Лабораторная работа 3 "Нахождение собственных значений матрицы"
Гордеев Никита, группа 22307, вариант 7

! Начальные данные

$$D := \begin{bmatrix} 1.342 & 0.432 & -0.599 & 0.202 \\ 0.432 & 1.342 & 0.256 & -0.599 \\ -0.599 & 0.256 & 1.342 & 0.532 \\ 0.202 & -0.599 & 0.532 & 1.342 \end{bmatrix}$$ *матрица*

$$C := \begin{bmatrix} 0.05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.03 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.04 \end{bmatrix}$$ *матрица*

$$A := D + 7\ C = \begin{bmatrix} 1.692 & 0.432 & -0.599 & 0.202 \\ 0.432 & 1.552 & 0.256 & -0.599 \\ -0.599 & 0.256 & 1.482 & 0.532 \\ 0.202 & -0.599 & 0.532 & 1.622 \end{bmatrix}$$ *матрица*

1) Нахождение собственных чисел и собственных векторов матрицы A

$$L := \mathrm{eigenvals}(A) = \begin{bmatrix} 2.444 \\ 1.945 \\ 1.691 \\ 0.268 \end{bmatrix}$$ *вектор, содержащий собственные значения матрицы*

$$W := \mathrm{eigenvecs}(A) = \begin{bmatrix} 0.515 & 0.601 & -0.412 & 0.452 \\ 0.464 & -0.433 & -0.593 & -0.495 \\ -0.49 & -0.378 & -0.564 & 0.547 \\ -0.529 & 0.555 & -0.4 & -0.502 \end{bmatrix}$$ *матрица, содержащая нормированные собственные вектора*

2) Поиск степенным методом наибольшего по модулю собственного числа матрицы и соответствующего нормированного собственного вектора

$n := 70$ *число итераций*

$k := 0..n$ *номер итерации*

$$y^{\langle 0 \rangle} := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ *начальный приближенный собственный вектор*

$y^{\langle k+1 \rangle} := A \cdot y^{\langle k \rangle}$ *новый приближённый вектор*

$$\lambda 1 := \frac{\left(y^{\langle n+1 \rangle}\right)_0}{\left(y^{\langle n \rangle}\right)_0} = 2.444$$ *наибольшее по модулю собственное число матрицы*

$$y^{\langle n+1\rangle} := \frac{y^{\langle n+1\rangle}}{\left|y^{\langle n+1\rangle}\right|}$$ *новый приближенный собственный вектор после нормирования*

$$y^{\langle n+1\rangle} = \begin{bmatrix} -0.515 \\ -0.464 \\ 0.49 \\ 0.529 \end{bmatrix}$$ *наибольшее по модулю собственный вектор матрицы*

$$A \cdot y^{\langle n+1\rangle} - \lambda 1 \cdot y^{\langle n+1\rangle} = \begin{bmatrix} 6.108 \cdot 10^{-8} \\ 4.411 \cdot 10^{-7} \\ -1.347 \cdot 10^{-7} \\ -5.274 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix}$$ *невязка полученного приближения*

3) Нахождение собственных чисел и собственных векторов матрицы методом вращений

i - номер строки, j - номер столбца максимального по модулю элемента матрицы А, расположенного выше главной диагонали

$$f(i,j,A) := \text{if}\left(\left(A_{i,i} \neq A_{j,j}\right), 0.5 \cdot \text{atan}\left(\frac{2 \cdot A_{i,j}}{\left(A_{i,i} - A_{j,j}\right)}\right), \frac{\pi}{4}\right)$$ угол матрицы вращения

$c(i,j,A) := \cos(f(i,j,A))$ *косинус для обновления значения элемента матрицы A(i, j)*

$s(i,j,A) := \sin(f(i,j,A))$ *синус для обновления значения элемента матрицы A(i, j)*

$$t(i,j,A) := \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} \left(A_{i,j}\right)^2 - \sum_{i=0}^{3} \left(A_{i,i}\right)^2$$ *сумма для вычисления нового значения элемента*

