanie, wartości własne (bieguny)

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}) \underset{\mathbf{T}}{\rightarrow} (\mathbf{A}^{*}, \mathbf{B}^{*}, \mathbf{C}^{*}, \mathbf{D}^{*})$$

Pożądane własności
(prosta struktura ≡
zerowe elementy

Bilans niewiadomych

A) $\mathbf{A}^{*} = \mathbf{TAT}^{-1}$ $k \times k$ **równań** $2k^2$ **niewiad.**
B) $\mathbf{B}^{*} = \mathbf{TB}$ $k \times p$ **równań** $kp\,(+k^2)$ **niewiad.**
C) $\mathbf{C}^{*T} = \mathbf{C}^{T}\mathbf{T}^{-1}$ $q \times k$ **równań** $qk\,(+k^2)$**niewiad**

$k(k + p + q)$ $k(2k + p + q)$

k^2 **współczynników w** $(\mathbf{A}^{*}, \mathbf{B}^{*}, \mathbf{C}^{*})$ **i** $(\mathbf{T})$ **można ustalić (wyzerować)**

Przykład SISO

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Przyjmijmy $\mathbf{T}=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}$

a) $$\mathbf{A}^*\mathbf{T}=\mathbf{TA} \quad \begin{cases} a_{11}^t t_{11} + a_{12}^* t_{21} = t_{11}a_{11} + t_{12}a_{21} \\ a_{11}^* t_{12} + a_{12}^* t_{22} = t_{11}a_{12} + t_{12}a_{22} \\ a_{21}^* t_{11} + a_{22}^* t_{21} = t_{21}a_{11} + t_{22}a_{21} \\ a_{21}^* t_{12} + a_{22}^* t_{22} = t_{21}a_{12} + t_{22}a_{22} \end{cases}$$

b) $$\mathbf{b}^* = \mathbf{Tb} \quad \begin{cases} b_1^* = t_{11}b_1 + t_{12}b_2 \\ b_2^* = t_{21}b_1 + t_{22}b_2 \end{cases}$$

c) $$\mathbf{T}^T\mathbf{c}^* = \mathbf{D} \begin{cases} c_1^* t_{11} + c_2^* t_{21} = c_1 \\ c_1^* t_{12} + c_2^* t_{22} = c_2 \end{cases}$$

---

8 r-ń, 12 niewiadomych

$\mathbf{A}$ - ustalamy 4 z 8 niewiadomych (tak, aby $\mathbf{A}^*\mathbf{T}=\mathbf{TA}$)

$\mathbf{b}$ - jednoznaczne rozwiązanie $\mathbf{b}^*=\mathbf{Tb}$

$\mathbf{c}$ - jednoznaczne rozwiązanie $\mathbf{c}^*=\mathbf{T}^{-T}\mathbf{D}$

Przekształcenie $\mathcal{T} = \mathbf{T}$, któremu podlega $\mathbf{A}$ nazywamy transformacją podobieństwa

Macierze podobne: $(\mathbf{A}, \mathbf{A}^*)$ $(\mathbf{A}^*, \mathbf{A})$

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{TAT}^{-1} \qquad \mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{T}$$

(T nieosobliwe!)

(1) identyczne r. charakterystyczne
$\Delta(z) = 0$ **(własności dynamiczne)**

(2) identyczne transmitancje

$$\mathbf{H}^*(z) = \mathbf{c}^{*T}\left[z\mathbf{I} - \mathbf{A}^*\right]^{-1}\mathbf{B}^* + \mathbf{D}^* =$$

$$= \mathbf{c}^T\,\mathbf{T}^{-1}\left[z\mathbf{I} - \mathbf{TAT}^{-1}\right]^{-1}\mathbf{TB} + \mathbf{D} =$$

$$= \mathbf{c}^T\left[z\mathbf{I} - \mathbf{A}\right]^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{H}(z)$$

(3) równość śladów

$$tr\,\mathbf{A}^* = \sum_{i=1}^{k} a_{ii}^* = \sum_{i=1}^{k} a_{ii} = tr\,\mathbf{A}$$

