Лабораторная работа № 7

Решение задачи Коши для ОДУ 1-го порядка

Тема: Численное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$F(x,u(x),u'(x))=0,\ \ u(x_0)=u_0$$

Задание

Для данной задачи Коши на промежутке $[x_0,x_n]$:

1. Привести уравнение к нормальной форме $\dfrac{du}{dx}(x)=f(x,u(x))$
2. Найти приближенное решение по явной разностной схеме Эйлера с точностью 10^{-4} , используя оценку погрешности полученного решения по методу Рунге. Построить графики приближенного решения и оценки его погрешности.
3. Выбрать разностную схему из семейства схем Рунге-Кутты 2-го порядка, взяв конкретное значение параметра υ . Найти приближенное решение по этой разностной схеме приближенное решение примерно с той же точностью, что, полученное в пункте 2.
4. Найти приближенное решение, используя функцию MathCAD **rkfixed** с тем же шагом, что и в пункте 3.
5. Вычислить разность решений, полученных в пункте 3 и в пункте 4 и сравнить с оценкой погрешности в пункте 3.
6. сравнить полученные решения графически .

Варианты индивидуальных заданий

Вариант	$F(x,u,u')$	x_0	u_0	x_n
1	$(e^x+1)du+e^x dx$	0	0.5	2
2	$u\cdot\ln(u)+x\cdot\dfrac{du}{dx}$	1	e	2.5
3	$\sqrt{4-x^2}\cdot\dfrac{du}{dx}+xu^2+x$	0	-tg(2)	1.8
4	$(e^x+1)udu-e^x dx$	0	1	2
5	$\sin(x)du-u\ln(u)dx$	$\pi/2$	e	4
6	$\dfrac{udu}{1+x}-\dfrac{xdx}{1+u}$	0.5	1	2
7	$(1+u^2)dx-xdu$	$\pi/4$	1	3.5
8	$2\sqrt{u}dx-du$	0	1	2

9	$(e^x+2)du+2e^x dx$	0	0.3	2
10	$u\cdot\ln(u+1)+0.5x\cdot\frac{du}{dx}$	1	0.5e	3
11	$(x-xu^2)dx-(u+ux^2)du$	1	1	3.2
12	$3(x^2u+u)du+\sqrt{2+u^2}\,dx$	0	1	2
13	$\cos(x)du-u\ln(u+1)dx$	1	3	2.7
14	$(x-xu)dx-(u^2+ux^2)du$	0	1	2
15	$\sqrt{3-x^2}\cdot\frac{du}{dx}+xu^2-x$	0	0.5	1.5
16	$(u+1)\cdot\ln(u)+x\cdot\frac{du}{dx}$	1	1	2.5
17	$\frac{udu}{1+2x}-\frac{xdx}{1+3u}$	0	2	2
18	$(2-u^2)dx-0.5xdu$	1	1.25	2.75
19	$2\sqrt{u+1}dx-xdu$	0.5	15	2
20	$\sqrt{10-x^2}\cdot\frac{du}{dx}-xu^2+x^2$	1	1.5	3

В приложении приведены копии фрагментов MathCAD-документа с реализацией некоторых разностных схем для рассматриваемой задачи.

Для явной схемы Эйлера, имеющей первый порядок точности, получены приближенные решения для двух значений шага разностной схемы и дана оценка погрешности этих решений по методу Рунге.

Приведена запись в MathCAD алгоритма, использующего разностную схему Эйлера-Коши, которая относится к классу разностных схем Рунге-Кутты второго порядка.

Получено приближенное решение той же задачи с помощью MathCAD-функции **rkfixed** , реализующей разностную схему Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Аргументами этой функции являются: вектор, задающий начальные значения решения системы ОДУ, начальная и конечная точка промежутка, на котором строится решение, количество узлов и имя вектор-функции, описывающей правые части системы.

