

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Экономический факультет

Кафедра информационных технологий и математических методов в экономике

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НОРМАЛЬНОГО ОБРАТНОГО ГАУССОВА
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ АЗИАТСКИХ ОПЦИОНОВ**

Магистерская диссертация

38.04.01 Экономика

Программа Количественный анализ финансовых рынков

Допущено к защите в ГЭК

Зав. кафедрой

д.э.н., профессор Давнис В.В.

Обучающийся

Иванов Н.О.

Руководитель

д.э.н., профессор Давнис В.В.

Воронеж — 2016

Содержание

	Стр.
Введение	4
1. Ценообразование опционов с помощью биномиальной модели	7
1.1. Факторы, влияющие на стоимость опциона	7
1.2. Верхние и нижние границы стоимости опциона	9
1.3. Паритет опционов колл и пут	11
1.4. Биномиальные деревья	12
1.5. Риск-нейтральное оценивание	15
1.6. Определение параметров u и d через волатильность акции	17
1.7. Формулы биномиального дерева	19
2. Ценообразование опционов с помощью модели	
Блэка–Шоулза–Мертон	22
2.1. Винеровские процессы и лемма Ито	22
2.2. Процесс, описывающий изменение цены акции	27
2.3. Лемма Ито	29
2.4. Модель Блэка–Шоулза–Мертон	32
2.4.1. Волатильность	34
2.4.2. Вывод дифференциального уравнения	
Блэка–Шоулза–Мертон	35
2.4.3. Улыбка волатильности	38
3. Метод Монте–Карло	42
3.1. Монте–Карло на основе модели геометрического броуновского	
движения	42
3.2. Оценка экзотических опционов	49
3.3. Распределение цены базового актива	50
3.4. Нормальное обратное Гауссово распределение	53
Заключение	63

Список использованных источников	64
Приложение А. Код R	66

Введение

Бурное развитие рынка производных финансовых инструментов неразрывно сопровождается развитием инструментария инвестора, используемого для оценки опционов. В то время как базовой техникой для выполнения данной задачи является модель Блэка–Шоулза–Мертонна, существует большое число других моделей. Некоторые из них имеют итоговую закрытую форму решения поставленной задачи (как, например, модель Блэка–Шоулза–Мертонна или модель Хестона), другие требуют использования численных методов. К последним, в том числе, относится метод Монте–Карло, который представляет собой подход многократного повторения испытаний, включающих случайную составляющую. Этот метод удобен для оценки азиатских опционов, выплаты по которым имеют нестандартную структуру и не могут быть оценены с помощью классических моделей. Именно данный метод исследуется в данной работе для определения цены опционного контракта.

В рамках модели Блэка–Шоулза–Мертонна используется предположение о том, что цена акции подчиняется стохастическому процессу, который можно описать геометрическим броуновским движением (Geometric Brownian Motion, GBM). В данной работе показано, что при моделировании множества путей, используя данную предпосылку, и расчете на их основе текущей стоимости опциона, его цена сходится к цене Блэка–Шоулза–Мертонна по мере роста количества испытаний. Модель геометрического броуновского движения предполагает, что доходности цены акции имеют лог-нормальное распределение. Данная предпосылка не выполняется в реальности (график плотности вероятности логарифма доходностей имеет более высокий пик по сравнению с нормальным распределением).

В работе предложено использование нормального обратного Гауссова распределения (Normal Inverse Gaussian distribution, NIG) для описания функции плотности логарифма доходностей акции. Кроме того, вводится модель для моделирования траекторий движения цены акции на основании предпосылки о том, что логарифм доходностей акции имеет нормальное обратное Гауссово распределение. На основании данной модели рассчитывается стоимость опциона и сравнивается со стоимостью опциона, полученной по классической модели

GBM. В работе показано, что оценке по NIG модели статистически отличаются от оценок по GBM модели.

Объектом исследования является стоимость опционных контрактов.

Предмет исследования — математический аппарат оценивания опционов.

Цель работы — разработка алгоритма расчета цены опциона на основании NIG модели и сравнение полученных результатов с классической моделью оценки стоимости опциона.

Для достижения заданной цели были поставлены следующие задачи:

1. Исследование базовых моделей оценки стоимости опциона и анализ предпосылок, заложенных в данных моделях
2. Анализ предпосылки о лог-нормальном распределении доходностей акции
3. Подбор подходящей функции плотности для описания распределения лог-доходностей акции
4. Подбор модели, которая будет использоваться для моделирования лог-доходностей акции
5. Построение алгоритма оценки стоимости азиатского опциона на основании подобранной модели
6. Сравнение полученных результатов с результатами классической модели, основанной на предположении о лог-нормальном распределении доходностей.

Теоретической и методологической базой исследования послужили классические работы Блэка–Шоулза–Мертон, Кокса–Росса–Рубенштейна, а также современные исследования в данной области зарубежных ученых. Для решения поставленных задач использовался язык программирования R.

Научная значимость данной работы заключается в том, что в ней обобщены теоретические позиции известных авторов в области оценки стоимости опционных контрактов и предложена новая модель оценки стоимости азиатских опционов.

Практическая значимость работы заключается в получении статистически значимых результатов, подтверждающих целесообразность использования предложенной модели.

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и одного приложения. Полный объём диссертации составляет 90 страниц с 18 рисунками и 4 таблицами.

1. Ценообразование опционов с помощью биномиальной модели

1.1. Факторы, влияющие на стоимость опциона

Опционом называется производный финансовый инструмент, который дает его держателю право купить (для опциона колл) или продать (для опциона пут) базовый актив на заранее оговоренных условиях. Выплаты по опциону колл (call option), c , в момент его исполнения (экспирации) составляют:

$$c = \max(S_T - K, 0),$$

где S_T – стоимость базового актива (например, акции) в момент времени T , K – страйк опциона.

Выплаты по опциону пут (put option), p , составляют:

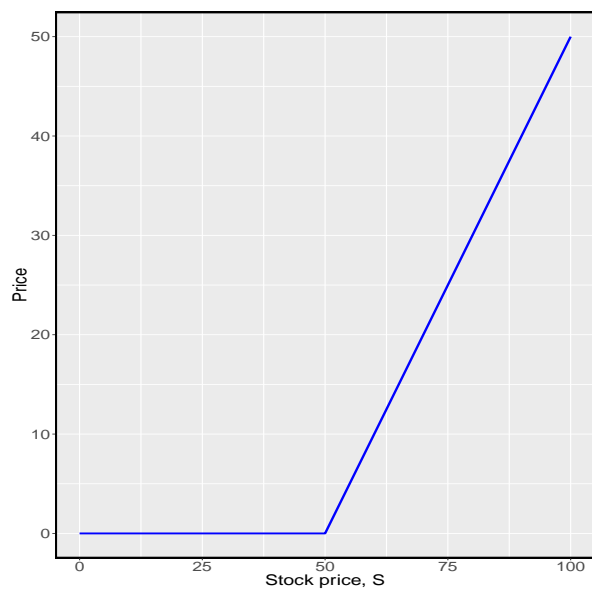
$$p = \max(K - S_T, 0).$$

Выделяют шесть факторов, оказывающих влияние на стоимость фондового опциона [7]:

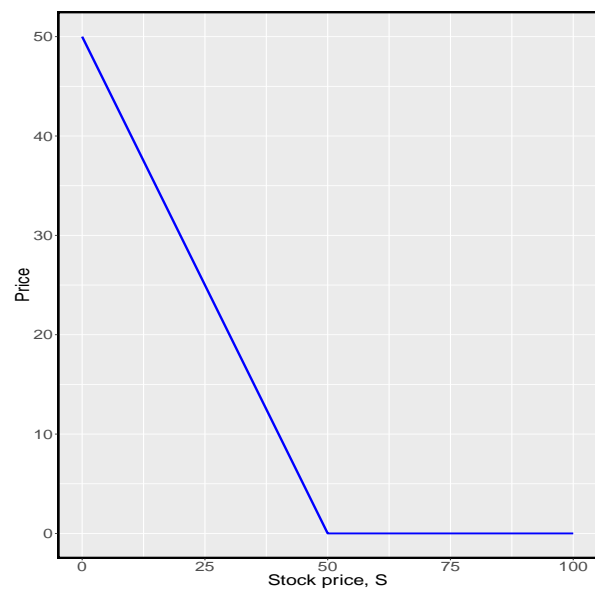
1. Текущая цена акции, S_0 ;
2. Цена исполнения, K ;
3. Срок действия (время до истечения), T ;
4. Волатильность цены акции, σ ;
5. Безрисковая процентная ставка, r ;
6. Дивиденды, ожидаемые в течение срока действия опциона.

Прибыль по опциону зависит от разности между стоимостью акции в момент его исполнения и ценой исполнения опциона. Для держателя европейского опциона колл выгодно, чтобы цена акции превышала цену исполнения, в то время как для держателя опциона пут, наоборот, чем ниже стоимость акции, тем больше выигрыш. Зависимость стоимости опционов колл и пут от цена базового актива и стоимости исполнения представлена на рис. 1.1 и 1.2.

Стоимость опциона растет по мере увеличения срока его действия, т.к. растет неопределенность цену базового актива в будущем (чем больше срок, тем

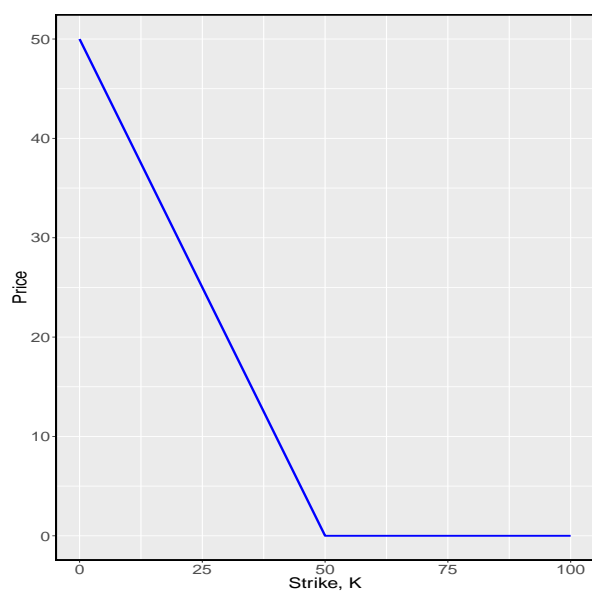


а) Опцион колл

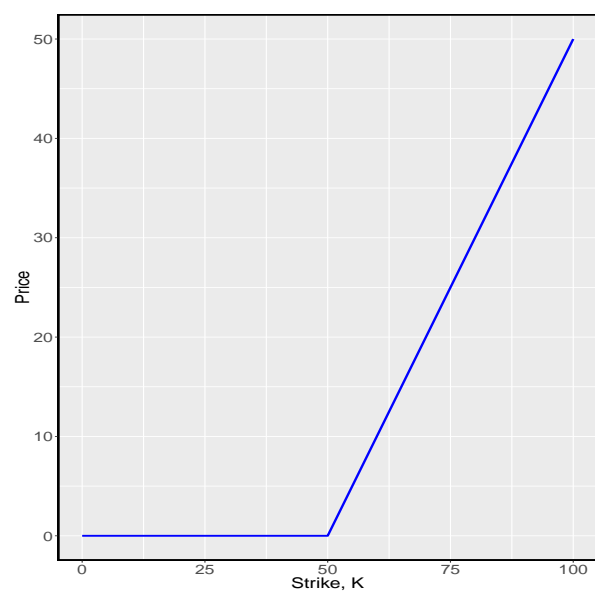


б) Опцион пут

Рисунок 1.1 — Зависимость стоимости опциона от цены базового актива



а) Опцион колл



б) Опцион пут

Рисунок 1.2 — Зависимость стоимости опциона от цены цены исполнения

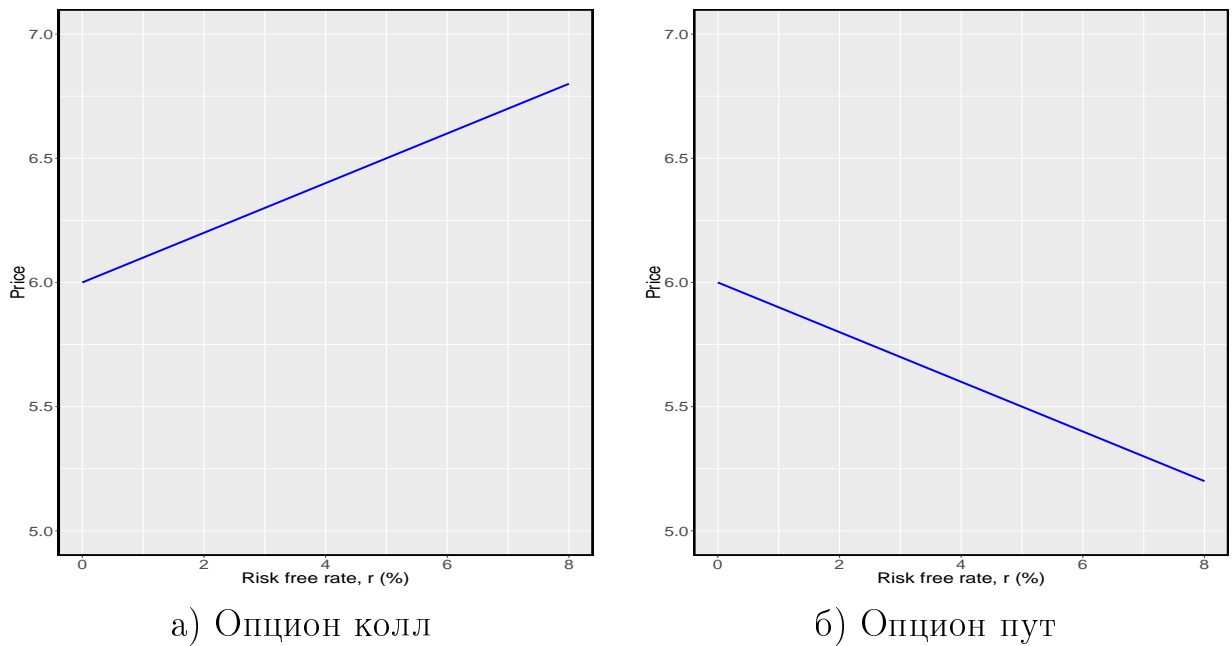


Рисунок 1.3 — Зависимость стоимости опциона от значения безрисковой процентной ставки

сложнее спрогнозировать). Кроме того, чем выше волатильность цены акции, тем выше стоимость опциона, т.к. это также увеличивает неопределенность о будущем распределении цен актива.

Влияние безрисковой процентной ставки на стоимость опциона не так очевидно. Если безрисковая ставка увеличивается, то ожидаемый доход инвестора от владения акциями возрастает. Кроме того, текущая стоимость текущих денежных потоков по опциону падает. Сочетание этих эффектов приводит к увеличению стоимости опциона колл и уменьшению стоимости опциона пут. Графически данная зависимость представлена на рис. 1.3. После выплаты дивидендов, цена акции снижается. Это плохая новость для владельцев опциона колл и хорошая для владельцев опциона пут. Таким образом, размер дивидендов связан обратной зависимостью со стоимостью опциона колл и прямой зависимостью со стоимостью опциона пут.

1.2. Верхние и нижние границы стоимости опциона

Американский и европейский опционы колл (будем обозначать C и c соответственно) дают право их держателю купить акцию по определенной цене. В

любом случае опцион не может стоить больше, чем одна акция. Следовательно верхним пределом его цены является одна акция.

$$c \leq S_0. \quad (1.1)$$

Если бы это неравенство не выполнялось, то арбитражер мог бы легко и без всякого риска извлечь прибыль, продав опцион и купив акцию.

Американский опцион пут дает его владельцу право продать актив по определенной цене K . Следовательно он не может стоить больше, чем цена исполнения вне зависимости от стоимости акции. Следовательно,

$$P \leq K. \quad (1.2)$$

Европейский опцион пут в момент исполнения не может стоить больше цены исполнения K . Следовательно его стоимость не может быть выше текущей стоимости,

$$p \leq Ke^{-rT}. \quad (1.3)$$

Для определения нижней границы опциона колл рассмотрим два инвестиционных портфеля:

Портфель А: один европейский опцион колл плюс одна нуль-купонная облигация с выплатой K в момент времени T .

Портфель Б: одна акция.

Если инвестировать наличную сумму, входящую в портфель А, под безрисковую процентную ставку, то за время T она вырастет до величины K . Если $S_t \geq K$, то опцион колл исполняется в момент истечения срока его действия и стоимость портфеля А равна S_t . Если же $S_t \leq K$, то опцион исполнять не следует, и стоимость портфеля А равна K . Следовательно в момент времени T стоимость портфеля А равна

$$\max(S_t, K).$$

В момент T портфель Б стоит S_t . Следовательно, портфель А всегда стоит не меньше, чем портфель Б. Отсюда следует, что при отсутствии арбитражных возможностей это соотношение выполняется и в настоящий момент. Таким образом,

$$c + Ke^{-rT} \geq S_0,$$

т.е.

$$c \geq S_0 - Ke^{-rT}.$$

Поскольку в худшем случае опцион колл может попросту стать бесполезным, его стоимость не может быть отрицательной. Это значит, что

$$c \geq \max(S_0 - K, 0). \quad (1.4)$$

Путем аналогичных рассуждений можно показать, что нижняя граница опциона пут определяется следующим образом:

$$p \geq \max(K - S_0, 0). \quad (1.5)$$

1.3. Паритет опционов колл и пут

Выведем важную зависимость между параметрами p и c . Используем следующие два инвестиционных портфеля:

Портфель А: один европейский опцион колл плюс Ke^{-rT} руб. наличными.

Портфель Б: один европейский опцион пут и одна акция.

Предположим, что дивиденды по акциям не выплачиваются, а опциона колл и пут имеют одинаковую цену исполнения K и срок исполнения T .

Наличные деньги возможно инвестировать в нуль-купонную облигацию, которая спустя период времени T будет стоить K . Если цена акции S_t в момент времени T окажется выше K , то опцион колл в портфеле А будет исполнен. Это значит, что портфель А в этих условиях в момент времени T стоит $(S_t - K) + K = S_t$. Если цена акции S_t в момент времени T окажется меньше K , опцион колл станет бесполезным и стоимость портфеля составит K .

Акция в портфеле Б в момент T будет стоить K . Если цена акции в момент T окажется ниже K , то опцион пут в портфеле Б будет исполнен. Это значит, что портфель Б в этих условиях в момент времени T стоит $(K - S_t) + S_t = K$. Если цена акции в момент времени T будет больше K , то опцион пут становится бесполезным и стоимость портфеля составляет S_t .

Стоимость обоих портфелей в момент истечения срока их действия равна

$$\max(S_t, K).$$

Поскольку оба опциона являются европейскими, то их нельзя исполнить досрочно. Таким образом, в данный момент они имеют одинаковую стоимость. Если бы это было не так, то арбитражер мог бы купить более дешевый портфель и продать более дорогой. Следовательно в текущий момент времени должно выполняться равенство

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0. \quad (1.6)$$

Это соотношение называется *паритетом опционов пут и колл (put-call parity)*. Оно показывает, что стоимость европейского опциона колл можно вычислить, зная стоимость европейского опциона пут с той же ценой исполнения и временем до истечения.

1.4. Биномиальные деревья

Одним из наиболее распространенных и полезных методов оценки стоимости фондового опциона является построение *биномиального дерева (binomial tree)*, т.е. диаграммы, демонстрирующей разные варианты изменения цены акции в течении срока действия опциона. Этот метод основан на предположении, что цена акции подчиняется законам *случайного блуждания (random walk)*. На каждом шаге во времени есть некоторая вероятность, что цена акции увеличится или уменьшится на некоторую величину. Если величина временного шага стремится к нулю, то это приводит к предположению, что цены акций имеют лог-нормальное распределение. Метод оценки опционов с помощью построения биномиального дерева был предложен в статье Кокса (Cox), Росса (Ross) и Рубинштейна (Rubinstein) в 1979 году.

Обозначим в качестве S_0 текущую стоимость акции, в то время как стоимость опциона обозначим f . Предположим, что за время действия опциона T цена акции может подняться либо до величины S_0u , где $u > 1$, либо опуститься до величины S_0d , где $d < 1$. Если цена акции увеличивается до величины S_0u ,

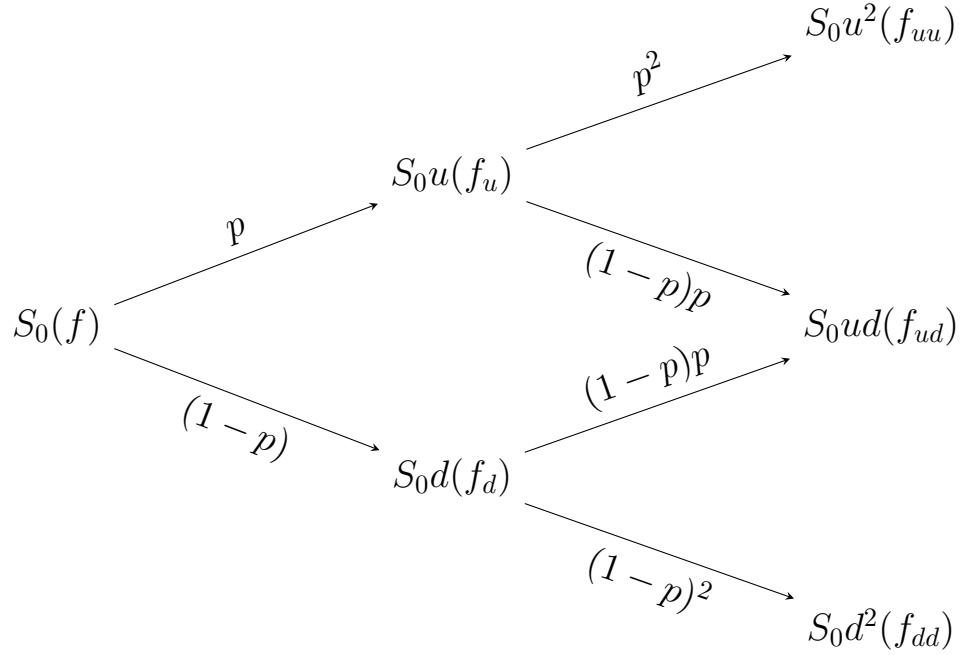


Рисунок 1.4 — Двухпериодное биномиальное дерево

то будем считать, что опцион приносит прибыль f_u . Если же стоимость акции падает до величины S_0d , то опцион приносит прибыль f_d . Вероятность роста цены акции обозначим как p . Тогда вероятность падения цены акции будет $(1 - p)$.

