Использование нормального обратного Гауссова распределения для оценки стоимости азиатских опционов

Магистерская диссертация

Иванов Никита

Воронежский государственный университет
Экономический факультет

21 июня 2016 г.

Опцион — производный финансовый инструмент (derivative), выплаты по которому определяются как

$$c = \max(S_T - K, 0)$$

для опциона колл, где S_T – цена базового актива (например, акции) в момент времени T, K – страйк опциона, c – цена опциона колл.
Для опциона пут, p, выплаты по опционному контракту определяются как

$$p = \max(K - S_T, 0).$$

Модели оценки стоимости опционов

- Модель Блэка–Шоулза–Мертона (Black–Scholes–Merton, BSM) — является базовой моделью, была предложена в начале 1970-х, **имеет закрытую формулу для оценки стоимости опциона**. В 1997 ее авторы были удостоены Нобелевской премии по экономике;
- Биномиальная модель Кокса–Росса–Рубинштейна (Cox–Ross–Rubinstein, CRR). Модель была предложена в 1979 году как более интуитивный вариант оценки стоимости опциона. В работе показано, что при большом количестве шагов по времени цена опциона по CRR модели сходится к BSM модели;
- Модель стохастической волатильности Хестона и другие

Геометрическое броуновское движение

Одной из предпосылок BSM модели является предположение о лог-нормальном распределении доходностей акции. Предполагается, что изменение цены акции на коротких промежутках времени возможно описать *геометрическим броуновским движением* (Geometric Brownian Motion, GBM):

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz, \tag{1}$$

где S – стоимость акции, μ – ее доходность, σ – волатильность лог-доходностей, dt – шаг по времени, dz – винеровский процесс.

В дискретном варианте:

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t},$$

где $\varepsilon \sim N(0, 1)$.

Лемма Ито

Лемма Ито является важным результатом стохастической математики, который используется для вывода формулы оценки стоимости опциона (или другого дериватива). Обозначим стоимость деривatива G и предположим, что его стоимость зависит он цены акции S. Тогда по лемме Ито

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} \mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{dG}{dx} \sigma S dz \qquad (2)$$

Пусть $G = \ln S$. Используя формулы (1) и (2), получаем

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz, \qquad (3)$$

$dG = d \ln S$.

