Тема: «Итерационные методы решения систем линейных уравнений. Метод Якоби (простых итераций) и Зейделя. Сходимость».

Метод простых итераций(метод Якоби)

Пусть система линейных уравнений (1) каким либо образом приведена к виду

$$x = Cx + d \tag{1}$$

где C – некоторая матрица, а d – вектор-столбец.

Выберем произвольно вектор начальных приближений $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ и построим итерационный процесс: $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + d, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

Или, в развернутой форме:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = c_{11} \cdot x_1^{(k)} + c_{12} \cdot x_2^{(k)} + \ldots + c_{1n} \cdot x_n^{(k)} + d_1 \\ x_2^{(k+1)} = c_{21} \cdot x_1^{(k)} + c_{22} \cdot x_2^{(k)} + \ldots + c_{2n} \cdot x_n^{(k)} + d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} = c_{n1} \cdot x_1^{(k)} + c_{n2} \cdot x_2^{(k)} + \ldots + c_{nn} \cdot x_n^{(k)} + d_n \end{cases} \tag{2}$$

Производя итерации, получим последовательность векторов $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \ldots, x^{(k)}, \ldots$

Теорема. Если элементы матрицы C удовлетворяют одному из условий

$$\sum_{j=1}^{n} \left| c_{ij} \right| \le \alpha < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{3 а}$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} \left| c_{ij} \right| \le \beta < 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \tag{3 б}$$

то процесс итераций сходится к точному решению системы x при *любом* начальном векторе $x^{(0)}$, т.е. $x = \lim_{k \to \infty} x^{(k)}$.

Т.о., точное решение системы получается лишь в результате бесконечного процесса и всякий вектор $x^{(k)}$ из полученной последовательности, является приближенным решением. Процесс итераций заканчивают, когда достигнута заданная точность: $\left| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right| < \varepsilon$.

Начальный вектор $x^{(0)}$ можно выбирать произвольно. Иногда берут $x^{(0)}=d$. Однако наиболее целесообразно в качестве вектора $x^{(0)}$ взять приближенное значение неизвестных, полученные грубой прикидкой.

Приведение системы к виду (2) можно осуществить различными способами. Важно только, чтобы выполнялось одно из условий (3 а) или (3 б).

Например: Если диагональные элементы матрицы А отличны от нуля, т.е. $a_{ii} \neq 0$ то систему (1) можно записать в виде:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}} \cdot \left(b_1 - a_{12} \cdot x_2 - a_{13} \cdot x_3 - \dots - a_{1n} \cdot x_n \right) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}} \cdot \left(b_2 - a_{21} \cdot x_1 - a_{23} \cdot x_3 - \dots - a_{2n} \cdot x_n \right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}} \cdot \left(b_n - a_{n1} \cdot x_1 - a_{n2} \cdot x_2 - \dots - a_{n-1,n-1} \cdot x_{n-1} \right) \end{cases}$$

В этом случае все элементы матрицы C определяются следующим образом: $c_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, \quad i \neq j$, $c_{ii} = 0$. Тогда условия (3 а) и (3 б) соответственно принимают вид:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \le \alpha < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{и} \quad \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \le \beta < 1, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Данные неравенства будут выполнены, если диагональные элементы матрицы А удовлетворяют условию: $\left| a_{ii} \right| > \sum_{j \neq i} \left| a_{ij} \right|$, т.е. если модули диагональных коэффициентов для каждого уравнения системы больше суммы модулей всех остальных коэффициентов (не считая свободных членов).

Пример. Требуется найти решение системы с точностью ε=0,001.

$$\begin{cases} x_1 + 5 \cdot x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 \quad\quad 2 \cdot x_3 = -1 \\ 2 \cdot x_1 - x_2 - 3 \cdot x_3 = 5 \end{cases}$$

Приведем систему к новому, **каноническому виду** метода простых итераций. Для этого нужно преобразовать исходную систему так, чтобы в каждой строке новой матрицы А коэффициент, расположенный на главной диагонали, превышал по абсолютной величине сумму абсолютных значений остальных коэффициенты в этой сроке.

При выполнении эквивалентных линейных преобразований системы нужно соблюдать следующие требование: каждое уравнение исходной системы должно участвовать хотя бы в одном преобразовании.

В первом уравнении исходной системы коэффициент при x_2 больше суммы модулей других коэффициентов: 5> 1+1. Поэтому это уравнение в новой системе нужно записать вторым уравнением. Для получения нового первого уравнения можно второе уравнение умножить на 2 и сложить с третьим уравнением. Для получения нового третьего уравнения можно из третьего уравнения вычесть второе.