(4) równość wyznaczników

$$\det \mathbf{A}^* = \det \mathbf{A}$$

(5) Identyczna sterowalność

$$\mathbf{H}^* = \left[\mathbf{B}^*\ \mathbf{A}^*\mathbf{B}^* \ldots \mathbf{A}^{*j-1}\mathbf{B}^*\right] =$$

$$= \left[\mathbf{TB}\ \mathbf{TAT}^{-1}\mathbf{TB} \ldots (\mathbf{TAT}^{-1})^{k-1}\mathbf{TB}\right] =$$

$$= \left[\mathbf{TB}\ \mathbf{TAB} \ldots \mathbf{TA}^{k-1}\mathbf{B}\right] =$$

$$= \mathbf{T}\left[\mathbf{B}\ \mathbf{AB} \ldots \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}\right] = \mathbf{T}\,\mathbf{H}$$

T – nieosobliwe $\Rightarrow rank\mathbf{H}^* = rank\mathbf{H}$

STEROWALNOŚĆ NIE ZALEŻY OD WYBORU BAZY

(6) Identyczna obserwowalność

$$\boldsymbol{G}^* = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}^{*T} \\ \boldsymbol{C}^{*}\boldsymbol{A}^{*} \\ \vdots \\ \boldsymbol{C}^{*T}\boldsymbol{A}^{*k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}^{T}\boldsymbol{T}^{-1} \\ \boldsymbol{C}^{T}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{TAT}^{-1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{C}^{T}\boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{TAT}^{-1})^{k-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}^{T} \\ \boldsymbol{C}^{T}\boldsymbol{A} \\ \vdots \\ \boldsymbol{C}^{*T}\boldsymbol{A}^{k-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{T}^{-1}$$

$$\det \mathbf{T} \neq 0 \rightarrow rank\,\mathbf{G}^* = rank\,\mathbf{G}$$

OBSERWOWALNOŚĆ NIE ZALEŻY OD WYBORU BAZY

( ) Macierz przekształcenia

$(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}) \rightarrow (\mathbf{H},\mathbf{G}) \quad (\mathbf{A}^*,\mathbf{B}^*,\mathbf{C}^*) \rightarrow (\mathbf{H}^*,\mathbf{G}^*)$ **albo**

$$\mathbf{T} = \mathbf{H}^* \mathbf{H}^{-1} \quad \text{lub} \quad \mathbf{T} = \mathbf{G}^{*-1} \mathbf{G}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{H} \mathbf{H}^{*-1} \quad \text{lub} \quad \mathbf{L} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}^*$$

Postacie kanoniczne

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}) \rightarrow (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})^*$$

prosta postać

prosta analiza

prosta realizacja

Najprostsze postacie

- **diagonalna (pojedyncze w.wł.)**
- **Jordana (wielokrotne wartości wł.)**
- **trójkątna**
- **diagonalno – wierszowa/ kanoniczna**
- **diagonalno – kolumnowa / kanoniczna.**

Postać diagonalna

(A,b,c,d) **(SISO)**

$$\Delta(z) = \det\left[zI - A\right] = \prod_{i=1}^{k}(z - z_1) = \Delta^*(z)$$

$$A^* = diag\left[a_1\right]_{k\times k} = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_2 & \cdot & 0 \\ \vdots & . & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & z_k \end{bmatrix}$$ **wówczas**

$$H^* = \begin{bmatrix} b_1^* & b_1^* z_1 & \cdots & b_1^* z_1^{z_1^{k-1}} \\ b_2^* & b_2^* z_2 & \cdots & b_2^* z_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_k^* & b_k^* z_k & \cdots & b_k^* z_k^{k-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} b_1^* & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2^* & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b_k^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{k-1} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_k & \cdots & z_k^{k-1} \end{bmatrix}$$

$$G^* = \begin{bmatrix} c_i^* & c_2^* & \cdots & c_k^* \\ c_i^* & c_2^* z_2 & \cdots & c_k^* z_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_i^* z_1^{k-1} & c_2^* z_2^{k-1} & \cdots & c_k^* z_k^{k-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{k-1} & z_2^{k-1} & \cdots & z_k^{k-1} \end{bmatrix} diag \begin{bmatrix} c_i^* \\ c_2^* \\ \vdots \\ c_k^* \end{bmatrix}$$

