Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Отчет по заданию №6

«Сборка многомодульных программ. Вычисление корней уравнений и определенных интегралов.»

Вариант 5 / 1 / 1

Выполнил:
студент 213 группы
Ермишин Н. В.

Преподаватель:
Батузов К. А.

Москва
2022

Содержание

1. Постановка задачи

Суть задачи состоит в создании многомодульной программы, реализующей вычисление площади плоской фигуры, ограниченной тремя функционально заданными кривыми, с заданной точностью посредством метода на основе квадратурной формулы прямоугольников. Для определения границ интегрирования программа должна вычислять вершины фигуры, используя метод деления отрезка пополам. Отрезок применения метода поиска корней должен быть вычислен аналитически, чтобы удовлетворять сходимости метода. Функции, для вычисления значения в произвольной точке кривой должны быть реализованы на языке ассемблера. Также необходимо реализовать поддержку программой ключей командной строки, а сборка программа должна выполнятся с использованием утилиты make.

Численные методы:

1. Метод деления отрезка пополам для поиска корня.
2. Метод прямоугольников для вычисления определенного интеграла.

Уравнения кривых:

1. $f_1(x) = 0.35x^2 - 0.95x + 2.7$.
2. $f_2(x) = 3x + 1$.
3. $f_3(x) = \frac{1}{x+2}$

2. Математическое обоснование

Проанализируем сходимость методов:

1. Метод деления отрезка пополам требует непрерывности функции $f(x) - g(x)$ на отрезке поиска корня $[a : b]$. При этом знаки разности функции на концах отрезка должны быть различными $((f(a) - g(a))(f(b) - g(b)) < 0)$. При выполнении данных условий на заданном отрезке найдется корень $f(x) - g(x) = 0$ [1](стр. 421-423). Для однозначности определения корня он должен быть единственным на отрезке.

2. Метод численного интегрирования прямоугольниками требует от функции $f(x)$ на отрезке интегрирования $[a : b]$ непрерывность второй производной $\frac{d^2 f}{dx^2}$ [1](стр. 434).

В результате анализа представленных кривых (рис. 1) с учетом сходимости метода поиска корня делением отрезка пополам были выбраны следующие границы поиска корней:

1. $[0 : 2]$ для точки пересечения кривых f_1 и f_2. Функция $f_1(x) - f_2(x)$ непрерывна на данном отрезке. Выполняется условие различия знаков на концах отрезка (форм. 1).

$$(f_1(0) - f_2(0))(f_1(2) - f_2(2)) = (2.7 - 1)(2.2 - 7) = 1.7 * 4.8 < 0 \tag{1}$$

2. $[-1 : 0]$ для точки пересечения кривых f_2 и f_3. Функция $f_2(x) - f_3(x)$ непрерывна на данном отрезке. Выполняется условие различия знаков на концах отрезка (форм. 2).

$$(f_2(-1) - f_3(-1))(f_2(0) - f_3(0)) = (-2 - 1)(1 - 0.5) = -3 * 0.5 < 0 \tag{2}$$

3. $[-1.9 : -1]$ для точки пересечения кривых f_1 и f_3. Функция $f_1(x) - f_3(x)$ непрерывна на данном отрезке. Выполняется условие различия знаков на концах отрезка (форм. 3).

$$(f_1(-1.9) - f_3(-1.9))(f_1(-1) - f_3(-1)) = (5.7685 - 10)(4 - 1) = -4.2315 * 3 < 0 \tag{3}$$

Удостоверимся в соблюдении требования сходимости метода численного интегрирования для всех функций на отрезке $[-1.9 : 2]$ (покрывает всю область поиска корней):

1. Для функции $f_1(x)$ вторая производная $\frac{d^2 f}{dx^2} = 0.7$ непрерывна на отрезке $[-1.9 : 2]$.

2. Для функции $f_2(x)$ вторая производная $\frac{d^2 f}{dx^2} = 0$ непрерывна на отрезке $[-1.9 : 2]$.

3. Для функции $f_3(x)$ вторая производная $\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{2}{(x+2)^3}$ непрерывна на отрезке $[-1.9 : 2]$.

