МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Департамент математического и компьютерного моделирования

ДОКЛАД

о практическом задание по дисциплине «АИСД»
«Дерево интервалов»

НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ
09.03.03 «Прикладная информатика»
«Прикладная информатика в компьютерном дизайне»

Выполнил студент
гр. Б9121-09.03.03пикд
Чурганов Никита Сергеевич

_____
(подпись)

Руководитель практики
Доцент ИМКТ А.С Кленин
(должность, уч. звание)

_____
(подпись)

«_____» _____ 2022г.

Доклад защищен:
С оценкой _____

Рег. № _____

«____» _____ 2022 г.

г. Владивосток
2022г

Оглавление

Глоссарий

Коллекция в программировании — программный объект, содержащий в себе, тем или иным образом, набор значений одного или различных типов, и позволяющий обращаться к этим значениям. [23]

Метод — это блок кода, содержащий ряд инструкций. Программа инициализирует выполнение инструкций, вызывая метод и указывая все аргументы, необходимые для этого метода. [22]

Лист — узел, не имеющий узлов-потомков на дереве. [21]

Поддерево — часть древообразной структуры данных, которая может быть представлена в виде отдельного дерева. [21]

Кореневой узел — узел, не имеющий предков (самый верхний). [21]

Корень — одна из вершин, по желанию наблюдателя. [21]

Интервал — множество всех чисел, удовлетворяющих строгому неравенству a <x <b. [25]

Введение

Суть и назначение

Интервальное дерево – это древовидная структура данных, узел которой представляет интервал и максимальное значение в поддереве, поэтому характеризуются начальным и конечным значениями. В частности, дерево интервалов позволяет эффективно находить все интервалы, которые перекрываются любым заданным интервалом (точкой).

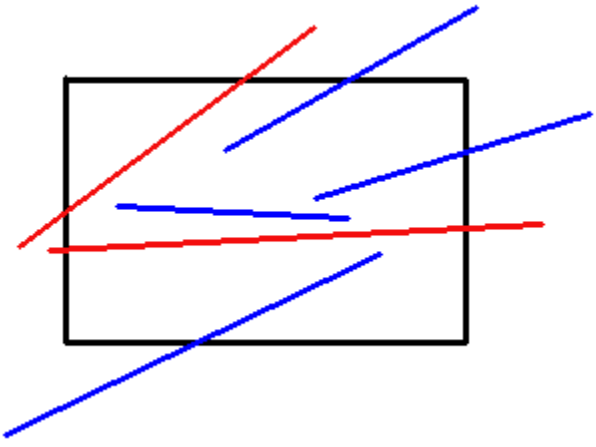
Пример использования

Дерево интервалов используется для поиска видимых элементов внутри трехмерной сцены.

Имея набор отрезков и выровненный по оси прямоугольник, необходимо найти точки пересечения отрезков с прямоугольником. Эту проблему можно решить, используя деревья интервалов в сочетании с деревьями диапазонов.[14]

Деревья диапазонов — это эффективная структура данных для поиска набора точек, присутствующих в диапазоне/прямоугольнике. Таким образом, их можно использовать для поиска всех сегментов линии, так что одна из конечных точек каждого сегмента линии присутствует в прямоугольнике. Они соответствуют сегментам синей линии на рисунке 1.

Деревья интервалов можно использовать для поиска тех сегментов, которые пересекаются с прямоугольником, но конечные точки которых находятся за пределами окна. Это красные сегменты на рисунке.



Если рассмотреть ограниченную версию задачи, в которой все отрезки горизонтальны или вертикальны, то в таком случае любой горизонтальный отрезок, пересекающий прямоугольник, должен пересекать левый (правый) вертикальный край прямоугольника. Если представить горизонтальные сегменты как интервалы, а вертикальный край прямоугольника как точку, проблема состоит в том, чтобы найти все интервалы, содержащие эту точку. Таким образом, задача решается, используя интервальные деревья. Точно так же находятся все пересекающиеся вертикальные отрезки.

1 История развития

Точной информации в открытых источниках нет, но можно предположить, что дерево интервалов появилось примерно в 1979 г. Это можно обосновать тем, что бинарное дерево поиска появилось в 1960 г. и бинарное дерево поиска более простая структура данных в сравнении с деревом интервалов, так же есть такая структура данных, как дерево диапазонов, которая отдаленно похожа на дерево интервалов и появилось в 1979 г.

2 Описание алгоритма

Дерево интервалов позволяет решать следующую задачу. Дано множество отрезков $I = \{[x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n]\}$ и множество запросов. Каждый запрос характеризуется интервалом $[q_x, q_y]$. Для каждого запроса необходимо определить множество отрезков из I, которые перекрывают $[q_x, q_y]$.

Построение дерева интервалов занимает время $O(n \log n)$, а также $O(n)$ памяти. На каждый запрос дерево интервалов позволяет отвечать за $O(\log n + k)$, где k – размер ответа на запрос.

3 Построение дерева интервалов

Изначально дерево не заполнено, поэтому берется произвольный интервал [5;10] и вставляется в дерево. Таким образом, дерево состоит из одного узла, который является корневым узлом (рисунок 1).

Рисунок 1 – Добавление первого узла

Затем берется следующий произвольный интервал $[3; 12]$, и проверяется следующее условие: так как $3 < 5$, то узел идет в левое поддерево (рисунок 2).