При построении биномиального дерева обычно период жизни опциона T разбивается на большое количество шагов. Посмотрим как это выглядит при трехпериодной модели. В конце второго периода стоимость акции равна либо S_0u , либо S_0d . Из первого узла с вероятностью p^2 цена акции вырастет до S_0u^2 , которой соответствует стоимость опциона f_{uu} , либо с вероятностью $(1 - p)p$ опустится до значения S_0ud , которому соответствует цена опциона f_{ud} . Аналогично, из второго узла стоимость актива с вероятностью $(1 - p)p$ может подняться до значения S_0ud , которому соответствует стоимость опциона f_{ud} , либо опуститься с вероятностью $(1 - p)^2$ до значения S_0d^2 , которому соответствует опцион с премией равной f_{dd} . Графически это представлено на рис. 1.4.

Представим себе инвестиционный портфель, состоящий из длинной позиции на пакет из Δ акций и короткой позиции по одному опциону. Вычислим величину Δ , при которой портфель становится свободным от риска. Если цена акции растет, то стоимость портфеля в момент истечения срока действия опциона равна

$$S_0u\Delta - f_u.$$

Если цена акции падает, то стоимость портфеля определяется как

$$S_0 d\Delta - f_d.$$

Приравнивая эти две величины, получаем

$$S_0 u\Delta - f_u = S_0 d\Delta - f_d,$$

т.е.

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d}. \quad (1.7)$$

В этом случае портфель свободен от рисков и должен приносить доходность, равную безрисковой процентной ставке. Из формулы (1.7) следует, что величина Δ представляет собой изменение цены опциона в ответ на изменение цены акции при перемещении из одного узла дерева в другой.

Обозначим безрисковую процентную ставку буквой r . В таком случае стоимость портфеля равна

$$(S_0 u\Delta - f_u)e^{-rT}.$$

Стоимость создания портфеля равна

$$S_0 \Delta - f.$$

Отсюда следует, что

$$S_0 \Delta - f = (S_0 u\Delta - f_u)e^{-rT},$$

т.е.

$$f = S_0 \Delta (1 - ue^{-rT}) + f_u e^{-rT}.$$

Подставляя в эту формулу величину Δ из формулы (1.7) и выполняя некоторые упрощения, получаем следующие выражение:

$$f = S_0 \left(\frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d} \right) (1 - ue^{-rT}) + f_u e^{-rT},$$

или

$$f = e^{-rT} (pf_u + (1 - p)f_d) \quad (1.8)$$

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}. \quad (1.9)$$

Формулы (1.8) и (1.9) позволяют оценить стоимость опциона в одноступенчатой биномиальной модели.

1.5. Риск-нейтральное оценивание

Одним из самых важных принципов оценки деривативов является *риск-нейтральное оценивание* (*risk-neutral valuation*). Этот принцип утверждает, что при оценивании деривативов мы можем предполагать, что инвесторы являются риск-нейтральными. Это значит, что они не требуют роста ожидаемой доходности в ответ на рост риска. Мир в котором инвесторы безразличны к риску называется *риск-нейтральным миром*. Разумеется предположение о существовании такого мира не выполняется в реальности. Чем большему риску подвергаются инвесторы, тем выше доходность они ожидают получить. Тем не менее, предположение о риск-нейтральном мире дает правильную оценку цены опциона как в реальном, так в риск-нейтральном мирах. Данное предположение решает проблему, которая заключается в том, что мы почти ничего не знаем о рискованных предпочтениях покупателей и продавцов.

Может показаться странным, что мы оцениваем стоимость такого рискованного инструмента как опцион, используя предположение о риск-нейтральном мире. Оказывается, при оценке опциона с помощью цены базовой акции, рискованные предпочтения становятся неважными. Если инвестор начинает избегать риска, то цены акций падают, однако формула, связывающая цену опциона с ценой акции, остается неизменной.

В риск-нейтральном мире используются два предположения, позволяющие упростить процесс оценки стоимости опционов:

1. Ожидаемая доходность акции (и любой другой инвестиции) равна безрисковой процентной ставке.
2. Дисконтная ставка, используемая для вычисления ожидаемой выплаты по опциону (или любому другому финансовому инструменту), равна безрисковой процентной ставке.

В формуле (1.8) величину p естественно интерпретировать как вероятность роста цены акции в риск-нейтральном мире. В этом случае величину $(1 - p)$ можно принять за вероятность падения цены акции в риск-нейтральном мире. Выражение

$$pf_u + (1 - p)f_d$$

представляет собой величину ожидаемых выплат по опциону в риск-нейтральном мире. При такой интерпретации получаем, что текущая стоимость опциона равна его ожидаемой стоимости с учетом безрисковой процентной ставки. Это — риск-нейтральная оценка.

Убедимся в корректности интерпретации величины p . Ожидаемая цена акции

$$E(S_t) = pS_u + (1 - p)S_d,$$

т.е.

$$E(S_t) = pS_0(u - d) + S_0d.$$

Подставляя в это выражение величину p из (1.9), получаем

$$E(S_t) = S_0e^{rT}. \quad (1.10)$$

Оно показывает, что цена акции возрастает на величину безрисковой процентной ставки. Другими словами, цена акции ведет себя точно так, как мы могли ожидать в риск-нейтральном мире, где p — вероятность ее роста.

Риск-нейтральная оценка утверждает, что если предположить, что мир является риск-нейтральным, то мы получим правильную цену дериватива для любого мира, а не только риск-нейтрального.

Для того, чтобы применить риск-нейтральную оценку, мы сначала вычисляем какой должна быть вероятность разных исходов в риск-нейтральном мире. Затем вычисляем размер ожидаемой выплаты по деривативу и дисконтируем эту ожидаемую выплату по безрисковой процентной ставке.

Теперь выведем формулы оценки стоимости опциона для двухступенчатой биномиальной модели, проиллюстрированной на рис. 1.4. Т.к. длина шага по времени теперь равна Δt , а не T , формулы (1.8) и (1.9) принимают следующий вид:

$$f = e^{-r\Delta t}(pf_u + (1 - p)f_d), \quad (1.11)$$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}. \quad (1.12)$$

Повторное применение формулы (1.8) приводит к следующим результатам:

$$f_u = e^{-r\Delta t}(pf_{uu} + (1-p)f_{ud}), \quad (1.13)$$

$$f_d = e^{-r\Delta t}(pf_{ud} + (1-p)f_{dd}), \quad (1.14)$$

$$f = e^{-r\Delta t}(pf_u + (1-p)f_d). \quad (1.15)$$

Подставляя выражения (1.13) и (1.14) в (1.15), получаем

$$f = e^{-2r\Delta t}[p^2f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2f_{dd}]. \quad (1.16)$$

Величины p^2 , $2p(1-p)$ и $(1-p)^2$ представляют собой вероятности попадания в верхний, средний и нижний узлы соответственно. Цена опциона равна выплатам в риск-нейтральном мире с дисконтом на величину безрисковой процентной ставки.

Выше мы рассмотрели вариант построения биномиального дерева для европейского опциона. Если инвестор является держателем американского опциона, то он может исполнить его досрочно. Это нужно учитывать при построении биномиального дерева.

1.6. Определение параметров u и d через волатильность акции

В предыдущем разделе мы определили вероятность роста цены акции в риск-нейтральных условиях, p . Теперь определим вероятность роста цены акции в реальном мире, p^* . Цена акции, ожидаемая в конце первого расчетного интервала равна $Se^{\mu\Delta t}$, где μ — ожидаемая доходность. На биномиальном дереве цена акции ожидаемая в этот момент равна

$$p^*S_0u + (1-p^*)S_0d.$$

Для того, чтобы найти реальную вероятность роста цены акции запишем приравняем ожидаемые цены акции

$$p^*S_0u + (1 - p^*)S_0d = Se^{\mu\Delta t}.$$

Отсюда следует, что

$$p^* = \frac{e^{\mu\Delta t} - d}{u - d}. \quad (1.17)$$

Волатильность цены акции σ определяется так, что величина $\sigma\sqrt{\Delta t}$ представляет собой стандартное отклонение доходности акции за короткий период времени Δt . Отсюда следует, что дисперсия доходности равна $\sigma^2\Delta t$. Дисперсия доходности, определенная с помощью однопериодного биномиального дерева, равна

$$p^*u^2 + (1 - p^*)d^2 - [p^*u + (1 - p^*)d]^2.$$

Чтобы сопоставить волатильность цены акции с параметрами дерева, составим следующие уравнение:

$$p^*u^2 + (1 - p^*)d^2 - [p^*u + (1 - p^*)d]^2 = \sigma^2\Delta t. \quad (1.18)$$

Подставляя выражение (1.17) в (1.18), получаем

$$e^{\mu\Delta t}(u + d) - ud - e^{2\mu\Delta t} = \sigma^2\Delta t.$$

Отбрасывая слагаемые, содержащие множитель Δt^2 и более высокие степени величины Δt , решение этого уравнение можно записать в следующем виде¹:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}},$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}.$$

Эти формулы для вычисления параметров u и d были предложены Коксом, Россом и Рубинштейном в 1979 году.

¹Здесь используется разложение $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

Цена акции в конце временного интервала Δt равна $S_0 e^{r\Delta t}$. Дисперсия доходности этой акции в риск-нейтральном мире равна

$$pu^2 + (1-p)d^2 - [pu + (1-p)d]^2 = [e^{r\Delta t}(u+d) - ud - e^{2r\Delta t}].$$

Подставляя $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ и $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$, приходим к выводу, что эта величина равна $\sigma^2\Delta t$, если отбросить слагаемые, содержащие множитель Δt^2 и более высокие степени величины Δt .

Анализ показывает, что при переходе из риск-нейтрального в реальный мир ожидаемая доходность цены акции меняется, однако ее волатильность остается прежней (по крайней мере при величине Δt стремящейся к нулю). Этот результат называется *теоремой Гирсанова* (Girsanov's theorem) [6]. При переходе из мира с набором одних рискованных предпочтений в мир с другими предпочтениями, ожидаемая скорость роста переменных также изменяется, но их волатильность по-прежнему остается неизменной.

1.7. Формулы биномиального дерева

Анализ предыдущего раздела показывает, что при шаге по времени, равном Δt , волатильность учитывается с помощью формулы

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (1.19)$$

или

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}. \quad (1.20)$$

Кроме того, из формулы (1.9) следует, что

$$p = \frac{a - d}{u - d}, \quad (1.21)$$

где

$$a = e^{r\Delta t}. \quad (1.22)$$

Формулы (1.19)–(1.22) определяют дерево. На практике продолжительность опциона делится на 30 и более интервалов длительностью Δt . В каждый из этих моментов времени цена акции может измениться по биномиальному закону. Это значит, что аналитик должен рассмотреть 31 вариант цены акции к моменту истечения опциона и 2^{30} , т.е. около миллиарда, возможных путей обхода биномиального дерева.

При уменьшении количества шагов по времени, т.е. величины Δt , модель биномиального дерева использует те же самые предпосылки о поведении цены акции, что и модель Блэка–Шоулза–Мертонна, которая будет описана далее. Когда биномиальная модель используется для оценки европейского опциона, его цена при увеличении количества шагов по времени сходится к цене Блэка–Шоулза–Мертонна [3].

Мы рассматривали опцион на акцию, по которой не начисляются дивиденды. В случае, если дивиденды начисляются, обеспечивая доходность q , то формула для оценки вероятности роста цена акции принимает вид

$$p = \frac{e^{(r-q)} - d}{u - d}.$$

При этом формулы для параметров u и d остаются неизменными. Графически пример построения биномиального дерева с пятью шагами для европейского опциона колл показан на рис. 1.5.

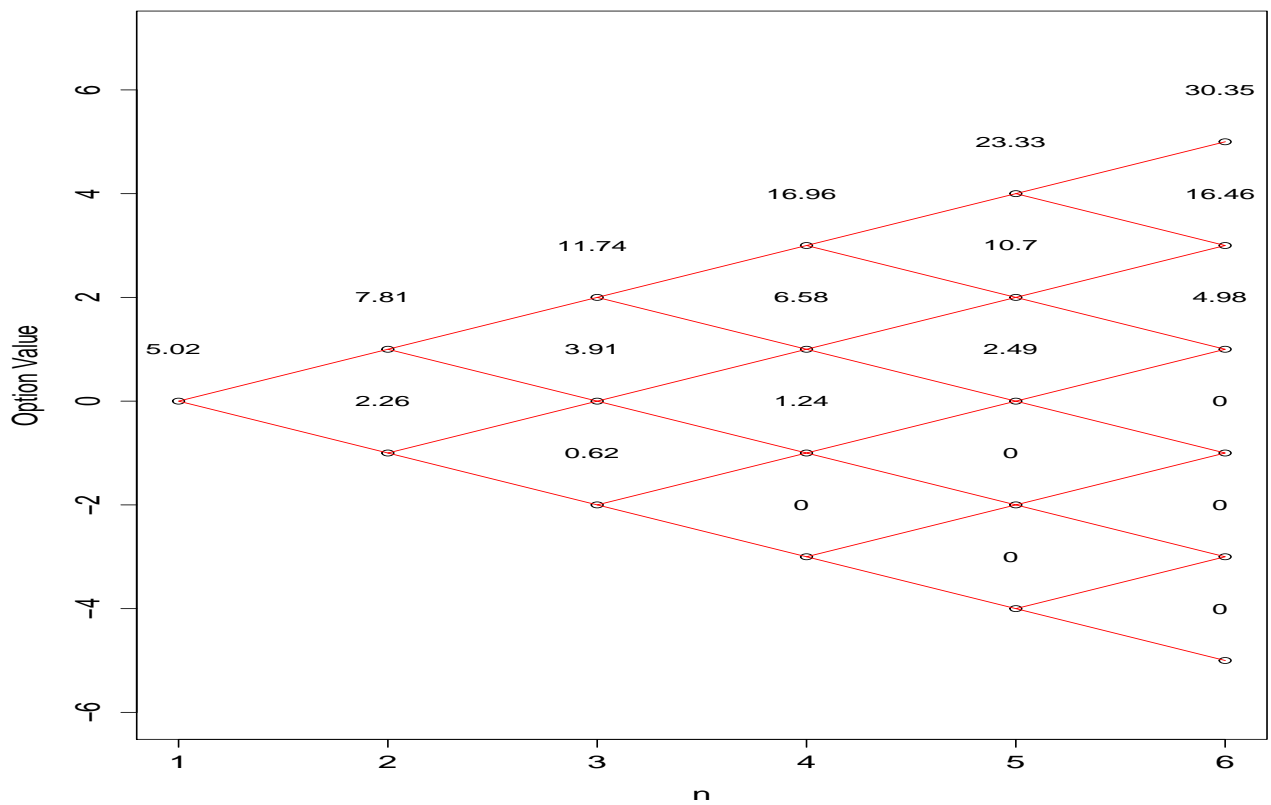


Рисунок 1.5 — Биномиальное дерево с параметрами $T = 0.5$, $\sigma = 0.3$, $S = 50$, $K = 50$, $r = 0.05$

2. Ценообразование опционов с помощью модели Блэка–Шоулза–Мертона

2.1. Винеровские процессы и лемма Ито

Если значения переменной непредсказуемо изменяются со временем, говорят, что она подчиняется *стохастическому процессу* (*stochastic process*). Различают стохастические процессы с дискретным и непрерывным временем. Стохастический процесс с дискретным временем возникает только тогда, когда значение переменной изменяется в фиксированные моменты времени. Стохастический процесс с непрерывным временем описывает поведение переменной, значения которой могут изменяться в любой момент времени. Кроме того, стохастические процессы образуют две категории: *непрерывные переменные* (*continuous variable*) и *дискретные переменные* (*discrete variable*). В первом случае переменная может принимать любое значение из выбранного диапазона, во втором — только дискретные значения. В данной главе рассматривается стохастический процесс с непрерывным временем и непрерывной переменной, описывающий изменение цены акции.

Марковский процесс (*Markov's process*) — это разновидность стохастического процесса, в котором будущее значение переменной зависит только от ее непосредственно предшествующего значения [7]. Все остальные значения переменной игнорируются. Как правило считается, что цена акции описывается марковским процессом. Предположим цена акции в настоящий момент времени равна 100 руб. Это значит, что для предсказания ее будущего значения не используется цена, зафиксированная неделю или месяц назад, а только ее последнее значение. Это не означает, что ретроспективные данные по ценам акций бесполезны. По ним можно определить параметры характеристики стохастического процесса, описывающего изменение цены акции (например, ее волатильность). Прогнозы будущих значений не являются абсолютно точными и должны быть выражены в терминах распределения вероятностей. Марковское свойство означает, что распределение вероятностей цены акции в будущем не зависит от пути, который акция прошла в прошлом. Марковское свойство цены акции

согласуется со слабой формой рыночной эффективности. Она утверждает, что текущая цена акции уже содержит всю информацию о ее предыдущих значениях.

Рассмотрим переменную, подчиняющуюся марковскому стохастическому процессу. Предположим ее текущее значение равно 10, а изменение в течение года описывается функцией $\phi(0, 1)$, где $\phi(t, v)$ — нормальное распределение вероятностей с математическим ожиданием t и дисперсией v . Определим процесс, который бы описывал распределение вероятностей в течение двух лет. Данный процесс описывается суммой двух нормальных распределений с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями. Поскольку переменная является марковской, эти процессы не зависят друг от друга. Складывая два независимых нормальных распределения, мы получим нормальное распределение, математическое ожидание которого равно сумме математических ожиданий каждого из слагаемых, а дисперсия — сумме их дисперсий. Таким образом, математическое ожидание изменений рассматриваемой переменной на протяжении двух лет равно нулю, а дисперсия — 2,0. Следовательно, изменение переменной через два года описывается распределением вероятностей $\phi(0, 2)$, а его стандартное отклонение равно $\sqrt{2}$.

Обобщая вышесказанное, распределение переменной за период времени T описывается величиной $\phi(0, T)$. В частности изменение переменной за очень короткий промежуток времени Δt описывается процессом $\phi(0, \Delta t)$. В то время как математическое ожидание суммы двух независимых процессов равно сумме математических ожиданий этих процессов, стандартное отклонение не равно сумме стандартных отклонений этих процессов. Например, при стандартном отклонении 1, стандартное отклонение переменной через 3 года будет равняться $\sqrt{3}$. В связи с этим величину неопределенности часто считают пропорциональной квадратному корню из времени.

Процесс, рассмотренный выше является *винеровским процессом* (*Wiener process*). Он представляет собой частный случай марковского стохастического процесса, когда математическое ожидание изменения переменной равно нулю, а дисперсия единице. Этот процесс часто используется в физике для описания движения частицы, участвующей в большом количестве столкновений с молекулами. Это явление называется *броуновским движением* (*Brownian motion*).

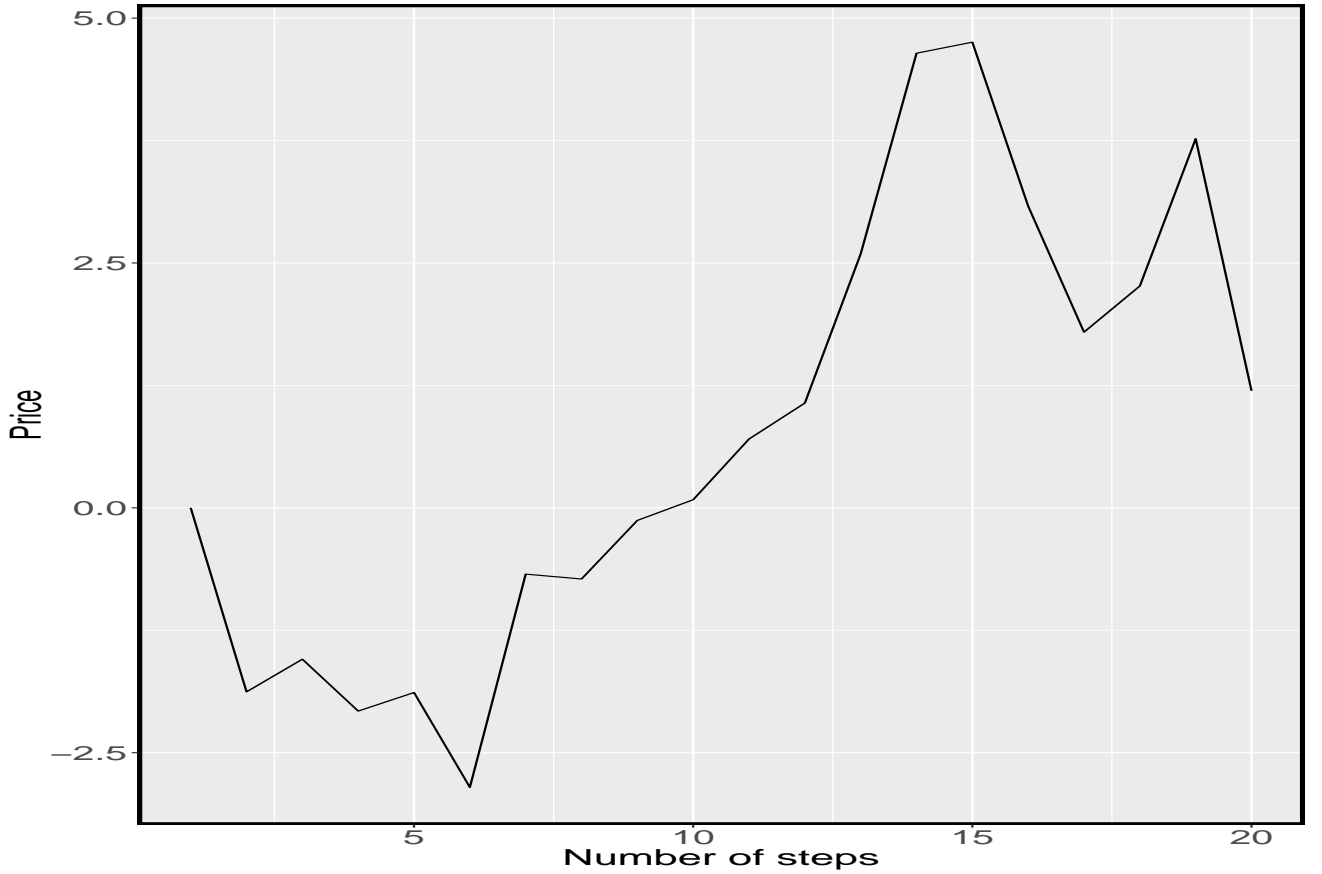


Рисунок 2.1 — Винеровский процесс при $N = 20$ и $\Delta t = 0.05$

Говоря формально, переменная z подчиняется винеровскому процессу, если она имеет следующие свойства.

Свойство 1. Изменение Δz на протяжении малого промежутка времени Δt удовлетворяет равенству

$$\Delta z = \varepsilon \sqrt{\Delta t}, \quad (2.1)$$

где ε — случайная величина, подчиняющаяся стандартизированному нормальному распределению $\phi(0, 1)$.