Macierz Vandermonde\`a V

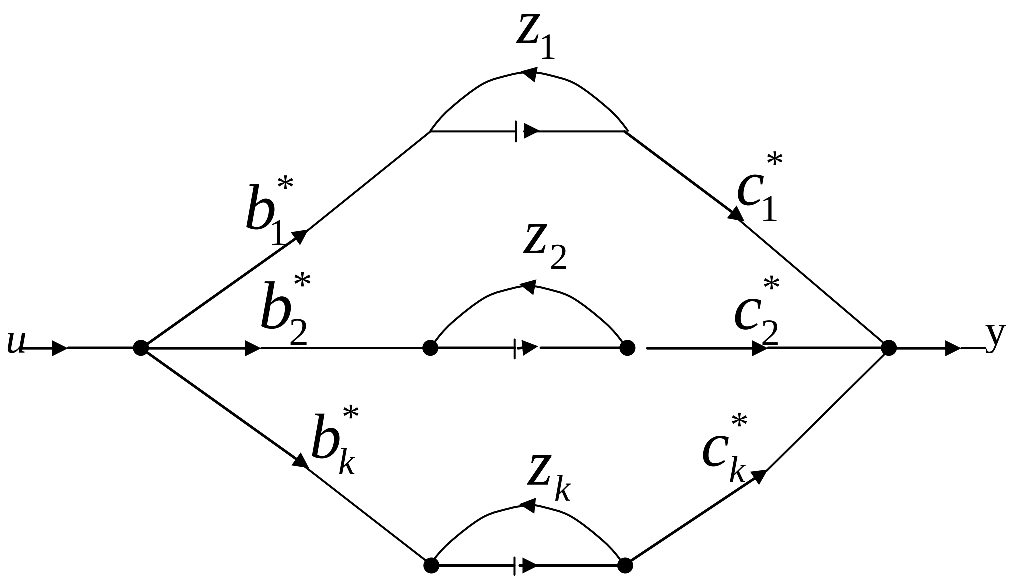
$$\det V \neq 0 \quad \text{dla} \quad z_i \neq z_j$$

Sterowalność $\Leftrightarrow (b_i^* \neq 0, \quad \forall i)$

Obserwowalność $\Leftrightarrow (c_i^* \neq 0, \ \forall i)$

(*) $R = (A^*, b^*, c^*, d)$

(*) k **niezależnych układów 1 rzędu**



$R \in R_{s/o} \Leftrightarrow$ **każdy mod jest sterow./obserw.**

Lemat: Układ 1 rzędu jest sterowalny jeśli można na niego oddziaływać
$(b_i^* \neq 0)$

Lemat: Układ 1 rzędu jest obserwowalny jeśli sygnał wyjściowy jest dostępny dla pomiaru $(C_i^* \neq 0)$

Zasady przekształcania (centroafin.)

$$A^* = TAT^{-1} = L^{-1} AL$$

lub

$$A^*T = TA \qquad LA^* = AL$$

- **Metoda wyznacznikowa**

$$L = \begin{bmatrix} A_{111} & A_{211} & \cdots & A_{k11} \\ A_{112} & A_{212} & \cdots & A_{k12} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{11k} & A_{21k} & \cdots & A_{k1k} \end{bmatrix}$$

gdzie

$A_{i1j} = (-1)^{1+j} \Delta_{i1j}$ **dopełnienie algebraiczne z pierwszego wiersza**

$$\Delta_i = A - z_i I = \begin{bmatrix} a_{11} - z_i & a_{12} & \cdots & a_{ik} \\ a_{21} & a_{22} - z_i & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} - z_i \end{bmatrix}$$

zaś

Δ_{i1j} **jest minorem macierzy** Δ_i **uzyskanego po skreśleniu** 1**-wiersza i** j**-kolumny**