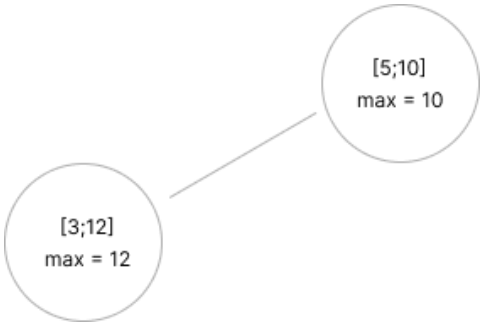


Рисунок 2 – Добавление узла в дерево

Далее проверяется максимум в левом поддереве и в правом при их наличии, если максимум в левом поддереве больше максимума в правом поддереве и максимума в корне, то в корень записывается максимум левого поддерева, если максимум в правом поддереве больше, то в корень записывается максимум правого поддерева, иначе в корень записывается самого корня (рисунок 3).

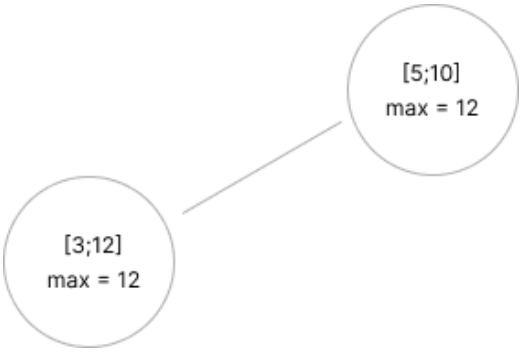


Рисунок 3 – Вычисление максимума в дереве

Аналогично предыдущим действиям добавляются другие узлы (рисунок 4).

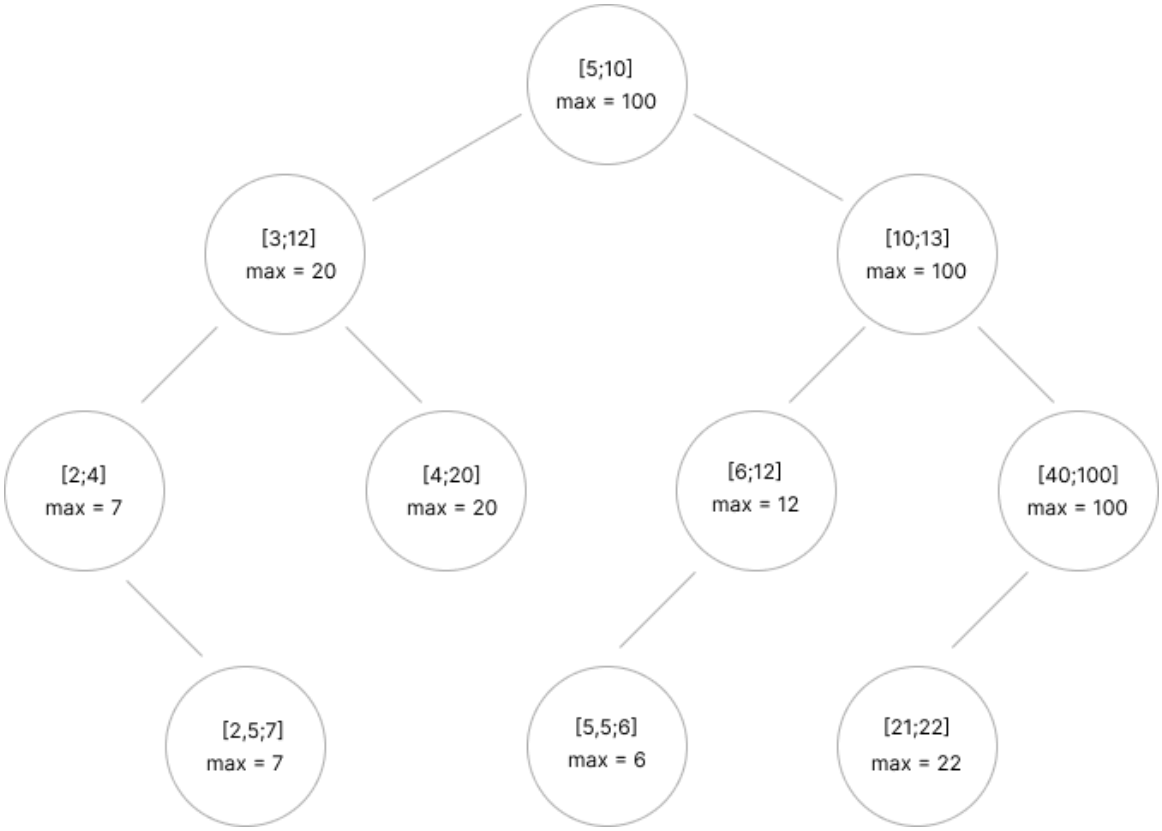


Рисунок 4 – Полученное дерево

4 Операции над деревом

1. Добавление
2. Проверка на перекрытие
3. Удаление

4.1 Добавление

Для добавления узла в дерево берется интервал, который необходимо добавить, и если нижняя граница интервала меньше нижней границы интервала в корне или равна ей, то узел идет влево, иначе – вправо. Данные действия выполняются до тех пор, пока добавляемый узел не станет листом (рисунок 1 – рисунок 3).

