Лабораторная работа № 9

Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности

Тема: Численное решение начально-краевой задачи для линейного дифференциального уравнения параболического типа второго порядка

$\frac{\partial u}{\partial t} = p(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x)$ в области $\Omega = \{(x,t): 0 < x < L,\ 0 < t < T\}$ с начальным условием $u(0,x) = \varphi(x)$ и граничными условиями первого рода $u(t,0) = \mu_1(t)$, $u(t,L) = \mu_2(t)$

Задание

1. Найти приближенное решение задачи, используя явную разностную схему с погрешностью не более 10^{-2} (оценивая погрешность по методу Рунге на последнем временном слое).
2. Исследовать поведение приближенного решения вблизи границы устойчивости, увеличивая шаг по временной переменной при фиксированном шаге по пространственной переменной.
3. Сравнить полученные приближенные решения.

Варианты индивидуальных заданий

Во всех вариантах $L = 2,\ T = 1$

N	$p(x)$	$f(t,x)$	$\phi(x)$	$\mu_1(t)$	$\mu_2(t)$
1	$1+x^2$	$x^2 - t^2$	$(1-x)^2$	1	$2t$
2	$x+1$	$\frac{x^2}{1+t}$	$x(1-x)$	t	t^2
3	$\ln(x+2)$	$\sqrt{t+x}$	x^2	$0.5t^2$	$2-t$
4	$\sqrt{x^2+1}$	$\sin(\pi t x)$	$x^2(1-x)$	$\sqrt{t^2+1}$	$0.5t$
5	$0.5+\sqrt{x}$	$x+t^2$	$2x(1-x)$	$0.3t$	$0.6t^2$
6	$1-0.2x^2$	$\frac{t}{1+x^2}$	$x+2$	$1+t$	$\ln(1+t)$
7	$\frac{1}{1+x^2}$	$-2tx$	$\sqrt{1+x}$	$0.5t$	$\sqrt{1+t}$
8	$e^{-x}+1$	$0.5x^2 - 2t$	$\sqrt{5-x^2}$	$1+t^2$	t
9	$1+0.3x^2$	$3tx$	$x(1+x)$	$1+t$	$\ln(3+t)$
10	$2+e^{-x}$	$\frac{x}{1+t^2}$	x^2+1	1	$\sqrt{1+t^2}$
11	$1+\sqrt{x+2}$	$\sqrt{x^2+t^2}$	$0.5x^2$	$0.6t$	$\ln(2+t)$
12	$1+\ln(x+1)$	$t\cos(\frac{\pi}{2}x^2)$	$x(1-x)$	$2-t$	$0.5t^2$
13	$\frac{1}{2+x^2}$	$x+\sqrt{1+t}$	$x^2(1+x)$	$0.5t^2$	2

14	$0.5+e^{-x}$	$-1.5tx$	$(1-x)^2$	$1+t$	$\sqrt{2+t^2}$
15	$0.5+x^3$	$2x^2-t$	$1-x^2$	$0.5t+1$	0
16	$2+x$	$\sqrt{x^2+t+1}$	$x+1.5$	t	$\ln(2+t)$
17	$\dfrac{0.5}{1+\ln(x)}$	$\dfrac{x+1}{t+1}$	$\sqrt{1+x}$	$1-t^2$	2
18	$2+0.3x^2$	$\sin(t(x+1))$	$x+1.8$	$0.5t$	$\sqrt{1+t}$
19	$\ln(3.5+x)$	$x-0.5tx^2$	x^2+1	1	$2-t$
20	$2\sin(x+1)$	$2.5tx$	$x(2-x)$	0	t^2+1
21	$1-0.2x^2$	$0.5x^2-3t$	$\sqrt{2+x}$	$1+t$	$0.5t^2$
22	$\sqrt{x^2+0.5}$	$\dfrac{x^2}{1+t}$	$0.5x^2+1$	$3-t^2$	1
23	$1+0.3x$	$x+\sqrt{1+t^2}$	$1-2x^2$	$\sqrt{1+t}$	$0.5t+1$
24	$\dfrac{1}{1+e^{-x}}$	$\dfrac{x-2}{1+t^2}$	$\sqrt{4-x^2}$	$\ln(2+t)$	$0.3t$
25	$0.5+0.7x$	$2x^2-t^3$	$x^2(3-x)$	$\ln(1+t)$	$\sqrt{3+t^2}$
26	$3-0.2x^2$	$\dfrac{x-3}{t+1}$	$2x(1-x)$	$0.5t$	$1-t^2$
27	$5\cos(x-1)$	$x-2+2t^2$	$\sqrt{1+x}$	$\sqrt{2+t^2}$	$\sqrt{t^2+1}$
28	$1+2\sqrt{1+x}$	$\sin(tx-1)+t$	$x+2$	t^2	$1+t$
29	$3\sin(x+3)$	$\sqrt{x^2+3t}$	x^2+1	$2-t$	$0.5t+1$
30	$\dfrac{2}{2+x^2}$	$3\cdot x^2-5t$	$x(1+x)$	$0.5t+1$	$1+t^2$