Свойство 2. Величины Δz на двух малых промежутках времени Δt являются независимыми.

Из первого свойства следует, что величина Δz имеет нормальное распределение, у которого математическое ожидание равно нулю, стандартное отклонение — $\sqrt{\Delta t}$, а дисперсия Δt . Второе свойство означает, что величина Δz подчиняется марковскому процессу. Примеры винеровского процесса, который описывается уравнением (2.1), представлены на рис. 2.1 и 2.2.

Рассмотрим увеличение переменной Δz на протяжении относительно долгого промежутка времени T . Это изменение можно обозначить как $z(T) - z(0)$.

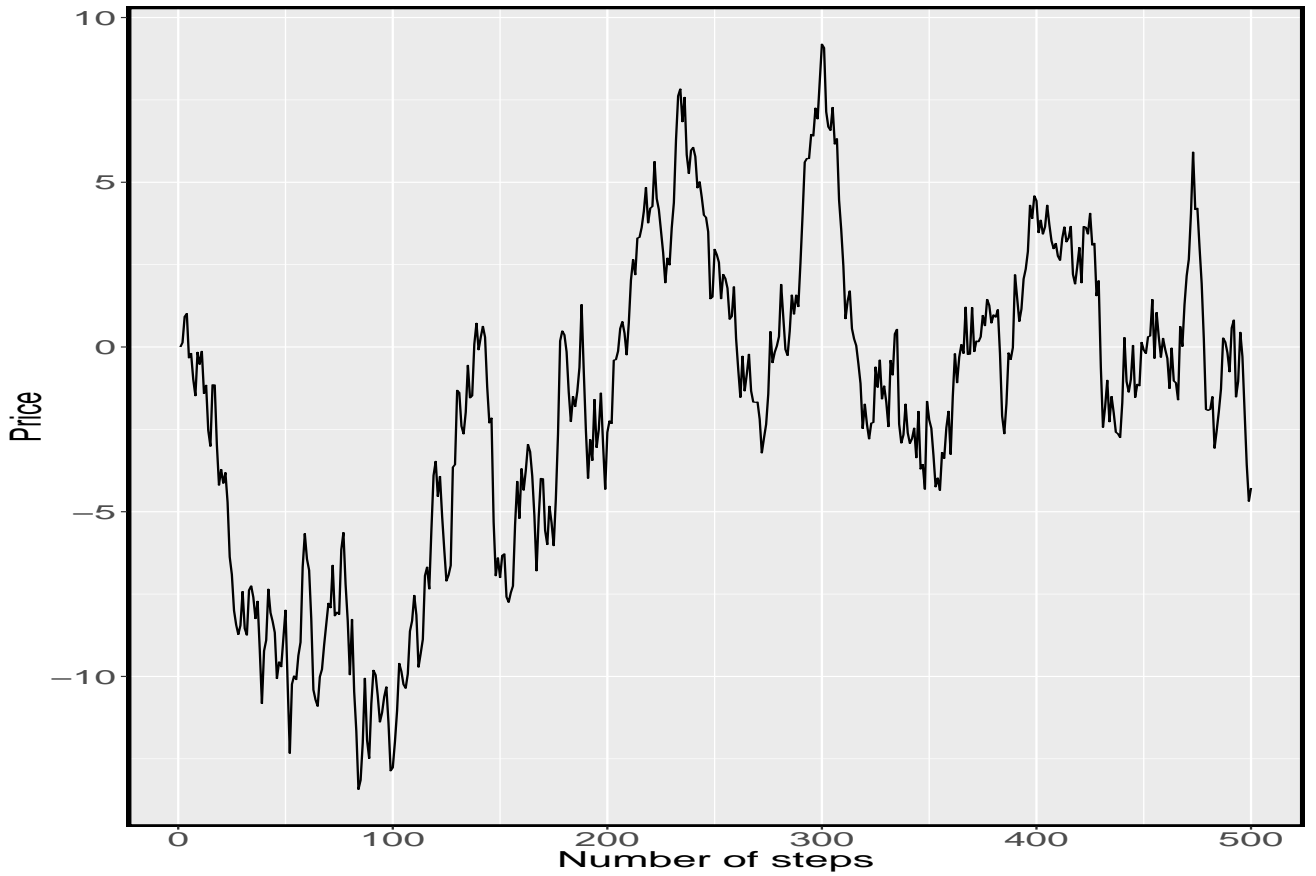


Рисунок 2.2 — Винеровский процесс при $N = 500$ и $\Delta t = 0.002$

Его можно представить в виде суммы увеличения переменной z на протяжении N относительно малых промежутках времени, имеющих длину Δt . Здесь

$$N = \frac{T}{\Delta t}.$$

Следовательно,

$$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}, \quad (2.2)$$

где $\varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, N$ — случайные величины, имеющие распределение вероятностей $\phi(0, 1)$. Из второго свойства винеровского процесса следует, что случайные величины ε_i независимы друг от друга. Из выражения (2.2) следует, что случайная величина $z(T) - z(0)$ имеет нормальное распределение, математическое ожидание которого равно нулю, дисперсия равна $N\Delta t = T$, а стандартное отклонение \sqrt{T} . Эти выводы согласуются с результатами, указанными выше.

Скоростью дрейфа (drift rate) или коэффициентом сноса стохастического процесса называется средняя величина изменения переменной величины за единицу времени, а *дисперсией (drift rate) или коэффициентом диффузии* — ве-

личина колебаний за единицу времени. Нулевой дрейф означает, что ожидаемое значение переменной z в любой момент времени равно ее текущему значению. Единичная дисперсия процесса означает, что дисперсия изменения переменной z на интервале времени T равна его длине. Для обозначения случая, когда $\Delta t \rightarrow 0$, будем использовать выражение dt . *Обобщенный винеровский процесс (generalized Wiener process)* для переменной x можно определить с помощью величины dz следующим образом:

$$dx = a dt + b dz, \quad (2.3)$$

где a и b — константы.

На небольших промежутках Δt изменение переменной Δx описывается следующим выражением:

$$\Delta x = a \Delta t + b \varepsilon \sqrt{\Delta t}.$$

Итак, величина Δx имеет нормальное распределение, математическое ожидание которого равно $a \Delta t$, стандартное отклонение — $b \sqrt{\Delta t}$, а дисперсия — $b^2 \Delta t$. Можно показать, что изменение самой переменной x в течение произвольного интервала времени T описывается нормальным распределением с математическим ожиданием aT и стандартным отклонением $b \sqrt{T}$. Таким образом, ожидаемая скорость дрейфа обобщенного (т.е. среднее изменение дрейфа в единицу времени) винеровского процесса (2.3) равна a , а дисперсия (т.е. дисперсия переменной за единицу времени) — b^2 . Такой процесс проиллюстрирован на рис. 2.3.

Процесс Ито

Стохастическим процессом Ито (Itô process) называется обобщенный винеровский процесс, в котором параметры a и b являются функциями, зависящими от переменной x и времени t [7]. Процесс Ито можно выразить следующей формулой:

$$dx = a(x, t) dt + b(x, t) dz. \quad (2.4)$$

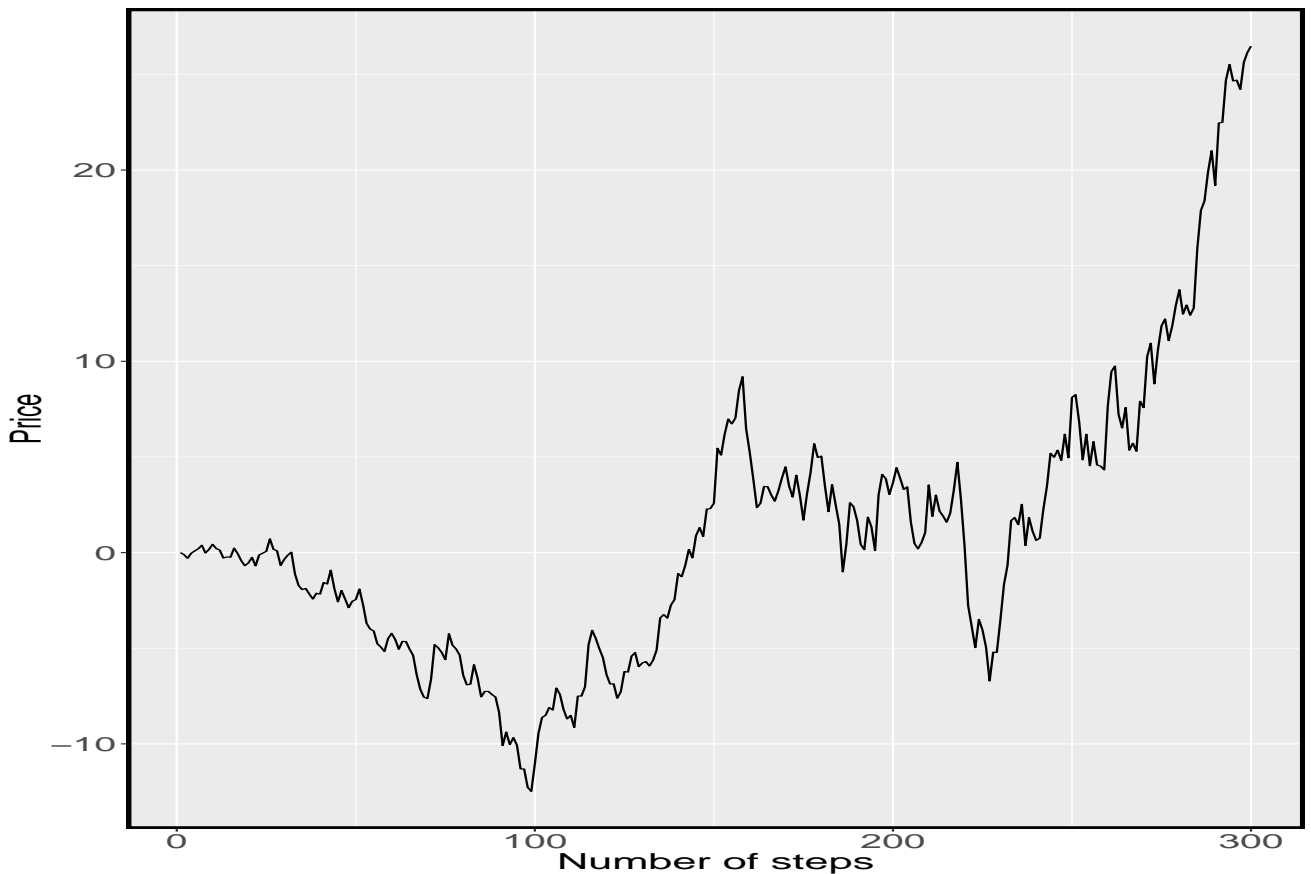


Рисунок 2.3 — Винеровский процесс с параметрами $a = 0.2$ и $b = 1.5$

И ожидаемая скорость дрейфа, и дисперсия этого процесса со временем изменяются. За небольшой промежуток времени от t до Δt переменная изменяется от x до $x + \Delta x$, где

$$\Delta x = a(x, t)\Delta t + b(x, t)\varepsilon\sqrt{\Delta t}.$$

2.2. Процесс, описывающий изменение цены акции

Можно предположить, что процесс изменения цены акции можно описать обобщенным винеровским процессом. Однако он не учитывает очень важные особенности цены акции. А именно, ожидаемая доходность цены акции не зависит от ее цены. Если инвестор хочет получить ожидаемую доходность на уровне 14% годовых, то для него не имеет значение, какая на текущий момент цена акции: 10 или 50 руб.

Гипотеза о неизменной скорости ожидаемого дрейфа должна быть заменена предположением, что постоянным является ожидаемая доходность (т.е. ожидаемый дрейф, деленный на цену акции). Если S — это цена акции в момент времени t , то ожидаемая скорость дрейфа должна быть равной μS , μ — некая константа. Это значит, что через короткий промежуток времени Δt ожидаемое значение, до которого поднимется цена акции, равно $\mu S \Delta t$. Параметр μ — это ожидаемый уровень доходности, выраженный в десятичном виде.

Если волатильность цены акции всегда равна нулю, то из этой модели следует, что

$$\Delta S = \mu S \Delta t.$$

Переходя к пределу $\Delta t \rightarrow 0$, получаем, что

$$dS = \mu S dt,$$

т.е.

$$\frac{dS}{S} = \mu dt.$$

Интегрируя это равенство от нуля до T , получаем, что

$$S_T = S_0 e^{\mu T}, \quad (2.5)$$

где S_0 и S_T — это цены акции в нулевой момент времени и момент времени T . Из формулы (2.5) следует, что если дисперсия равна нулю, то цена акции за единицу времени увеличивается на величину процентной ставки μ .

На практике инвестор не в состоянии точно предсказать доходность, какой бы не была цена акции. Резонно предположить, что изменчивость процентного дохода за короткий промежуток времени Δt остается постоянной независимо от цены акции. Это значит, что стандартное отклонение цены акции за короткий период времени Δt должно быть пропорциональным самой цене акции. Это приводит к следующей модели:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz,$$

или

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz. \quad (2.6)$$

Формула (2.6) наиболее широко используется для моделирования изменения цены акции [7]. Данная модель называется *геометрическим броуновским движением* (geometric Brownian motion). Она описывает процесс изменения цены акции в реальном мире. Для перехода в риск-нейтральный мир необходимо заменить ожидаемую доходность μ на безрисковую процентную ставку r .

Версия модели (2.6) с дискретным временем имеет следующий вид:

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}, \quad (2.7)$$

или

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t}, \quad (2.8)$$

где переменная ΔS — это изменение цены акции S за небольшой промежуток времени Δt , а ε — случайная величина, имеющая стандартизированное нормальное распределение. Параметр μ представляет собой ожидаемую доходность цены акции за единицу времени, а параметр σ — волатильность цены акции. Оба этих параметра считаются постоянными.

Левая часть равенства (2.7) — это процентный доход, полученный благодаря акции за короткий промежуток времени Δt . Слагаемое $\mu \Delta t$ представляет собой ожидаемое значение этого дохода, а $\sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}$ — стохастическую компоненту процентного дохода. Дисперсия этой компоненты, а значит и всего процентного дохода равна $\sigma^2 \Delta t$. Иначе говоря, параметр σ выбирается так, что $\sigma \sqrt{\Delta t}$ представляет собой стандартное отклонение процентного дохода за период времени Δt . Из равенства (2.7) следует, что величина $\Delta S/S$ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $\mu \Delta t$ и стандартным отклонением $\sigma \sqrt{\Delta t}$:

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \phi(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t). \quad (2.9)$$

2.3. Лемма Ито

Стоимость фондового опциона представляет собой функцию, зависящую от цены базовой акции и времени. Для того, чтобы вывести данную зависимость

математически используется результат, полученный математиком Киёши Ито (Kiyosi Itô) в 1951 году. Данный результат известен как *лемма Ито*.

Допустим значения переменной x подчиняются процессу Ито:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz, \quad (2.10)$$

где dz — винеровский процесс; a и b — функции, зависящие от переменных x и t . Скорость дрейфа переменной x равна a , а дисперсия — b^2 . Лемма Ито утверждает, что существует некая функция G , зависящая от переменных x и t и подчиняющаяся стохастическому процессу

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{dG}{dx} b dz, \quad (2.11)$$

где dz — винеровский процесс из уравнения (2.10). Таким образом, функция G подчиняется процессу Ито. Ее дрейф равен

$$\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2,$$

а дисперсия —

$$\left(\frac{dG}{dx} \right)^2 b^2.$$

Вспомним, что процесс изменения цены акции мы описываем уравнением

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (2.12)$$

Из леммы Ито следует, что функция G , зависящая от цены акции S и времени t , подчиняется стохастическому процессу

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} \mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{dG}{dx} \sigma S dz. \quad (2.13)$$

Проиллюстрируем на простом примере применение леммы Ито для определения закона изменения цены форвардного контракта. Его цена определяется как

$$F_0 = S_0 e^{rT},$$

где S_0 — цена спот в нулевой момент времени, F_0 — форвардная цена в нулевой момент времени, r — безрисковая процентная ставка, T — срок до окончания срока действия контракта.

Пусть F и S — форвардная и спотовая цены в момент времени t . Тогда

$$F = Se^{r(T-t)}. \quad (2.14)$$

Предполагая, что процесс, описывающий изменение цены акции описывается уравнением (2.12), применяя лемму Ито, определим процесс, описывающий поведение переменной F .

Из равенства (2.14) следует, что

$$\frac{\partial F}{\partial S} = e^{r(T-t)}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = 0, \quad \frac{dF}{dt} = -rSe^{r(T-t)}.$$

Используя уравнение (2.13), получаем, что процесс, описывающий поведение переменной F , имеет следующий вид:

$$dF = \left[e^{r(T-t)}\mu S - rSe^{r(T-t)} \right] dt + e^{r(T-t)}\sigma S dz.$$

Заменяя $Se^{r(T-t)}$ на F , получаем

$$dF = (\mu - r)Fdt + \sigma Fdz. \quad (2.15)$$

Как и цена акции S , форвардная цена F подчиняется законам геометрического броуновского движения. Ее скорость роста ожидаемой доходности равна $\mu - r$, а не μ . Скорость роста функции F представляет собой дополнительную доходность за счет цены акции S при безрисковой процентной ставке.

Теперь применим лемму Ито для вывода процесса, описывающего изменение величины $\ln S$, когда S подчиняется процессу (2.12). Введем функцию

$$G = \ln S.$$

Поскольку

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \quad \frac{dG}{dt} = 0,$$

из равенства (2.13) следует, что процесс, описывающий поведение функции G , имеет следующий вид:

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz. \quad (2.16)$$

Поскольку параметры μ и σ являются постоянными, из этого уравнения следует, что функция $G = \ln S$ подчиняется обобщенному винеровскому процессу. Он имеет постоянную скорость дрейфа $\mu - \sigma^2/2$ и постоянную дисперсию σ^2 . Следовательно, изменение функции $\ln S$ на интервале времени от нуля до момента T имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $(\mu - \sigma^2/2)T$ и дисперсией $\sigma^2 T$.

Отсюда следует, что

$$\ln S_T - \ln S_0 \sim \phi \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma^2 T \right], \quad (2.17)$$

т.е.

$$\ln S_T \sim \phi \left[\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma^2 T \right], \quad (2.18)$$

где S_T — цена акции в момент времени T , S_0 — цена акции в нулевой момент времени, $\phi(m, v)$ — нормальное распределение с математическим ожиданием m и дисперсией v .

Уравнение (2.18) показывает, что функция $\ln S$ имеет нормальное распределение. Другими словами, переменная S имеет лог-нормальное распределение.

2.4. Модель Блэка-Шоулза-Мертон

В начале 1970-х Фишер Блэк (Fisher Black), Майрон Шоулз (Myron Scholes) и Роберт Мертон (Robert Merton) сделали фундаментальное открытие в теории ценообразования фондовых опционов. Этот результат известен как модель Блэка-Шоулза-Мертон (или модель Блэка-Шоулза) [2, 8]. В 1997 году ее авторы были удостоены Нобелевской премии в области экономики [7].

Модель поведения цены акции, которая используется в данной модели, описана в предыдущем разделе. Распределение доходности акции за короткий

период времени Δt описывается нормальным распределением с математическим ожиданием $\mu\Delta t$ и стандартным отклонением $\sigma\sqrt{\Delta t}$:

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \phi(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t).$$

Из этого следует, что

$$\ln S_T - \ln S_0 \sim \phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right].$$

Таким образом,

$$\ln \frac{S_T}{S_0} \sim \phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right], \quad (2.19)$$

и

$$\ln S_T \sim \phi\left[\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right].$$

Лог-нормальное распределение цены акции можно использовать для вычисления распределения непрерывно начисляемой ставки доходности в течение интервала времени от нуля до момента T . Обозначим через x непрерывно начисляемую годовую норму прибыли за интервал времени от нуля до момента T . С одной стороны, из равенства

$$S_T = S_0 e^{xT}$$

следует, что

$$x = \frac{1}{T} \ln \frac{S_T}{S_0}. \quad (2.20)$$

С другой стороны, из равенства (2.19) следует, что

$$x \sim \phi\left[\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^2}{T}\right]. \quad (2.21)$$

Таким образом, непрерывно начисляемая ставка доходности имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $\mu - \sigma^2/2$ и стандартным отклонением $\sigma/\sqrt{\Delta t}$. При увеличении T стандартное отклонение переменной x уменьшается.

2.4.1. Волатильность

Одним из наиболее распространенных способов оценки волатильности является оценка стандартного отклонения цен акции на основании ретроспективных данных. Введем следующие обозначения:

$n + 1$ — количество наблюдений;

S_i — цена акции в конце i -го интервала ($i = 0, 1, 2, \dots, n$);

τ — длина интервала в годах.

Кроме того, пусть

$$u_i = \ln \frac{S_i}{S_{i-1}},$$

где $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Обычная оценка s стандартного отклонения величины u_i выглядит следующим образом:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2},$$

или

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n u_i^2 - \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{i=1}^n u_i \right)^2},$$

где \bar{u} — среднее значение величины u_i .

Из равенства (2.19) следует, что стандартная оценка величины u_i равна $\sigma\sqrt{\tau}$. Таким образом, переменная s представляет собой оценку величины $\sigma\sqrt{\tau}$. Итак, чтобы получить оценку $\hat{\sigma}$ величины σ , можно воспользоваться следующим соотношением:

$$\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\tau}}.$$

Стандартная ошибка этой оценки приближенно равна $\hat{\sigma}/\sqrt{2n}$. С одной стороны, чем больше n , тем больше точность прогноза. Однако не следует забывать, что со временем волатильность меняется, и слишком ранние значения σ могут исказить текущую картину. Обычно стараются брать значения волатильности цены акции за последние 90–180 дней. На практике, также часто используют значение n , равное количеству дней, из которых состоит прогнозируемый период.

2.4.2. Вывод дифференциального уравнения Блэка–Шоулза–Мертона

В основе модели Блэка–Шоулза–Мертона лежат следующие предпосылки:

1. Цена акции подчиняется стохастическому процессу, описанному в разделе 2.2;
2. Разрешается продавать ценные бумаги без покрытия и использовать вырученные суммы в полном объеме;
3. Транзакции выполняются бесплатно. Налоги не учитываются. Все ценные бумаги допускают неограниченное деление;
4. На протяжении срока действия дериватива дивиденды не выплачиваются;
5. Арбитражные возможности, свободные от риска, отсутствуют;
6. Торговля ценными бумагами происходит непрерывно;
7. Безрисковая процентная ставка r является постоянной для всех сроков погашения.