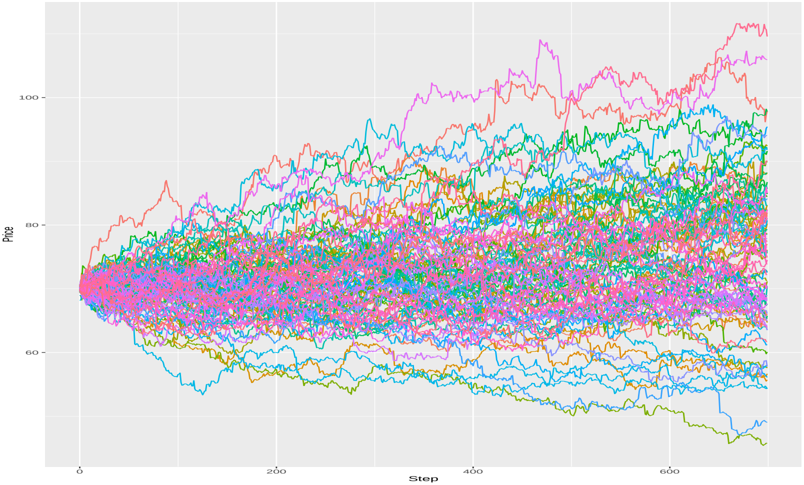
Метод Монте–Карло

Проведя манипуляции с (3), получаем, что

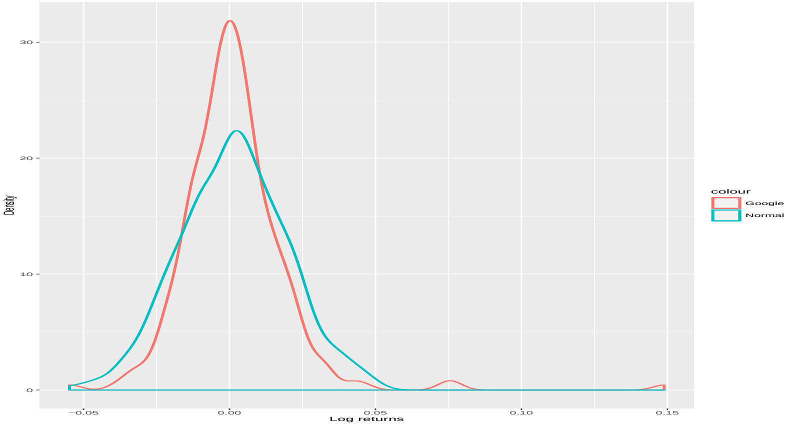
$$S(T) = S(0)\exp\left[\left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\varepsilon\sqrt{T}\right]$$

Именно данная формула используется для моделирования движения цены акции в **предположении, что доходность цены акции имеет лог-нормальное распределение.** Напомним, что эта же формула используется в модели Блэка–Шоулза–Мертона.

Пример моделирования по GBM модели



Сравнение функций плотности фактических и теоретических (распределенных нормально) доходностей



NIG распределение

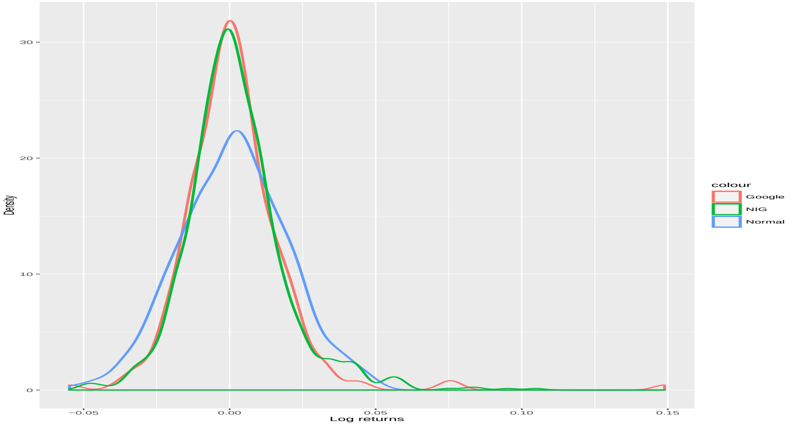
Функция плотности *нормального обратного Гауссова распределения* (Normal Inverse Gaussian distribution) (NIG) имеет вид

$$f(x) = \frac{\alpha\delta K_1\left(\alpha\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}\right)}{\pi\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}} e^{\delta\gamma+\beta(x-\mu)},$$

где μ, α, β и δ – параметры распределения, $K_1(\cdot)$ – функция Бесселя третьего типа.

Предположим, что лог-доходность акции можно описать данным распределением. Найдем соответствующие параметры распределения с помощью *метода максимального правдоподобия* и покажем результаты графически.

Сравнение фактического, нормального и NIG распределений



Моделирование лог-доходностей

Для моделирования лог-доходностей, r_i, будем использовать следующую модель

$$r_i = \mu + \beta\sigma_i^2 + \sigma_i\varepsilon_i,$$

где $\sigma^2 \sim IG(\delta/\gamma, \delta^2)$, $IG(\cdot)$ - обратное Гауссово распределение , $\varepsilon \sim N(0,1)$, $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$.

По свойствам NIG распределения, математическое ожидание доходности имеет вид

$$\mathbb{E}(r_i) = \hat{\mu} + \hat{\beta}\frac{\hat{\delta}}{\hat{\gamma}},$$

что, как правило, выше безрискового уровня доходности, r_{rf}:

$$\mathbb{E}(r_{rf}) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T,$$

где r - безрисковая ставка доходности, σ – волатильность

Корректировка дрейфа

В случае, если $r_i > r_{rf}$, то мы допускаем наличие арбитражных возможностей. Т.е. инвестор может получить прибыль, превышающую безрисковую ставку, не подвергая себя дополнительному риску. Это противоречит предпосылке об отсутствии арбитражных возможностей, поэтому необходимо провести корректировку *дрейфа* (drift) до безрискового уровня так, чтобы

$$\mathbb{E}(r_i) = \mathbb{E}(r_{rf})$$

или

$$\hat{\mu} + \hat{\beta}\frac{\hat{\delta}}{\hat{\gamma}} = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T$$