Итерация 1

$i := 0$ $j := 2$

$V := \text{identity}(4)$ *1-я матрица 4 х 4* $U := \text{identity}(4)$ *1-я матрица 4 х 4*

$U_{i,i} := c(i,j,A)$ *матрица U, косинус угла* $U_{j,j} := c(i,j,A)$ *матрица U, косинус угла*

$U_{i,j} := -s(i,j,A)$ *матрица U, синус угла* $U_{j,i} := s(i,j,A)$ *матрица U, синус угла*

$A := U^{T} \cdot A \cdot U$ *умножение матрицы* $V := V \cdot U$ *умножение матрицы*

$t(i,j,A) = 1.87$ *мера отличия матрицы А от диагонального вида*

$$A=\begin{bmatrix} 2.1951332 & 0.1661398 & 0 & -0.1874917 \\ 0.1661398 & 1.552 & 0.4738751 & -0.599 \\ 1.110223\cdot 10^{-16} & 0.4738751 & 0.9788668 & 0.5372847 \\ -0.1874917 & -0.599 & 0.5372847 & 1.622 \end{bmatrix}$$

Итерация 2

$i:=1$ $\quad j:=3$ $\quad U:=\mathrm{identity}(4)$

$U_{i,i}:=c(i,j,A)$ $\quad U_{i,j}:=-s(i,j,A)$ $\quad U_{j,i}:=s(i,j,A)$ $\quad U_{j,j}:=c(i,j,A)$

$A:=U^{\mathrm{T}}\cdot A\cdot U$ $\quad V:=V\cdot U$ $\quad t(i,j,A)=1.152$

$$A=\begin{bmatrix} 2.1951332 & -0.0077956 & 0 & -0.2503893 \\ -0.0077956 & 0.9869783 & 0.7133852 & 1.110223\cdot 10^{-16} \\ 1.110223\cdot 10^{-16} & 0.7133852 & 0.9788668 & 0.0656805 \\ -0.2503893 & 2.220446\cdot 10^{-16} & 0.0656805 & 2.1870217 \end{bmatrix}$$

Итерация 3

$i:=1$ $\quad j:=2$ $\quad U:=\mathrm{identity}(4)$

$U_{i,i}:=c(i,j,A)$ $\quad U_{i,j}:=-s(i,j,A)$ $\quad U_{j,i}:=s(i,j,A)$ $\quad U_{j,j}:=c(i,j,A)$

$A:=U^{\mathrm{T}}\cdot A\cdot U$ $\quad V:=V\cdot U$ $\quad t(i,j,A)=0.134$

$$A=\begin{bmatrix} 2.1951332 & -0.0055279 & 0.0054966 & -0.2503893 \\ -0.0055279 & 1.6963193 & -2.220446\cdot 10^{-16} & 0.0463109 \\ 0.0054966 & -5.5511151\cdot 10^{-17} & 0.2695258 & 0.046575 \\ -0.2503893 & 0.0463109 & 0.046575 & 2.1870217 \end{bmatrix}$$

Итерация 4

$i:=0$ $\quad j:=3$ $\quad U:=\mathrm{identity}(4)$

$U_{i,i}:=c(i,j,A)$ $\quad U_{i,j}:=-s(i,j,A)$ $\quad U_{j,i}:=s(i,j,A)$ $\quad U_{j,j}:=c(i,j,A)$

$A:=U^{\mathrm{T}}\cdot A\cdot U$ $\quad V:=V\cdot U$ $\quad t(i,j,A)=0.009$

$$A=\begin{bmatrix} 2.4414996 & -0.0364209 & -0.0287477 & 0 \\ -0.0364209 & 1.6963193 & -2.220446\cdot 10^{-16} & 0.0291338 \\ -0.0287477 & -5.5511151\cdot 10^{-17} & 0.2695258 & 0.0370542 \\ -2.220446\cdot 10^{-16} & 0.0291338 & 0.0370542 & 1.9406553 \end{bmatrix}$$