В результате анализа представленных графиков и методов поиска корней и численного интегрирования, были выбраны значения $\varepsilon_1 = 0.00003$ и $\varepsilon_2 = 0.00005$. Докажем, что данные значения гарантируют вычисление площади фигуры с точностью $\varepsilon = 0.001$.

Если $f_i(x) > 0$ всюду определена и непрерывна на отрезке $[x_1 - \varepsilon_1, x_2 + \varepsilon_1]$, то максимальное возможное при вычислении значение интеграла будет достигнуто интегрированием по отрезку $[x_1 - \varepsilon_1, x_2 + \varepsilon_1]$ (форм. 4), а минимальное - интегрированием по отрезку $[x_1 + \varepsilon_1, x_2 - \varepsilon_1]$ (форм. 5).

$$max\_integral = \int_{x_1-\varepsilon_1}^{x_2+\varepsilon_1} f_i\,dx = \int_{x_1-\varepsilon_1}^{x_1} f_i\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f_i\,dx + \int_{x_2}^{x_2+\varepsilon_1} f_i\,dx \tag{4}$$

$$min\_integral = \int_{x_1+\varepsilon_1}^{x_2-\varepsilon_1} f_i\,dx = -\int_{x_1}^{x_1+\varepsilon_1} f_i\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f_i\,dx - \int_{x_2-\varepsilon_2}^{x_2} f_i\,dx \tag{5}$$

Тогда максимальная погрешность для вычисления интеграла каждой кривой будет равна максимуму из разности максимального и реального значения интеграла и разности реального и минимального значений. При этом, нужно учитывать погрешность интегрирования ε_2, прибавив к получившемуся максимуму (форм. 6).

$$\begin{aligned} \varepsilon_{f_i} &= max(max\_integral - \int_{x_1}^{x_2} f_i dx, \int_{x_1}^{x_2} f_i dx - min\_integral) + \varepsilon_2 = \\ &= max(\int_{x_1-\varepsilon_1}^{x_1} f_i\,dx + \int_{x_2}^{x_2+\varepsilon_1} f_i\,dx, \int_{x_1}^{x_1+\varepsilon_1} f_i\,dx + \int_{x_2-\varepsilon_2}^{x_2} f_i) + \varepsilon_2 \end{aligned} \tag{6}$$

Общая погрешность вычисления площади фигуры является суммой погрешностей вычисления интегралов для каждой из трех кривых (форм. 7).

$$\varepsilon = \varepsilon_{f_1} + \varepsilon_{f_2} + \varepsilon_{f_3} \tag{7}$$

Приведём вычисления соответствующей погрешности площади фигуры для заданных вариантом кривых. Так как намереваемся сравнить итоговый ответ с $\varepsilon = 0.001$, будем округлять значения вычисленных интегралов до 5 знаков после запятой (форм. 8).

$$\begin{aligned}\varepsilon_{f_1} &= max(\int_{x_1-\varepsilon_1}^{x_1} f_1\,dx + \int_{x_2}^{x_2+\varepsilon_1} f_1\,dx, \int_{x_1}^{x_1+\varepsilon_1} f_1\,dx + \int_{x_2-\varepsilon_2}^{x_2} f_1) + \varepsilon_2 = \\ &= max(0.00017 + 0.00017, 0.00007 + 0.00007) + 0.00005 = 0.00039 \\ \\ \varepsilon_{f_2} &= max(\int_{x_1-\varepsilon_1}^{x_1} f_2\,dx + \int_{x_2}^{x_2+\varepsilon_1} f_2\,dx, \int_{x_1}^{x_1+\varepsilon_1} f_2\,dx + \int_{x_2-\varepsilon_2}^{x_2} f_2) + \varepsilon_2 = \\ &= max(0.00002 + 0.00002, 0.00007 + 0.00007) + 0.00005 = 0.00019 \\ \\ \varepsilon_{f_3} &= max(\int_{x_1-\varepsilon_1}^{x_1} f_3\,dx + \int_{x_2}^{x_2+\varepsilon_1} f_3\,dx, \int_{x_1}^{x_1+\varepsilon_1} f_3\,dx + \int_{x_2-\varepsilon_2}^{x_2} f_3) + \varepsilon_2 = \\ &= max(0.00017 + 0.00017, 0.00002 + 0.00002) + 0.00005 = 0.00039 \\ \\ \varepsilon &= \varepsilon_{f_1} + \varepsilon_{f_2} + \varepsilon_{f_3} = 0.00039 + 0.00019 + 0.00039 = 0.00097 < 0.001\end{aligned} \tag{8}$$

Значение погрешности получилось меньше точности, требуемой условием задачи, значит данные значения ε_1 и ε_2 обеспечивают необходимую точность.