Przykład

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta(\lambda)=\det\left[\lambda I-A\right]=\begin{bmatrix} \lambda-4 & -2 \\ 3 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

$$=(\lambda-4)(\lambda+1)-2(-1)3=\lambda^2-3\lambda+2=$$

$$=(\lambda-1)(\lambda-2) \qquad \lambda_1=1 \qquad \lambda_2=2$$

$$\Delta_1=A-\lambda_1 I = A-I=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$A_{111}=-2 \quad A_{112}=3$$

$$\Delta_2=A-\lambda_2 I=A-2I=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$A_{211}=-3 \quad A_{212}=3$$

$$L=\begin{bmatrix} A_{111} & A_{211} \\ A_{112} & A_{212} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{*} = L^{-1}AL = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}}$$

S p r a w d z e n i e

- **Metoda wektorów własnych** $(z_i \neq z_j)$**,**

Ponieważ $LA^* = AL = A[L_1\, L_2 \ldots L_k]$

$$[L_1\, L_2 \ldots L_k]\begin{bmatrix} z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & z_k \end{bmatrix} =$$

$$= \; [z_1 L_1 \;\; z_2 L_2 \; \ldots \; z_k L_k]$$

Zatem

$$A L_i = z_1 L_i \qquad i = 1, 2, \ldots k$$

tzn. L_i **jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej** z_i**:**

Stosowany zapis:

$$(A - I\lambda_i)x_i = 0$$

NIETRYWIALNE ROZWIĄZANIE JEŚLI

$$rank\,(A - I\lambda) = k - 1$$

Stąd: L **jest macierzą modalną złożoną z wektorów własnych macierz** A

Ponieważ różnym λ_i **odpowiadają liniowo niezależne** L_i **macierz jest nieosobliwa**

Uwaga: L_i **wyznacza jednozn. kierunek (długości** $\|L_i\|$ **mogą być różne)**

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = \det\left[\lambda I - A\right] = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 2$$

$$\Delta_1 L_1 = (A - \lambda_1 I)L_1 = (A - I)L_1 = 0$$

$$\Delta_2 L_2 = (A - \lambda_2 I)L_2 = (A - I)L_2 = 0$$

tzn.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_{11} \\ l_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad *$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_{12} \\ l_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad *$$

Skąd

$$\begin{cases} 3l_{11} + 2l_{21} = 0 \\ l_{12} + l_{22} = 0 \end{cases}$$

Przyjmując otrzymujemy

$$\left.\begin{matrix} l_{11} = 1 & l_{12} = 1 \\ l_{21} = -\frac{3}{2} & l_{22} = -1 \end{matrix}\right\} L = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

Sprawdzenie: $A^* = L^{-1} A L$

$$A^* = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- **Metoda transmitancyjna**

$$(A,b,c^T) \to \Delta(z)=\det\left[zI-A\right]=\prod_{i=1}^{k}(z-z_i)$$

$$\to G(z)=c^T\left[zI-A\right]^{-1}n=$$

$$=\frac{e_1}{z-z_1}+\frac{e_2}{z-z_2}+\ldots+\frac{e_k}{z-z_k}$$

jednokrotne!

$$\to G^*(z)=c^{*T}\left\lfloor zI-A^*\right\rfloor^{-1}b^*=$$

$$=\begin{bmatrix} c_1^* \\ c_2^* \\ \cdot \\ c_k* \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} z-z_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & z-z2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & z-z_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ \cdot \\ b_k^* \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{c_1^*b_1^*}{z-z_1}+\frac{c_2^*b_2^*}{z-z_2}+\ldots+\frac{c_k^*b_k}{z-z_k}$$

