1 Лекція. Облігації.

Облігація - це борговий цінний папір, який обертається на ринку і який можна перепродати. Вартість облігації може змінюватися. Наприклад:
Розглянемо просту облігацію вартість 100 гривен, яку викуповують через рік за 110 гривень. Це означає, що відсоткова ставка складає 10% річних. Уявімо, що через пів-року ринок готовий давати нам в борг під 5%. Якою буде ціна облагації, за цих умов через 6 місяців? Це буде $110 * (1.05)^{-1/2} = 107,35$. Якою при цьому буде ефективна відсоткова ставка тримача облігації, який купив її на початку?

$$100 * (1+i)^{1/2} = 107,35, i = (107,35/100)^2 - 1 \approx 15,24\%$$

Існує дві причини купувати облігації:
1. Отримати фіксований грошовий потік.
2. Отримати додатковий прибуток при перепродажу облігації (спекулятивний прибуток).

Емітент облігації - це той, хто випустив облігацію, або боржник.
Власник, або утримувач облігації - це той, хто купив облігацію, або кредитор.

1.1 Ризики інвестування в облігації.

1. Ризик дефолту.
2. Ризик інфляції.
3. Ризик недоотримання прибутку.

1.2 Параметри облігацій

T - строк дії облігації, в роках.
N - номінал облігації
P - ціна облігації на одиницю номіналу
D - розмір купонної ставки
R - погашення облігації на одиницю номіналу
$g = D/R$ - купонна ставка на одиницю погашення
p - кількість виплат купонів на рік
i, або $i^{(p)}$ - ефективна (або номінальна) відсоткова ставка по облігації.

Розглянемо облігацію, номіналом 100 грн., що погашається у розмірі 110 гривень, по якій сплачується купон у розмірі 8% двічі на рік. Облігація випущена на п'ять років. Продається за 80 гривень.
$T = 5$, $N = 100$, $R = 1.1$, $D = 8\%$ - це означає, що на рік по облігації виплачується 8 грн. $p = 2$. **Важливо**: ставка D визначає річний купон у розмірі DN, який сплачується **рівними частинами** p разів на рік! Тобто

у нашому прикладі, щопівроку сплачується 4 грн.
Купонна виплата по облігації - це аналог відсоткової частини при виплаті боргу, тобто прибуток власника облігації. Інший вид прибутку який може отримати утримувач, це прибуток при погашенні, або **капітальний прибуток**. У нашому прикладі капітальний прибуток становить 30 грн. $(R-P)N$. $g = 0.08/1.1 = 0.07272 \approx 7.28\%$.

Напишемо тепер рівняння вартостей для цієї облігації:

$$80 = 4*2a_{\overline{5|}}^{(2)} + 110*\nu^5 = 8\frac{1-\nu^5}{i^{(2)}} + 110*\nu^5 = 8\frac{1-(1+i)^{-5}}{2((1+i)^{1/2}-1)} + 110*(1+i)^-5$$

$$x = (1+i)^{1/2},\ (80x^{10} - 110)(2x-2) - 8(x^{10}-1) = 0$$

$$160x^{11} - 160x^{10} - 220x + 220 - 8x^{10} + 8 = 0$$

$$160x^{11} - 168x^{10} - 220x + 228 = 0$$

$$x = 1.076,\ i = (1.076)^2 - 1 = 0.15776 \approx 15.77\%$$

Розглядається облігація номіналом 100 грн., з купонною ставкою 12%, виплатами раз на квартал, погашення відбувається за номіналом, через 5 років. Ефективна відсоткова ставка рівна 10%. Обчисліть ціну облігації.

$T = 5$, $g = D = 0.12$, $R = 1$, $N = 100$, $i = 0.1$, обчислити PN.

$$PN = (DN/p)pa_{\overline{T|}}^{(p)} + (RN)\nu^T = DNa_{\overline{T|}}^{(p)} + (RN)\nu^T$$

$$PN = 12a_{\overline{5|}}^{(4)} + 100\nu^5 = 12\frac{1-\nu^5}{4((1+i)^{1/4}-1)} + 100\nu^5 = 109.2536.$$