Корректировка дрейфа

Получаем, что коэффициент корректировки, k, равен

$$k = \frac{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\hat{\mu} + \hat{\beta}\frac{\hat{\delta}}{\hat{\gamma}}}$$

Тогда итоговая модель, используемая для моделирования лог-доходностей по методу Монте–Карло примет вид

$$r_i = \mu k + k\beta\sigma_i^2 + \sigma_i\varepsilon_i \tag{4}$$

После моделирования r_i, рассчитывается кумулятивная доходность, r_T, как

$$r_T = \sum_{i=1}^{T} r_i$$

Расчет стоимости азиатского опциона на основании NIG модели

Тогда стоимость акции в момент времени T определяется как

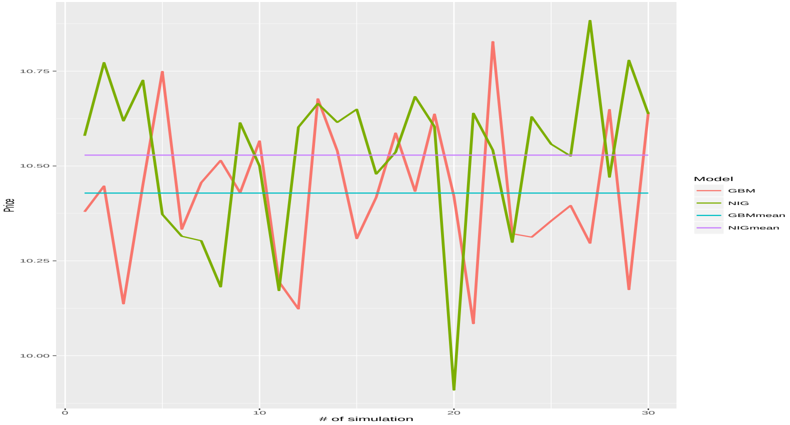
$$S_T = S_0 e^{r_T}$$

А стоимость *азиатского* опциона колл определяется как

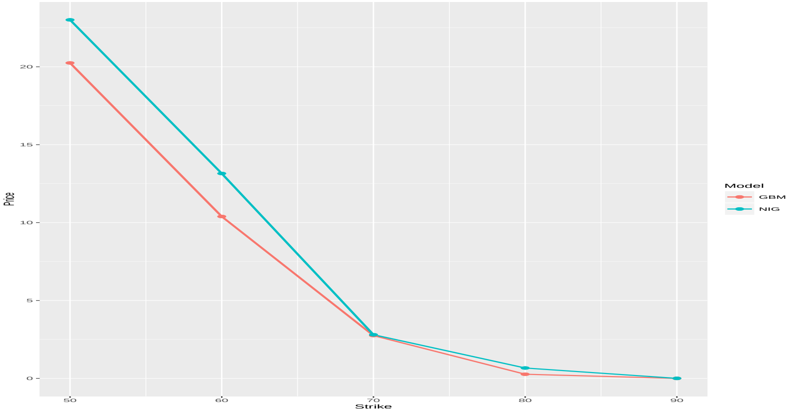
$$c = e^{-rT} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \max\left(S_i^{ave} - K, 0\right),$$

где M – количество смоделированных траекторий, S_i^{ave} – средняя цена акции на i-ой смоделированной траектории, K – страйк опциона, r – безрисковая процентная ставка, T – время до экспирации опциона в долях года.

Результаты оценки стоимости азиатского опциона колл ATM по моделям GBM и NIG



Результаты оценки стоимости азиатского опциона колл по моделям GBM и NIG для разных страйков



Выводы

1. Как видим, NIG модель (4) дает более высокие оценки стоимости опциона, чем классическая GBM модель (1). Тест Стьюдента (t-test) показал статистическую значимость всех результатов. Кроме того, видим, что разница в оценках моделей возрастает по мере удаления страйка опциона, K, от текущей цены акции, S_0.
2. Таким образом, если перед компанией стоит задача продажи азиатского опциона, то для определения его стоимости целесообразней вместо классической модели GBM использовать предложенную модель NIG, чтобы избежать недооценки продаваемого деривативa и возможных убытков в результате действий спекулянтов.