4.2 Проверка на перекрытие

Для проверки на перекрытие дерево должно иметь хотя бы один узел. Проверка делается через сравнение границ интервала у узла в дереве и границ заданного интервала, который проверяется на то, какие интервалы он перекрывает.

Условные обозначения, используемые далее:

_____ - интервал x, _____ - интервал $root$;

x – произвольный интервал, который проверяется на то, какие интервалы он перекрывает и имеет параметры low и $high$;

$x.low$ – нижняя граница интервала x;

$x.\mathrm{high}$ – верхняя граница интервала x;

$root$– интервал из дерева, который имеет параметры low и $high$;

$root.low$– нижняя граница интервала $root$;

$root.high$– верхняя граница интервала $root$.

Варианты, которые входят в проверку:

1. Интервал x частично перекрывает интервал $root$, при этом x не выходит за границы $root$ (рисунок 5).

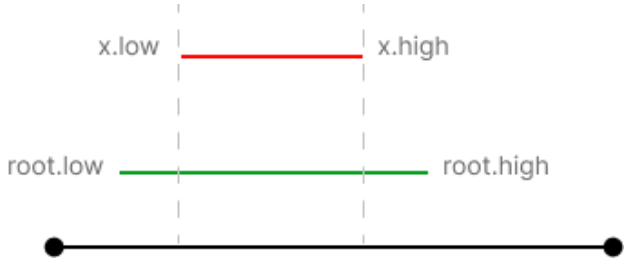


Рисунок 5 – Случай 1

2. Интервал x частично перекрывает интервал $root$, при этом x выходит за правую границу $root$ (рисунок 6).

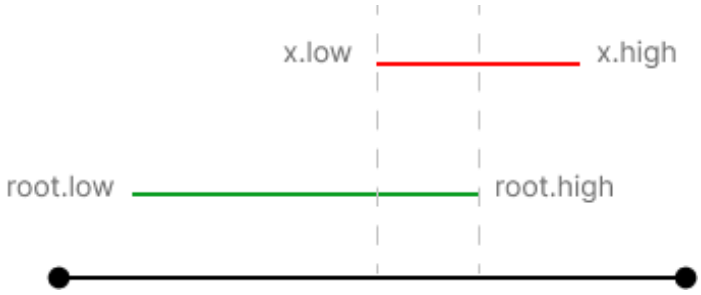


Рисунок 6 – Случай 2

3. Интервал x полностью перекрывает интервал $root$, при этом x выходит границы $root$ (рисунок 7).

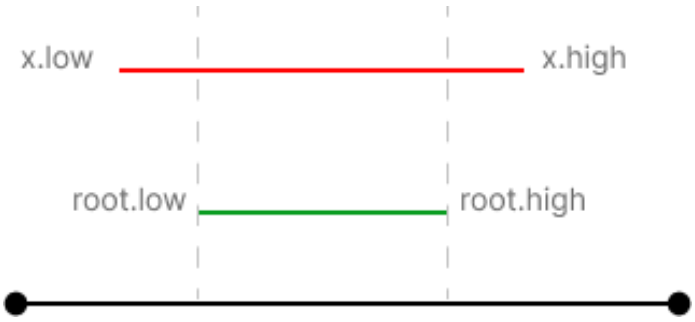


Рисунок 7 – Случай 3

4. Интервал x не перекрывает интервал $root$, при этом x лежит левее интервала $root$ (рисунок 8).

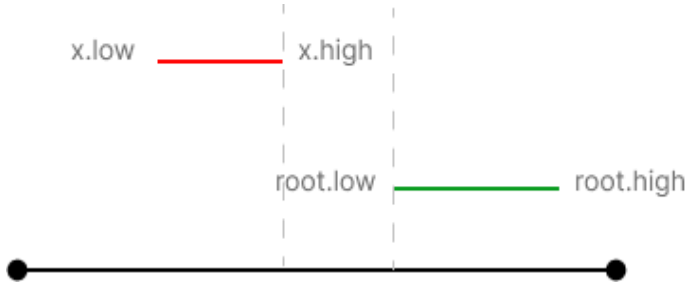


Рисунок 8 – Случай 4

5. Интервал x не перекрывает интервал $root$, при этом x выходит за левую границы $root$ (рисунок 9).

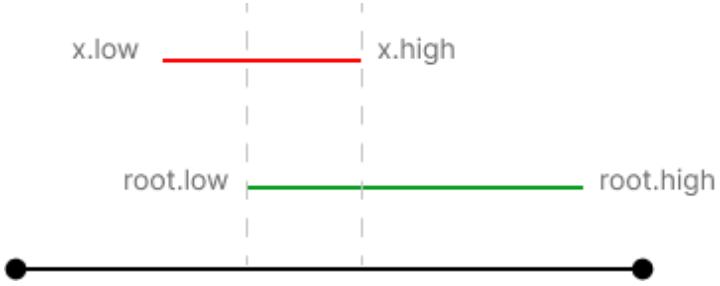


Рисунок 9 – Случай5

6. Интервал x не перекрывает интервал $root$, при этом x x лежит правее интервала $root$ (рисунок 10).