Приклад. Нехай маємо облігацію яка погашається за 1000 гривень (нехай це буде номіналом), купується за 975 грн, і купони сплачуються щопівроку у розмірі 48 гривень. Строк, 4 роки. Запишемо параметри облігації:

$$T = 4, N = 1000, P = 0.975, D = 0.096, p = 2, R = 1, g = \frac{D}{R} = D = 0.096$$

Запишемо рівняння вартостей:

$$P = D * a_{\overline{4|}}^{(2)} + \nu^T,$$

$$0.975 = 0.096 * \frac{1-\nu^4}{2*((1+i)^{\frac{1}{2}}-1))} + \nu^4, i \approx 0.1064946$$

2 Вплив податків

Відсоткові ставки які платить боржник та отримує утримувач облігації НЕ СПІВПАДАЮТЬ! Держава стягує податки, змінюючи таким чином ефективну відсоткову ставку позичальника.
Якщо емітент сплачує купони розміром DN, а держава стягує певний податок із цих платежів, то позичальник отримує менше і відповідно його ефективна ставка знижується.

Нехай t_1 - це відсоткова ставка податку на прибуток, а t_2 -ставка податку на приріст капіталу.

$$PN = (DN/p)pa_{\overline{T}|}^{(p)} + (RN)\nu^T = DNa_{\overline{T}|}^{(p)} + (RN)\nu^T$$

$$P = Da_{\overline{T}|}^{(p)} + R\nu^T$$

Податок на прибуток сплачується із суми DN а податок на приріст капіталу із суми $(R - P)N$ якщо ця величина додатня. Подивимось як зміниться рівняння вартостей якщо врахувати податок на прибуток.

Позначимо $A = PN$ загальну ціну облігації, $C = RN$- загальну виплату при погашення, $K = C\nu^T$ - сучасну вартість виплати при погашенні.

$$A = DN(1 - t_1)a_{\overline{T}|}^{(p)} + C\nu^T = DN(1 - t_1)\frac{1 - \nu^T}{i^{(p)}} + C\nu^T =$$

$$(DRN(1 - t_1)/R)\frac{1 - \nu^T}{i^{(p)}} + K = \frac{g(1 - t_1)}{i^{(p)}}(RN)(1 - \nu^T) + C\nu^T =$$

$$\frac{g(1 - t_1)}{i^{(p)}}(C - C\nu^T) + C\nu^T = \frac{g(1 - t_1)}{i^{(p)}}(C - K) + K.$$

Таким чином формула Мейкема це:

$$A = \frac{g(1 - t_1)}{i^{(p)}}(C - K) + K.$$

Формула Мейкема залишається вірною, якщо позика погашається серією з m платежів, так, що через n_l років погашається номінал N_l, $l = \overline{1, m}$. Щоб це довести, розіб'ємо позику на m частин, і тоді для l-тої частини виконана стандартна формула Мейкема:

$$A_l = \frac{g(1 - t_1)}{i^{(p)}}(C_l - K_l) + K_l,$$

де $C_l = RN_l$, $K_l = C_l\nu^{n_l}$.

$$A = \sum_{l=1}^{m} A_l = \frac{g(1 - t_1)}{i^{(p)}}(\sum_{l=1}^{m} C_l - \sum_{l=1}^{m} K_l) + \sum_{l=1}^{m} K_l = \frac{g(1 - t_1)}{i^{(p)}}(C - K) + K,$$

де $C = \sum_{l=1}^{m} C_l = RN$, $K = \sum\limits_{l=1}^{m} K_l = \sum\limits_{l=1}^{n} RN_l\nu^{n_l}$.

Формула Мейкема залишається справедливою лише тоді, коли виконані умови:
1. Погашення і купівля позики відбуваються в моменти купонних виплат, одразу після виплати
2. Податок нараховується негайно після сплати купону
3. Купонна ставка D та розмір податку t_1 сталі

Розглянемо ситуацію, коли на додачу до t_1 також має місце податок на приріст капіталу t_2. Податок на приріст капіталу нараховується на суму $C - A$ якщо вона більша нуля.

$$A = \frac{g(1-t_1)}{i^{(p)}}(C-K) + K.$$

$$A - C = C\left(\frac{g(1-t_1)}{i^{(p)}} - 1\right) - K\left(\frac{g(1-t_1)}{i^{(p)}} - 1\right) = (C-K)\left(\frac{g(1-t_1)}{i^{(p)}} - 1\right)$$

виникає питання коли цей вираз буде ≤ 0.