Если T срок действия опциона, то срок, оставшийся до его окончания равен $T - t$. Будем считать, что цена акции описывается стохастическим процессом, описанным в разделе 2.2:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz. \quad (2.22)$$

Пусть f — цена опциона колл или другой производной ценной бумаги, основанной на акции с ценой S . Они должны зависеть от переменных S и t . Из уравнения (2.13) следует, что

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz. \quad (2.23)$$

Дискретные варианты уравнений (2.22) и (2.23) имеют вид:

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z, \quad (2.24)$$

$$\Delta f = \left(\frac{df}{dS} \mu S + \frac{df}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) \Delta t + \frac{df}{dS} \sigma S \Delta z, \quad (2.25)$$

В уравнениях (2.24) и (2.25) величина $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$ принимает одно и то же значение. Следовательно, винеровский процесс можно исключить правильно подобрав состав инвестиционного портфеля, состоящего из акций и дериватива. Предположим, что инвестор владеет портфелем, который состоит из короткой позиции по деривативу и длинной позиции по $\partial f/\partial S$ акциям. Обозначим стоимость портфеля через Π . По определению

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S}S. \quad (2.26)$$

Приращение $\Delta\Pi$ стоимости портфеля на интервале времени Δt описывается формулой

$$\Delta\Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S. \quad (2.27)$$

Подставляя уравнения (2.24) и (2.25) в (2.27), получаем:

$$\Delta\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right) \Delta t. \quad (2.28)$$

Поскольку уравнение (2.28) не содержит величину Δz , то портфель на протяжении времени Δt является безрисковым. Из предположений, сделанных в начале раздела следует, что этот портфель непрерывно обеспечивает доходность на уровне той же безрисковой процентной ставки, что и другие безрисковые краткосрочные ценные бумаги. Следовательно,

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t, \quad (2.29)$$

где r — безрисковая процентная ставка. Подставляя в равенство (2.29) величины из уравнений (2.26) и (2.28), получаем

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right) \Delta t = r \left(f - \frac{\partial f}{\partial S}S \right) \Delta t,$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf. \quad (2.30)$$

Уравнение (2.30) называют дифференциальным уравнением Блэка–Шоулза–Мертонa. Оно имеет много решений, соответствующих всевозможным производным ценным бумагам, которые можно определить для

цены акции S . Для выделения из этого множества конкретного дериватива используются *краевые условия* (boundary conditions) по переменным S и t . Например, для европейского опциона колл краевое условие имеет вид $f = \max(S - K, 0)$ при $t = T$.

Следует отметить, что рассмотренный инвестиционный портфель является свободным от риска только на бесконечно малых промежутках времени. При изменении переменных S и t производная $\partial f / \partial S$ также изменяется. Для того, чтобы сохранить портфель свободным от риска, необходимо постоянно изменять пропорции производных ценных бумаг и акций, входящих в него.

Формулы Блэка–Шоулза–Мертона для вычисления первоначальных цен европейских опционов на покупку и продажу бездивидендных акций имеют следующий вид:

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2), \quad (2.31)$$

$$p = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1), \quad (2.32)$$

где

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r^2 + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r^2 - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Функция $N(x)$ — это интегральная функция стандартизированного нормального распределения. Иначе говоря, она представляет собой вероятность, что переменная с распределением $\phi(0, 1)$ меньше величины x . Чтобы дать интерпретацию членов формулы (2.31), перепишем уравнение в следующем виде:

$$c = e^{-rT} [S_0 N(d_1) e^{rT} - K N(d_2)]. \quad (2.33)$$

Выражение $N(d_2)$ представляет собой вероятность того, что опцион в риск-нейтральных условиях будет исполнен, так что величина $K N(d_2)$ — это цена исполнения опциона, умноженная на вероятность ее выплаты. Выражение $S_0 N(d_1) e^{rT}$ является ожидаемым значением переменной, которая в риск-нейтральных условиях равна S_T если $S_T > K$ и нулю — в противном случае. На рис. 2.5 показана сходимость результатов оценки стоимости опциона моде-

ли Кокса–Росса–Рубинштейна при увеличении количества шагов к результатам модели Блэка–Шоулза–Мертона.

2.4.3. Улыбка волатильности

Одной из предпосылок модели Блэка–Шоулза–Мертона является тот факт, что волатильность является постоянной для всех цен исполнения опциона. Однако на практике данное предположение не выполняется и инвесторы работают не с исторической волатильностью, а с *подразумеваемой волатильностью* (implied volatility), вычисленной на основании текущих цен опционных контрактов. К сожалению, на основе формулы Блэка–Шоулза–Мертона нельзя выразить волатильность аналитически. Для того, чтобы ее рассчитать, зная рыночную цену опциона, используются различные численные методы, как, например *метод бисекции* или *метод Ньютона–Рафсона*. Полученные значения волатильности отражают мнение рынка относительно будущего, в то время как волатильность, вычисленная на основании ретро-данных относится к прошлому. Феномен подразумеваемой волатильности часто называют *улыбкой волатильности*. Графически он показан на рис. 2.4.

Одной из возможных причин улыбки волатильности опционов на акции является наличие леввериджа¹. Если стоимость капитала компании падает, ее левверидж возрастает. В результате волатильность акции увеличивается, делая возможным еще более низкие цены. Если стоимость акций растет, то левверидж снижается. В результате волатильность уменьшается, делая более высокую цену менее вероятной.

При оценке нового опциона используется так называемая *временная структура волатильности*, которая представляет собой зависимость подразумеваемой волатильности от срока до истечения контракта. Другими словами, при оценке нового опционного контракта, инвесторы используют не историческую волатильность, а рассчитывают подразумеваемую волатильность, соответствующую цене исполнения и сроку до истечения контракта.

¹Левверидж (от англ. leverage) — доля заемных средств в активах компании

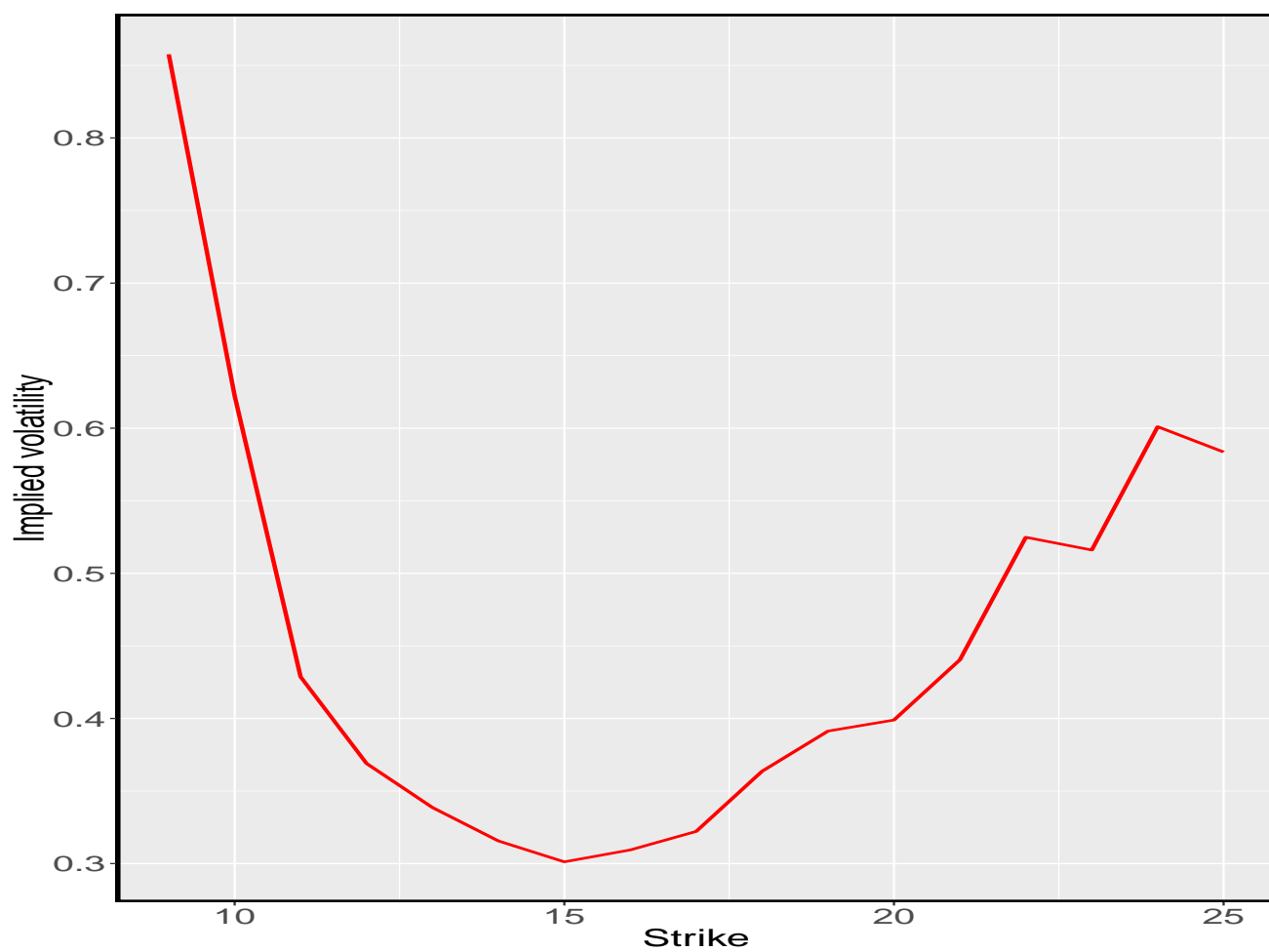


Рисунок 2.4 — Улыбка волатильности для опциона на акции Bank of America

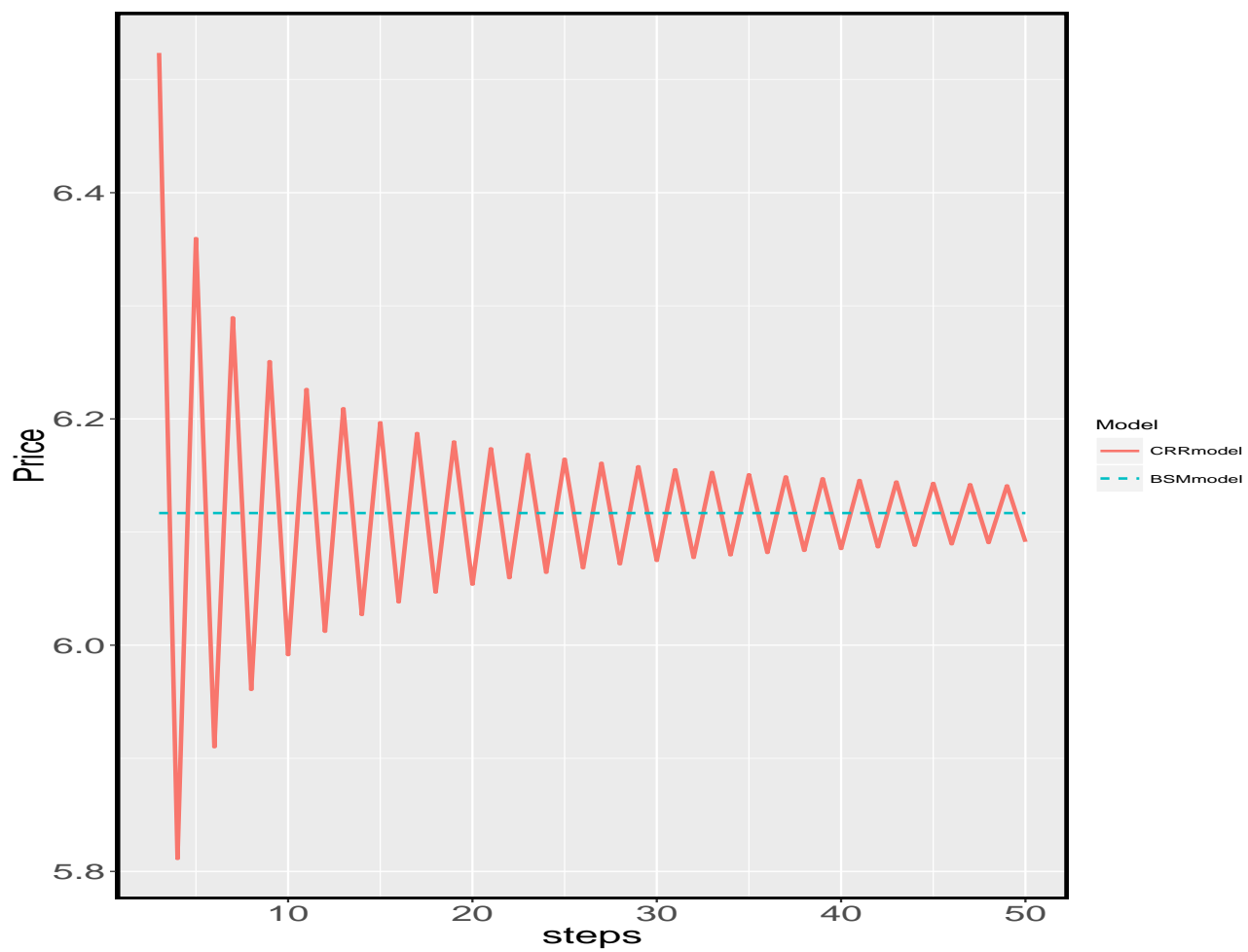


Рисунок 2.5 — Стоимость опциона, вычисленная с помощью CRR-модели и BSM-модели

Модель Блэка–Шоулза–Мертон не предполагает возможности досрочного исполнения опционов, поэтому использовать ее для оценки, например, некоторых американских опционов некорректно. Однако в случае с традиционными американскими опционами колл и пут возможность применения данной модели зависит от некоторых особенностей опционов, речь о которых пойдет ниже. Рассмотрим американский опцион на покупку бездивидендной акции, срок действия которого истекает через месяц, при условии, что цена акции равна 50 руб., а цена исполнения 40 руб. Опцион является прибыльным и его держатель может испытывать большой соблазн, чтобы исполнить его. Однако в данном случае инвестору выгоднее продать опцион, а не исполнять его. Поскольку владелец американского опциона колл обладает теми же возможностями, что и владелец европейского опциона колл, то $C \geq c$. Следовательно,

$$C \geq S_0 - Ke^{-rT}.$$

При условии, что $r > 0$, $C > S_0 - K$. Отсюда следует, что досрочное исполнение опциона не может быть оптимальной стратегией. Таким образом, поскольку американский опцион колл никогда не исполняется досрочно, то он становится эквивалентным европейскому опциону колл. Следовательно его можно оценить с помощью аналитической формулы Блэка–Шоулза–Мертон.

Теперь рассмотрим американский опцион пут с ценой исполнения 10 руб. и ценой акции практически равной нулю. В таком случае исполнения опциона является выгодным решением, поскольку инвестор не сможет получить больше 10 руб., т.к. цена акции не может быть отрицательной.

Одним из способов определения цен американских опционов² являются биномиальные деревья, описанные в части 1. Более универсальным приемом является метод Монте–Карло, который позволяет оценить не только американские опционы, но и экзотические опционные контракты.

²Как было показано выше, модель Блэка–Шоулза–Мертон можно применять для оценки американского опциона колл на бездивидендную акцию, т.к. досрочное исполнение такого опциона никогда не выгодно

3. Метод Монте–Карло

3.1. Монте–Карло на основе модели геометрического броуновского движения

Метод Монте–Карло представляет собой процесс моделирования различных траекторий показателей, от которых зависит стоимость производного инструмента. На основании полученных данных можно вычислить ожидаемые значения данных показателей в определенные моменты времени и на их основании вычислить стоимость производной бумаги в текущий момент времени, применив дисконтную ставку. В данном методе используются риск-нейтральные оценки.

Рассмотрим дериватив, зависящий от единственного рыночного показателя, S . Предположим, что выплаты по деривативу проводятся в момент времени T . Предполагая, что процентные ставки являются постоянными, вычислим цену дериватива следующим образом.

1. Генерируем случайную траекторию величины S в риск-нейтральных условиях;
2. Вычисляем размер выплаты по деривативу;
3. Повторяем шаги 1 и 2 многократно, получаем большое количество размеров выплат по деривативу в риск-нейтральных условиях;
4. Вычисляем среднее значение всех выборочных размеров выплат и оцениваем математическое ожидание размера выплат в риск-нейтральных условиях;
5. Применяем к полученной оценке дисконтную безрисковую процентную ставку и получаем стоимость дериватива.

Допустим, в риск-нейтральных условиях базовый рыночный показатель подчиняется следующему стохастическому процессу:

$$dS = \hat{\mu}Sdt + \sigma Sdz, \quad (3.1)$$

где dz — винеровский процесс; $\hat{\mu}$ — ожидаемая доходность в риск-нейтральных условиях; σ — волатильность. Чтобы оценить траекторию величины S , разде-

лим срок действия дериватива на N коротких интервалов, длина которых равна Δt , и аппроксимируем уравнение (3.1) следующим образом:

$$S(t + \Delta t) - S(t) = \hat{\mu}S(t)\Delta t + \sigma S(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t}. \quad (3.2)$$

Это позволяет вычислить значение S в момент Δt с помощью первоначального значения S , значение S в момент $2\Delta t$ при известном значении S в момент Δt и т.д.

На практике обычно моделируют поведение величины $\ln S$. Из леммы Ито следует, что стохастический процесс, описывающий поведение величины $\ln S$, имеет следующий вид:

$$d \ln S = \left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz, \quad (3.3)$$

так что

$$\ln S(t + \Delta t) - \ln S(t) = \left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t},$$

т.е.

$$\ln S(t + \Delta t) = \ln S(t) + \left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}. \quad (3.4)$$

Преимущество работы с величиной $\ln S$ заключается в том, что она подчиняется обобщенному винеровскому процессу. Это значит, что формула

$$\ln S(T) - \ln S(0) = \left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \varepsilon \sqrt{T}$$

справедлива для всех значений T . Следовательно,

$$S(T) = S(0) \exp \left[\left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \varepsilon \sqrt{T} \right]. \quad (3.5)$$

Формула (3.5) используется для моделирования по методу Монте-Карло. Продемонстрируем это на небольшом примере. Пусть $S_0 = 100$, $\sigma = 0.2$, $r = 0.05$. Кроме того, установим, что до конца срока действия дериватива осталось 360 дней (т.е. один год). Предположим, что цена базового актива меняется каждый день. Т.е. $T = 1/360$. Следовательно, количество шагов равно $N = 360$. Кроме того, установим, что мы моделируем 20 возможных траекторий движения акции. Применив формулу (3.5), получим матрицу размера 360×20 , где

каждая колонка отображает один из возможным путей эволюции S , а каждая строка соответствует одному шагу. Первые 20 строк и 9 столбцов данной матрицы представлены в табл. 1. Графически полученные результаты представлены на рис. 3.1.

Таблица 1

Моделирование цены базового актива при $S_0 = 100$, $r = 0.05$, $T = 1/360$, $\sigma = 0.2$ и $N = 360$

	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9
1	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
2	101.82	101.14	102.76	100.82	99.19	99.89	98.71	100.66	100.98
3	100.92	101.10	103.96	101.48	100.18	99.95	99.35	100.37	100.65
4	101.69	100.37	105.65	101.37	100.50	100.05	97.61	101.87	98.02
5	102.28	101.18	106.68	101.74	100.00	99.65	96.21	101.55	98.05
6	100.65	101.62	105.73	101.51	98.51	100.77	95.73	103.30	97.62
7	100.53	101.93	105.92	101.51	99.82	99.91	94.91	102.47	97.82
8	102.20	99.91	104.76	102.08	99.15	101.24	94.51	101.72	98.07
9	103.27	101.32	104.22	102.10	99.14	102.45	95.61	100.70	98.75
10	103.76	100.61	104.16	101.40	99.45	104.37	96.10	99.60	99.88
11	104.54	100.10	103.75	101.14	99.77	104.52	96.43	98.93	100.94
12	105.71	100.18	103.00	101.78	99.16	103.25	95.50	98.55	101.29
13	107.26	100.71	103.12	102.12	100.24	103.58	95.78	97.89	100.48
14	108.28	101.34	102.29	101.31	99.99	102.91	96.54	99.93	100.54
15	108.67	100.45	102.05	99.65	99.70	102.63	95.72	98.35	100.82
16	108.86	100.07	103.85	99.25	98.10	102.11	95.26	98.99	100.78
17	109.64	99.75	104.07	98.66	98.57	102.08	95.70	99.97	100.39
18	108.77	99.39	104.68	98.90	99.81	101.23	98.22	100.41	101.01
19	106.88	98.42	105.28	97.58	102.62	100.50	96.48	100.07	102.12
20	105.27	97.54	104.83	98.25	100.21	99.09	94.73	98.69	101.51

Предположим, что мы хотим оценить стоимость европейского опциона колл, с ценой исполнения $K = 100$ и сроком до истечения $T = 1$. Исходя из полученных результатов, средняя цена актива к концу срока действия опциона равна 105.5279. Следовательно, стоимость опциона в конце срока его действия равна $c_T = 105.5279 - 100 = 5.5279$. Для того, чтобы вычислить текущую стоимость опциона, c_0 , необходимо применить дисконт, равный безрисковой процентной ставке, $r = 0.05$. Получим $c_0 = 5.5279e^{-0.05} = 5.25829$.

