Лабораторная работа 4 "Интерполяция". Гордеев Никита, группа 22307, вариант 7

ДАНО:

$f(x) := \cos(2 \cdot x) - x^2$ *Функция*

$a := 0.5 \quad b := 2.4$ *Промежуток*

$points := 137$

$j := 0 .. points$ *Набор точек, для вычисления погрешности интерполяции*

$t_j := a + \frac{(b-a)}{points}$

$ORGIN := 0$

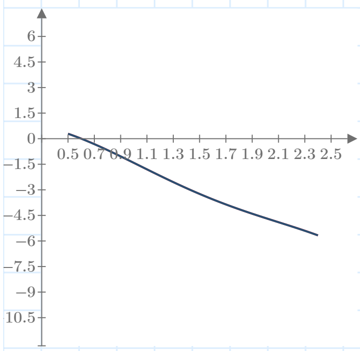
$n := \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \\ 20 \\ 25 \\ 30 \\ 40 \\ 50 \\ 60 \\ 70 \end{bmatrix}$ *Значения числа узлов интерполяции*

ЭТАП 1 ИНТЕРПОЛЯЦИЯ МНОГОЧЛЕНОМ ЛАГРАНЖА С РАВНООТСТОЯЩИМИ УЗЛАМИ

$N := n_0 \qquad i := 0 .. N \qquad x_i := a + \frac{(b-a)}{N} \cdot i$

$$L(t) := \left(\sum_{k=0}^{N} \left(f\left(x_k\right) \cdot \prod_{i=0}^{N} \text{if}\left(k - i, \frac{\left(t - x_i\right)}{x_k - x_i}, 1 \right) \right) \right)$$

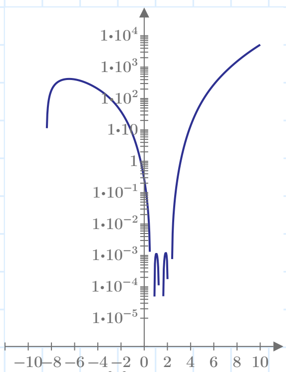
Формула многочлена Лагранжа с равноотстоящими узлами



$L(uu)$

$f(uu)$

uu



$f(ff) - L(ff)$

ff

вычисление погрешности интерполяции многочленом Лагранжа для различного количества узлов

$$r := \left\| \begin{array}{l} \text{for } m \in 0..8 \\ \quad \left\| \begin{array}{l} N \leftarrow n_m \\ \text{for } i \in 0..N \\ \quad \left\| x_i \leftarrow a + \dfrac{b-a}{N} \cdot i \right. \\ L(t) \leftarrow \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \left(f\left(x_k\right) \cdot \prod_{i=0}^{N} \text{if}\left(k-i, \dfrac{t-x_i}{x_k-x_i}, 1\right)\right) \\ \text{for } j \in 0..points \\ \quad \left\| \begin{array}{l} t_j \leftarrow a + \dfrac{b-a}{points} \cdot j \\ s_j \leftarrow \left| f\left(t_j\right) - L\left(t_j\right) \right| \end{array} \right. \\ r_m \leftarrow \max(s) \end{array} \right. \\ r \end{array} \right.$$

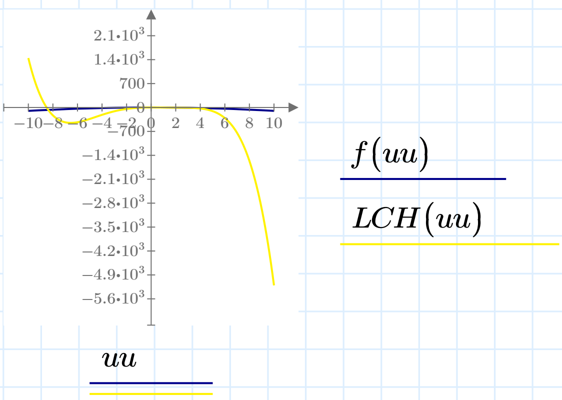
$$r = \begin{bmatrix} 0.004 \\ 8.933 \cdot 10^{-8} \\ 1.664 \cdot 10^{-12} \\ 3.983 \cdot 10^{-12} \\ 3.743 \cdot 10^{-11} \\ 4.686 \cdot 10^{-9} \\ 1.069 \cdot 10^{-6} \\ 8.834 \cdot 10^{-4} \\ 0.595 \end{bmatrix}$$

