

## Лабораторная работа 6 "Численное интегрирование".

Гордеев Никита, группа 22307, вариант 7, обобщенная формула средних прямоугольников

ДАНО:

$$f(x) := \cot(x) - x^2$$

$$a := 0.5$$

$$b := 1.4$$

### ШАГ 1: ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ИНТЕГРАЛА I С ПОМОЩЬЮ ВСТРОЕННОЙ ФУНКЦИИ MATHCAD

$$I := \int_a^b f(x) dx = -0.152$$

### ШАГ 2: ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ИНТЕГРАЛА ПО ОБОБЩЕННОЙ ФОРМУЛЕ СРЕДНИХ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

$$k := 1 \dots 10$$

диапазона для переменной

$$n_k := 2^k$$

значений n в зависимости от k

$$h_k := \frac{b-a}{n_k}$$

шаг интегрирования h в зависимости от k

$$a_k := a + \frac{h_k}{2}$$

левой границы интервала от k

$$J_k := \sum_{i=0}^{n_k-1} \left( h_k \cdot f(a_k + i \cdot h_k) \right) = \begin{bmatrix} -0.162 \\ -0.155 \\ -0.153 \\ -0.153 \\ -0.153 \\ -0.153 \\ -0.152 \\ -0.152 \\ -0.152 \\ -0.152 \end{bmatrix}$$

значения интеграла J\_k

суммирование значений функции f на различных точках внутри каждого подинтервала, умноженных на соответствующий вес из вектора весов

### ШАГ 3: ВЫЧИСЛЕНИЕ АБСОЛЮТНЫХ ВЕЛИЧИН РАЗНОСТЕЙ ЗНАЧЕНИЙ ИНТЕГРАЛА

$$Z_k := |I - J_k| = \begin{bmatrix} 0.009 \\ 0.003 \\ 7.842 \cdot 10^{-4} \\ 1.994 \cdot 10^{-4} \\ 5.006 \cdot 10^{-5} \\ 1.253 \cdot 10^{-5} \\ 3.133 \cdot 10^{-6} \\ 7.832 \cdot 10^{-7} \\ 1.958 \cdot 10^{-7} \\ 4.895 \cdot 10^{-8} \end{bmatrix}$$

разности между точным значением интеграла I и приближенным значением J\_k

#### ШАГ 4: ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДОМ РУНГЕ

$$k := 2 \dots 10 \quad R_k := \frac{|J_k - J_{k-1}|}{3} \quad \text{относительная величина изменения между приближенными значениями}$$

$$R_k = \begin{bmatrix} 0.002 \\ 7.194 \cdot 10^{-4} \\ 1.95 \cdot 10^{-4} \\ 4.977 \cdot 10^{-5} \\ 1.251 \cdot 10^{-5} \\ 3.132 \cdot 10^{-6} \\ 7.832 \cdot 10^{-7} \\ 1.958 \cdot 10^{-7} \\ 4.895 \cdot 10^{-8} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{абсолютная} \\ \text{величина} \\ \text{разности} \end{matrix} \quad \frac{R_{k-1}}{R_k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.975 \\ 3.69 \\ 3.917 \\ 3.979 \\ 3.995 \\ 3.999 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Скорость} \\ \text{сходимости} \end{matrix}$$

#### ШАГ 5: ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ J ПО КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЕ ГАУССА

$$m := 1 \quad \text{кол-во узлов} \quad j := 0 \dots m-1 \quad a := 0.5 \quad b := 1.4$$

$$x := [0.5] \quad \text{узлы} \quad c := [1] \quad \text{коэффициенты}$$

$$z_j := a + (b-a) \cdot x_j = [0.95] \quad \text{узел интегрирования в формуле Гаусса}$$

$$G1 := (b-a) \cdot \sum_{j=0}^{m-1} (c_j \cdot f(z_j)) = -0.169 \quad \begin{matrix} \text{численное приближение} \\ \text{интеграла методом Гаусса} \end{matrix}$$

$$m := 2 \quad \text{кол-во узлов} \quad j := 0 \dots m-1 \quad a := 0.5 \quad b := 1.4$$

$$x := \begin{bmatrix} 0.21132487 \\ 0.78867513 \end{bmatrix} \quad \text{узлы} \quad c := \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad \text{коэффициенты}$$

$$z_j := a + (b-a) \cdot x_j = \begin{bmatrix} 0.69 \\ 1.21 \end{bmatrix} \quad \text{узел интегрирования в формуле Гаусса}$$

$$G2 := (b-a) \cdot \sum_{j=0}^{m-1} (c_j \cdot f(z_j)) = -0.158 \quad \begin{matrix} \text{численное приближение} \\ \text{интеграла методом Гаусса} \end{matrix}$$

$$m := 3 \quad \text{кол-во узлов} \quad j := 0 \dots m-1 \quad a := 0.5 \quad b := 1.4$$