Осклыки K - сучасна вартість виплат при погашенні, то при $i > 0$ $K < C$. Отжже для того, щоб $A - C \leq 0$ необхідно і достатньо, щоб $\frac{g(1-t_1)}{i^{(p)}} - 1 \leq 0$, або

$$i^{(p)} \geq g(1-t_1).$$

Тобто умова $A \leq C$ еквівалентнта $i^{(p)} \geq g(1-t_1)$. Якщо ця умова не виконана то приросту капіталу немає і податок платити не потрібно!

Вважаємо, що приріст капіталу є, розглянемо як зміниться формула Мейкема. Зауважимо, що для частини позики яка погашається в момент n_l приріст капіталу дорівнює $(R - P')N$, де $P' = A'/N$, а A' - це шукана ціна з урахуванням податку. Тоді розмір податку на приріст капіталу для виплати в момент n_l рівний $t_2(R-P')N_l$, а сучасна вартість всіх податкових виплат (на приріст капіталу рівна):

$$t_2(R-P')\sum_{l=1}^{m} N_l \nu^{n_l} = t_2(1 - P'/R)\sum_{l=1}^{m} RN_l \nu^{n_l} =$$

$$t_2(1-P'/R)K = t_2(1-(P'N)/(RN))K = t_2(1-A'/C)K.$$

Тепер ми можемо написати рівняння вартостей:

$$A' = \frac{g(1-t_1)}{i^{(p)}}(C-K) + K - t_2(1-A'/C)K$$

$$A' = \frac{(1-t_2)K + \frac{g(1-t_1)(C-K)}{i^{(p)}}}{1-t_2K/C} = \frac{(1-t_2)K + (1-t_1)I}{1-t_2K/C},$$

де $I = g(C-K)/i^{(p)}$.

Розглянемо приклад. Нехай маємо облігацію яка купується за ціною 80 грн, номіналом у 100 гривень, погашається за номіналом (зауважимо, що якщо не сказано іншого, то облігація завжди поагашається за номіналом), термін 5 років, розмір річного купону 8%, кількість купонних платежів 2

на рік, покупець платить податок на прибуток у розмірі 20%. Обчислити норму прибутку покупця.
Розв'язання.

Параметри облігації: $D = 8\%$, $T = 5$, $p = 2$, $P = 0.8$, $N = 100$, $R = 1$, $t_1 = 0.2$, $t_2 = 0$, $A = 80$, $g = D/R = D$

$$A = \frac{g(1-t_1)}{i^{(p)}}(C-K)+K.$$

$$80 = \frac{0.08*(1-0.2)}{i^{(2)}}(100-100\nu^5)+100\nu^5$$

$$80 = \frac{0.08*(1-0.2)}{2((1+i)^{1/2}-1)}(100-100\nu^5)+100\nu^5$$

$$80(1+i)^5 = \frac{0.032(100(1+i)^5-100)}{(1+i)^{1/2}-1}+100,$$

$$x = (1+i)^{1/2}$$

$$80x^{10} = \frac{0.032(100x^{10}-100)}{x-1}+100,$$

$$x = 1.059,\ i = x^2-1 = 12.15\%$$

З'ясуємо чи є приріст капіталу? За критерієм: $i^{(p)} \geq g(1-t_1) \approx 0.06$, отже приріст капіталу є. Домашнє завдання, обчислити i якщо $t_2 = 12\%$.

Інша задача. Нехай розглядається облігація з номіналом у 100 грн, що погашається за 95 гривень, через 5 років, купонна ставка рівна 10%, купонні виплати здійснюються щомісяця, $t_1 = 20\%$, $t_2 = 15\%$. Обчислити окремо ціну облігації для покупця що сплачує лише податок на прибуток і для покупця що сплачує обидва податки, щоб отримати річну ефективну норму прибутку у 6%.

3 Практичне. Облігації.

1. Нехай маємо облігацію з купоном 58 грн., що сплачується раз на півроку, номінал облігації 1000 гривень, податок на прибуток 20%. Облігація погашається за номіналом через 5 років. Обчисліть ціну облігації, якщо ефективна відсоткова ставка рівна 5%.