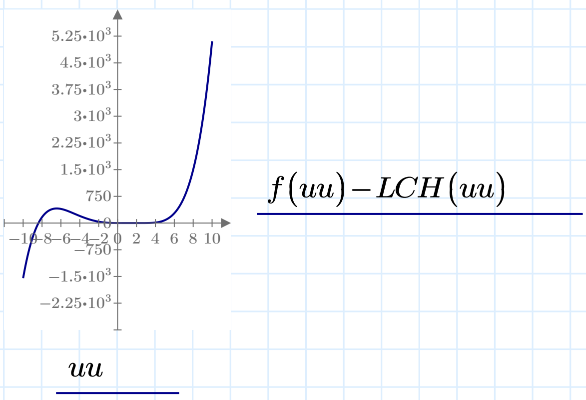
ЭТАП 2 ИНТЕРПОЛЯЦИЯ МНОГОЧЛЕНОМ ЛАГРАНЖА С УЗЛАМИ ЧЕБЫШЕВА

$N := n_0$ $\qquad i := 0..N$

$$v_i := \cos\left(\pi \cdot \frac{(1+2 \cdot i)}{2 \cdot (N+1)}\right) \qquad z_i := \frac{(a+b)}{2} + \left(\frac{(b-a)}{2}\right) \cdot v_i$$

$$LCH(t) := \sum_{k=0}^{N} \left(f\left(z_k\right) \cdot \prod_{i=0}^{N} \text{if}\left(k-i, \frac{\left(t-z_i\right)}{z_k-z_i}, 1\right)\right)$$





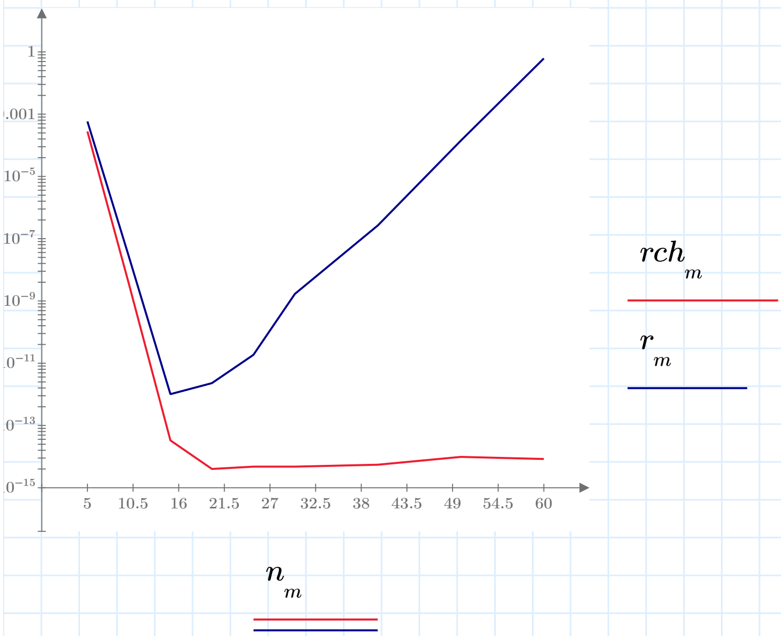
Вычисление погрешности интерполяции

$$
rch := \left|\begin{array}{l}
\text{for } m \in 0..8 \\
\quad \left|\begin{array}{l}
N \leftarrow n_m \\
\text{for } i \in 0..N \\
\quad \left|\begin{array}{l}
v_i \leftarrow \cos\left(\pi \cdot \dfrac{1+2\cdot i}{2\cdot(N+1)}\right) \\
z_i \leftarrow \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2}\cdot v_i
\end{array}\right. \\
LCH(t) \leftarrow \sum_{k=0}^{N}\left(f\left(z_k\right)\cdot \prod_{i=0}^{N} \text{if}\left(k-i, \dfrac{t-z_i}{z_k-z_i}, 1\right)\right) \\
\text{for } j \in 0..points \\
\quad \left|\begin{array}{l}
t_j \leftarrow a + \dfrac{b-a}{137}\cdot j \\
s_j \leftarrow \left|f\left(t_j\right) - LCH\left(t_j\right)\right|
\end{array}\right. \\
r_m \leftarrow \max(s)
\end{array}\right. \\
r
\end{array}\right.
$$

$$
rch = \begin{bmatrix} 0.002 \\ 1.032\cdot 10^{-8} \\ 4.263\cdot 10^{-14} \\ 4.441\cdot 10^{-15} \\ 5.329\cdot 10^{-15} \\ 5.329\cdot 10^{-15} \\ 6.217\cdot 10^{-15} \\ 1.155\cdot 10^{-14} \\ 9.77\cdot 10^{-15} \end{bmatrix}
$$