Конечно на практике недостаточно смоделировать лишь 20 траекторий базового актива. Точность оценки зависит от количества произведенных испы-

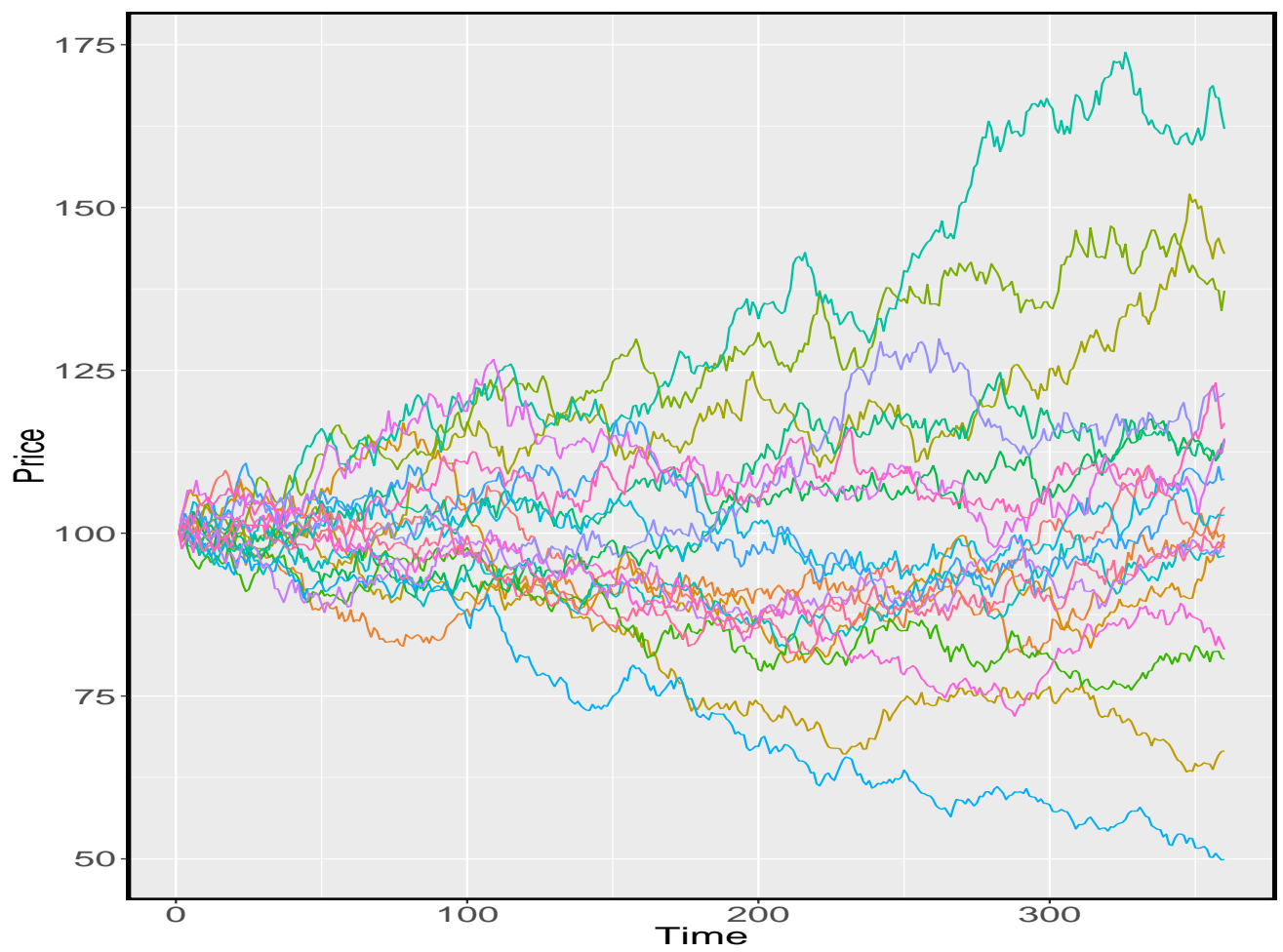


Рисунок 3.1 — Моделирование цены базового актива

таний. Проведя M независимых испытаний, можно оценить математическое ожидание и стандартное отклонение дисконтированного выигрыша дериватива. Пусть μ — математическое ожидание; ω — стандартное отклонение. Переменная μ представляет собой оценку стоимости дериватива. Стандартная ошибка этой оценки равна

$$\frac{\omega}{\sqrt{M}}.$$

Следовательно, 95%-ный доверительный интервал для цены f дериватива имеет следующий вид¹:

$$\mu - \frac{1.96\omega}{\sqrt{M}} < f < \mu + \frac{1.96\omega}{\sqrt{M}}.$$

Это значит, что неопределенность стоимости дериватива обратно пропорциональна количеству проведенных испытаний. Для десятикратного увеличения точности моделирования необходимо увеличить количество испытаний в сто раз.

Рассмотрим на примере, каким образом количество шагов и количество испытаний (симуляций) влияет на оценку стоимости европейского опциона колл. Для этого предположим, что начальная цена акции в момент времени $t = 0$ принимает значение $S_0 = 70$. До конца срока действия опциона остается 7 дней, т.е. $T = 7/360$. Безрисковая ставка процента $r = 0.05$, волатильность цены акции $\sigma = 0.2$. Цена акции подчиняется геометрическому броуновскому движению (3.5). Стоимость опциона, с вышеописанными параметрами, вычисленная с помощью модели Блэка–Шоулза–Мертон составляет 3.10892. Для моделирования цены акции будем использовать следующее число траекторий: 20, 100, 1000 и 50000. Для каждого из этих вариантов будем использовать различную частоту движения цены акции: один раз в день, каждые четыре часа в день и каждый час дня. Результаты представлены в табл. 2. Здесь имена строк это количество симуляций, а имена столбцов это частота движения цены акции и отклонение рассчитанных значений цены опциона от цены, полученной с помощью модели Блэка–Шоулза–Мертон.

Как видно из табл. 2, с ростом количества испытаний (возможных путей движения цены акции), растет точность оценки. Кроме того, точность оценки производного финансового инструмента растет с увеличением частоты движе-

¹При условии, что $f \sim \phi(\mu, \omega^2)$

Моделирование цены опциона со сроком до истечения 1 неделя

	1 день	ошибка	4 часа	ошибка	1 час	ошибка
20 sim	3.43	0.32	3.58	0.47	3.42	0.31
100 sim	3.47	0.36	3.11	0.00	3.31	0.21
1000 sim	3.12	0.01	3.10	-0.00	3.09	-0.02
50000 sim	3.11	0.00	3.12	0.01	3.09	-0.02

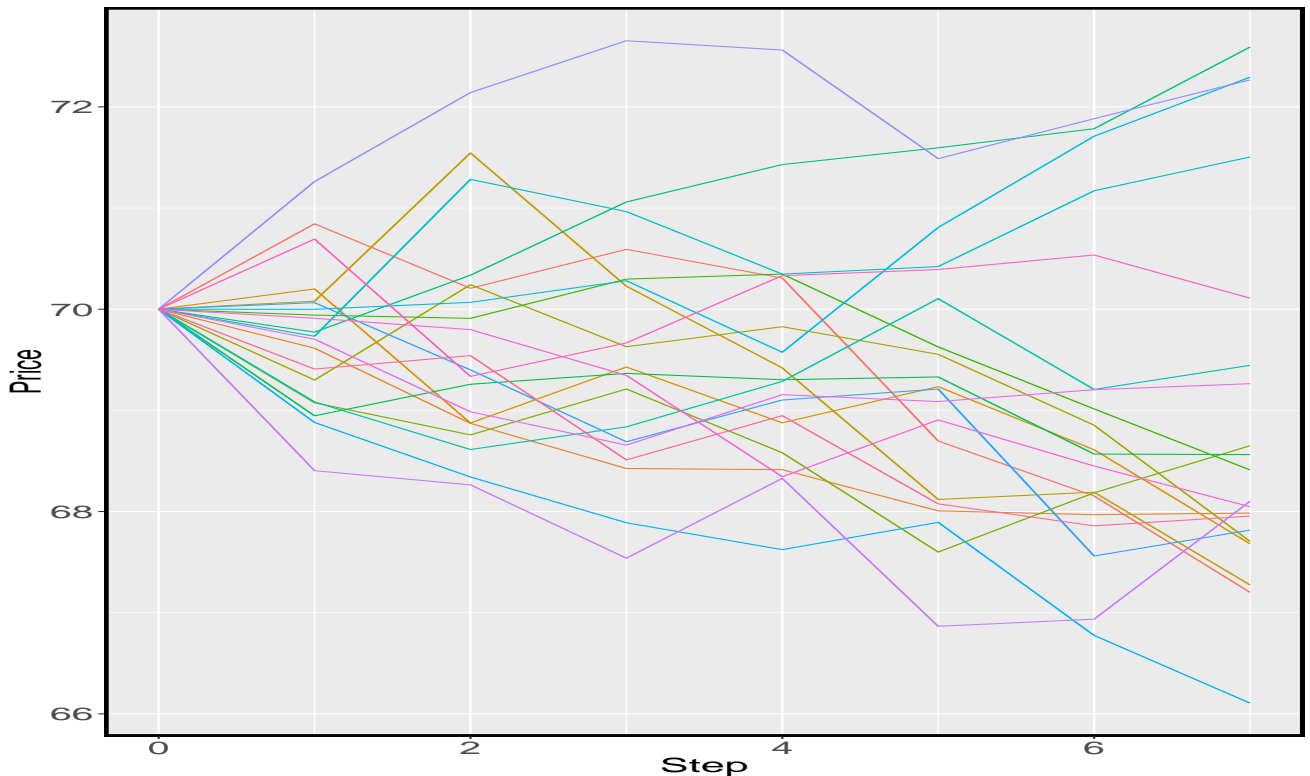


Рисунок 3.2 — Симуляция движения цены акции, количество испытаний = 7, количество шагов = 20

ния цены базового актива, т.е. количества шагов, которые делает акция за период до истечения опциона, $T - t_0$. Проиллюстрируем графически ситуацию, где покажем движение цены акции один раз в день, т.е. всего 7 движений, и с количеством испытаний, равном 20 (рис. 3.2) и ситуацию, когда цена акции меняется каждый час, т.е. количество движений $24 \times 7 = 168$, и количеством испытаний, равном 100 (рис. 3.3).

Проведем аналогичный анализ для опциона со схожими параметрами и сроком до истечения 1 месяц. При этом не будем менять частоту движения базового актива и число испытаний и посмотрим, как изменится точность оценки его стоимости. Результаты анализа представлены в табл. 3.



Рисунок 3.3 — Симуляция движения цены акции, количество шагов = 168,
количество испытаний = 100

Таблица 3

Моделирование цены опциона со сроком до истечения 1 месяц

	1 день	ошибка	4 часа	ошибка	1 час	ошибка
20 sim	3.46	-0.27	4.81	1.09	3.00	-0.73
100 sim	3.38	-0.35	4.03	0.30	3.77	0.04
1000 sim	3.71	-0.01	3.49	-0.24	3.71	-0.02
50000 sim	3.72	-0.01	3.78	0.05	3.72	-0.00

Как видно из табл. 3, при увеличении срока прогнозирования и неизменном числе шагов во времени, точность оценки падает. Вышеприведенные примеры свидетельствуют о том, что метод Монте–Карло способен давать точные оценки стоимости опциона при проведении достаточного количества испытаний и достаточно частоте движения цены акции.

3.2. Оценка экзотических опционов

Теперь предположим, что необходимо решить задачу оценки экзотического опциона, который компания хочет продать для хеджирования своих рисков. Это довольно часто встречающаяся практика на фондовом рынке. Т.к. экзотические опционы, как правило, не содержат стандартных условий исполнения контракта, которые необходимо для их торговли на биржевом рынке, они торгуются на внебиржевых рынках. Компания, выписывающая такой опцион, должна очень осторожно подойти к оценке дериватива, т.к. неверное определение его цены моментально приведет к тому, что другие участники (а это как правило крупные финансовые институты) начнут совершать спекулятивные операции с целью извлечения прибыли (т.к. откроются арбитражные возможности).

Одним из распространенных видов экзотических опционов являются азиатские опционы. Выплаты по такому опциону осуществляются в момент истечения его действия и зависят не от конечной цены базового актива, как в случае с европейским опционом, а от его средней цены за определенный промежуток времени, S_{ave} :

$$c = \max(S_{ave} - K, 0).$$

Азиатские опционы дешевле обычных и лучше удовлетворяют специфические потребности корпораций. Предположим, что организация ожидает равномерные денежные потоки от своего контрагента на протяжении ближайших 6 месяцев в иностранной валюте. В таком случае, финансовый директор заинтересован в том, чтобы средний курс обмена валюты не опускался ниже определенного уровня. Для таких целей он может приобрести азиатский опцион, что будет дешевле, чем приобретать один или несколько европейских, т.к. волатильность средней цены базового актива значительно ниже волатильности самой цены базового актива.

Оценивать азиатский опцион с помощью стандартной формулы Блэка–Шоулза–Мертонa (2.31) не представляется возможным, т.к. она содержит в себе предпосылки о том, что стоимость опциона зависит от цены актива в момент экспирации, а не от его средней величины. Существуют различные способы обойти данную проблему, одним из которых является способ оценивания азиатских опционов с помощью метода Монте–Карло. Мы будем также модели-

ровать M различных сценариев движения цены базового актива и N шагов во время каждого сценария. В итоге получаем матрицу $N \times M$. После вычисляем среднюю цену базового актива на протяжении каждого смоделированного пути M_i , где $i = 1, 2, \dots, M$ и на основании данных цен вычисляем стоимость опциона по формуле

$$c = \max(S_{ave} - K, 0).$$

Получив M цен опционов, находим его текущую цену, c , путем усреднения полученных цен и их дисконтирования по безрисковой процентной ставке:

$$c = e^{-rT} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M c_i, \quad (3.6)$$

где r — безрисковая процентная ставка, T — срок до истечения опциона в доля года, M — количество смоделированных путей движения цены базового актива, c_i — средняя цена опциона, рассчитанная на основании смоделированного пути M_i .

Итак, рассчитаем стоимость азиатского опциона колл с параметрами $S_0 = 120$, $K = 110$, $T = 10/360$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.3$. Установим количество моделируемых путей, равным $M = 5000$, а количество шагов на каждом пути, равным 10 (т.е. цена актива совершает одно движение в день). Первые 10 сгенерированных путей представлены в табл. 4.

Используя формулу (3.6), вычислим стоимость азиатского опциона колл. Получим значение $c = 10.18$. Стоимость стандартного опциона колл с аналогичными параметрами, вычисленная с помощью модели Блэка–Шоулза–Мертон, составляет $c = 10.39$, что как и ожидалось выше стоимости азиатского опциона.

3.3. Распределение цены базового актива

До сих пор при моделировании траектории движения цены акции мы исходили из того, что данную траекторию можно описать уравнением геометрического броуновского движения (3.5). Данная модель основывается на предположении, что логарифм доходности цены акции имеет нормальное распределе-

Таблица 4

Первые 9 сгенерированных путей для азиатского опциона с параметрами $S_0 = 120$, $K = 110$, $T = 10/360$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.3$, $M = 5000$

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9
1	120.00	120.00	120.00	120.00	120.00	120.00	120.00	120.00	120.00
2	116.60	117.62	119.54	121.42	119.63	121.42	119.72	119.23	118.60
3	117.23	116.64	120.98	120.37	115.89	122.36	119.61	117.75	120.06
4	116.83	119.49	120.29	122.65	117.18	124.63	118.76	117.50	121.94
5	116.60	122.30	118.12	124.02	119.93	121.55	118.21	118.90	121.87
6	113.63	121.68	117.38	121.42	121.42	120.04	115.66	120.73	122.41
7	116.10	122.54	121.22	124.64	120.94	119.13	115.80	121.32	120.98
8	117.75	125.20	121.32	121.92	121.85	115.95	116.94	118.54	119.38
9	118.00	128.43	118.39	119.61	119.69	117.45	117.28	115.55	117.56
10	116.99	127.59	114.42	118.54	118.21	117.70	116.17	114.41	114.02
11	119.75	126.06	114.93	117.18	118.62	119.09	116.00	117.57	112.38

ние: $\log r \sim \phi(\mu, \sigma^2)$. Однако данное предположение очень редко выполняется на практике. Как правило, график логарифма доходности цены акции имеет более острый пик. На рис. 3.4 представлен график функции плотности распределения логарифма доходности акций компании Google за 2015 год и график плотности вероятностей нормального распределения.

Как видно из рис. 3.4, пик распределения доходностей компании Google выше пика нормального распределения со схожими параметрами. В то время как хвосты теоретического распределения тяжелее хвостов реального распределения доходностей. Для большей достоверности проведем тест Колмогорова-Смирнова и сравним схожесть распределения доходностей акций компании Google и лог-нормального распределения с теми же параметрами. В данном тесте нулевая гипотеза состоит в том, что обе выборки имеют одинаковые функции распределения, в то время как альтернативная гипотеза заключается в том, что рассматриваемые выборки из разных распределений. По результатам анализа $p - value = 0.02858$. Т.е. вероятность ошибиться при принятии альтернативной гипотезы при верной нулевой гипотезе составляет около 2%. Это означает, что использование нормального распределения занижает вероятность получения средней доходности и завышает вероятность получения "экстремальных" значений доходности. Все это может привести к некорректному

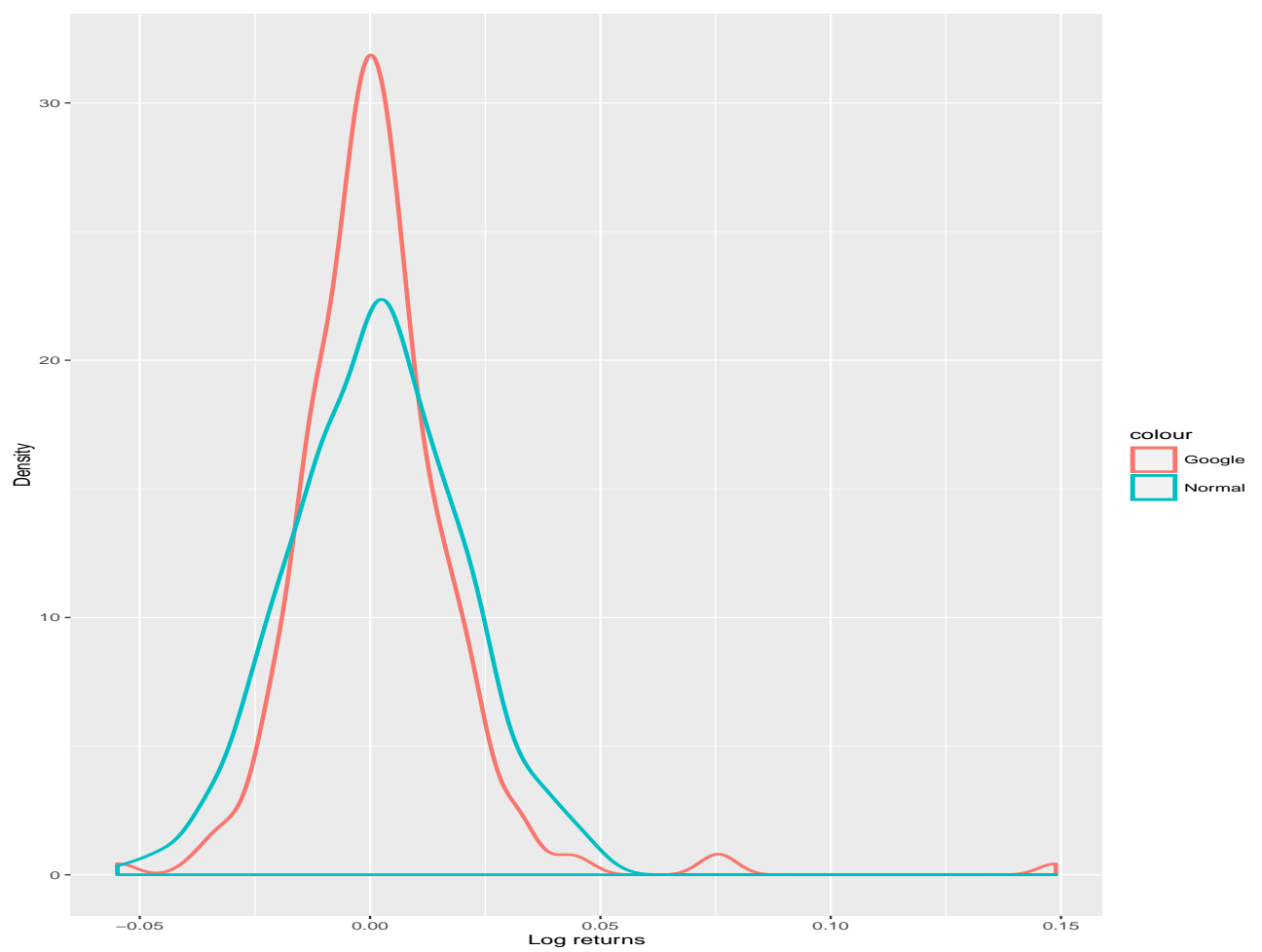


Рисунок 3.4 — Плотность вероятности логарифма доходностей

определению цены опциона, т.к. она напрямую зависит от распределения стоимости базового актива.

В то время как модель Блэка–Шоулза–Мертона основывается на предположении о том, что доходность цены акции имеет лог-нормальное распределение, метод Монте–Карло свободен от данной предпосылки. Напомним, что до сих пор для моделирования цены базового актива мы использовали формулу (3.5):

$$S(T) = S(0) \exp \left[\left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \varepsilon \sqrt{T} \right],$$

где величина ε имеет стандартное нормальное распределение, т.е. $\varepsilon \sim \phi(0, 1)$.

