

Лабораторная работа 9 "Уравнение теплопроводности".  
Гордеев Никита, группа 22307, вариант 7

ДАНО:

Промежуток, начальные и граничные условия, коэффициент и свободный член уравнения

$$p(x) := \frac{1}{1+x^2} \quad \text{коэффициент при второй производной по } x$$

$$f(t, x) := -2 \cdot t \cdot x \quad \text{правая часть уравнения}$$

$$\varphi(x) := \sqrt{1+x} \quad \text{начальное условие}$$

$$\mu_1(t) := 0.5 \cdot t \quad \text{граничные условия}$$

$$\mu_2(t) := \sqrt{1+t} \quad \text{граничные условия}$$

$$L := 2$$

$$T := 1$$

ЭТАП 1: ПОСТРОЕНИЕ ЯВНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

Параметры и коэффициенты разностной схемы

$$n := 20 \quad \text{количество узлов} \quad h := \frac{L}{n} \quad \text{шаг по пространству}$$

$$q := 0.6 \quad \text{размер временного шага} \quad \gamma := \frac{h^2}{2q} \quad \text{коэффициент}$$

$$\tau := 0.001 \quad \text{временной шаг} \quad m := \frac{1}{\tau} \quad \text{Общее количество временных слоев}$$

$$\gamma = 0.008$$

$$k := 0 \dots m \quad \text{Определение } k \text{ в диапазоне от } 0 \text{ до } m \quad t_k := k \cdot \tau \quad \text{Значения времени на слое}$$

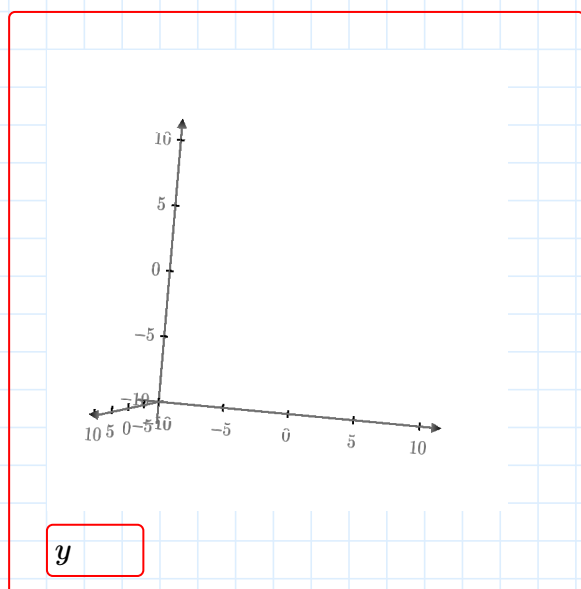
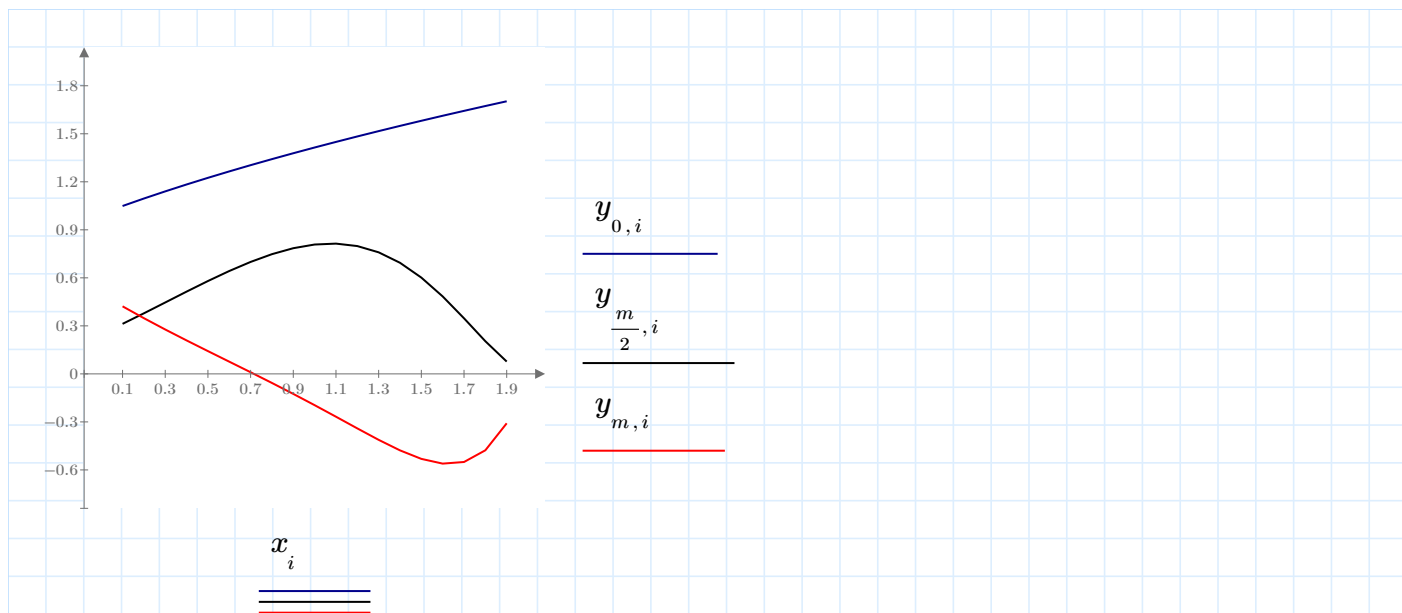
$$y_{k,0} := \mu_1(t_k) \quad \text{Граничное условие слева} \quad y_{k,m} := \mu_2(t_k) \quad \text{Граничное условие справа}$$

$$i := 1 \dots n \quad x_i := i \cdot h \quad \text{Определение значений пространственной переменной } x \text{ на каждом пространственном шаге}$$

$$y_{0,i} := \varphi(x_i) \quad \text{Установка начальных значений функции}$$

$$k := 0 \dots m-1 \quad \text{Итерации по пространству} \quad i := 1 \dots n-1$$

$$y_{(k+1),i} := y_{k,i} + p(x_i) \cdot \frac{\tau}{h^2} (y_{k,i+1} - 2y_{k,i} + y_{k,i-1}) + \tau \cdot f(t_k, x_i) \quad \text{Реализация явной разностной схемы для численного решения уравнения}$$