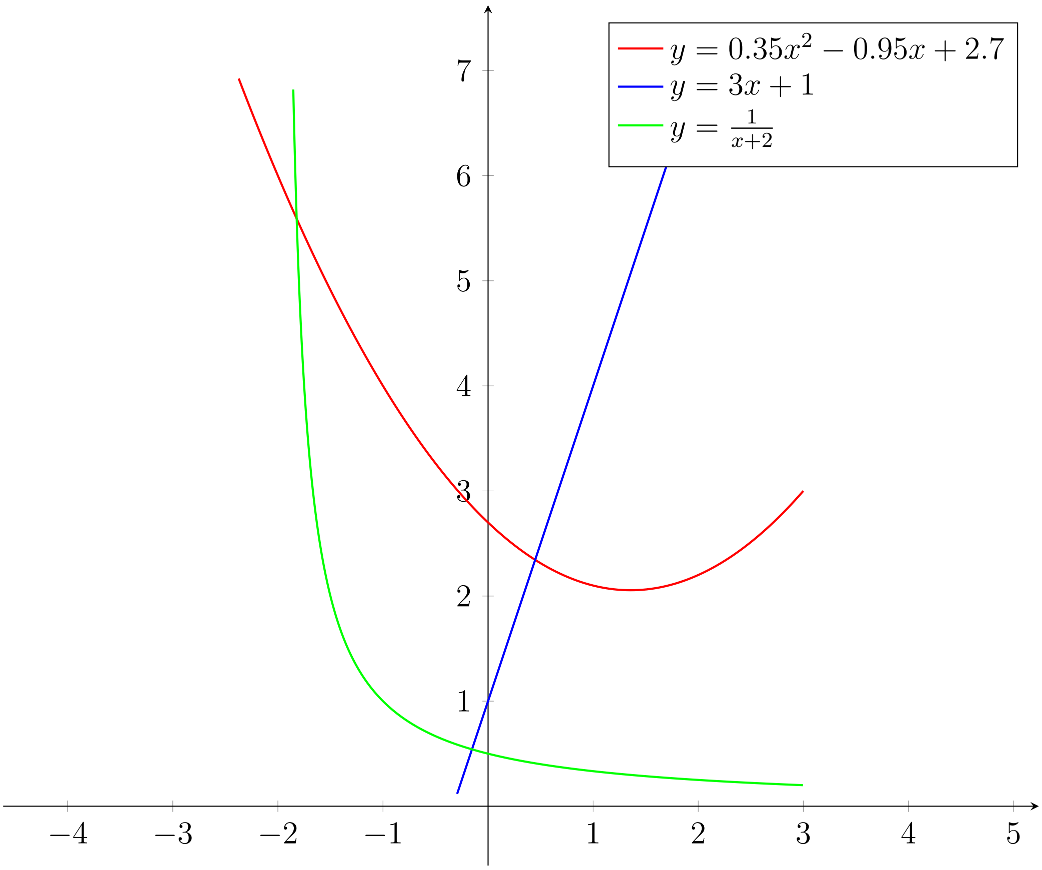

Рис. 1: Плоская фигура, ограниченная графиками заданных уравнений

3. Результаты экспериментов

В результате вычисления вершин фигуры, ограниченной тремя кривыми, были получены координаты точек пересечения кривых, представленные в таблице (таблица 1).

Кривые	x	y
f_1 и f_2	0.448174	2.344536
f_2 и f_3	-0.152870	0.541389
f_1 и f_3	-1.821132	5.590858

Таблица 1: Координаты точек пересечения

Полученная площадь плоской фигуры, ограниченной тремя кривыми равна 5.120187. Данный результат также отображен в графике (рис. 2).