3.4. Нормальное обратное Гауссово распределение

Теперь, когда мы знаем, что распределение акций нашей компании отличается от нормального, для определения стоимости азиатского опциона, который мы планируем продать на внебиржевом рынке, при моделировании траекторий движения цены акции, мы можем использовать другое распределение вероятностей, отличное от нормального. Для того, чтобы применить это на практике, нужно сначала определиться, какая функция плотности вероятностей сможет достаточно точно описать распределение доходностей нашей акции. В данной работе в качестве такого распределения будем использовать *Нормальное обратное Гауссово распределение* (Normal Inverse Gaussian distribution, **NIG**). Функция плотности данного распределения имеет следующий вид:

$$f(x) = \frac{\alpha \delta K_1 \left(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} \right)}{\pi \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}} e^{\delta \gamma + \beta(x - \mu)} \quad (3.7)$$

Функция плотности (3.7) имеет параметры μ - позиция, α - вес хвостов, β - параметр асимметрии, δ - параметр масштаба, $K_1(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя третьего типа. Для их нахождения будем использовать *Метод максимального правдоподобия* (Maximum likelihood estimation, MLE). Убедимся, что на практике доходность акции лучше описывается с помощью NIG распределения, чем с помощью нормального распределения. Оценим параметры

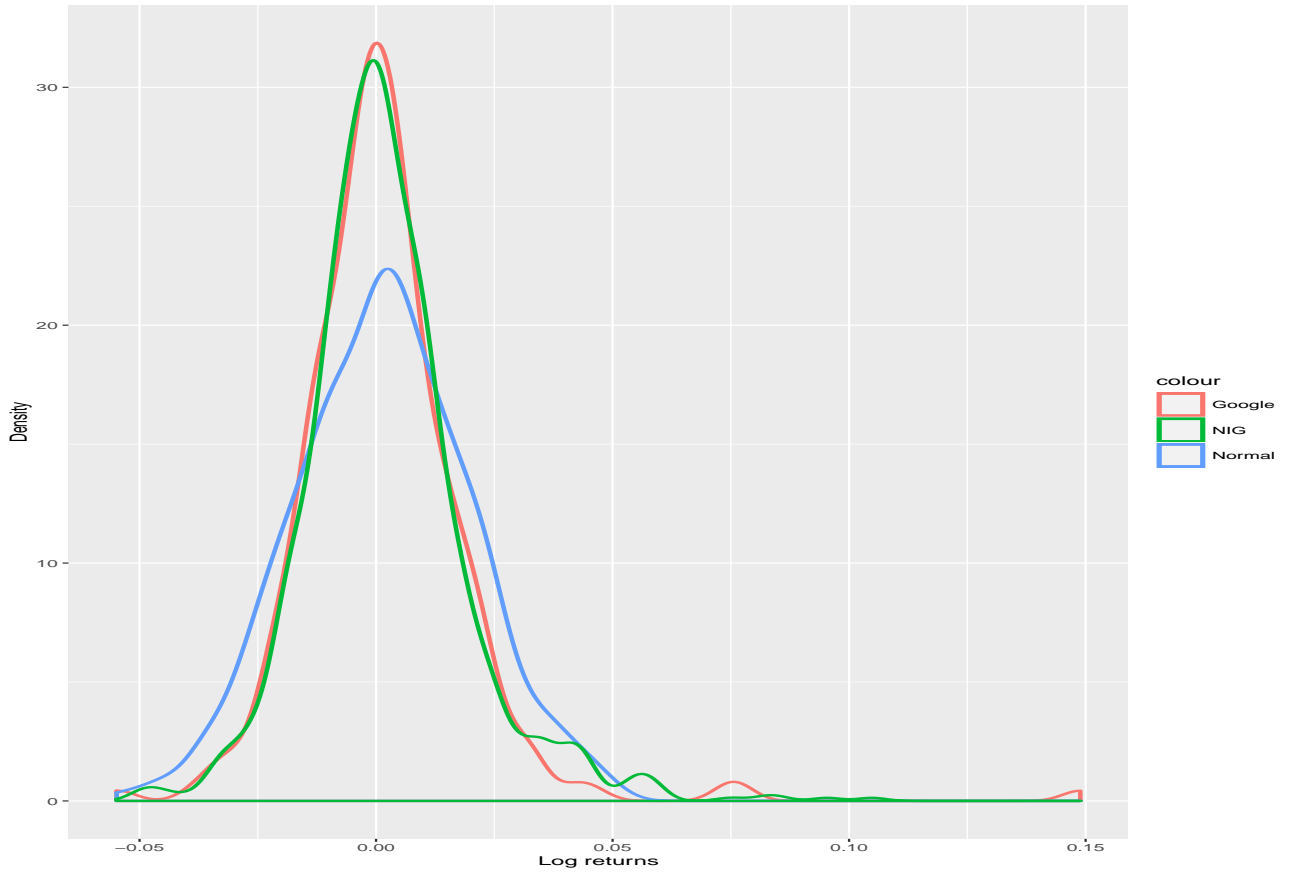


Рисунок 3.5 — Плотность вероятности логарифма доходностей

распределения, так чтобы они наилучшим образом описывали распределения доходностей акций компании Google на рис. 3.4. Для этого будем использовать команду R *nigFit* из пакета *fBasics*. В результате получаем, что $\hat{\mu} = -0.0024$, $\hat{\delta} = 0.0138$, $\hat{\alpha} = 54.53$, $\hat{\beta} = 14.74$. График, на котором изображены все три распределения вероятностей (Google, нормальное и NIG) представлен на рис. 3.5. Нетрудно заметить, что распределение NIG куда более точно описывает распределения вероятностей лог-доходности нежели нормальное распределение. Это подтверждает и тест Колмогорова–Смирнова, p-value которого составляет 0.9, что гораздо выше p-value, полученного при сравнении с нормальным распределением.

Мы не можем заменить в уравнении (3.5) параметр $\varepsilon \sim N(0, 1)$ на $\varepsilon^* \sim NIG(\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta})$, т.к. в таком случае NIG распределение логарифма доходностей будет иметь параметры отличные от $\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}$, т.е. не будет соответствовать распределению доходностей, которое использовалось изначально для оценки параметров распределения.

Ридберг в 1997 [9] году предложил использовать следующее уравнение для описания доходностей, которые будут иметь распределение $NIG(\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta})$:

$$X = \mu + \beta\sigma^2 + \sigma\varepsilon, \quad (3.8)$$

где $\sigma^2 \sim IG(\delta/\gamma, \delta^2)$ это *обратное Гауссово распределение* (Inverse Gaussian distribution) с параметрами $\mu = \delta/\gamma$ и $\lambda = \gamma^2$; $\varepsilon \sim N(0, 1)$, $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$.

Также вспомним, что логарифм кумулятивной доходности, R_T , определяется как

$$R_T = \log \frac{S_T}{S_0} = \log \left[\frac{S_T}{S_{T-1}} \times \frac{S_{T-1}}{S_{T-2}} \times \cdots \times \frac{S_1}{S_0} \right] = \sum_{i=1}^T r_i, \quad (3.9)$$

где $r_i = \log S_{i+1}/S_i$.

Итак, для моделирования процесса движения цены акции будем использовать следующий алгоритм:

1. Загрузка исторических данных стоимости цены акции, S , и расчет логарифма доходностей как $r_i = \log S_i/S_{i-1}$;
2. Расчет с помощью метода максимального правдоподобия параметров нормального обратного Гауссова распределения $\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}$, которые бы наилучшим образом описывали распределение логарифма доходностей цены акции, рассчитанное на предыдущем шаге;
3. Моделирование $\sigma^2 \sim IG(\delta/\gamma, \delta^2)$, где $IG(\cdot)$ — обратное Гауссово распределение ;
4. Моделирование $\varepsilon \sim N(0, 1)$;
5. Моделирование $r_i = \mu + \beta\sigma_i^2 + \sigma_i\varepsilon_i$;
6. Расчет кумулятивных доходностей, R_i путем суммирования смоделированных доходностей r_i : $R_T = \sum_{i=0}^T r_i$;
7. Моделирования движения цены акции как $S_T = S_0 e^{R_T}$.

После этих шагов мы можем вычислить стоимость опциона колл, c , как:

$$c = e^{-rT} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max(S_{Ti} - K; 0), \quad (3.10)$$

где M — это число смоделированных путей движения цены акции, T — срок до экспирации опциона, выраженный в долях года, r — ставка дисконтирования для определения текущей стоимости будущих выплат (не обязательно равна без-

рисковой), S_{T_i} – стоимость акции к моменту времени T для смоделированного пути i , K – страйк опциона.

Отличительной особенностью использования модели (3.8) является то, что безрисковая процентная ставка, r , уже не играет той роли, как в модели (3.5). Модель (3.5) является фундаментом для модели Блэка–Шоулза–Мертона и безрисковая процентная ставка определяет тренд при моделировании цены акции. Иными словами для модели геометрического броуновского движения математическое ожидание логарифма доходности, r_T за короткий промежуток времени T определяется как

$$\mathbb{E}(r_T) = \exp \left[(r - 0.5\sigma^2) T \right], \quad (3.11)$$

где r – безрисковая процентная ставка, T – небольшой шаг по времени, σ – волатильность доходности акции.

В то время как для модели (3.8) математическое ожидание логарифма доходности за короткий промежуток времени равно

$$\mathbb{E}(r_T) = \exp \left[\hat{\mu} + \hat{\beta} \frac{\hat{\delta}}{\hat{\gamma}} \right], \quad (3.12)$$

где $\hat{\gamma} = \sqrt{\hat{\alpha}^2 - \hat{\beta}^2}$, $\hat{\mu}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\delta}$, $\hat{\alpha}$ – параметры NIG распределения, рассчитанные эмпирически на основании исторических данных с помощью метода максимального правдоподобия.

Т.е. при использовании подхода по применению NIG распределения и соответствующей модели движения цены акции, мы работаем не в риск-нейтральных условиях, а в реальных, т.к. безрисковая процентная ставка не определяет тренд в модели (3.8). Вычисляя текущую стоимость опциона в соответствие с (3.10), мы используем процентную ставку дисконтирования r для приведения будущих выплат к текущей стоимости. Важно то, что данная ставка не обязательно должна являться безрисковой. Таким образом, отпадает проблема определения того, какая ставка на текущий момент времени является безрисковой.

Графически смоделированные траектории цены акции по модели (3.8) выглядят похоже на траектории, смоделированные по модели геометрического броуновского движения (3.5):

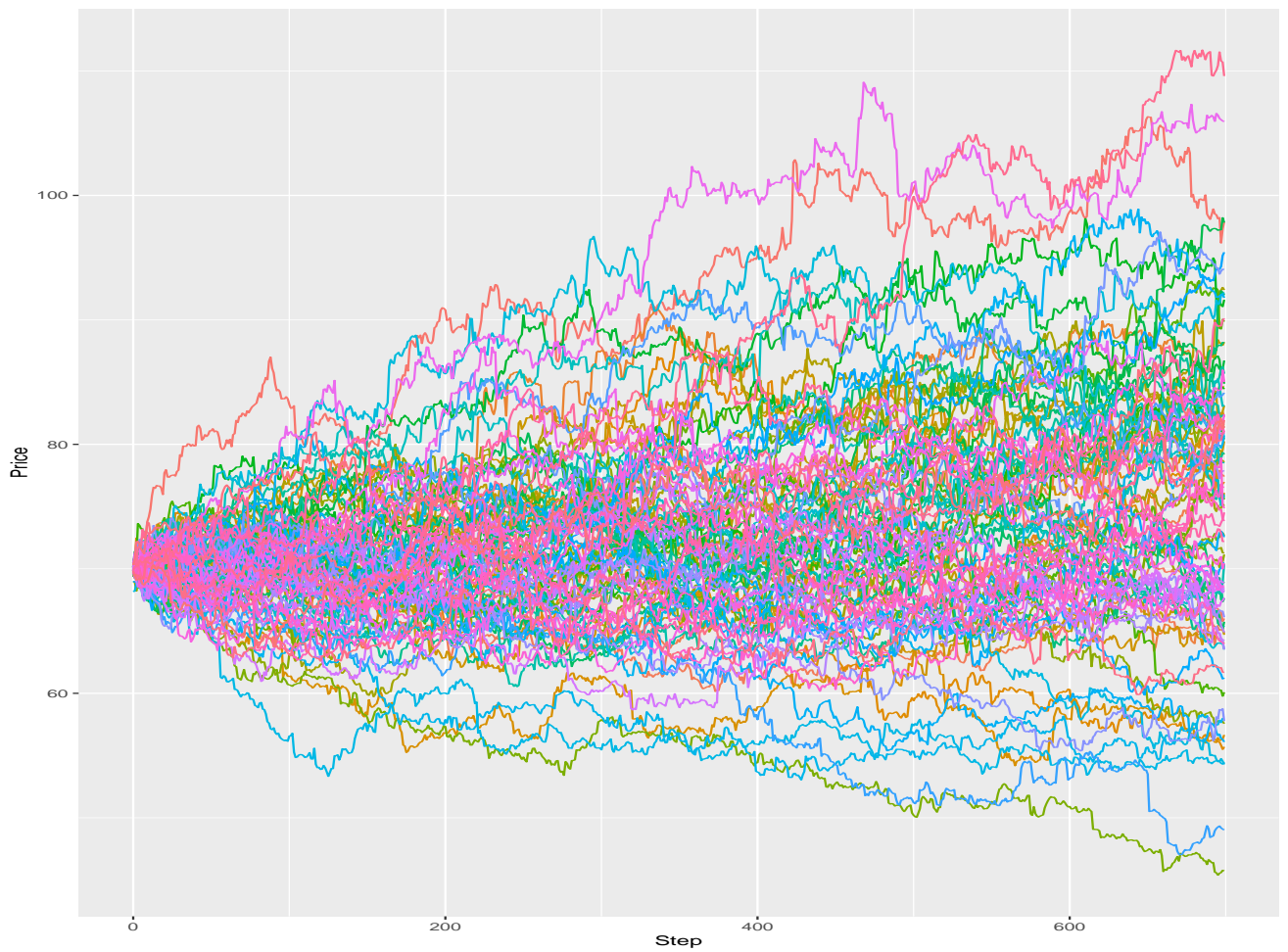


Рисунок 3.6 — Моделирование траектории движения цены акции по модели NIG (3.8) (смоделировано 100 траекторий)

Однако, результаты оценки стоимости опциона существенно различаются. Пусть заданы следующие параметры: $S_0 = 70$, $K = 70$, $T = 100/360 = 0.28$, $\sigma = 0.3$, $r = 0.05$, $M = 5000$, $\hat{\mu} = -7.4 \times 10^{-5}$, $\hat{\delta} = 0.00334$, $\hat{\alpha} = 93.25$, $\hat{\beta} = 5.24$. Стоимость такого опциона по модели Блэка–Шоулза–Мертона, c_{BSM} , составляет 4.88. При применении стандартного метода Монте–Карло (в основе которого лежит модель геометрического броуновского движения, GBM) с количеством симуляций $M = 5000$ цена опциона составила $c_{MC}^{GBM} = 4.90$. При применении Монте–Карло, в основе которого лежал модель нормального обратного Гауссова распределения (NIG), рассчитанная стоимость опциона составила $c_{MC}^{NIG} = 8.70$.

Как видим, стоимость опциона по модели NIG значительно превышает стоимость опциона по модели GBM. Причина в том, что модель GBM моделирует траектории цены акции под вероятностной мерой \mathbb{Q} (risk-neutral measure), т.е. риск-нейтральной мерой. \mathbb{Q} - мера предполагает отсутствие арбитражных возможностей. Ожидаемая доходность любого финансового инструмента принимается равной безрисковой процентной ставке (см. раздел 1.5 и уравнение (1.10)).

В то же время модель NIG осуществляет ценообразование под реальной мерой \mathbb{P} (real world measure), т.к. для оценки параметров NIG распределения используются исторические данные. Для более наглядной иллюстрации рассчитаем математическое ожидание доходности для заданных выше параметров. Для GBM модели по формуле (3.11) оно будет равно:

$$\mathbb{E}(R_T^{GBM}) = \left(\exp \left[\left(0.05 - \frac{1}{2} 0.3^2 \right) \times 0.000567 \right] \right)^{700} = 1.001986$$

Для модели NIG в соответствие с (3.12) оно будет равно:

$$\mathbb{E}(R_T^{NIG}) = \left(\exp \left[-7.4 \times 10^{-5} + 5.24 \times \frac{0.00334}{93.11} \right] \right)^{700} = 1.082711$$

Как следует из приведенных результатов математическое ожидание доходности по модели NIG превышает математическое ожидание по модели GBM. Это в свою очередь приводит к завышению стоимости опционного контракта.

Можем ли мы использовать модель NIG в том виде в таком виде для определения цены опциона для его последующей продажи на рынке? Нет, не можем. Из-за того, что *дрейф* (drift) по модели NIG превышает безриско-

вую процентную ставку, предположение об отсутствии арбитражных возможностей не выполняется, т.к. инвестор может создать портфель, приносящий доходность выше безрисковой. Поэтому для корректного определения цены опциона необходимо произвести корректировку дрейфа NIG модели так, чтобы $\mathbb{E}(R_T^{NIG}) = \mathbb{E}(R_T^{GBM})$. Обозначим корректировочный коэффициент как k , где

$$k = \frac{(r - 0.5\sigma^2)\Delta t}{\hat{\mu} + \hat{\beta}\hat{\delta}/\hat{\gamma}},$$

где Δt – небольшой шаг по времени, используемый в процессе моделирования.

Тогда, формула, используемая для моделирования лог-доходностей с помощью NIG распределения, примет вид:

$$r_i = \mu k + k\beta\sigma^2 + \sigma\varepsilon. \quad (3.13)$$

Стоимость опциона с описанными выше параметрами, вычисленная на основе уравнения (3.13), составит 5.07, что гораздо ближе к оценке GBM модели.

Теперь предположим, что мы оцениваем стоимость азиатского опциона с теми же параметрами, что описаны выше. Для того, чтобы сравнить полученные результаты, проведем по 30 прогонов моделирования для моделей GBM и NIG и сравним средние значения. Графически результаты представлены на рис. 3.7. Для расчета стоимости азиатского опциона будем использовать формулу (3.6).

Среднее значение по модели GBM составило 2.824195, по модели NIG 2.795306. Для того, чтобы удостовериться, что модели дают статистически разные результаты, проведем *тест Стьюдента* (t-test). Нулевой гипотезой в данном тесте является равенство средних значений двух выборок, в то время как альтернативная гипотеза заключается в их различии. P-value данного теста составило 0.3016, что выше порогового значения 0.05, следовательно нулевая гипотеза на 5-% уровне значимости отвергается. Иными словами, средние значения двух выборок статистически отличаются.

Выше мы рассчитывали стоимость опциона "около денег" (at the money, ATM). Посмотрим как модели (3.5) и (3.13) оценивают стоимость опционов "в деньгах" (in the money, ITM) и "без денег" (out of the money, OTM). Для этого, текущую стоимость акции оставим без изменений ($S_0 = 70$), а страйк опциона



Рисунок 3.7 — Результаты оценки стоимости азиатского опциона по моделям GBM (3.5) и NIG (3.13) с параметрами $S_0 = 70$ и $K = 60$

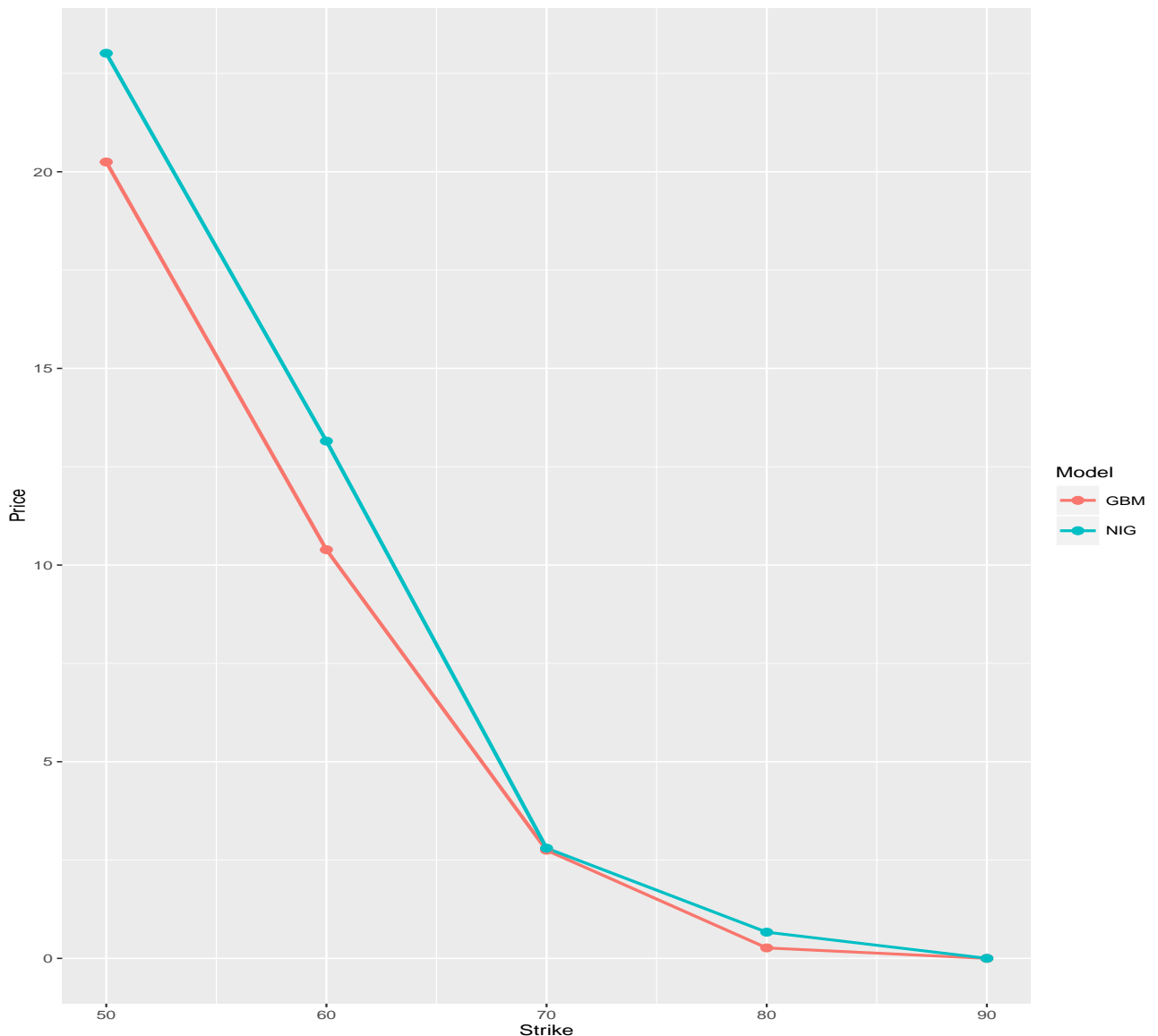


Рисунок 3.8 — Результаты оценки стоимости азиатского опциона по моделям GBM (3.5) и NIG (3.13) для разных страйков

дважды увеличим на 10 пунктов вверх и вниз ($K_0 = 70$, $K_1 = 80$, $K_2 = 90$, $K_3 = 60$, $K_4 = 50$). Графически результаты представлены на рис. 3.8.

Как видно из рис. 3.8, модель NIG рассчитывает цены азиатских опционов выше, чем модель GBM. Кроме того, различие становится более наглядным по мере удаления страйка опциона от текущей спотовой цены. Так, например, превышение стоимости опциона по NIG модели над GBM моделью для $S_0 = 70$ и $K = 70$ составляет 1.019. В то время как для $S_0 = 70$ и $K = 80$ стоимость опциона по модели NIG выше в 2.5 раза.

Таким образом, использование модели NIG (3.13) в основе метода Монте-Карло позволяет получить статистически отличные оценки стоимости опциона по сравнению с классической моделью GBM (3.5). Из проведенных

расчетов наглядно видно, что ценовое различие возрастает по мере удаления страйка опциона, K , от текущей спотовой цены, S_0 .

Заключение

В данной работе были рассмотрены основные виды опционных контрактов и модели оценки их стоимости. Был сделан вывод о том, что в реальности не выполняется предпосылка GBM модели о лог-нормальном распределении доходностей акции. В связи с чем было предложено использовать нормальное обратное Гауссово распределения для моделирования доходностей. Для данной цели был предложен следующий алгоритм:

1. Загрузка исторических данных стоимости цены акции, S , и расчет логарифма доходностей как $r_i = \log S_i/S_{i-1}$;
2. Расчет с помощью метода максимального правдоподобия параметров нормального обратного Гауссова распределения $\hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}$, которые бы наилучшим образом описывали распределение логарифма доходностей цены акции, рассчитанное на предыдущем шаге;
3. Моделирование $\sigma^2 \sim IG(\delta/\gamma, \delta^2)$, где $IG(\cdot)$ — функция обратного Гауссова распределения;
4. Моделирование $\varepsilon \sim N(0, 1)$;
5. Моделирование $r_i = \mu k + k\beta\sigma_i^2 + \sigma_i\varepsilon_i$, где $k = \frac{(r-0.5\sigma^2)\Delta t}{\hat{\mu} + \hat{\beta}\hat{\delta}/\hat{\gamma}}$;
6. Расчет кумулятивных доходностей, R_i путем суммирования смоделированных доходностей r_i : $R_T = \sum_{i=0}^T r_i$;
7. Моделирования движения цены акции как $S_T = S_0 e^{R_T}$;
8. Расчет стоимости азиатского опциона по формуле (3.6).