Итерация 5

$i:=0$ $\quad j:=1$ $\quad U:=\mathrm{identity}(4)$

$U_{i,i} := c(i,j,A)$ $U_{i,j} := -s(i,j,A)$ $U_{j,i} := s(i,j,A)$ $U_{j,j} := c(i,j,A)$

$A := U^{T} \cdot A \cdot U$ $V := V \cdot U$ $t(i,j,A) = 0.006$

$$A = \begin{bmatrix} 2.4432754 & -1.3877788 \cdot 10^{-17} & -0.0287136 & -0.0014189 \\ 9.7144515 \cdot 10^{-17} & 1.6945435 & -0.0014 & 0.0290993 \\ -0.0287136 & -0.0014 & 0.2695258 & 0.0370542 \\ -0.0014189 & 0.0290993 & 0.0370542 & 1.9406553 \end{bmatrix}$$

Итерация 6

$i := 2$ $j := 3$ $U := \text{identity}(4)$

$U_{i,i} := c(i,j,A)$ $U_{i,j} := -s(i,j,A)$ $U_{j,i} := s(i,j,A)$ $U_{j,j} := c(i,j,A)$

$A := U^{T} \cdot A \cdot U$ $V := V \cdot U$ $t(i,j,A) = 0.003$

$$A = \begin{bmatrix} 2.4432754 & -1.3877788 \cdot 10^{-17} & -0.0286751 & -0.0020547 \\ 9.7144515 \cdot 10^{-17} & 1.6945435 & -0.0020444 & 0.0290611 \\ -0.0286751 & -0.0020444 & 0.2687046 & 0 \\ -0.0020547 & 0.0290611 & -1.179612 \cdot 10^{-16} & 1.9414765 \end{bmatrix}$$

Итерация 7

$i := 1$ $j := 3$ $U := \text{identity}(4)$

$U_{i,i} := c(i,j,A)$ $U_{i,j} := -s(i,j,A)$ $U_{j,i} := s(i,j,A)$ $U_{j,j} := c(i,j,A)$

$A := U^{T} \cdot A \cdot U$ $V := V \cdot U$ $t(i,j,A) = 0.002$

$$A = \begin{bmatrix} 2.4432754 & 0.000237 & -0.0286751 & -0.002041 \\ 0.000237 & 1.6911694 & -0.0020308 & 2.7755576 \cdot 10^{-17} \\ -0.0286751 & -0.0020308 & 0.2687046 & -0.0002358 \\ -0.002041 & 0 & -0.0002358 & 1.9448506 \end{bmatrix}$$

Итерация 8

$i := 0$ $j := 2$ $U := \text{identity}(4)$

$U_{i,i} := c(i,j,A)$ $U_{i,j} := -s(i,j,A)$ $U_{j,i} := s(i,j,A)$ $U_{j,j} := c(i,j,A)$

$A := U^{T} \cdot A \cdot U$ $V := V \cdot U$ $t(i,j,A) = 1.68 \cdot 10^{-5}$

$$A = \begin{bmatrix} 2.4436535 & 0.0002637 & 0 & -0.0020377 \\ 0.0002637 & 1.6911694 & -0.0020275 & 2.7755576 \cdot 10^{-17} \\ -1.2576745 \cdot 10^{-17} & -0.0020275 & 0.2683265 & -0.0002627 \\ -0.0020377 & 0 & -0.0002627 & 1.9448506 \end{bmatrix}$$

Итерация 9

$i:=0 \qquad j:=1 \qquad U:=\mathrm{identity}(4)$

$U_{i,i}:=c(i,j,A) \qquad U_{i,j}:=-s(i,j,A) \qquad U_{j,i}:=s(i,j,A) \qquad U_{j,j}:=c(i,j,A)$