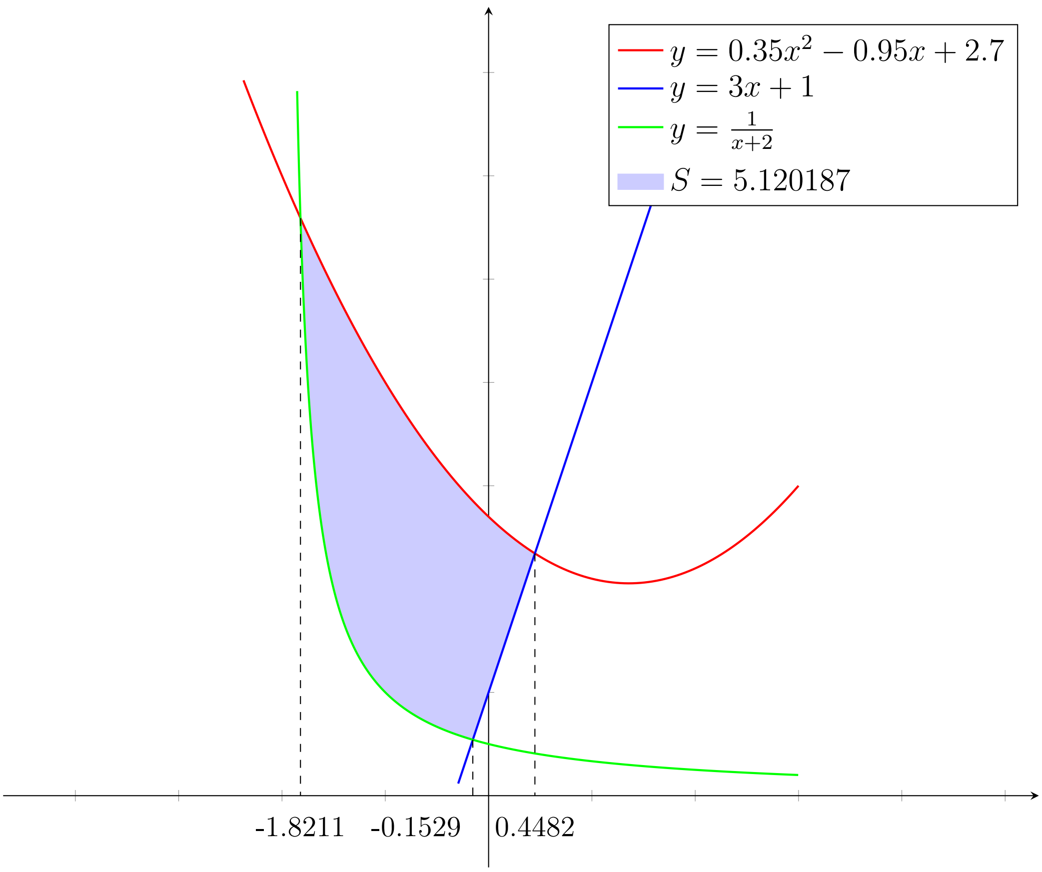

Рис. 2: Плоская фигура, ограниченная графиками заданных уравнений

4. Структура программы и спецификация функций

Список модулей:

1. `integral.c` - модуль программы на языке Си, содержащий в себе функции, реализующие логику работы программы.

2. `functions.asm` - модуль программы на языке Ассемблера, содержащий функции, вычисляющие значения f_1, f_2, f_3, соответствующие заданным условием кривым, а также f_4, f_5, f_6, f_7, используемые в процессе тестирования корректности работа функций `root` и `integral`.

Список функций модуля `integral.c` и описание функциональности:

1. `double root (double *f(double), double *f(double), double a, double b, double eps1, int *iteration_counter_p)` - вычисляет корень x уравнения $f(x) = g(x)$ на отрезке $[a, b]$ с точностью `eps1` методом деления отрезка пополам. В случае, если `iteration_counter_p` не равен `NULL`, записывает по адресу `iteration_counter_p` число итераций, потребовавшееся для вычисления корня.