Результаты по модели NIG статистически отличаются от результатов оценки стоимости азиатского опциона по модели GBM. Из проведенного анализа видно, что оценки стоимости по модели NIG выше, чем по модели GBM. Кроме того, отмечается, что разница в оценке между моделями возрастает по мере удаления страйка опциона, K от текущей стоимости акции, S_0 , в большую или меньшую сторону.

Таким образом, если перед компанией стоит задача продажи азиатского опциона, то для определения его стоимости целесообразней вместо классической модели GBM использовать предложенную модель NIG, чтобы избежать недооценки продаваемого дериватива и возможных убытков в результате действий спекулянтов.

Список использованных источников

- [1] Benth F. E., Groth M., Kettler P. C. A quasi-Monte Carlo algorithm for the normal inverse Gaussian distribution and valuation of financial derivatives //International Journal of Theoretical and Applied Finance. – 2006. – Т. 9. – №. 06. – С. 843-867.
- [2] Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities //The journal of political economy. – 1973. – С. 637-654.
- [3] Cox J. C., Ross S. A., Rubinstein M. Option pricing: A simplified approach //Journal of financial Economics. – 1979. – Т. 7. – №. 3. – С. 229-263.
- [4] Ivanov N. O., Davnis V. V. Evaluation of shock influences on Russian financial market using R //Современная экономика: проблемы и решения. – 2015. – №. 11. – С. 33-39.
- [5] Eriksson A., Ghysels E., Wang F. The normal inverse Gaussian distribution and the pricing of derivatives //The Journal of Derivatives. – 2009. – Т. 16. – №. 3. – С. 23-37.
- [6] Girsanov I. V. On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures //Theory of Probability & Its Applications. – 1960. – Т. 5. – №. 3. – С. 285-301.
- [7] Hull J. C. Options, futures, and other derivatives. – Pearson Education India, 2006.
- [8] Merton R. C. Theory of rational option pricing //The Bell Journal of economics and management science. – 1973. – С. 141-183.
- [9] Rydberg T. H. The normal inverse Gaussian Lévy process: simulation and approximation //Communications in statistics. Stochastic models. – 1997. – Т. 13. – №. 4. – С. 887-910.
- [10] Буренин А. Н. Рынки производных финансовых инструментов. – М. : Инфра-М, 1996.

- [11] Буренин А. Н. Рынок ценных бумаг и производных финансовых инструментов. – М. : 1 Федеративная Книготорговая Компания, 1998.
- [12] Буренин А. Н. Фьючерсные, форвардные и опционные рынки. – М. : Три-вола, 1995.
- [13] Дарушин И. Гипотеза определяющего влияния срочного рынка //Рынок ценных бумаг. – 2006. – №. 1. – С. 16-19.
- [14] Джежел П. Применение методов Монте-Карло в финансах. – Litres, 2014.
- [15] Жуковская М. В. Рынок производных ценных бумаг //Таганрог: Изд-во ТРТУ. – 2004.
- [16] Кусковский Л. Н. Теория вероятностей и математическая статистика. – Иваново : Иван. гос. ун-т, 2001.
- [17] Смирнов Н. В., Большев Л. Н. Таблицы для вычисления функций нормального распределения //М.: Изд-во Изв. АН СССР. – 1962.
- [18] Шарп У., Александер Г. Д., Бэйли Д. В. Инвестиции. – Инфра-М, 2001.
- [19] Шведов А. С. Лекции. О математических методах, используемых при работе с опционами //Экономический журнал ВШЭ. – 1998. – Т. 2. – №. 3. – С. 385-409.

Приложение А

Код R

В данном приложении приведены листинги программного кода R, которые использовались для проведения практических расчетов в данной работе.

Листинг А.1

Загрузка необходимых пакетов

```
library(quantmod)
library(rlms)
library(rusquant)
5 library(ggplot2)
library(dplyr)
library(car)
library(glmnet)
library(devtools)
10 library(lmtest)
library(xts)
library(zoo)
library(xts)
library(LSMonteCarlo)
15 library(rmarkdown)
library(pandoc)
library(knitr)
library(installr)
library(fOptions)
20 library(MASS)
library(tidyr)
library(ghyp)
library(xtable)
library(statmod)
25 options(stable.floating = FALSE)
options(xtable.timestamp = "")
```

Листинг А.2

Задание функций для расчета стоимости опциона на основании BSM модели, метода Монте–Карло и расчета подразумеваемой волатильности

```

#Функция расчета цены опциона на основе BSM
bs.opm <- function(S, K, T, riskfree, sigma, type) {
  d1 <- (log(S/K) + (riskfree + 0.5*sigma^2)*T)/(sigma*sqrt(T))
  5   d2 <- d1 - sigma*sqrt(T)
  if (type == "Call") {
    opt.val <- S*pnorm(d1) - K*exp(-riskfree*T)*pnorm(d2)
  }
  if (type=="Put") {
  10   opt.val <- K*exp(-riskfree*T)*pnorm(-d2) - S*pnorm(-d1)
  }
  opt.val
}

15 #Функция расчета подразумеваемой волатильности
iv.opt <- function(S, K, T, riskfree, price, type) {
  sigma <- 0.20
  sigma.up <- 1
  sigma.down <- 0.001
  20   count <- 0
  epsilon <- bs.opm(S, K, T, riskfree, sigma, type) - price
  while (abs(epsilon) > 0.00001 && count <1000) {
    if (epsilon < 0) {
      sigma.down <- -sigma
    25     sigma <- (sigma.up + sigma)/2
    } else {
      sigma.up <- sigma
      sigma <- (sigma.down + sigma)/2
    }
  30   epsilon <- bs.opm(S, K, T, riskfree, sigma, type) - price
  count <- count+1
  }
  if (count == 1000) {
    return(NA)
  35   } else {return(sigma)}
}

#Расчет стоимости опциона на с помощью метода Монте-Карло
mc <- function(S_0, Nsim, step = 1, rf, sigma, TTM, K, type = "
  Call") {
  40   mu <- rf - 0.5*sigma^2
  dt <- step/360

```

```

Nstep <- TTM/step
data_1 <- matrix(exp(mu*dt + sigma*sqrt(dt)*rnorm(Nsim*Nstep))
  , ncol = Nsim)
data_2 <- apply(data_1, 2, cumprod)
45 data_2 <- S_0*data_2
data_3 <- rbind(rep(S_0, Nsim), data_2)
data_4 <- tail(data_3, 1)
if (type == "Call"){
  data_5 <- mean(pmax(data_4 - K, 0))*exp(-rf*TTM/360)
50 }
else {data_5 <- mean(pmax(K - data_4, 0))*exp(-rf*TTM/360)}
data_6 <- as.data.frame(data_3)
data_6$Step <- seq(0, nrow(data_6)-1, 1)
data_6 <- gather(data = data_6, key = Path, value = Price, -
  Step)
55 plot_paths <- ggplot(data_6, aes(x = Step, y = Price, color =
  Path)) + geom_line() + theme(legend.position = "none")
return(data_5)
}

#Расчет стоимости азиатского опциона на с помощью метода Монте-К
  арло
60 mc_asian <- function(S_0, Nsim, step = 1, rf, sigma, TTM, K,
  type = "Call") {
  mu <- rf - 0.5*sigma^2
  dt <- step/360
  Nstep <- TTM/step
  data_1 <- matrix(exp(mu*dt + sigma*sqrt(dt)*rnorm(Nsim*Nstep))
    , ncol = Nsim)
65 data_2 <- apply(data_1, 2, cumprod)
data_2 <- S_0*data_2
data_3 <- rbind(rep(S_0, Nsim), data_2)
data_4 <- apply(data_3, 2, mean)
if (type == "Call"){
70 data_5 <- mean(pmax(data_4 - K, 0))*exp(-rf*TTM/360)
}
else {data_5 <- mean(pmax(K - data_4, 0))*exp(-rf*TTM/360)}
data_6 <- as.data.frame(data_3)
data_6$Step <- seq(0, nrow(data_6)-1, 1)
75 data_6 <- gather(data = data_6, key = Path, value = Price, -
  Step)

```

```

    plot_paths <-<- ggplot(data_6, aes(x = Step, y = Price, color =
      Path)) + geom_line() + theme(legend.position = "none")
    return(data_5)
  }

```

Листинг А.3

Основной код с комментариями

```

#Показать объем торгов деривативами
a <- read.csv("Derivatives stat.csv", header = T)
b <- a[a$Risk.category == "A:Total contracts", ]
5 b <- b[, -c(1:10)]
date <- seq.Date(from = as.Date("1998-06-30"), to = as.Date("
  2015-06-30"), by = "quarter")
for (i in seq(2, length(date), by = 2)) {
  date[i] <- NA
}
10 date <- na.omit(date)
colnames(b) <- date
c <- as.data.frame(t(b))
names(c) <- c("Gross", "Notional")
d <- apply(c, 2, as.numeric)
15 e <- d/1000
f <- as.data.frame(e)

#График объема торговли деривативами в трлн. долл.
plot <- ggplot(f, aes(x = date, y = Gross), color = Gross) +
  geom_line() + xlab("") + ylab("") +
20 theme(axis.text = element_text(size = 13), panel.border =
  element_rect(fill = NA, colour = "black", size = 2))

my_ggplot <- function (data, x, y, xname = "", yname = "",
  mainname = "") {
  data <- as.data.frame(data)
  ggplot(data = data, aes(x = x, y = y)) + geom_line(color = "
    red") + xlab(xname) + ylab(yname) +
25 theme(axis.text = element_text(size = 13), panel.border =
  element_rect(fill = NA, colour = "black", size = 2))
}
my_ggplot(f, date, f[, 1])

```

```

30 #Показать объем торговли фьючерсами и опционами
a <- read.csv("Futures and options volume.csv")
b <- a[a$Frequency == "Q:Quarterly" & a$Risk.category == "$C+B"
  & a$Location.of.trade..Exchange.or.country. == "8A:All
    exchanges", ]
c <- b[, -c(1:3, 5:7)]
35 d <- c[, 1:92]

date <- seq(from = as.Date("1993-03-01"), to = as.Date("
  2015-09-01"), by = "quarter")
names(d) <- c("Instrument", paste(date))
rownames(d) <- c("Futures", "Options")
40 d <- d[, -1]
e <- t(d)
e <- as.data.frame(e)
e <- apply(e, 2, as.numeric)
rownames(e) <- paste(date)
45 #Использование команды "gather" для последующего создания график
  а
f <- as.data.frame(date)
e <- cbind(e, f)
e <- gather(data = e, key = "Type", value = "Volume", -date)
50 e$Volume <- e$Volume/1000

#График объема торговли фьючерсами и опционами
ggplot(e, aes(x = date, y = Volume, linetype = Type, color =
  Type)) + geom_line(size = 1.2) + xlab("") + ylab("") + theme(
  axis.text = element_text(size = 13), panel.border = element_
  rect(fill = NA, colour = "black", size = 1.3))

55 #Показать прибыльность call опциона
S <- seq(0, 130, 1)
n <- length(S)
K <- rep(100, n)
a <- as.data.frame(cbind(S, K))
60 a$Option <- pmax(a$S - a$K, -5)
ggplot(a, aes(x = S, y = Option)) + geom_line(size = 1.2, color
  = "blue") + geom_hline(yintercept = 0, color = "red") + ylab(
  "Profir, rub.") + xlab("Share price, rub.") + theme(axis.text

```

```

    = element_text(size = 13), panel.border = element_rect(fill
= NA, colour = "black", size = 2), axis.title = element_text(
size = 16)) + scale_y_continuous(breaks = c(-5, 0 , 10, 20,
max(a$Option)), limits = c(-10, 30))

S <- seq(0, 130, 1)
n <- length(S)
65 K <- rep(100, n)
a <- as.data.frame(cbind(S, K))
a$Option <- pmin(a$K - a$S, 5)
ggplot(a, aes(x = S, y = Option)) + geom_line(size = 1.2, color
= "blue") + geom_hline(yintercept = 0, color = "red") + ylab(
"Profir, rub.") + xlab("Share price, rub.") + theme(axis.text
= element_text(size = 13), panel.border = element_rect(fill
= NA, colour = "black", size = 2), axis.title = element_text(
size = 16)) + scale_y_continuous(breaks = c(-5, 0, 20),
limits = c(-10, 30))

70

#Показать прибыльность put опциона
S <- seq(0, 100, 1)
n <- length(S)
75 K <- rep(70, n)
a <- as.data.frame(cbind(S, K))
a$Option <- pmax(a$K - a$S, -7)
ggplot(a, aes(x = S, y = Option)) + geom_line(size = 1.2, color
= "blue") + geom_hline(yintercept = 0, color = "red") + ylab(
"Profir, rub.") + xlab("Share price, rub.") + theme(axis.text
= element_text(size = 13), panel.border = element_rect(fill
= NA, colour = "black", size = 2), axis.title = element_text(
size = 16)) + scale_y_continuous(breaks = c(-7, 0 , 10, 20,
max(a$Option)), limits = c(-10, 30)) + scale_x_continuous(
limits = c(35, 100))

80

S <- seq(0, 100, 1)
n <- length(S)
K <- rep(70, n)
a <- as.data.frame(cbind(S, K))
85 a$Option <- pmin(a$S - a$K, 7)

```

```

ggplot(a, aes(x = S, y = Option)) + geom_line(size = 1.2, color
  = "blue") + geom_hline(yintercept = 0, color = "red") + ylab(
  "Profir, rub.") + xlab("Share price, rub.") + theme(axis.text
    = element_text(size = 13), panel.border = element_rect(fill
    = NA, colour = "black", size = 2), axis.title = element_text(
    size = 16)) + scale_y_continuous(breaks = c( 0 , 7, max(a$
    Option)), limits = c(-10, 30)) + scale_x_continuous(limits =
    c(55, 100))

#Показать влияние изменения безрисковой ставки на стоимость опци
она колл
90 rf <- seq(0, 8, 1)
price <- 6 + 0.1*rf
a <- as.data.frame(cbind(rf, price))
ggplot(a, aes(x = rf, y = price)) + geom_line(size = 1.2, color
  = "blue") + scale_y_continuous(limits = c(5, 7)) + xlab("Risk
  free rate, r (%)") + ylab("Price") + theme(axis.text =
  element_text(size = 18), panel.border = element_rect(fill =
  NA, colour = "black", size = 2), axis.title = element_text(
  size = 20))

95 # Показать влияние зменения безрисковой ставки на стоимость опци
она пут
rf <- seq(0, 8, 1)
price <- 6 + -0.1*rf
a <- as.data.frame(cbind(rf, price))
100 ggplot(a, aes(x = rf, y = price)) + geom_line(size = 1.2, color
  = "blue") + scale_y_continuous(limits = c(5, 7)) + xlab("Risk
  free rate, r (%)") + ylab("Price") + theme(axis.text =
  element_text(size = 18), panel.border = element_rect(fill =
  NA, colour = "black", size = 2), axis.title = element_text(
  size = 20))

#График зависимости цены опциона колл от страйка
K <- seq(0, 100, 10)
S <- 50
105 price <- pmax(0, S - K)
a <- as.data.frame(cbind(K, price))

```



```

ggplot(a, aes(x = K, y = price)) + geom_line(size = 1.2, color =
  "blue") + theme(axis.text = element_text(size = 18), panel.
  border = element_rect(fill = NA, colour = "black", size = 2),
  axis.title = element_text(size = 20)) + xlab("Strike, K") +
  ylab("Price")

110 #Зависимость цены опциона пут от страйка
K <- seq(0, 100, 10)
S <- 50
price <- pmax(0, K - S)
a <- as.data.frame(cbind(K, price))
115 ggplot(a, aes(x = K, y = price)) + geom_line(size = 1.2, color =
  "blue") + theme(axis.text = element_text(size = 18), panel.
  border = element_rect(fill = NA, colour = "black", size = 2),
  axis.title = element_text(size = 20)) + xlab("Strike, K") +
  ylab("Price")

#Зависимость цены опциона колл от цены акции
S <- seq(0, 100, 10)
120 K <- 50
price <- pmax(0, S - K)
a <- as.data.frame(cbind(K, price))
ggplot(a, aes(x = S, y = price)) + geom_line(size = 1.2, color =
  "blue") + theme(axis.text = element_text(size = 18), panel.
  border = element_rect(fill = NA, colour = "black", size = 2),
  axis.title = element_text(size = 20)) + xlab("Stock price, S
  ") + ylab("Price")

125 #Зависимость цены опциона пут от цены акции
S <- seq(0, 100, 10)
K <- 50
price <- pmax(0, K - S)
130 a <- as.data.frame(cbind(K, price))
ggplot(a, aes(x = S, y = price)) + geom_line(size = 1.2, color =
  "blue") + theme(axis.text = element_text(size = 18), panel.
  border = element_rect(fill = NA, colour = "black", size = 2),
  axis.title = element_text(size = 20)) + xlab("Stock price, S
  ") + ylab("Price")

```

```

#Много Броуновского движение
135 S <- 100
    K <- 100
    time <- 1/360
    rf <- 0.05
    sigma <- 0.2
140 drift <- rf - 0.5*sigma^2
    S_t <- matrix(nrow = 1/time, ncol = 20)
    S_t[1, ] <- S
    for (i in 1:ncol(S_t)) {
        for (j in 2:nrow(S_t)) {
145     S_t[j, i] <- S_t[j-1, i]*exp(drift*time + sigma*sqrt(time)*
            rnorm(1))
        }
    }
    S_t <- as.data.frame(S_t)
    S_t$number <- seq(1, nrow(S_t), 1)
150 S_T_plot <- gather(data = S_t, key = "Type", value = "Price", -
    number)
    ggplot(S_T_plot, aes(x = number, y = Price, color = Type)) +
        geom_line() + theme(axis.text = element_text(size = 18),
            panel.border = element_rect(fill = NA, colour = "black", size
            = 2), axis.title = element_text(size = 20), legend.position=
            "none") + xlab("Time") + ylab("Price")
    price_final <- as.numeric(S_t[nrow(S_t), -ncol(S_t)])
    price_final_mean <- mean(price_final)
    price_final_mean_adj <- (price_final_mean - K)*exp(-rf)
155 table <- xtable(S_t[1:20, 1:9])
    print(table, booktabs = TRUE)

160 #Симуляция винеровского процесса с дрейфом и диффузией
    Time <- 1
    N <- 300
    delta_t <- Time/N
    S0 <- 0
165 W <- as.data.frame(rep(0, N))
    W[1, ] <- S0

```

```

names(W) <- "Price"
W$Step <- seq(1, N, 1)
W$delta_t <- W$Step/N
170 for (i in 2:N) {
    W[i, 1] <- W[i-1, 1] + rnorm(1)*sqrt(W$delta_t[i])*1.5 + 0.2*W
        $delta_t[i]
}
ggplot(W, aes(x = Step, y = Price)) + geom_line() + xlab("Number
    of steps") + ylab("Price") + theme(axis.text = element_text(
    size = 18), panel.border = element_rect(fill = NA, colour = "
    black", size = 2), axis.title = element_text(size = 20))

175

#Симуляция обычного стохастического процесса
N <- 200
Step <- 1
180 delta_t <- Step/N
SO <- 10
a <- as.data.frame(rep(0, N))
names(a) <- "Price"
a$Step <- seq(1, N, 1)
185 for (i in 2:N) {
    a$Price[i] <- a$Price[i-1] + rnorm(1)*sqrt(a$Step[i])
}
ggplot(a, aes(x = Step, y = Price)) + geom_line(color = 178) +
    xlab("Number of steps") + ylab("Price") + theme(axis.text =
    element_text(size = 18), panel.border = element_rect(fill =
    NA, colour = "black", size = 2), axis.title = element_text(
    size = 20))

190 #Иллюстрация подразумеваемой волатильности
chain <- getOptionChain("BAC", Exp = "2016-05-20")
chain <- chain$calls
chain <- chain[, 1:2]
chain$iv <- 0
195 time_remain <- as.numeric(as.Date("2016-05-20") - as.Date(Sys.
    time()))
time <- time_remain/360
rf <- 0.01
Spot <- getQuote("BAC")

```

```

Spot <- Spot$Last
200 chain <- as.data.frame(apply(chain, 2, as.numeric))
  for (i in 1:nrow(chain)) {
    chain$iv[i] <- iv.opt(S = Spot, K = chain$Strike[i], T = time,
      riskfree = rf, price = chain$Last[i], type = "Call")
  }
chain <- na.omit(chain)
205 ggplot(chain, aes(x = Strike, y = iv)) + geom_line(size = 1,
  color = "red") + ylab("Implied volatility") + theme(axis.text
    = element_text(size = 18), panel.border = element_rect(fill
    = NA, colour = "black", size = 2), axis.title = element_text(
    size = 20))

#Показать сходимость CRR к BSM
steps = 50
210 CRROptionValue <- rep(NA, times = steps)
  for (n in 3:steps) {
    CRROptionValue[n] = CRRBinomialTreeOption(TypeFlag = "ce", S =
      50,
      X = 50, Time =
        0.4167, r = 0.1,
        b = 0.1, sigma =
        0.4, n = n)@price
  }
215 CRROptionValue <- as.data.frame(CRROptionValue)
names(CRROptionValue)[1] <- "CRRmodel"
CRROptionValue <- na.omit(CRROptionValue)
CRROptionValue$steps <- seq(3, steps, 1)
BSM_price <- GBSOption(TypeFlag = "c", S = 50,
220 X = 50, Time = 0.4167, r = 0.1, b = 0.1, sigma = 0.4)
CRROptionValue$BSMmodel <- BSM_price@price
data_2 <- gather(data = CRROptionValue, key = "Model", value = "
  Price", -steps)
ggplot(data_2, aes(y = Price, x = steps, col = Model, linetype =
  Model)) + geom_line(size = 1) + theme(axis.text = element_
  text(size = 18), panel.border = element_rect(fill = NA,
  colour = "black", size = 2), axis.title = element_text(size =
  20))