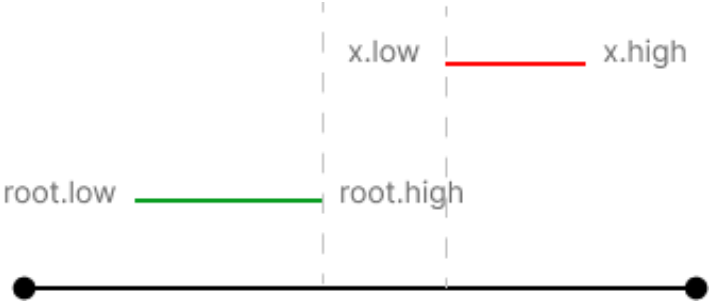


Рисунок 10 – Случай 6

4.3 Удаление узла

Для удаления узла рассматривается несколько ситуаций: первая ситуация – узел является листом, вторая ситуация – у узла есть хотя бы один сын.

1. Узел является листом.

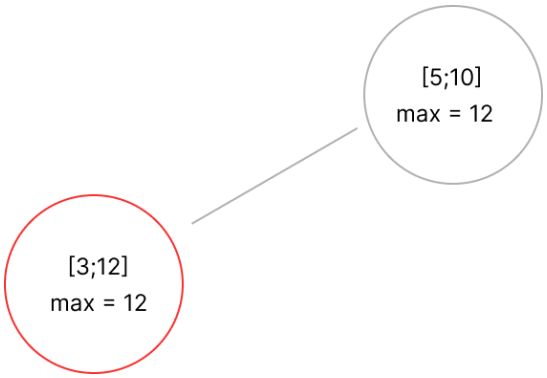


Рисунок 11 – Удаление узла

Удаляемый узел – $[3; 12], \max = 12$. Если узла нет обоих сыновей, то лист удаляется и максимум в узле на уровень выше пересчитывается. Таким образом в дереве (рисунок 11) остаетсмя только один узел - $[5; 10], \max = 10$ (рисунок 12).

Рисунок 12 – Результат удаления

2. Узел не является листом

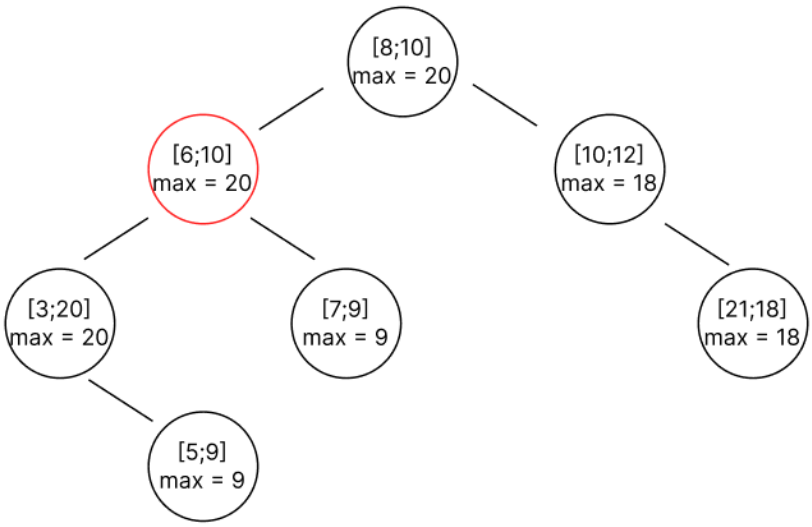


Рисунок 13 – Удаление узла [6;10], max = 20

Удаляемый узел – $[6; 10], \max = 20$. Перед тем, как удалить узел необходимо проверить есть ли сыновья у этого узла. В данном случаи у удаляемого есть оба сына. Тогда этому узлу присваиваются значения следующего узла по величение параметра low.

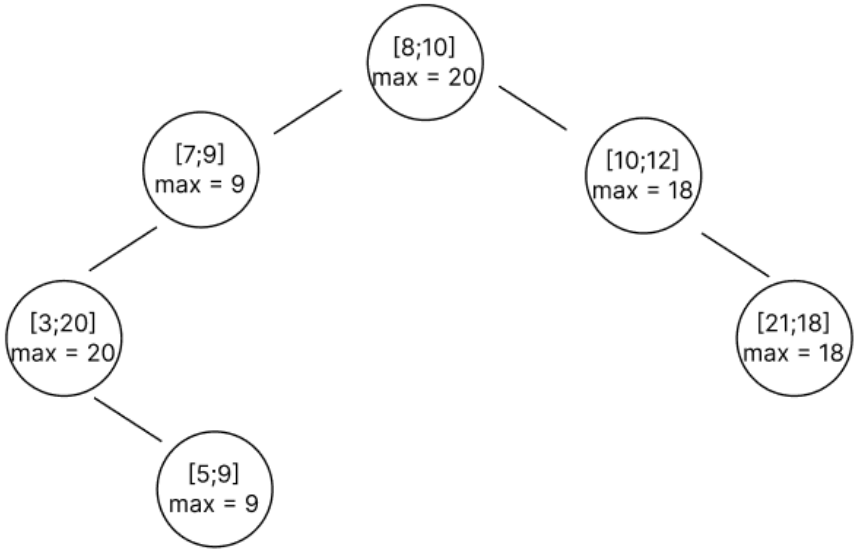


Рисунок 14 – Результат удаления

5 Реализация

5.1 Добавление

$root.Insert(x)$, где $root$ – дерево, x – добавляемый интервал

```
1. public Node Insert(Interval x)
2.         {
3.             if (this == null)
4.                 return new Node(x, x.high);
5.             else
6.             {
7.                 this._Insert(this, x);
8.                 return this;
9.             }
10.          }
11.          Node _Insert(Node root, Interval x)
12.          {
13.              if (root.range.Equals(x))
14.              {
15.                  return null;
16.              }
17.              else
18.              {
19.                  if (root.max < x.high)
20.                      root.max = x.high;
21.                  if (root.range.low >= x.low)
22.                  {
23.                      if (root.left == null)
24.                      {
25.                          root.left = new Node(x, x.high);
26.                          return root;
27.                      }
28.                      else
29.                          this._Insert(root.left, x);
30.                  }
31.                  else
32.                  {
33.                      if (root.right == null)
34.                      {
35.                          root.right = new Node(x, x.high);
36.                          return root;
37.                      }
38.                      else
39.                          this._Insert(root.right, x);
40.                  }
41.                  return root;
42.              }
43.          }
```