Skąd $\boxed{e_i=c_i^*b_i^*}$ $\quad i=1,2,\ldots k$

$$R\in R_{s/o} \Leftrightarrow c_i^*\neq 0\,,\, b_i^*\neq 0$$

Jeśli $c_i^*=1 \;\; i=1,\ldots k$

$$\left| \begin{array}{l} b_i^* := 1 \\ c_i^* = \ldots \end{array} \right.$$

wówczas $b_i=\lim\limits_{z\to z_i}(z-z_i)G(z)$

Przykład

$$G(z)=\frac{1}{z-1}+\frac{2}{z-2}$$

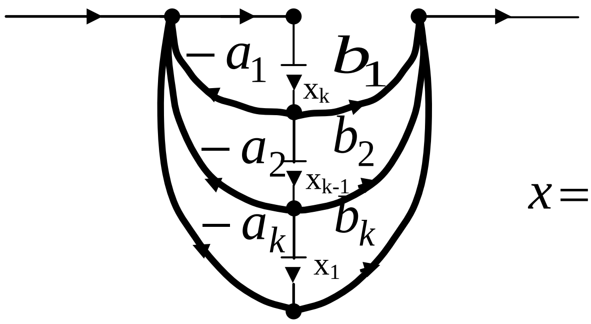
$$A^{*}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\ b^{*}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\ c^{*}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

Postacie normalne/kanoniczne

$$(A^*, b^*, c^{*T})$$

$$G(z) = \frac{b_1 z^{k-1} + b_2 z^{k-2} + \ldots + b_k}{z^k + a_1 z^{k-1} + \ldots + a_k}$$

- **Normalna postać regulatorowa (diagonalno-wierszowa)**



$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$$ **najb. opóźn.**

(ostatni w kask.)

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdot & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_k & -a_{k-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$b^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c^* = \begin{bmatrix} b_k \\ b_{k-1} \\ \vdots \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

M. sterowalności

$$H^{*}=\left[b^{*}\;A^{*}b^{*}\ldots A^{*k-1}b*\right]=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\ \vdots & \iddots & \iddots & h_{nk}\\ 0 & 1 & \iddots & \\ 1 & h_{k2} & \cdots & h_{kk}\end{bmatrix}\qquad \left|\det H^{*}\right|=1$$

Transformacja do postaci $(A^{*}\,b^{*}\,c^{*T})$

$A^{*}=L^{-1}AL$ **lub** $L\,A*=AL$

$$L\,b^{*}=b$$

oraz $[l_1\ldots l_k]b^{*}=b$

$$l_k=b$$

$$[l_1\ldots l_k]\begin{bmatrix}0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 1\\ -a_k & \cdots & & -a_1\end{bmatrix}==[Al_1\ldots Al_k]$$

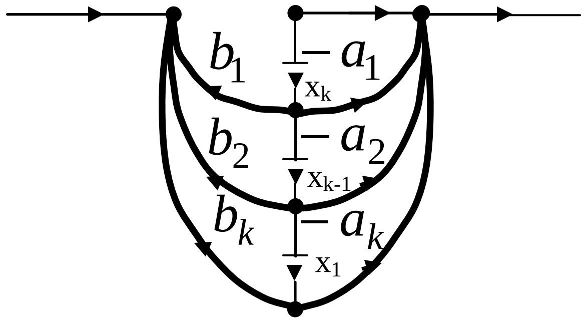
$$\begin{cases} l_{k-1}-a_1l_k=Al_k\\ l_{k-2}-a_2l_k=Al_{k-1}\\ \qquad\vdots\\ l_1-a_{k-1}l_k=Al_2\\ \quad -a_kl_k=Al_1\end{cases}\qquad \begin{cases} l_k=b\\ l_{k-1}=Al_k+a_1l_k\\ l_{k-2}=Al_{k-1}+a_2l_k\\ \qquad\vdots\\ l_1=Al_2+a_{k-1}l_k\\ (0=Al_1+a_kl_k)\end{cases}$$

- sprawdzenie

Współczynniki a_i **z równania char.**

$$\varDelta(z)=\det(zI-A)=z^{k}+a_1z^{k-1}+\ldots+a_k$$

- **Normalna postać obserwatorowa (diagonalno-kolumnowa)**



$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$$

pierwszy w kask

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_k \\ 1 & 0 & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$b^* = \begin{bmatrix} b_k \\ \vdots \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix} \quad c^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