Приложение

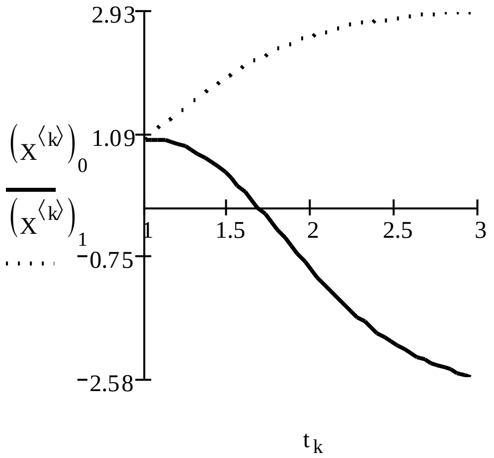
Правые части уравнений, промежуток и начальные условия

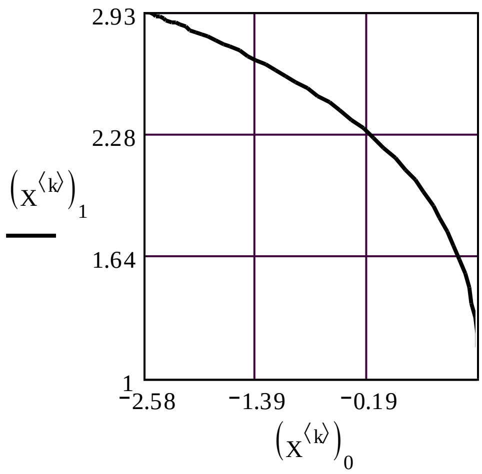
$$F(t,u,v) := \begin{bmatrix} \dfrac{\left(u^2 - v^2\right)}{t} \\ \dfrac{(u+v)}{t} \end{bmatrix} \qquad a := 1 \qquad b := 3 \qquad X^{\langle 0 \rangle} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Явная схема Эйлера

$$n := 50 \qquad h := \frac{b-a}{n} \qquad k := 0..\,n \qquad t_k := a + k \cdot h$$

$$X^{\langle k+1 \rangle} := X^{\langle k \rangle} + h \cdot F\left[t_k, \left(X^{\langle k \rangle}\right)_0, \left(X^{\langle k \rangle}\right)_1\right]$$





$$Y^{\langle 0 \rangle} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad n := 2 \cdot n \qquad h := \frac{b-a}{n} \qquad k := 0..\,n \qquad t_k := a + k \cdot h$$

$$Y^{\langle k+1 \rangle} := Y^{\langle k \rangle} + h \cdot F\left[t_k, \left(Y^{\langle k \rangle}\right)_0, \left(Y^{\langle k \rangle}\right)_1\right]$$

$$m := 0..\,\frac{n}{2}$$

$$Z1_m := \left|\left(X^{\langle m \rangle}\right)_0 - \left(Y^{\langle 2 \cdot m \rangle}\right)_0\right| \qquad Z2_m := \left|\left(X^{\langle m \rangle}\right)_1 - \left(Y^{\langle 2 \cdot m \rangle}\right)_1\right|$$

$$\max(Z1) = 0.05 \qquad \max(Z2) = 0.041$$

Оценка погрешности по методу Рунге

Схема Эйлера-Коши

$$X^{\langle 0\rangle} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad k := 0..n \qquad t_k := a + k\cdot h$$

$$X^{\langle k+1\rangle} := X^{\langle k\rangle} + \frac{h}{2}\cdot\left[F\left[t_k, \left(X^{\langle k\rangle}\right)_0, \left(X^{\langle k\rangle}\right)_1\right] \ldots \atop + F\left[\left(t_k\right) + h, \left[X^{\langle k\rangle} + h\cdot F\left[t_k, \left(X^{\langle k\rangle}\right)_0, \left(X^{\langle k\rangle}\right)_1\right]\right]_0, \left[X^{\langle k\rangle} + h\cdot F\left[t_k, \left(X^{\langle k\rangle}\right)_0, \left(X^{\langle k\rangle}\right)_1\right]\right]_1\right]\right]$$

MathCAD-функция **rkfixed**

$$s := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad n := 20 \qquad D(t, s) := F\left(t, s_0, s_1\right)$$

$$W := \mathrm{rkfixed}(s, a, b, n, D)$$

Разность приближенных решений

$$p := 0..n$$