2. `double integral(double *f(double), double a, double b, double eps2)` - вычисляет величину определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ с точностью `eps2` методом прямоугольников. Для достижения необходимой точности используется правило Рунге и последовательный вызов функции `compute_integral`.

3. `double compute_integral(double *f(double), double a, double b, int n)` - вычисляет величину определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ методом прямоугольников с разбиением отрезка интегрирования на `n` элементарных отрезков.

4. `int test_root(const char *argstr)` - тестирует функцию `root` на основе переданного аргумента `argstr`, который имеет вид `F1:F2:A:B:E:R`, где `F1` и `F2` - номера функций, `A` и `B` - левая и правая границы поиска корня соответственно (параметры `a` и `b`), `E` - допустимая погрешность (параметр `eps1`), `R` - правильный ответ. Функция запускает `root` с заданными параметрами, выводит на поток `stdout` полученный результат, абсолютную и относительную ошибку. В случае ошибки парсинга параметра `argstr` возвращает 1, при успешном выполнении возвращает 0.

5. `int test_integral(const char *argstr)` - тестирует функцию `integral` на основе переданного аргумента `argstr`, который имеет вид `F:A:B:E:R`, где `F` - номер функции, `A` и `B` - левая и правая границы интегрирования соответственно (параметры `a` и `b`), `E` - допустимая погрешность (параметр `eps2`), `R` - правильный ответ. Функция запускает `integral` с заданными параметрами, выводит на поток `stdout` полученный результат, абсолютную и относительную ошибку. В случае ошибки парсинга параметра `argstr` возвращает 1, при успешном выполнении возвращает 0.

6. `int main(int argc, char *argv[])` - основная функция программы. Реализует разбор ключей командной строки посредством функции `getopt_long` библиотеки `<getopt.h>` с последующим вызовом соответствующих функций программы.

Список функций модуля `functions.asm` и описание функциональности:

1. `f1` (Си прототип: `double f1(double)`) - вычисляет значение f_1 в заданной точке, т.е. вычисляет выражение $y = 0.35x^2 - 0.95x + 2.7$.

2. `f2` (Си прототип: `double f2(double)`) - вычисляет значение f_2 в заданной точке, т.е. вычисляет выражение $y = 3x + 1$.

3. `f3` (Си прототип: `double f3(double)`) - вычисляет значение f_3 в заданной точке, т.е. вычисляет выражение $y = \frac{1}{(x+2)}$.

4. `f4` (Си прототип: `double f4(double)`) - вычисляет выражение $y = x^2 - 4$.

5. `f5` (Си прототип: `double f5(double)`) - вычисляет выражение $y = 4x + 1$.

6. `f6` (Си прототип: `double f6(double)`) - вычисляет выражение $y = 12$.

7. `f7` (Си прототип: `double f7(double)`) - вычисляет выражение $y = x^4 + 2x^2$.