```

```

225 #####Сравнение результатов по методу Монте-Карло с разным колич
      еством
      #####испытаний и BSM моделью
      S_0 <- 70
      K <- 67
      sigma <- 0.2
230 rf <- 0.05
      TTM <- 7

      op_BSM <- bs.opm(S = S_0, K = K, T = TTM/360, riskfree = rf,
        sigma = sigma, type = "Call")

235 #Stock moves once a day, number of paths = 20
      average_1 <- mc(S_0 = S_0, Nsim = 20, step = 1, rf = rf, sigma =
        sigma, TTM = TTM, K = K, type = "Call")

      #Stock moves once a day, number of paths = 100
      average_2 <- mc(S_0 = S_0, Nsim = 100, step = 1, rf = rf, sigma
        = sigma, TTM = TTM, K = K, type = "Call")
240 average_2

      #Stock moves once a day, number of paths = 1000
      average_3 <- mc(S_0 = S_0, Nsim = 1000, step = 1, rf = rf, sigma
        = sigma, TTM = TTM, K = K, type = "Call")
      average_3

245 #Stock moves every hour, number of paths = 20
      average_4 <- mc(S_0 = S_0, Nsim = 20, step = 1/24, rf = rf,
        sigma = sigma, TTM = TTM, K = K, type = "Call")
      average_4

250 #Stock moves every hour, number of paths = 100
      average_5 <- mc(S_0 = S_0, Nsim = 100, step = 1/24, rf = rf,
        sigma = sigma, TTM = TTM, K = K, type = "Call")
      average_5

      #Stock moves every hour, number of paths = 1000
255 average_6 <- mc(S_0 = S_0, Nsim = 1000, step = 1/24, rf = rf,
        sigma = sigma, TTM = TTM, K = K, type = "Call")
      average_6

```

```

#Stock moves every 4 hours, number of paths = 20
average_7 <- mc(S_0 = S_0, Nsim = 20, step = 1/6, rf = rf, sigma
  = sigma, TTM = TTM, K = K, type = "Call")
260 average_7

#Stock moves every 4 hours, number of paths = 100
average_8 <- mc(S_0 = S_0, Nsim = 100, step = 1/6, rf = rf,
  sigma = sigma, TTM = TTM, K = K, type = "Call")
265 average_8

#Stock moves every 4 hours, number of paths = 1000
average_9 <- mc(S_0 = S_0, Nsim = 1000, step = 1/6, rf = rf,
  sigma = sigma, TTM = TTM, K = K, type = "Call")
270 average_9

#Stock moves every hour, nsim = 50000
average_10 <- mc(S_0 = S_0, Nsim = 5000, step = 1/24, rf = rf,
  sigma = sigma, TTM = TTM, K = K, type = "Call")
275 average_10

#Stock moves every 4 hours, nsim = 50000
average_11 <- mc(S_0 = S_0, Nsim = 5000, step = 1/6, rf = rf,
  sigma = sigma, TTM = TTM, K = K, type = "Call")
280 average_11

#Stock moves every day, nsim = 50000
average_12 <- mc(S_0 = S_0, Nsim = 5000, step = 1, rf = rf,
  sigma = sigma, TTM = TTM, K = K, type = "Call")
285 average_12

oneday <- c(average_1, average_2, average_3, average_12)
fourhours <- c(average_7, average_8, average_9, average_11)
onehour <- c(average_4, average_5, average_6, average_10)
table <- rbind(oneday, fourhours, onehour)
bsprice <- bs.opm(S = S_0, K = K, T = TTM/360, riskfree = rf,
  sigma = sigma, type = "Call")
290 table <- as.data.frame(table)
error_1 <- oneday - bsprice

```

```

error_2 <- fourhours - bsprice
error_3 <- onehour - bsprice
table <- cbind(oneday, error_1, fourhours, error_2, onehour,
  error_3)
295 table
names(table) <- c("20 sim", "100 sim", "1000 sim", "50000 sim",
  "20 sim error", "100 sim error", "1000 sim error", "50000 sim
  error")
row.names(table) <- c("20 sim", "100 sim", "1000 sim", "50000
  sim")
table
bsprice
300 table_2 <- xtable(table)
print(table_2, booktabs = T)

#То же самое для случая, когда до конца срока действия опциона 1
месяц

305 S_0 <- 70
K <- 67
sigma <- 0.2
rf <- 0.05
TTM <- 30

310 op_BSM <- bs.opm(S = S_0, K = K, T = TTM/360, riskfree = rf,
  sigma = sigma, type = "Call")

#Stock moves once a day, number of paths = 20
average_1 <- mc(S_0 = S_0, Nsim = 20, step = 1, rf = rf, sigma =
  sigma, TTM = TTM, K = K, type = "Call")
315

#Stock moves once a day, number of paths = 100
average_2 <- mc(S_0 = S_0, Nsim = 100, step = 1, rf = rf, sigma
  = sigma, TTM = TTM, K = K, type = "Call")
average_2

320 #Stock moves once a day, number of paths = 1000
average_3 <- mc(S_0 = S_0, Nsim = 1000, step = 1, rf = rf, sigma
  = sigma, TTM = TTM, K = K, type = "Call")
average_3

```

```

#Stock moves every hour, number of paths = 20
325 average_4 <- mc(S_0 = S_0, Nsim = 20, step = 1/24, rf = rf,
    sigma = sigma, TTM = TTM, K = K, type = "Call")
average_4

#Stock moves every hour, number of paths = 100
average_5 <- mc(S_0 = S_0, Nsim = 100, step = 1/24, rf = rf,
    sigma = sigma, TTM = TTM, K = K, type = "Call")
330 average_5

#Stock moves every hour, number of paths = 1000
average_6 <- mc(S_0 = S_0, Nsim = 1000, step = 1/24, rf = rf,
    sigma = sigma, TTM = TTM, K = K, type = "Call")
average_6
335

#Stock moves every 4 hours, number of paths = 20
average_7 <- mc(S_0 = S_0, Nsim = 20, step = 1/6, rf = rf, sigma
    = sigma, TTM = TTM, K = K, type = "Call")
average_7

#Stock moves every 4 hours, number of paths = 100
340 average_8 <- mc(S_0 = S_0, Nsim = 100, step = 1/6, rf = rf,
    sigma = sigma, TTM = TTM, K = K, type = "Call")
average_8

#Stock moves every 4 hours, number of paths = 1000
345 average_9 <- mc(S_0 = S_0, Nsim = 1000, step = 1/6, rf = rf,
    sigma = sigma, TTM = TTM, K = K, type = "Call")
average_9

#Stock moves every hour, nsim = 50000
350 average_10 <- mc(S_0 = S_0, Nsim = 5000, step = 1/24, rf = rf,
    sigma = sigma, TTM = TTM, K = K, type = "Call")
average_10

#Stock moves every 4 hours, nsim = 50000
355 average_11 <- mc(S_0 = S_0, Nsim = 5000, step = 1/6, rf = rf,
    sigma = sigma, TTM = TTM, K = K, type = "Call")
average_11

```



```

#Stock moves every day, nsim = 50000
average_12 <- mc(S_0 = S_0, Nsim = 5000, step = 1, rf = rf,
  sigma = sigma, TTM = TTM, K = K, type = "Call")
360 average_12

oneday <- c(average_1, average_2, average_3, average_12)
fourhours <- c(average_7, average_8, average_9, average_11)
onehour <- c(average_4, average_5, average_6, average_10)
365 table <- rbind(oneday, fourhours, onehour)
bsprice <- bs.opm(S = S_0, K = K, T = TTM/360, riskfree = rf,
  sigma = sigma, type = "Call")
table <- as.data.frame(table)
error_1 <- oneday - bsprice
error_2 <- fourhours - bsprice
370 error_3 <- onehour - bsprice
table <- cbind(oneday, error_1, fourhours, error_2, onehour,
  error_3)
table
names(table) <- c("20 sim", "100 sim", "1000 sim", "50000 sim",
  "20 sim error", "100 sim error", "1000 sim error", "50000 sim
  error")
row.names(table) <- c("20 sim", "100 sim", "1000 sim", "50000
  sim")
375 table
bsprice
table_2 <- xtable(table)
print(table_2, booktabs = T)

380 #Моделирование стоимости азиатского опциона
S0 <- 120
K <- 110
TTM <- 10
rf <- 0.1
385 sigma <- 0.3
a <- mc_asian(S_0 = S0, Nsim = 5000, step = 1, rf = rf, sigma =
  sigma, TTM = 10, K = K)
a
bs.opm(S = S0, K = K, T = TTM/360, riskfree = rf, sigma = sigma,
  type = "Call")
b <- xtable(data_3[, 1:9])

```

```

390 print(b, booktabs = T)

#Сравнение фактических и теоретических функций плотности доходно
#стей акции
getSymbols("GOOG", from = "2015-01-01", to = "2016-01-01")
goog <- as.numeric(GOOG[, 6])
395 goog.ret <- na.omit(Delt(goog))
av <- mean(goog.ret)
s <- sd(goog.ret)
n <- nrow(goog.ret)

400 goog.ret <- as.data.frame(goog.ret)
names(goog.ret) <- "goog_return"
goog.ret$Norm <- rnorm(n, av, s)
goog.ret_2 <- gather(data = goog.ret, key = Distribution, value
= Return)
ggplot(goog.ret_2, aes(x = Return, color = Distribution,
linetype = Distribution)) + geom_density(size = 1) + theme(
axis.text = element_text(size = 18), panel.border = element_
rect(fill = NA, colour = "black", size = 2), axis.title =
element_text(size = 20))

405

#График распределения вероятностей, полученных с помощью обычной
#симуляции
#и плотности нормального распределения
a <- mc(S_0 = S0, Nsim = 500, step = 1/6, rf = rf, sigma = sigma
, TTM = TTM, K = K, type = "Call")
410 b <- data_3[, 23]
b <- na.omit(Delt(b))
m <- mean(b)
s <- sd(b)
b <- as.data.frame(b)
415 names(b) <- "SimulatedReturns"
b <- as.data.frame(b)
r1 <- rnorm(1000, m, s)
r1 <- as.data.frame(r1)
names(r1) <- "NormalReturns"
420 pl <- ggplot(data = b, aes(x = SimulatedReturns, color = "
SimulatedReturns")) + geom_density(data = r1, aes(x =

```

```

    NormalReturns, color = "NormalReturns"), size = 1) + geom_
    density(size = 1)
pl <- pl + scale_colour_discrete(labels = c("Normal returns", "
    Simulated returns"))
pl <- pl + ylab("Density") + xlab("Return")
pl
425
####Задание функции правдоподобия для NIG распределения
ll <- function(mu, alpha, delta, beta) {
    -sum(log(alpha*delta*besselK(x = alpha*sqrt(delta^2 + (x - mu)
        ^2), nu = 1)/(pi*sqrt(delta^2 + (x-mu)^2))*exp(delta*sqrt(
        alpha^2 - beta^2) + beta*(x - mu))))
}
430
#Оценка коэффициентов NIG распределения с помощью MLE
getSymbols("GOOG", from = "2015-01-01", to = "2016-01-01")
goog <- GOOG[, 6]
goog.ret <- na.omit(Delt(goog))
435 goog.log <- log(goog)
x <- na.omit(diff(goog.log))
par <- mle(minuslogl = ll, start = list(mu = 0, alpha = 1, beta
    = 0, delta = 1))
par <- par@coef
mu <- par[1]
440 alpha <- par[2]
delta <- par[3]
beta <- par[4]
gamma <- sqrt(alpha^2 - beta^2)

445 #Моделирование 1000 переменных на основе оцененных параметров
    NIG распределения
r1 <- rnig(n = 1000, mu = mu, delta = delta, alpha = alpha, beta
    = beta)

#график функции плотности смоделированного распределения
plot(density(r1), main = "Density of Google log returns and NIG
    returns", lty = 1, lwd = 2)
#добавить плотность распределения логдоходностей Google
450 lines(density(x), col = 2, lty = 2, lwd = 2)
legend("topright", c("Google log returns", "NIG returns"), lty =
    c(1, 2))

```

```

library(statmod)
sigma2 <- rinvgauss(n = 250, mean = delta/gamma, shape = delta
  ^2) #моделирование IG(delta, gamma)
sigma <- sqrt(sigma2)
455 epsilon <- rnorm(n = 250, mean = 0, sd = 1) #моделирование N(0,
  1)
r <- mu + beta*sigma2 +sigma*epsilon #моделирование r_i
mean(r)
plot(density(r), main = "Density function of r_i") #график смоделированных логдоходностей
r.cumsum <- cumsum(r) #расчет кумулятивных доходностей
460 S0 <- 70
path <- S0*exp(r.cumsum) #S_t = S_0*exp(R_t)
plot(path, type = "l", main = "Simulated stock path", ylab = "
  Price", xlab = "Step")

g <- data.frame(Google = x)
465 head(g)
names(g) <- "Google"
nig <- data.frame(NIG = r)
names(nig) <- "NIG"

470 pl1 <- ggplot(data = g, aes(x = Google, colour = "Google")) +
  geom_density(size = 1)
pl2 <- pl1 + geom_density(data = nig, aes(x = NIG, colour = "r_i
  "), size = 1)
pl2 <- pl2 + ggtitle("Density of log returns") + ylab("Density")
pl2 <- pl2 + theme(plot.title = element_text(lineheight=.8, face
  ="bold"), legend.text = element_text(size = 12))
pl2
475 #####
##Создание функции для оценки опциона на основании NIG модели
#Загрузка дневных данных
setwd("D:/R")
480 goog.1H <- read.csv("GOOG.1H.csv", header = TRUE, sep = ";", dec
  = ".")
goog.1H <- goog.1H$X.CLOSE.
goog.1H.log <- log(goog.1H)
x <- diff(goog.1H.log)
#Оценка параметров NIG распределения

```

```

485 par <- mle(minuslogl = ll, start = list(mu = 0, alpha = 1, beta
      = 0, delta = 1))
      summary(par)
      par <- par@coef
      mu <- par[1]
      alpha <- par[2]
490 delta <- par[3]
      beta <- par[4]
      gamma <- sqrt(alpha^2 - beta^2)

      #NIG функция
495 S0 <- 70
      K <- 70
      TTM <- 100
      Ncol <- 5000
      trade_days <- 252
500 rf <- 0.05
      hours <- round(x = length(x)/trade_days, digits = 0)
      mc_nig <- function(S0, K, TTM, Ncol = 1000, rf, hours = 7, mu,
        alpha, delta, beta, type = "Call") {
        gamma <- sqrt(alpha^2 - beta^2)
        T <- 1/(7*252) #7 рабочих часов, 252 рабочих дней
505 drift_GBM <- (rf - 0.5*sigma^2)*T
        drift_NIG <- mu + beta*delta/gamma
        k <- as.numeric(drift_GBM/drift_NIG) #коэффициент корректировок
          у дрейфа
        sigma <- rinvgauss(n = TTM*hours*Ncol, mean = delta/gamma,
          shape = delta^2)
        m1 <- matrix(mu*k + beta*sigma*k + sqrt(sigma)*rnorm(TTM*hours
          *Ncol), ncol = Ncol)
510 m2 <- apply(m1, 2, cumsum)
        m3 <- S0*exp(m2)
        m4 <- tail(m3)
        if (type == "Call") {
          m5 <- mean(pmax(m4 - K, 0))*exp(-rf*TTM/360)
515 }
        else {m5 <- mean(pmax(K - m4, 0))*exp(-rf*TTM/360)}
        m6 <- as.data.frame(m3)
        m6$Step <- seq(0, nrow(m6)-1, 1)
        m6 <- gather(data = m6, key = Path, value = Price, -Step)

```

```

520 plot_paths <- ggplot(m6, aes(x = Step, y = Price, color =
      Path)) + geom_line() + theme(legend.position = "none")
      return(m5)
    }

##NIG функция для азиатского опциона
525 mc_nig_asian <- function(S0, K, TTM, Ncol, rf, hours, mu, alpha,
      delta, beta, type = "Call") {
      gamma <- sqrt(alpha^2 - beta^2)
      T <- 1/(7*252) #7 working hours, 252 working days
      drift_GBM <- (rf - 0.5*sigma^2)*T
      drift_NIG <- mu + beta*delta/gamma
530 k <- as.numeric(drift_GBM/drift_NIG) #drift correction term
      sigma <- rinvgauss(n = TTM*hours*Ncol, mean = delta/gamma,
        shape = delta^2)
      m1 <- matrix(mu*k + beta*sigma*k + sqrt(sigma)*rnorm(TTM*hours
        *Ncol), ncol = Ncol)
      m2 <- apply(m1, 2, cumsum)
      m3 <- S0*exp(m2)
535 m4 <- apply(m3, 2, mean)
      if (type == "Call") {
        m5 <- mean(pmax(m4 - K, 0))*exp(-rf*TTM/360)
      }
      else {m5 <- mean(pmax(K - m4, 0))*exp(-rf*TTM/360)}
540 m6 <- as.data.frame(m3)
      m6$Step <- seq(0, nrow(m6)-1, 1)
      m6 <- gather(data = m6, key = Path, value = Price, ~Step)
      plot_paths <- ggplot(m6, aes(x = Step, y = Price, color =
        Path)) + geom_line() + theme(legend.position = "none")
      return(m5)
545 }

#Расчет цен опционов по BSM, GBM и NIG (без корректировки) модел
ям и сравнение математического ожидания доходностей
bs.opm(S = S0, K = K, T = TTM/360, riskfree = rf, sigma = sigma,
      type = "Call")
550 mc(S_0 = S0, Nsim = Ncol, step = 1/7, rf = rf, sigma = sigma,
      TTM = TTM, K = K)
mc_nig(S0 = S0, K = K, TTM = TTM, Ncol = Ncol, rf = rf, hours =
      7, mu = mu, alpha = alpha, delta = delta, beta = beta)

```

```

dt <- 1/7/252
r1 <- (exp((rf - 0.5*sigma^2)*dt))^700
r2 <- (exp(mu + beta*delta/gamma))^700
555 #Расчет цен азиатских опционов по GBM и NIG моделям и сравнение
результатов
S0 <- 70
K <- 70
TTM <- 100
560 rf <- 0.05
sigma <- 0.3
Ncol <- 1000

gbm <- vector()
565 nig <- vector()
for (i in 1:30) {
  gbm[i] <- mc_asian(S_0 = S0, Nsim = 1000, step = 1/7, rf = rf,
    sigma = sigma, TTM = TTM, K = K, type = "Call")
}
for (i in 1:30) {
570  nig[i] <- mc_nig_asian(S0 = S0, TTM = TTM, Ncol = 1000, rf =
    rf, mu = mu, alpha = alpha, delta = delta, beta = beta,
    hours = 7)
}
mean(gbm)
mean(nig)
data <- data.frame(gbm, nig)
575 names(data) <- c("GBM", "NIG")
data$Sim <- seq(1, 30, 1)
m1 <- mean(gbm)
m2 <- mean(nig)
data$GBMmean <- m1
580 data$NIGmean <- m2
datam <- gather(data = data, key = "Model", value = "Price", -
  Sim)
p1 <- ggplot(data = datam, aes(y = Price, x = Sim, colour =
  Model)) + geom_line(size = 1)
p2 <- p1 + xlab("# of simulation")
p2
585 t.test(gbm, nig)

```

```

#####Расчет цен опционов по разным моделям для различных страйков
#Опцион около денег, S0 = 70, K = 70
S0 <- 70
590 K <- 70
gbm <- vector()
nig <- vector()
for (i in 1:30) {
  gbm[i] <- mc_asian(S_0 = S0, Nsim = 1000, step = 1/7, rf = rf,
    sigma = sigma, TTM = TTM, K = K, type = "Call")
595 }
for (i in 1:30) {
  nig[i] <- mc_nig_asian(S0 = S0, K = K, TTM = TTM, Ncol = 1000,
    rf = rf, mu = mu, alpha = alpha, delta = delta, beta =
    beta, hours = 7)
}
m1 <- mean(gbm)
600 m2 <- mean(nig)

#Опцион без денег, S0 = 70, K = 80, S0 <- 70
S0 <- 70
K <- 80
605 gbm <- vector()
nig <- vector()
for (i in 1:30) {
  gbm[i] <- mc_asian(S_0 = S0, Nsim = 1000, step = 1/7, rf = rf,
    sigma = sigma, TTM = TTM, K = K, type = "Call")
}
610 for (i in 1:30) {
  nig[i] <- mc_nig_asian(S0 = S0, TTM = TTM, Ncol = 1000, rf =
    rf, mu = mu, alpha = alpha, delta = delta, beta = beta,
    hours = 7)
}
m3 <- mean(gbm)
m4 <- mean(nig)
615

#Опцион без денег, S0 = 70, K = 100, S0 <- 70
S0 <- 70
K <- 90
gbm <- vector()
620 nig <- vector()
for (i in 1:30) {

```



```

        gbm[i] <- mc_asian(S_0 = S0, Nsim = 1000, step = 1/7, rf = rf,
            sigma = sigma, TTM = TTM, K = K, type = "Call")
    }
    for (i in 1:30) {
625     nig[i] <- mc_nig_asian(S0 = S0, TTM = TTM, Ncol = 1000, rf =
        rf, mu = mu, alpha = alpha, delta = delta, beta = beta,
        hours = 7)
    }
    m5 <- mean(gbm)
    m6 <- mean(nig)

630 #Опцион в деньгах, S0 = 70, K = 60, S0 <- 70
    S0 <- 70
    K <- 60
    gbm <- vector()
    nig <- vector()
635 for (i in 1:30) {
        gbm[i] <- mc_asian(S_0 = S0, Nsim = 1000, step = 1/7, rf = rf,
            sigma = sigma, TTM = TTM, K = K, type = "Call")
    }
    for (i in 1:30) {
        nig[i] <- mc_nig_asian(S0 = S0, TTM = TTM, Ncol = 1000, rf =
            rf, mu = mu, alpha = alpha, delta = delta, beta = beta,
            hours = 7)
640 }
    m7 <- mean(gbm)
    m8 <- mean(nig)

#Опцион в деньгах, S0 = 70, K = 40, S0 <- 70
645 S0 <- 70
    K <- 50
    gbm <- vector()
    nig <- vector()
    for (i in 1:30) {
650     gbm[i] <- mc_asian(S_0 = S0, Nsim = 1000, step = 1/7, rf = rf,
        sigma = sigma, TTM = TTM, K = K, type = "Call")
    }
    for (i in 1:30) {
        nig[i] <- mc_nig_asian(S0 = S0, TTM = TTM, Ncol = 1000, rf =
            rf, mu = mu, alpha = alpha, delta = delta, beta = beta,
            hours = 7)

```

```
}  
655 m9 <- mean(gbm)  
    m10 <- mean(nig)  
  
    t <- data.frame(GBM = c(m1, m3, m5, m7, m9), NIG = c(m2, m4, m6,  
        m8, m10))  
    t$Strike <- c(70, 80, 90, 60, 50)  
660 t <- t[order(t$Strike), ]  
    t <- gather(data = t, key = Model, value = Price, -Strike)  
    ggplot(data = t, aes(x = Strike, y = Price, colour = Model)) +  
        geom_line(size = 1) + geom_point(size = 2.5)
```