M. OBSERWOWALNOŚCI

$$G^* = \begin{bmatrix} c^{*T} \\ c^{*T} A^* \\ \vdots \\ c^{*T} A^{*k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & g_{zk} \\ 0 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots \\ 1 & g_{k2} & \cdots & g_{kk} \end{bmatrix} \left|\det G^*\right| = 1$$

Wyznaczenie transformacji podobieństwa

$$A^* = TAT^{-1}$$

$$A^*T = TA$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_k \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ t_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 A \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ t_k A \end{bmatrix}$$

oraz

$$c^{*T}T = c^T \qquad T^T c^* T = c$$

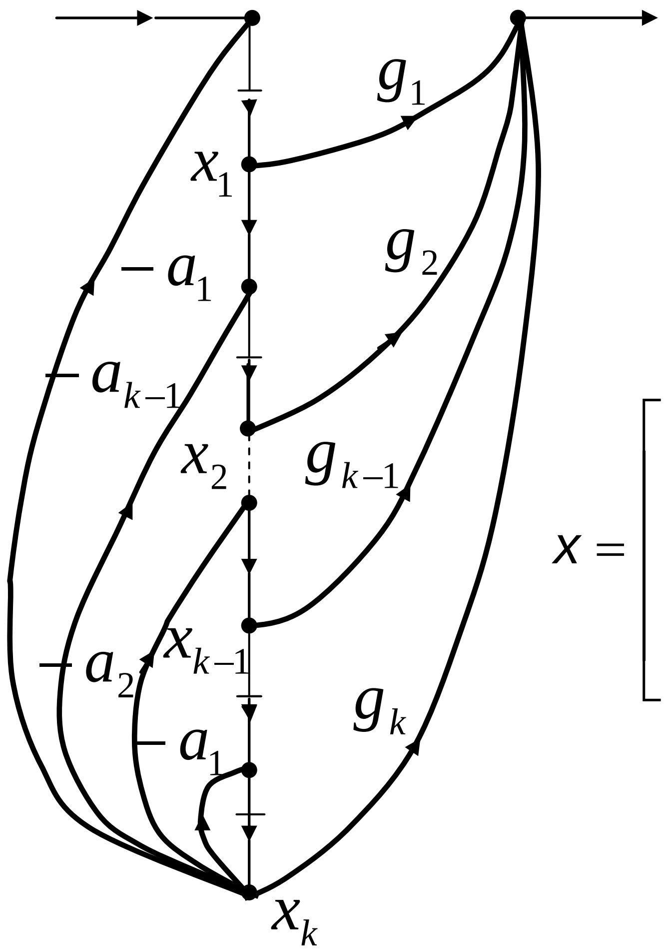
$$\left[t_1^T \ldots t_k^T\right] c^* = c$$

$$\begin{cases} t_{k-1} - a_1 t_k = t_k A \\ t_{k-1} - a_2 t_k = t_{k-1} A \\ \vdots \\ t_1 - a_{k-1} t_k = t_2 A \\ \quad -a_k t_k = t_1 A \end{cases} \qquad \begin{cases} t_k = c^T \\ t_{k-1} = t_k A + a_1 t_k \\ t_{k-2} = t_{k-1} A + a_2 t_k \\ \vdots \\ t_1 = t_2 A + a_{k-1} t_k \\ \left(0 = t_1 A + a_k t_k\right) \end{cases}$$

sprawdzenie

- **Normalna postać sterowalna (diagonalno-kolumnowa)**

$$G(z) = g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2} + \ldots + g_k z^{-k} +$$



$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} \longleftarrow$$

Pierwszy w kask

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_k \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & -a_2 \\ 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \quad b^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad c^* = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{k-1} \\ g_k \end{bmatrix}$$

