Лабораторная работа № 6

Численное интегрирование

Тема: Приближенное вычисление определенного интеграла с помощью квадратурных формул.

$J=\int_a^b f(x)\,dx = J_n + R_n$, где $J_n=\sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$, R_n - остаточный член (погрешность).

Задание

Для заданной функции $f(x)$ на промежутке $[a,b]$:

1. Вычислить значение интеграла *J* с помощью встроенной функции MathCAD
2. Вычислить значения J_n для различных значений $n=2^k, k=1,\dots,10$ по заданной квадратурной формуле.
3. Вычислить абсолютные величины разностей значений интеграла, полученных в пунктах 1 и 2.
4. Оценить по методу Рун е погрешности R_n значений интеграла, полученных в пункте 2.
5. На основании отношений этих величин $\frac{R_{n-1}}{R_n}$ оценить скорость сходимости квадратурной формулы и сравнить с теоретической.
6. Вычислить приближенное значение *J* по квадратурной формуле Гаусса при заданном количестве узлов
7. Вычислить абсолютную величину разности значений интеграла, полученных в пунктах 1 и 6
8. Сравнивая результаты пунктов 3 и 7, определить примерное число узлов n , необходимое для вычисления J_n по квадратурной формуле из пункта 2 с той же точностью, что и в пункте 6.
9. Проанализировать полученные результаты и сделать выводы

Для пункта 2 варианты квадратурных формул

1) обобщенная формула левых прямоугольников
2) обобщенная формула правых прямоугольников
3) обобщенная формула средних прямоугольников
4) обобщенная формула трапеций
5) обобщенная формула парабол

Для пункта 6 варианты количества узлов

1) 2
2) 4
3) 6
4) 5
5) 3

Узлы и коэффициенты квадратурной формулы Гаусса,

имеющей для промежутка $[a,b]$ вид

$$(b-a)\cdot\sum_{i=1}^{n} C_i \cdot f(z_i)\text{, где } z_i = a+(b-a)\cdot x_i$$

$n = 1$	$x_1 = 0.5$	$C_1 = 1$
$n = 2$	$x_1 = 0.21132487$	$C_1 = 1/2$
	$x_2 = 0.78867513$	$C_2 = 1/2$
$n = 3$	$x_1 = 0.11270167$	$C_1 = 5/18$
	$x_2 = 0.5$	$C_2 = 5/9$
	$x_3 = 0.88729833$	$C_3 = 5/18$
$n = 4$	$x_1 = 0.06943184$	$C_1 = C_4 = 0.17392742$
	$x_2 = 0.33000948$	
	$x_3 = 0.66999052$	$C_2 = C_3 = 0.32607258$
	$x_4 = 0.93056815$	
$n = 5$	$x_1 = 0.04691008$	$C_1 = C_5 = 0.11846344$
	$x_2 = 0.23076534$	
	$x_3 = 0.5$	$C_2 = C_4 = 0.23931433$
	$x_4 = 0.76923466$	
	$x_5 = 0.95308992$	$C_3 = 0.28444444$
$n = 6$	$x_1 = 0.03376524$	$C_1 = C_6 = 0.08566225$
	$x_2 = 0.16939531$	
	$x_3 = 0.38069041$	$C_2 = C_5 = 0.18038079$
	$x_4 = 0.61930959$	
	$x_5 = 0.83060469$	
	$x_6 = 0.96623475$	$C_3 = C_4 = 0.23395697$

Варианты функций и промежутков

Номер варианта	$f(x)$	a	b	Номер варианта	$f(x)$	a	b
1	$\ln x - \frac{1}{x^2}$	1	6	2	$\ln x - \frac{7}{2\cdot x+6}$	1	7
3	$2\cdot\ln x - \frac{x}{2}+1$	1	7	4	$e^{-x}-(x-1)^2$	-3	3
5	$\frac{1-x}{x} - \pi\cdot\cos(\pi\cdot x)$	1	5	6	$e^x + x^2 - 10$	0	3
7	$ctgx - x^2$	0.5	1.4	8	$e^x - 2\cdot(x-2)^2$	0	3
9	$tg\frac{\pi}{4}\cdot x - x - 2$	0.5	1.5	10	$e^x + 2\cdot x^2 - 3$	-2	2
11	$\sqrt{x} - 2\cdot\sin\frac{\pi}{2}\cdot x$	0	6	12	$e^{-x} - \sqrt{x-1}$	1	6
13	$\sqrt{x} - \cos\frac{x}{2}$	0	8	14	$2\cdot\sin(3\cdot x) - 1,5\cdot x$	-1	2
15	$2\cdot\ln x - \frac{1}{x}$	1	6	16	$2\cdot e^{-x} - \frac{x}{2}$	-3	3
17	$x - 3\cdot\cos^2 x$	-2	3	18	$\ln(2x) - 0.5\cdot x + 2$	1	10
19	$x^4 - \sqrt{x+1} - 3$	-1	2	20	$x\cdot\ln x - \frac{3}{x}$	1	5
21	$tg\frac{3}{4}\cdot x - x^2 - 4$	0.2	2	22	$e^{-x} + 5(x-1)^2$	-2	3
23	$e^{1-x} + x^2 - 5$	-2	3	24	$\sqrt{x+1} - 2\cos\frac{x}{2}$	0	5
25	$2\cdot\sin(2\cdot x) - x^2$	0	3	26	$\sqrt{2x} - \cos\frac{x}{3}$	0	6
27	$e^{x-1} + 2x^2 - 7$	-3	2	28	$2e^{-x} - (x+1)^2$	-3	3
29	$tg(x) - 2\cdot(x+1)$	-1	1	30	$tg(2,5\cdot x) - 5\cdot x$	-0.2	0.5

В приложении приведена копия MathCAD-документа, в котором для заданной функции приводятся результаты вычисления определенного интеграла функцией MathCAD и по квадратурной формуле трапеций для различного числа узлов. Вычисляется оценка погрешности по методу Рунге и определяется скорость сходимости, характеризуемая уменьшением погрешности при уменьшении шага квадратурной формулы в два раза. Полученные результаты соответствуют теоретической оценке.

Приложение содержит пример вычисления интеграла по квадратурной формуле Гаусса.