Приложение

Первая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности

$$\frac{d}{dt}u(x) = p(x)\cdot\frac{d^2}{dx^2}u(x) + f(t,x)$$

$$u(x,0)=\phi(x) \quad u(0,t)=\mu 1(t), \quad u(1,t)=\mu 2(t)$$

$$L=2 \quad h1=0.1 \text{ и } h2=0.05,$$

$$t=0;\ 0.5;\ 1.0$$

$$L := 2 \quad \phi(x) := x\cdot(L-x) \quad \mu 1(t) := t \quad \mu 2(t) := t^2$$

$$p(x) := 0.3\cdot x \quad f(t,x) := -t\cdot\left(0.5 + x^2\right)$$

$$n := 50 \quad h := \frac{L}{n} \quad q := 0.6 \quad \gamma := \frac{h^2}{2q} \quad \gamma = 1.333\times 10^{-3} \quad \tau := 0.001 \quad m := \frac{1}{\tau}$$

$$k := 0..m \quad t_k := k\cdot\tau$$

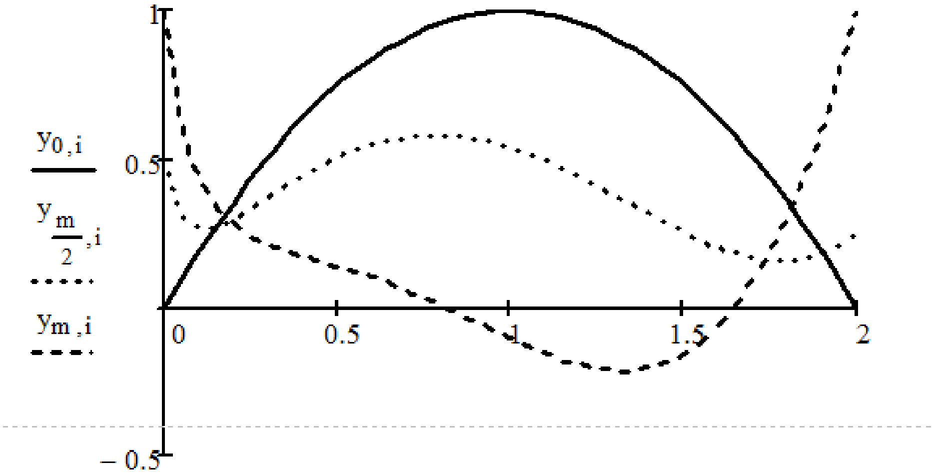
$$y_{k,0} := \mu 1\left(t_k\right) \quad y_{k,n} := \mu 2\left(t_k\right)$$

$$i := 0..n \quad x_i := i\cdot h \quad y_{0,i} := \phi\left(x_i\right)$$

$$i := 1..n-1 \quad k := 0..m-1$$

$$y_{(k+1),i} := y_{k,i} + \left(p\left(x_i\right)\right)\cdot\frac{\tau}{h^2}\cdot\left(y_{k,i+1} - 2\cdot y_{k,i} + y_{k,i-1}\right) + \tau\cdot f\left(t_k,x_i\right)$$

$i := 0 .. n$



$n := 100 \quad h := \frac{L}{n} \quad \gamma := \frac{h^2}{2q} \quad \gamma = 3.333 \times 10^{-4} \quad \tau := 0.00025 \quad m := \frac{1}{\tau}$

$k := 0 .. m \qquad t_k := k \cdot \tau$

$y1_{k,0} := \mu1(t_k) \qquad y1_{k,n} := \mu2(t_k)$

$i := 0 .. n \qquad x_i := i \cdot h \qquad y1_{0,i} := \phi(x_i)$

$i := 1 .. n - 1 \qquad k := 0 .. m - 1$

$$y1_{(k+1),i} := y1_{k,i} + (p(x_i)) \cdot \frac{\tau}{h^2} \cdot (y1_{k,i+1} - 2 \cdot y1_{k,i} + y1_{k,i-1}) + \tau \cdot f(t_k, x_i)$$

$i := 0 .. \frac{n}{2} \qquad r_i := \frac{1}{3} \left| y1_{m,2 \cdot i} - y_{\frac{m}{4},i} \right| \qquad \max(r) = 0.01004$

Демонстрация неустойчивости

$n := 50 \qquad h := \frac{L}{n} \qquad q := 0.6 \quad \gamma := \frac{h^2}{2q} \quad \gamma = 1.333 \times 10^{-3} \quad \tau := 0.00151$

$m := \mathrm{trunc}\left(\frac{1}{\tau}\right) \qquad k := 0..m \qquad t_k := k \cdot \tau$

$i := 0..n$