В итоге описанных преобразований получиться следующая система:

$$\begin{cases} \underline{4}x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + \underline{5}x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - \underline{5}x_3 = 6 \end{cases}$$

Важно отметить, что подобные преобразования не меняют решения системы.

Выразим явно из каждого <u>нового</u> уравнения очередное неизвестное – получим формулы итерационного процесса.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}(3 + x_2 - x_3) \\ x_2 = \frac{1}{5}(2 - x_1 + x_3) \\ x_3 = -\frac{1}{5}(6 - x_1 + x_2) \end{cases} \qquad (*)$$

Возьмем <u>любое начальное</u> приближение $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$, например $x_1^{(0)} = 0,\ x_2^{(0)} = 0,\ x_3^{(0)} = 0$.

Вычислим новое приближение решения $X^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})$, подставив в правую часть (*) начальное приближение:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(3 + x_2^{(0)} - x_3^{(0)}) = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{5}(2 - x_1^{(0)} + x_3^{(0)}) = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

$$x_3^{(1)} = -\frac{1}{5}(6 - x_1^{(0)} + x_2^{(0)}) = -\frac{6}{5} = -1{,}2$$

Оценим достигнутую точность δ по формуле:

$$\delta = \max_{i=1,3}\left|x_i^{(1)} - x_i^{(0)}\right| = \max\left(\left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right|, \left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right|, \left|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}\right|\right) = \max(0{,}75; 0{,}4; 1{,}2) = 1{,}2$$

Итерационный процесс нужно продолжить, т.к. $\delta > \varepsilon$.

Вычислим второе приближение $X^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)})$, подставив в правую часть (*) первое приближение:

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{4}(3 + x_2^{(1)} - x_3^{(1)}) = \frac{1}{4}(3 + 0{,}4 + 1{,}2) = \frac{4{,}6}{4} = 1{,}15$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{5}(2 - x_1^{(1)} + x_3^{(1)}) = \frac{1}{5}(2 - 0{,}75 - 1{,}2) = \frac{0{,}05}{5} = 0{,}01$$

$$x_3^{(2)} = -\frac{1}{5}(6 - x_1^{(1)} + x_2^{(1)}) = -\frac{1}{5}(6 - 0{,}75 + 0{,}4) = -\frac{5{,}65}{5} = -1{,}13$$

$$\delta = \max_{i=1,3}\left|x_i^{(2)} - x_i^{(1)}\right| = \max(|1{,}15 - 0{,}75|; |0{,}01 - 0{,}4|; |-1{,}13 + 1{,}2|) = 0{,}4$$

Третье приближение:

$$x_1^{(3)} = \frac{1}{4}(3 + 0,01 + 1,13) = \frac{4,14}{4} = 1,0350$$

$$x_2^{(3)} = \frac{1}{5}(2 - 1,15 - 1,13) = -\frac{0,28}{5} = -0,056$$

$$x_3^{(3)} = -\frac{1}{5}(6 - 1,15 + 0,01) = -\frac{4,86}{5} = -0,972 \qquad \delta = 0,158$$

Четвертое приближение:

$x_1^{(4)} = 1,007$, $x_2^{(4)} = -0,0014$, $x_3^{(4)} = -0,9818$, $\delta = 0,0546$

Очевидно, что итерационный процесс сходиться, т.к. значение δ монотонно убывает. Для достижения требуемой точности ε=0,001 потребуется еще несколько итераций.

Скорость сходимости зависит от уровня преобладания значений диагональных коэффициентов.

<u>Основные расчетные зависимости метода простых итераций:</u>

Формула итерационного процесса:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij} \cdot x_j^{(k-1)}), \; i = \overline{1,n} \tag{4}$$

где: $k = 1, 2, \ldots$ – номер приближения.

$x_i^{(0)}$ – начальное приближение, $i = \overline{1,n}$;

Условия завершения итерационного процесса:

$$\delta \leq \varepsilon \tag{5}$$

где ε – требуемая точность;

δ – оценка достигнутой точности, $\delta = \max\limits_{i=1,n} \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right|$ (6)

или $\delta = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right|$ (7)

Условие сходимости итерационного процесса (условие преобладания диагональных коэффициентов):

$$\left| a_{ii} \right| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \left| a_{ij} \right| \quad \forall \quad i = \overline{1,n} \tag{8}$$

Если в полученных результатах значения $\delta > \varepsilon$ и $k > k_{max}$, то задача не решена, т.е. x(1:n) не является решением системы. Необходимо проверить условия сходимости или увеличить k_{max}.