5.2 Поиск перекрываемых интервалов

$root.Insert(x)$, где $root$ – дерево, x – интервал

```
1. public string Search(Interval x)
2.         {
3.
4.             if (this.range.low >= x.low && this.range.high
                   <= x.high)
5.             {
6.                 msg += $"{x} полностью перекрывает
                 {this.range}\n";
7.
8.
9.             }
10.                 else if (this.range.low > x.high ||
                    this.range.high < x.low)
11.                 {
12.                     msg += $"{x}  перекрывает {this.range}\n";
13.
14.                 }
15.                 else
16.                 {
17.                     msg += $"{x} не перекрывает {this.range}\n"
   ;
18.
19.                 }
20.
21.                 if (this.left != null)
22.                 {
23.                     this.left.Search(x);
24.                 }
25.                 if (this.right != null)
26.                 {
27.                     this.right.Search(x);
28.                 }
29.                 return msg;
30.
31.             }
```

5.3 Удаление

$root.Remove(x)$, где $root$ – дерево, x –удаляемый интервал

```
1. public Node Delete(Interval x)
2.     {
3.         if (root == null)
4.         {
5.             Console.WriteLine("Список интервалов пуст");
6.             return root;
7.         }
8.         if (root.range.low == x.low && root.range.high == x.high)
9.         {
10.                 if (root.left == null && root.right == null)
11.                 {
12.                     root.range.low = 0;
13.                     root.range.high = 0;
14.                     root.max = 0;
15.
16.                     return root;
17.                 }
18.                 if (root.left != null || root.right != null)
19.                 {
20.                     root_replace(root);
21.                     return root;
22.                 }
23.
24.                 Console.WriteLine("Узел в дереве");
25.                 return root;
26.             }
27.             if (root.range.low >= x.low && root.left != null)
28.             {
29.                 remove(root.left, x);
30.             }

                else if (root.range.low <= x.low && root.right
            != null)

31.             {
32.                 remove(root.right, x);
33.             }
34.             else
35.                 Console.WriteLine("Такого узла нет в дереве");
36.         }
37.
```

6 Тестирование

Тестирующая система состоит из трех частей, которые в сумме дают 37 тестов. Первая часть – это набор тестов (1–12) на добавление. Вторая часть – это набор тестов (13–27) на перекрытие. Третья часть – это набор тестов (28–37) на удаление.

Каждая часть состоит из кода, который сначала открывает файл из папки “in” (папка с входные данные, два числа, которые описывают границы интервала), затем считываются входные данные из файла, создаются интервалы на основе входных данных, и выполняются определенная последовательность действий, чтобы выполнить задачу. После того, как задача решена ответ записывает в файл из папки “out” и содержимое этого файла сравнивается с ожидаемым результатом, который храниться в папке “result”. Данная последовательность действий выполняется до тех пор, пока в папке “in” не будут прочитаны все файлы.

Папка с тестами имеет следующий вид:

Тесты (папка)

In – папка с входными данными

1.txt

…

37.txt

Out – папка с выходными данными

1.txt

…

37.txt

Result – папка с предполагаемыми результатами тестов

1.txt

…

37.txt

Названия файлов содержат номер теста, то есть результат, который был получен после работы программы на основе входных данных из файла 1, лежащего в папке “in”, записывается в файл 1 из папки “out”, затем содержимое из файла 1 из папки “out” сравнивается с содержимым файла 1 из папки “result”.

Пример запуска тестов:

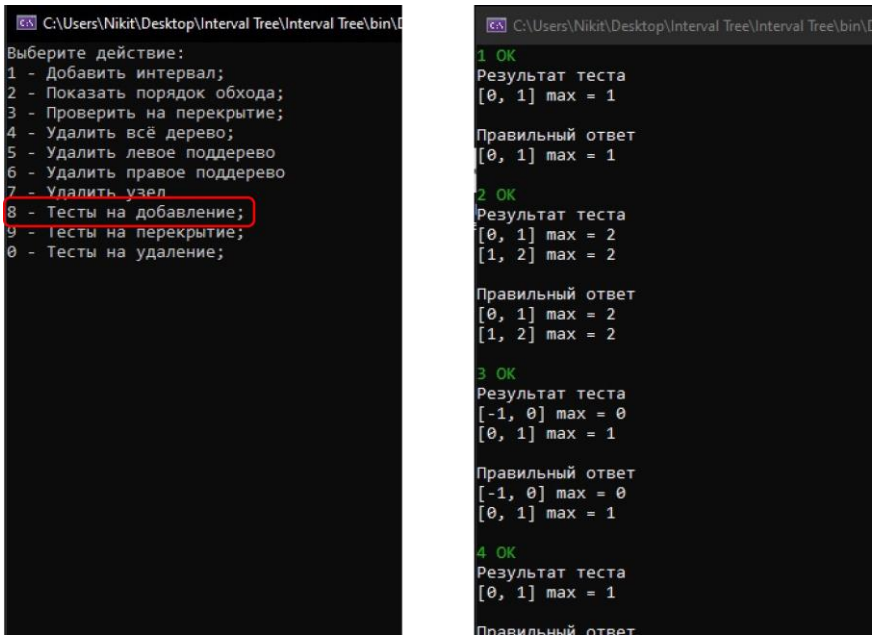


Рисунок 18. Тесты на добавление

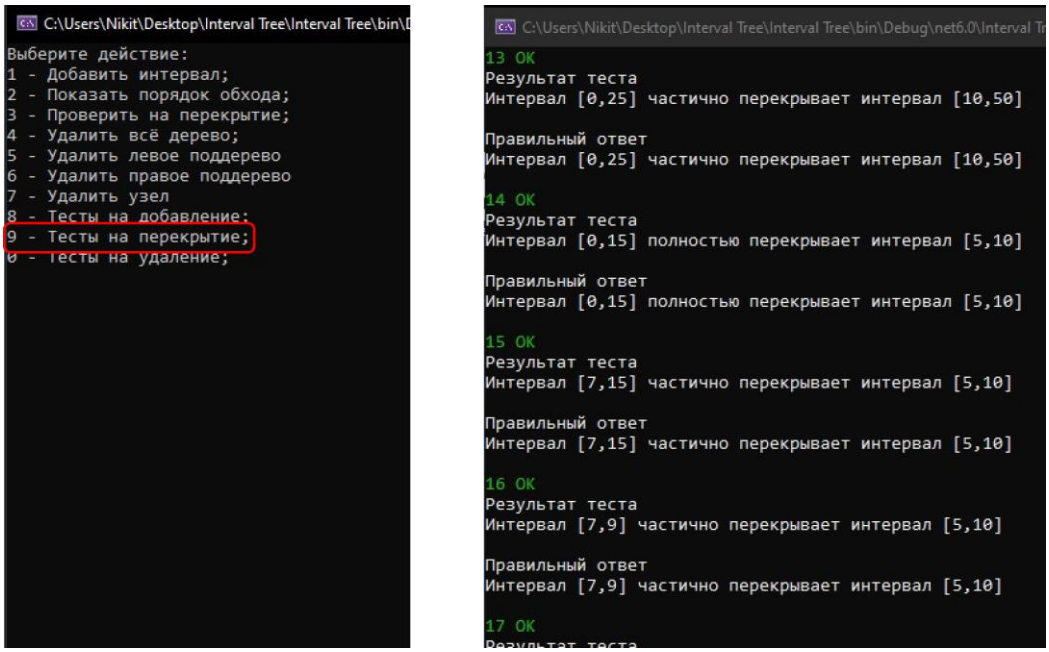


Рисунок 19. Тесты на перекрытие

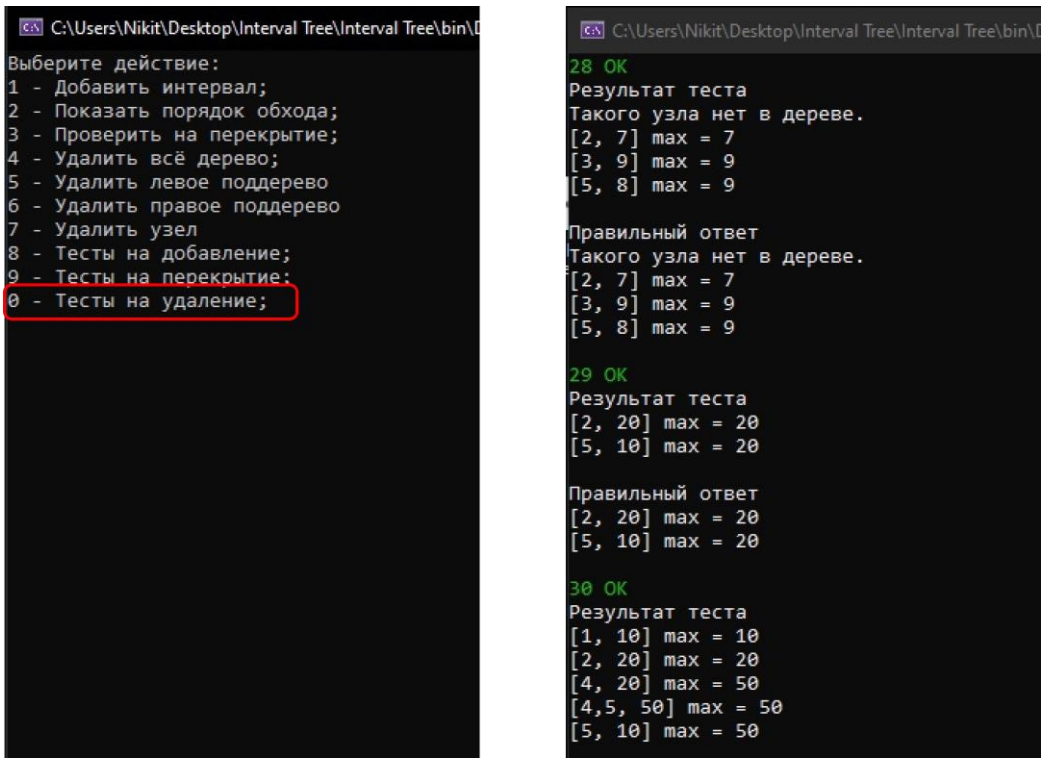


Рисунок 20. Тесты на удаление

7 Исследование

Исследование времени работы алгоритма состоит из трех частей, где первая часть – это анализ времени работы добавления узла в дерево, вторая часть – анализ времени работы удаления узла из дерева, третья часть – анализ поиска перекрываемых интервалов.