$A:=U^{\mathrm{T}}\cdot A\cdot U \qquad V:=V\cdot U \qquad t(i,j,A)=1.666\cdot 10^{-5}$

$$A=\begin{bmatrix} 2.4436536 & 1.0842022\cdot 10^{-19} & -0.0000007 & -0.0020377 \\ 1.3801894\cdot 10^{-16} & 1.6911693 & -0.0020275 & 0.0000007 \\ -0.0000007 & -0.0020275 & 0.2683265 & -0.0002627 \\ -0.0020377 & 0.0000007 & -0.0002627 & 1.9448506 \end{bmatrix}$$

Итерация 9

$i:=0 \qquad j:=1 \qquad U:=\mathrm{identity}(4)$

$U_{i,i}:=c(i,j,A) \qquad U_{i,j}:=-s(i,j,A) \qquad U_{j,i}:=s(i,j,A) \qquad U_{j,j}:=c(i,j,A)$

$A:=U^{\mathrm{T}}\cdot A\cdot U \qquad V:=V\cdot U \qquad t(i,j,A)=1.666\cdot 10^{-5}$

$$A=\begin{bmatrix} 2.4436536 & 0 & -0.0000007 & -0.0020377 \\ 1.3791052\cdot 10^{-16} & 1.6911693 & -0.0020275 & 0.0000007 \\ -0.0000007 & -0.0020275 & 0.2683265 & -0.0002627 \\ -0.0020377 & 0.0000007 & -0.0002627 & 1.9448506 \end{bmatrix}$$

Сравнение полученных приближенных решений (собственные значения)

$$L=\begin{bmatrix} 2.4436619 \\ 1.9448423 \\ 1.6911722 \\ 0.2683236 \end{bmatrix}$$

вектор, содержащий собственные значения исходной матрицы

$$L\_New:=\mathrm{diag}(A)=\begin{bmatrix} 2.4436536 \\ 1.6911693 \\ 0.2683265 \\ 1.9448506 \end{bmatrix}$$

вектор, содержащий собственные значения новой матрицы

$L^{\langle 0\rangle}-L\_New^{\langle 0\rangle}=[0.0000083]$

$L^{\langle 1\rangle}-L\_New^{\langle 3\rangle}=[-0.0000083]$

$L^{\langle 2\rangle}-L\_New^{\langle 1\rangle}=[0.0000029]$

$L^{\langle 3\rangle}-L\_New^{\langle 2\rangle}=[-0.0000029]$

Сравнение полученных приближенных решений (собственные векторы)

$$W = \begin{bmatrix} 0.5148757 & 0.6007115 & -0.4124278 & 0.4516105 \\ 0.4641181 & -0.4329225 & -0.593318 & -0.4951225 \\ -0.489716 & -0.3784931 & -0.563506 & 0.5471583 \\ -0.5288437 & 0.5553979 & -0.4004223 & -0.5015171 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 0.517 & 0.413 & 0.451 & 0.599 \\ 0.462 & 0.593 & -0.496 & -0.435 \\ -0.491 & 0.564 & 0.546 & -0.376 \\ -0.527 & 0.4 & -0.502 & 0.557 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{|W|}^{\langle 0 \rangle} - \overrightarrow{|V|}^{\langle 0 \rangle} = \begin{bmatrix} -0.0024499 \\ 0.0017726 \\ -0.0015418 \\ 0.002273 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{|W|}^{\langle 2 \rangle} - \overrightarrow{|V|}^{\langle 1 \rangle} = \begin{bmatrix} -0.0006456 \\ 0.0007079 \\ -0.0007776 \\ 0.0007128 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{|W|}^{\langle 1 \rangle} - \overrightarrow{|V|}^{\langle 3 \rangle} = \begin{bmatrix} 0.0020394 \\ -0.0019725 \\ 0.002087 \\ -0.0020754 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{|W|}^{\langle 3 \rangle} - \overrightarrow{|V|}^{\langle 2 \rangle} = \begin{bmatrix} 0.0006822 \\ -0.000777 \\ 0.0007443 \\ -0.0006572 \end{bmatrix}$$