Вторая прогонка для погрешности Рунге

$n := 40$       числа узлов

$h := \frac{L}{n}$       Вычисление шага

$q := 0.6$       Порядок метода Рунге

$\gamma := \frac{h^2}{2^q}$       Вычисление параметра

$\gamma = 0.002$       Расчет параметра

$\tau := 0.025$       Шаг времени

$m := \frac{1}{\tau}$       Количество временных шагов

$k := 0 .. m$       Итерация по времени

$t_k := k \cdot \tau$       Задание временных значений

$y1_{k,0} := \mu1(t_k)$       Начальное значение на границе

$y1_{k,n} := \mu2(t_k)$       Начальное значение на границе

$i := 0 .. n$

$x := i \cdot h$       Значение x на i-том шаге

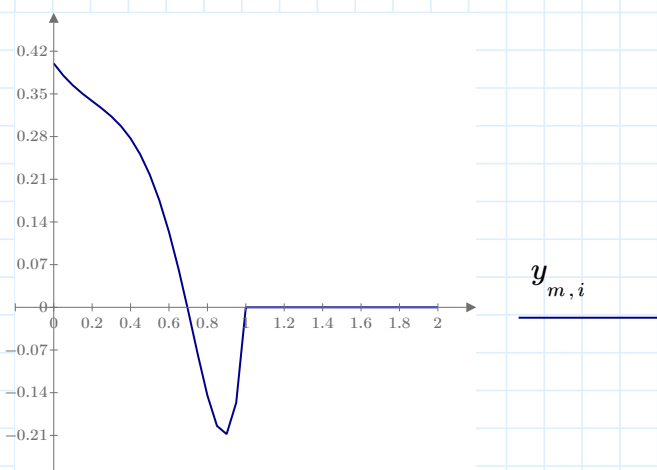
$y_{0,i}^1 := \varphi(x_i)$	Начальное значение	$i := 1 \dots n - 1$	Итерация по пространству
$k := 0 \dots m - 1$	Итерация по времени		
$y_{(k+1),i}^1 := y_{k,i}^1 + p(x_i) \cdot \frac{\tau}{h^2} (y_{k,i+1}^1 - 2 y_{k,i}^1 + y_{k,i-1}^1) + \tau \cdot f(t_k, x_i)$			Обновление $y^1$ на следующем временном шаге и внутри пространства

### Оценка погрешности по методу Рунге

$i := 0 \dots \frac{n}{2}$	Итерация по половине пространственных шагов		
$r_i := \frac{1}{3} \cdot \left  y_{m,2 \cdot i}^1 - y_{\frac{m}{4},i}^1 \right $	Оценка погрешности методом Рунге		
$\max(r) = 5.914 \cdot 10^{-58}$	Вычисление максимального значения погрешности и сравнение с пороговым значением		

### Демонстрация неустойчивости

$n := 40$	Количество пространственных шагов	$h := \frac{L}{n}$	Размер пространственного шага
$q := 0.6$	Параметр для расчета $\gamma$	$\gamma := \frac{h^2}{2 q}$	Расчет $\gamma$
$\gamma = 0.002$		$\tau := 0.00125$	Шаг времени
$m := \text{trunc}\left(\frac{1}{\tau}\right)$	Количество временных шагов	$k := 0 \dots m$	Итерация по времени
$t_k := k \cdot \tau$	Задание временных значений	$i := 0 \dots n$	Итерация по пространственным индексам



$$x_i$$

$$IDS(n, m) := \begin{array}{l} h \leftarrow \frac{L}{n} \\ \tau \leftarrow \frac{1}{m} \\ \alpha_1 \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..n-1 \\ \quad \left\| \begin{array}{l} b_i \leftarrow \frac{\tau}{h^2} p(x_i) \\ \alpha_{i+1} \leftarrow \frac{b_i}{1 + (2 - \alpha_i) b_i} \end{array} \right\| \\ \text{for } k \in 1..m \\ \quad \left\| \begin{array}{l} t_k \leftarrow k \cdot \tau \\ V_{k,0} \leftarrow \mu 1(t_k) \\ V_{k,n} \leftarrow \mu 2(t_k) \\ \beta_1 \leftarrow \mu 1(t_k) \end{array} \right\| \\ \quad \text{for } i \in 1..n-1 \\ \quad \quad \left\| \beta_{n+1} \leftarrow \frac{V_{k-1,i} + \tau \cdot f(t_k, x_i)}{1 + (2 - \alpha_i) b_i} \right\| \\ \quad \text{for } i \in n, n-1..2 \\ \quad \quad \left\| V_{k,i-1} \leftarrow \alpha_i \cdot V_{k,i} + \beta_i \right\| \\ V \end{array}$$

$$V1 := IDS(10, 20)$$

[illegible]