7.1 Добавления узла в дерево

Рисунок 21. Время работы добавления

7.2 Анализ удаления узла из дерева

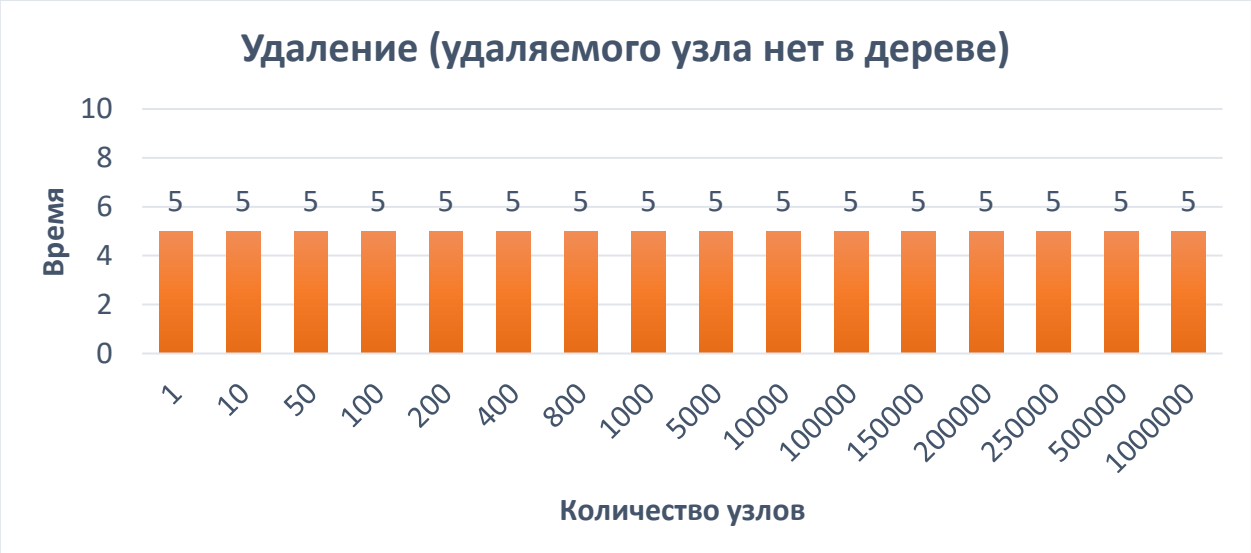


Рисунок 22. Время работы удаления (удаляемого узла нет в дереве)

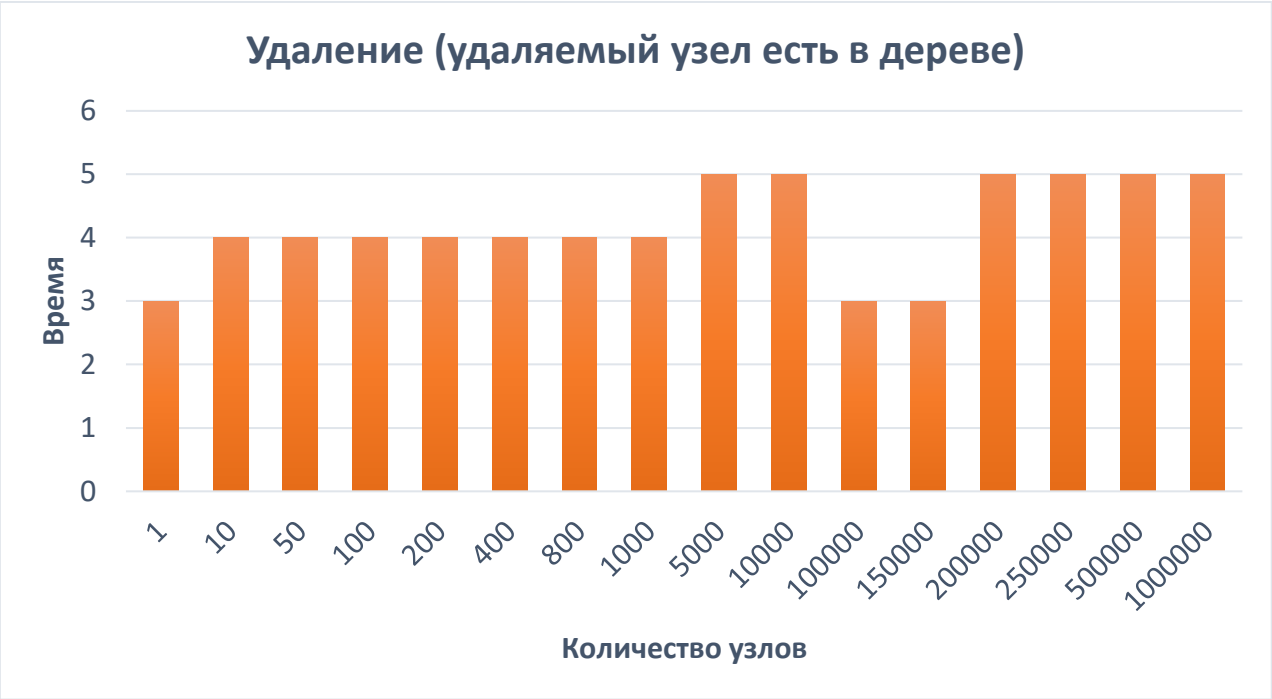


Рисунок 23. Время работы удаления (удаляемый узел есть в дереве)