Метод Зейделя

Метод Зейделя является модификацией метода простых итераций. Он заключается в том, что при вычислении *(k+1)*-ого приближения неизвестного x_i *(i>1)* используется уже вычисленные ранее *(k+1)*-ое приближение неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$. Т.е. вычисление по методу Зейделя ведутся по формулам:

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = c_{11}\cdot x_1^{(k)} + c_{12}\cdot x_2^{(k)} + \ldots + c_{1n}\cdot x_n^{(k)} + d_1 \\
x_2^{(k+1)} = c_{21}\cdot x_1^{(k+1)} + c_{22}\cdot x_2^{(k)} + \ldots + c_{2n}\cdot x_n^{(k)} + d_2 \\
x_2^{(k+1)} = c_{21}\cdot x_1^{(k+1)} + c_{22}\cdot x_2^{(k+1)} + \ldots + c_{2n}\cdot x_n^{(k)} + d_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_n^{(k+1)} = c_{n1}\cdot x_1^{(k+1)} + c_{n2}\cdot x_2^{(k+1)} + \ldots + c_{n-1,n-1}\cdot x_{n-1}^{(k+1)} + c_{nn}\cdot x_n^{(k)} + d_n
\end{cases}
$$

Условия сходимости метода Зейделя те же, что и для метода простых итераций. Однако, области сходимости методов лишь частично совпадают. В случаях, когда оба метода сходятся, метод Зейделя дает лучшую сходимость, чем метод простых итераций.

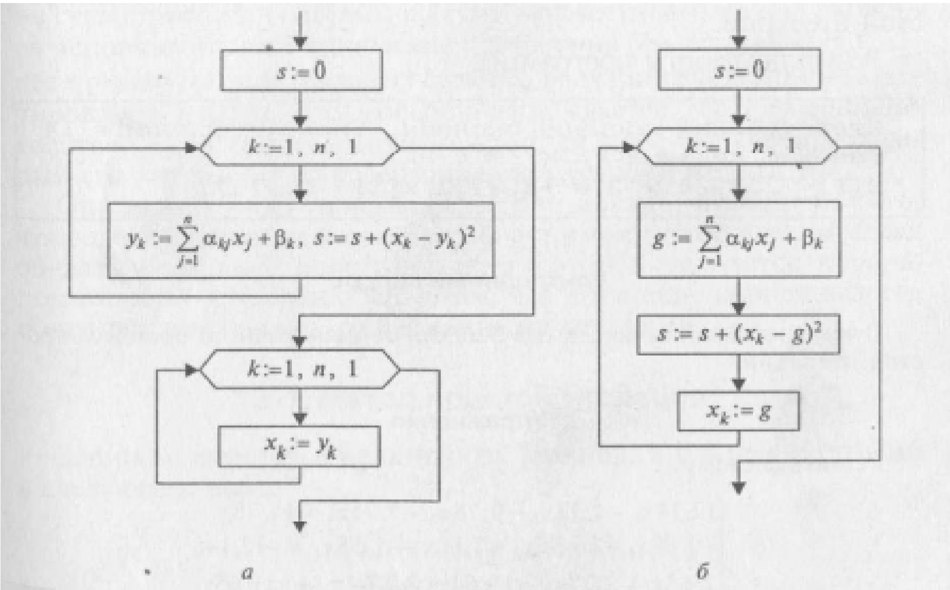

Рис. 3.5. Фрагмент алгоритма метода простой итерации, показанного на рис. 3.4 (*а*); модификация того же фрагмента, превращающая алгоритм на рис. 3.4 в алгоритм метода Зейделя (*б*)

Упражнения:

Решить СЛАУ с помощью 2-х заданных итерационных методов. Вывести значение решения, график зависимости нормы невязки от номера итерации и его значение, при котором достигнута заданная точность. Выполнить задание для различных значений начального приближения.

1) Метод Якоби;

2) Метод Зейделя.

$$
\begin{cases}
12{,}14x_1 + 1{,}32x_2 - 0{,}78x_3 - 2{,}75x_4 = 14{,}78; \\
-0{,}89x_1 + 16{,}75x_2 + 1{,}88x_3 - 1{,}55x_4 = -12{,}14; \\
2{,}65x_1 - 1{,}27x_2 - 15{,}64x_3 - 0{,}64x_4 = -11{,}65; \\
2{,}44x_1 + 1{,}52x_2 + 1{,}93x_3 - 11{,}43x_4 = 4{,}26
\end{cases}
$$