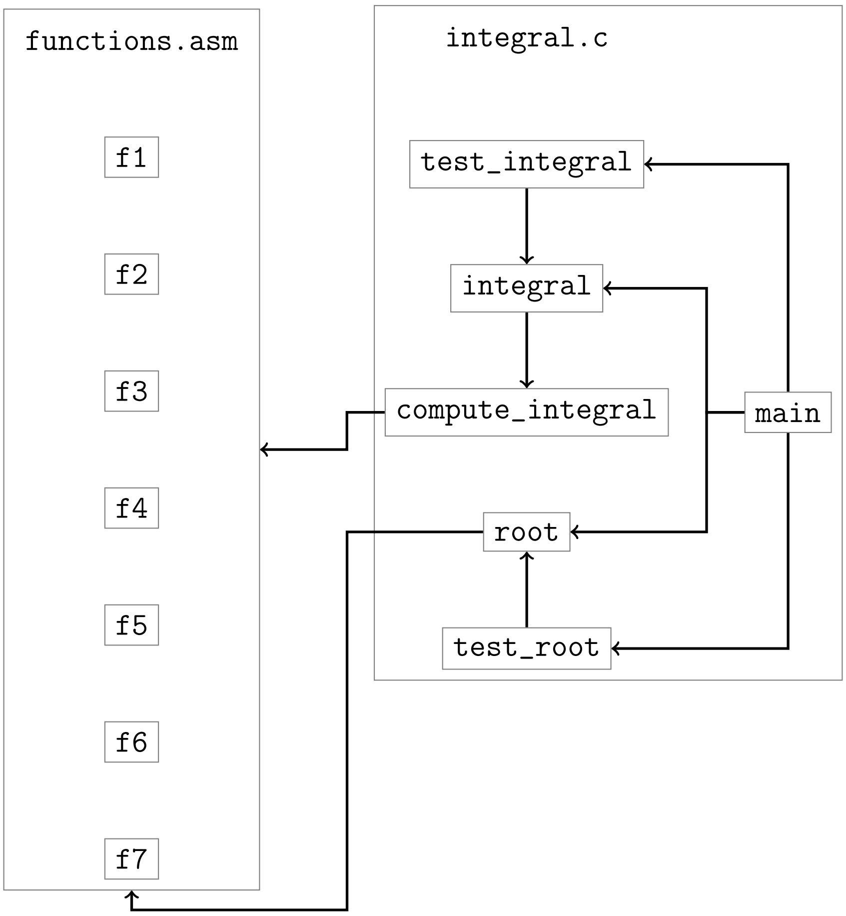

Рис. 3: Диаграмма связей модулей `functions.asm` и `integral.c` и их функций

5. Сборка программы (Make-файл)

Список целей и их зависимостей (рис. 4), представленных в файле Makefile (рис. 5):

1. `all` - полностью собирает программу, зависит от исполняемого файла `integral`.

2. `integral` - собирает исполняемый файл `integral`, зависит от Си-файла `integral.c` и объектного файла `functions.o`.

3. `functions.o` - ассемблирует файл `functions.asm` (единственная зависимость), получая объектный файл с функциями для работы программы.

4. `test` - тестирует поиск корня и вычисление интегралов, зависит от цели `all`.

5. `clean` - удаляет временные объектные файлы из текущей директории.

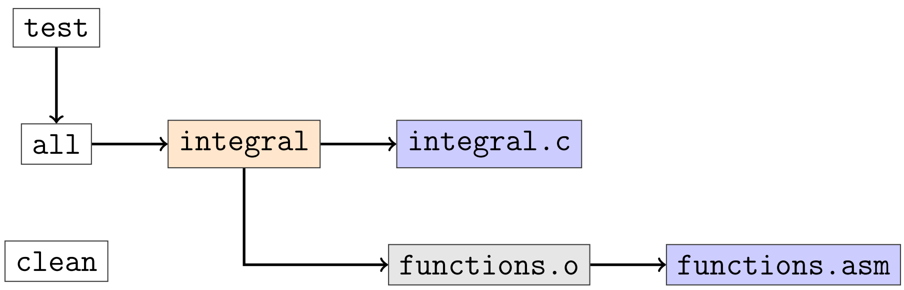

Рис. 4: Диаграмма зависимостей между модулями программы

```
NASM = nasm
ASMFLAGS += -g -f elf32
CFLAGS ?= -O2 -g
CFLAGS += -std=gnu99
CFLAGS += -Wall -Werror -Wformat-security -Wignored-qualifiers \
    -Winit-self -Wswitch-default -Wpointer-arith -Wtype-limits \
    -Wempty-body -Wstrict-prototypes -Wold-style-declaration \
    -Wold-style-definition -Wmissing-parameter-type \
    -Wmissing-field-initializers -Wnested-externs \
    -Wstack-usage=4096 -Wmissing-prototypes -Wfloat-equal \
    -Wabsolute-value
CFLAGS += -fsanitize=undefined -fsanitize-undefined-trap-on-error
CC += -m32 -no-pie -fno-pie
LDLIBS = -lm
.PHONY: all clean test

all: integral

integral: integral.c functions.o
	$(CC) $(CFLAGS) -o $@ $^ $(LDLIBS)

functions.o: functions.asm
	$(NASM) $(ASMFLAGS) $< -o $@

test: all
	./integral --test-root 4:5:3.0:6.0:0.0001:5.0
	./integral --test-root 4:6:-5.0:-3.0:0.0001:-4.0
	./integral --test-root 5:6:1.0:4.0:0.0001:2.75

	./integral --test-integral 4:-1.0:2.0:0.0001:-9.0
	./integral --test-integral 5:5.0:6.0:0.0001:23.0
	./integral --test-integral 7:0.0:3.0:0.00001:66.6

clean:
	rm -rf *.o
```