7.2 Анализ удаления узла из дерева

Рисунок 24. Время работы проверки на перекрытие

8 Формальная постановка задачи

1) Изучить структуру данных “Дерево интервалов”;
2) Реализовать для дерева интервалов следующие операции:
    1. Добавление
    2. Удаление
    3. Поиск перекрываемых интервалов
3) Выполнить исследование на производительность (время работы);
4) Реализовать систему автоматического тестирования;
5) Результаты проделанной работы выложить в среде GitHub:
    1. Отчет
    2. Презентация
    3. Программный код
    4. Тесты
    5. Пакет CATS

Список литературы

Электронные ресурсы

1. Дерево интервалов (interval tree) и пересечение точки с множеством интервалов [Электронный ресурс] // neerc.ifmo. — Режим доступа: Дерево интервалов (interval tree) и пересечение точки с множеством интервалов — Викиконспекты (ifmo.ru)
2. Interval Tree. [Электронный ресурс] // geeksforgeeks. — Режим доступа: Interval Tree - GeeksforGeeks
3. Interval Trees: One step beyond BST [Электронный ресурс] // iq.opengenus. — Режим доступа: Interval Trees: One step beyond BST (opengenus.org)
4. Interval tree [Электронный ресурс] // wikipedia. — Режим доступа: Interval tree - Wikipedia
5. node-interval-tree [Электронный ресурс] // npm. — Режим доступа: node-interval-tree - npm (npmjs.com)
6. 5cript/interval – three [Электронный ресурс] // github. — Режим доступа: GitHub - 5cript/interval-tree: A C++ header only interval tree implementation.
7. INTERVAL TREES [Электронный ресурс] // dgp.toronto. — Режим доступа: CSC378: Interval Trees (toronto.edu)
8. Interval tree [Электронный ресурс] // cmu.edu. — Режим доступа: intervaltrees.pdf (cmu.edu)
9. Windowing queries [Электронный ресурс] // personal.us.es. — Режим доступа: Lecture 8: Windowing queries (us.es)
10. Interval tree [Электронный ресурс] // tutorialandexample. — Режим доступа: Interval Tree - TAE (tutorialandexample.com)
11. Interval tree [Электронный ресурс] // formulasearchengine. — Режим доступа: Interval tree - formulasearchengine

12. Interval tree [Электронный ресурс] // TutorialCup. — Режим доступа: Interval Tree - Interval Tree in Data Structure Interval Tree (tutorialcup.com)

13. Динамические структуры данных [Электронный ресурс] // штегше. — Режим доступа: Динамические структуры данных - интуит

14. Дерево диапозонов [Электронный ресурс] // wikibrief. — Режим доступа: Дерево диапазонов - Range tree (wikibrief.org)

15. Segment Tree Range Minimum Query [Электронный ресурс] // youtube. — Режим доступа: Segment Tree Range Minimum Query - YouTube

16. Interval tree [Электронный ресурс] // homepages.math. — Режим доступа: Interval Trees (uic.edu)

17. Дерево Интервалов (Отрезков) [Электронный ресурс] // coolsoftware. — Режим доступа: Дерево Интервалов (Отрезков) | Cool Software Blog

18. Interval tree [Электронный ресурс] // drdobbs. — Режим доступа: Interval Trees | Dr Dobb's (drdobbs.com)

19. Data Structures: Augmented Interval Tree to search for intervals overlapping [Электронный ресурс] // davismol. — Режим доступа: Data Structures: Augmented Interval Tree to search for intervals overlapping | Dede Blog (davismol.net)

20. Augmented Interval Tree in C# [Электронный ресурс] // Software Salad. — Режим доступа: Augmented Interval Tree in C# | Software Salad (wordpress.com)

21. Дерево (структура данных) [Электронный ресурс] // wikipedia. — Режим доступа: Дерево (структура данных) — Википедия (wikipedia.org)

22. Методы [Электронный ресурс] // microsoft. — Режим доступа: Методы. Руководство по программированию на C# | Microsoft Learn

23. Коллекция [Электронный ресурс] // wikipedia. — Режим доступа: Коллекция (программирование) — Википедия (wikipedia.org)

24. Интервал [Электронный ресурс] // wikipedia. — Режим доступа: Интервал — Википедия (wikipedia.org)

25. Оценка сложности алгоритмов [Электронный ресурс] // tproger. — Режим доступа: Оценка сложности алгоритмов, или Что такое O(log n) (tproger.ru)

26. Временная сложность алгоритма [Электронный ресурс] // wikipedia. — Режим доступа: Временная сложность алгоритма — Википедия (wikipedia.org)

27. Типы данных [Электронный ресурс] // wikipedia. — Режим доступа: Типы данных в C# —метанит(metanit.com)