$$x := \begin{bmatrix} 0.11270167 \\ 0.5 \\ 0.88729833 \end{bmatrix} \quad \text{узлы} \quad c := \begin{bmatrix} \frac{5}{18} \\ \frac{5}{9} \\ \frac{5}{18} \end{bmatrix} \quad \text{коэффициенты}$$

$$z_j := a + (b - a) \cdot x_j = \begin{bmatrix} 0.601 \\ 0.95 \\ 1.299 \end{bmatrix} \quad \text{узел интегрирования в формуле Гаусса}$$

$$G3 := (b - a) \cdot \sum_{j=0}^{m-1} (c_j \cdot f(z_j)) = -0.172 \quad \text{численное приближение интеграла методом Гаусса}$$

$$m := 4 \quad \text{кол-во узлов} \quad j := 0 \dots m - 1 \quad a := 0.5 \quad b := 1.4$$

$$x := \begin{bmatrix} 0.06943184 \\ 0.33000948 \\ 0.66999052 \\ 0.93056815 \end{bmatrix} \quad \text{узлы} \quad c := \begin{bmatrix} 0.17392742 \\ 0.32607258 \\ 0.32607258 \\ 0.17392742 \end{bmatrix} \quad \text{коэффициенты}$$

$$z_j := a + (b - a) \cdot x_j = \begin{bmatrix} 0.562 \\ 0.797 \\ 1.103 \\ 1.338 \end{bmatrix} \quad \text{узел интегрирования в формуле Гаусса}$$

$$G4 := (b - a) \cdot \sum_{j=0}^{m-1} (c_j \cdot f(z_j)) = -0.153 \quad \text{численное приближение интеграла методом Гаусса}$$

$$m := 5 \quad \text{кол-во узлов} \quad j := 0 \dots m - 1 \quad a := 0.5 \quad b := 1.4$$

$$x := \begin{bmatrix} 0.04691008 \\ 0.23076534 \\ 0.5 \\ 0.76923466 \\ 0.95308992 \end{bmatrix} \quad \text{узлы} \quad c := \begin{bmatrix} 0.11846344 \\ 0.23931433 \\ 0.28444444 \\ 0.23931433 \\ 0.11846344 \end{bmatrix} \quad \text{коэффициенты}$$

$$z_j := a + (b - a) \cdot x_j = \begin{bmatrix} 0.542 \\ 0.708 \\ 0.95 \\ 1.192 \\ 1.358 \end{bmatrix} \quad \text{узел интегрирования в формуле Гаусса}$$

$$G5 := (b - a) \cdot \sum_{j=0}^{m-1} (c_j \cdot f(z_j)) = -0.152 \quad \text{численное приближение интеграла методом Гаусса}$$

$m := 6$  кол-во узлов  $j := 0 \dots m - 1$   $a := 0.5$   $b := 1.4$

$$x := \begin{bmatrix} 0.03376524 \\ 0.16939531 \\ 0.38069041 \\ 0.61930959 \\ 0.83060469 \\ 0.96623475 \end{bmatrix} \text{ узлы} \quad c := \begin{bmatrix} 0.08566225 \\ 0.18038079 \\ 0.23395697 \\ 0.23395697 \\ 0.18038079 \\ 0.08566225 \end{bmatrix} \text{ коэффициенты}$$

$$z_j := a + (b - a) \cdot x_j = \begin{bmatrix} 0.53 \\ 0.652 \\ 0.843 \\ 1.057 \\ 1.248 \\ 1.37 \end{bmatrix} \text{ узел интегрирования в формуле Гаусса}$$

$$G6 := (b - a) \cdot \sum_{j=0}^{m-1} (c_j \cdot f(z_j)) = -0.152 \quad \text{численное приближение интеграла методом Гаусса}$$

#### ШАГ 6: ВЫЧИСЛЕНИЕ АБСОЛЮТНОЙ ВЕЛИЧИНЫ РАЗНОСТИ ЗНАЧЕНИЙ ИНТЕГРАЛА

$$I = -0.152$$

$$G1 = -0.169$$

$$G2 = -0.158$$

$$G3 = -0.172$$

$$G4 = -0.153$$

$$G5 = -0.152$$

$$G6 = -0.152$$

$$|I - G1| = 0.016$$

$$|I - G2| = 0.006$$

$$|I - G3| = 0.019$$

$$|I - G4| = 2.404 \cdot 10^{-5}$$

$$|I - G5| = 1.541 \cdot 10^{-6}$$

$$|I - G6| = 9.889 \cdot 10^{-8}$$

$$Z_k = \begin{bmatrix} 0.003 \\ 7.842 \cdot 10^{-4} \\ 1.994 \cdot 10^{-4} \\ 5.006 \cdot 10^{-5} \\ 1.253 \cdot 10^{-5} \\ 3.133 \cdot 10^{-6} \\ 7.832 \cdot 10^{-7} \\ 1.958 \cdot 10^{-7} \\ 4.895 \cdot 10^{-8} \end{bmatrix}$$