M. STEROWALNOŚCI

$$H^* = \left\lfloor b^* \quad A^* b^* \ldots A^{*k-1} b^* \right\rfloor = diag\{1\} = I$$

$$\det H^* = 1$$

Transformacja podobieństwa

$$L = HH^{*-1} = HI = H = \left\lfloor b\, Ab \ldots A^{k-1} b \right\rfloor$$

skąd

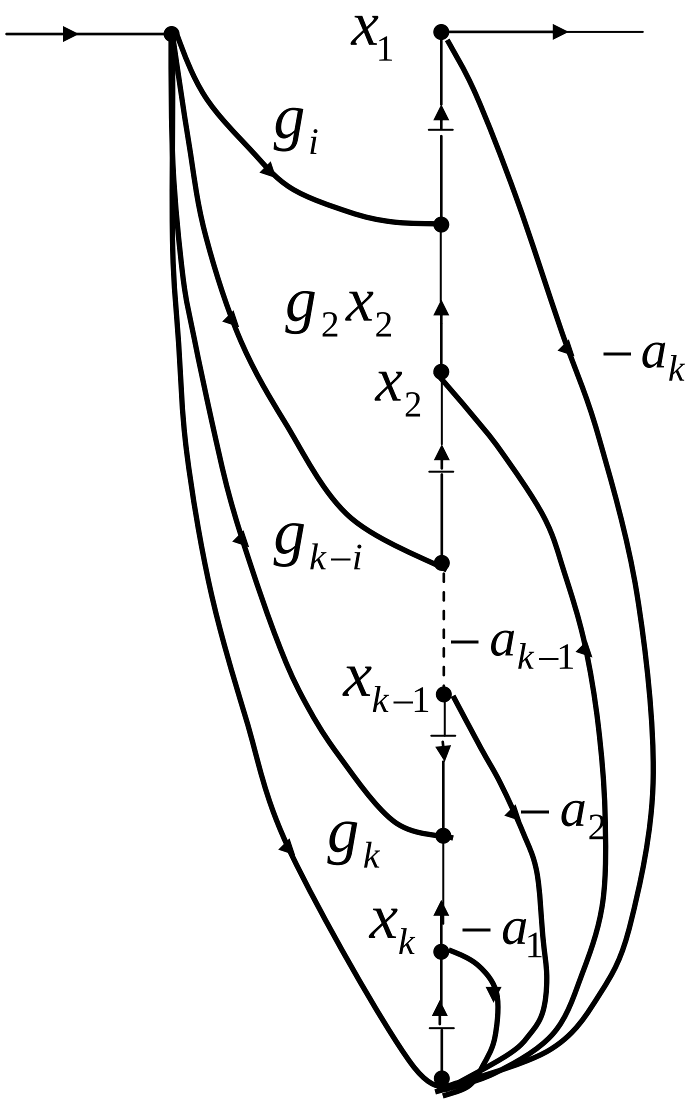
$$c^{*T} = c^T T^{-1} = c^T L = \left\lfloor c^T b \quad c^T Ab \ \ldots \ c^T A^{k-1} b \right\rfloor$$

tzn.

$$c^{*T} = [g_1\, g_2 \ldots g_k]$$

skończony szereg k pierwszych próbek odpowiedzi impulsowej $\mathfrak{R}$

- **Normalna postać obserwowalna (diagonalno-wierszowa)**



$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_k & -a_{k-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \quad b^* = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_k \end{bmatrix} \quad c^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

M. OBSERWOWALNOŚCI

$$G^* = \begin{bmatrix} c^{*T} \\ c^{*T}A^* \\ \vdots \\ c^T A^{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det G^* = 1$$

Macierz przekształcenia

$$T = G^{*-1}G = I\,G = G$$ **tzn.**

$$T = \begin{bmatrix} c^T \\ C^T A \\ \vdots \\ C^T A^{k-1} \end{bmatrix}$$

Ponieważ

$$b^* = Tb = \begin{bmatrix} c^T b \\ c^T Ab \\ \vdots \\ c^T A^{k-1} b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_k \end{bmatrix} \qquad g_i = c^T A^{i-1} b$$