ЭТАП 3 ГРАФИЧЕСКОЕ СРАВНЕНИЕ ПОГРЕШНОСТИ

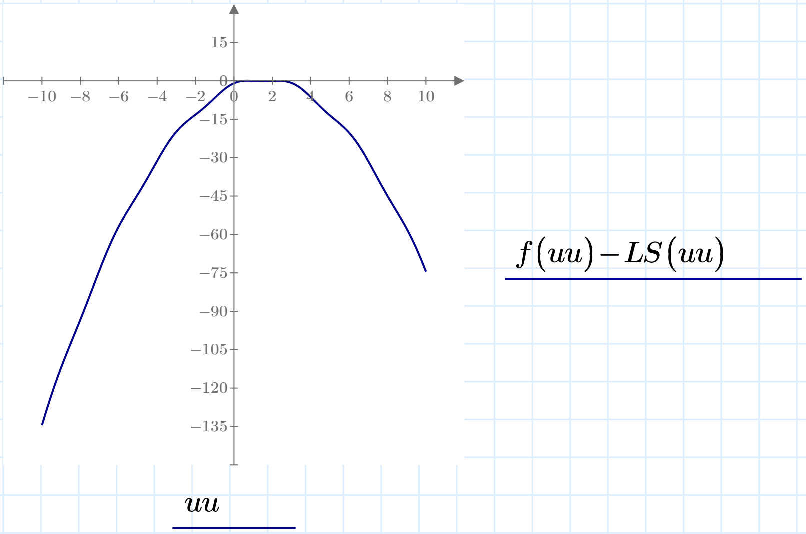
$m := 0..8$



ЭТАП 4: ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЛИНЕЙНЫМ СПЛАЙНОМ

$N := n_0$ $\quad i := 0..N$ $\quad xx_i := a + \frac{(b-a)\cdot i}{N}$

$y_i := f(xx_i)$ $\quad LS(t) := \mathrm{linterp}(xx, y, t)$ *используем функцию linterp*



Вычисление погрешности интерполяции

$$rls := \left\| \begin{array}{l} \text{for } m \in 0..8 \\ \quad \left\| \begin{array}{l} N \leftarrow n_m \\ \text{for } i \in 0..N \\ \quad \left\| \begin{array}{l} xx_i \leftarrow a + \frac{(b-a)\cdot i}{N} \\ y_i \leftarrow f(xx_i) \end{array} \right. \\ LS(t) \leftarrow \mathrm{linterp}(xx, y, t) \\ \text{for } j \in 0..points \\ \quad \left\| \begin{array}{l} t_j \leftarrow a + \frac{b-a}{points}\cdot j \\ s_j \leftarrow \left| f(t_j) - LS(t_j) \right| \end{array} \right. \\ r_m \leftarrow \max(s) \end{array} \right. \\ r \end{array} \right.$$

$$rls = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.016 \\ 0.007 \\ 0.004 \\ 0.003 \\ 0.002 \\ 0.001 \\ 6.766\cdot 10^{-4} \\ 5.008\cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

ЭТАП 5: ФОРМУЛИРОВАНИЕ ВЫВОДОВ

Интерполяция многочленом Лагранжа:

1. Равноотстоящие узлы:

    1. Погрешность уменьшается с увеличением числа узлов, но возможен эффект Рунге*.

2. Узлы Чебышева:

    1. Использование корней Чебышева позволяет избежать эффекта Рунге.
    2. Погрешность уменьшается с увеличением числа узлов.

Линейный сплайн:

1. Линейный сплайн обеспечивает гладкую интерполяцию, особенно при малом числе узлов
2. Возможно, линейный сплайн эффективнее в сравнении с многочленом Лагранжа при ограниченном числе узлов.

Общие выводы:

- Выбор метода зависит от требований задачи.
- Интерполяция многочленом Лагранжа с узлами Чебышева может быть точной.
- Линейный сплайн - простой и гибкий метод интерполяции для гладких функций.

* Эффект Рунге — это явление в численных методах решения дифференциальных уравнений, при котором увеличение числа шагов (уменьшение размера шага) сначала улучшает точность решения, но после определенного момента приводит к ухудшению из-за численных ошибок, таких как ошибки округления.