Рис. 5: Текст файла Makefile

6. Отладка программы, тестирование функций

При тестировании функции `root` (Табл. 2) были использованы функции:

1. $f(x) = x^2 - 4, g(x) = 4x + 1$, поиск корня на отрезке $[3 : 6]$ с точностью $\varepsilon_1 = 0.0001$ (Форм. 9).

2. $f(x) = x^2 - 4, g(x) = 12$, поиск корня на отрезке $[-5 : 3]$ с точностью $\varepsilon_1 = 0.0001$ (Форм. 10).

3. $f(x) = 4x + 1, g(x) = 12$, поиск корня на отрезке $[1 : 4]$ с точностью $\varepsilon_1 = 0.0001$ (Форм. 11).

$f(x)$	$g(x)$	$[a : b]$	ε_1	$x_{correct}$	$x_{calculated}$	ε_{abs}	ε_{rel}
$x^2 - 4$	$4x + 1$	$[3 : 6]$	0.0001	5.0	5.000015	0.000015	0.000003
$x^2 - 4$	12	$[-5 : -3]$	0.0001	-4.0	-4.000031	-0.000031	0.000008
$4x + 1$	12	$[1 : 4]$	0.0001	2.75	2.749985	-0.000015	-0.000006

Таблица 2: Тестирование функции `root`

$$f(x) - g(x) = x^2 - 4x - 5 = 0,\ x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} = -1, 5\ (5 \in [3 : 6]) \tag{9}$$

$$f(x) - g(x) = x^2 - 16 = 0,\ (x - 4)(x + 4) = 0,\ x = -4, +4\ (-4 \in [-5 : -3]) \tag{10}$$

$$f(x) - g(x) = 4x - 11 = 0,\ x = \frac{11}{4} = 2.75 \tag{11}$$

При тестировании функции `integral` (Табл. 3) были использованы функции:

1. $f(x) = x^2 - 4$, интегрирование по отрезку $[-1 : 2]$ с точностью $\varepsilon_1 = 0.0001$ (Форм. 12).

2. $f(x) = 4x + 1$, интегрирование по отрезку $[5 : 6]$ с точностью $\varepsilon_1 = 0.0001$ (Форм. 13).

3. $f(x) = x^4 + 2x^2$, интегрирование по отрезку $[0 : 3]$ с точностью $\varepsilon_1 = 0.0001$ (Форм. 14).

$f(x)$	$[a : b]$	ε_2	$x_{correct}$	$x_{calculated}$	ε_{abs}	ε_{rel}
$x^2 - 4$	$[-1 : 2]$	0.0001	-9.0	-9.000034	-0.000034	0.000004
$4x + 1$	$[5 : 6]$	0.0001	23.0	23.000000	0.000000	0.000000
$x^4 + 2x^2$	$[0 : 3]$	0.0001	66.6	66.599997	-0.000003	-0.000000

Таблица 3: Тестирование функции `integral`

$$\int_{-1}^{2} (x^2 - 4)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 4x\right)\Bigg|_{-1}^{2} = -9 \tag{12}$$

$$\int_{5}^{6} (4x + 1)dx = (2x^2 + x)\Big|_{5}^{6} = 23 \tag{13}$$

$$\int_{0}^{3} (x^4 + 2x^2)dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{3} = 66.6 \tag{14}$$

7. Анализ допущенных ошибок

В процессе разработки программы была допущена выбора погрешностей ε_1 и ε_2, которая была решена проверкой получаемой итоговой погрешности.

Также изначально были выбраны тестовые функции, точное аналитическое вычисление корня для которых является не простой для человека задачей. Они были были заменены на более подходящие функции.

Список литературы

[1] Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Т. 1 — Москва: Наука, 1985.