Розв'язок. за формулою Мейкема:

$$A = \frac{g(1-t_1)}{i^{(2)}}(C-K)+K,$$

$$g = D/R = D = (2*58)/1000 = 0.116,$$

$$i^{(2)} = 2*((1+i)^{1/2}-1) = 0.04939015,$$

$$C = 1000,\ K = 1000\nu^5 = 783.5262$$

$$A = 1190.263$$

2. Нехай маємо облігацію з купоном 58 грн., що сплачується раз на пів-року, номінал облігації 1000 гривень, податок на прибуток 20%. Облігація погашається за номіналом через 5 років. Інвестор купує облігацію через 7 місяців після випуску. Обчисліть ціну облігації яку заплатить інвестор, щоб отримати ефективну відсоткову ставку у 6%.

Розв'язок: Застосуємо формулу Мейкема до моменту часу $t = 1$, та $i = 0.06$ і отримаємо вартість облігації на момент 1, після чого помножимо її на $\nu^{-5/12}$ щоб отримати вартість на момент купівлі.

$$A = \nu^{\frac{5}{12}} \left(58 * (1 - t_1) + \frac{g * (1 - t_1)}{2(1.06^{1/2} - 1)} (C - C\nu^4) + C\nu^4 \right) = 1136.869.$$

Якщо розв'язувати грошовим потоком:

$$A = \nu^{\frac{5}{12}} \left((1 - t_1) \sum_{k=0}^{8} 58\nu^{k/2} + 1000\nu^4 \right) = \nu^{\frac{5}{12}} \left(58(1 - t_1) \frac{1 - \nu^{9/2}}{1 - \nu^{1/2}} + 1000\nu^4 \right)$$

3. Яку прибутковість отримав перший інвестор?

Розв'язок:

$$-1190.263 + \frac{58}{(1 + i)^{1/2}} + \frac{1136.869}{(1 + i)^{7/12}} = 0$$

$$-1190.263 * x^7 + 58 * x + 1136.869 = 0, \; x = 1.000562, \; i = 0.006769992 \approx 0.68\%$$

4. Нехай маємо сталу інфляцію на рівні ξ, та ефективну відсоткову ставку i. Реальною відсотковою ставкою називається величина:

$$r = \frac{1 + i}{1 + \xi} - 1.$$

Доведіть, що для довільного грошового потоку $\{C_k\}, \{t_k\}$ - r є розв'язком рівняння вартостей з використанням накопичувального множника

$$A(0, t) = \left(\frac{1 + i}{1 + \xi} \right)^t,$$

це означає, що $\nu(t) = \frac{1}{A(0,t)}$.

Розв'язок.

Розглянемо суму C, що інвестується в нульовий момент часу на t років зі ставкою i. Яким буде накопичення цієї суми, з урахуванням інфляції?

$$\frac{C}{(1 + \xi)^t} (1 + i)^t = C(1 + r)^t = CA(0, t).$$

Тоді дисконтний множник буде $\frac{1}{A(0,t)}$.

5. Нехай інфляція рівна 3% на рік. Яку реальну відсоткову ставку отримали перший та другий інвестори?

Розв'язок.
Тоді

$$r_1 = \frac{1.0068}{1.03} - 1 = -0.02252427,$$

$$r_2 = \frac{1.06}{1.03} - 1 = 0.02912621.$$

6. Розв'яжіть задачі 1,2 та 3, якщо $R = 2$, t_2 для першого інвестора дорівнює 8%, для другого інвестора 6%. А $i = 0.07$ в задачі 1.

4 Практичне. Облігації 2.

1. Нехай маємо облігацію, з ефективною ставкою 8%, купоном 8%, податком на прибуток 20%, та податком на приріст капіталу 10%. Облігація погашається за номіналом у 1000 грн, за п'ять років, купони сплачуються щоквартально. Обчисліть ціну облігації.
Розв'язок.
Обчислимо $i^{(4)} = 4 * (1.08^{1/4} - 1) = 0.07770619$. Далі порівнямєо: $i^{(4)}$ та $g(1 - t_1) = \frac{D}{R}0.08 = 0.08 * 0.08 = 0.0064$. Бачимо, що $i^{(4)} > g(1 - t_1)$ отже є приріст капіталу. Тоді скористаємось другою формулою Мейкема:

$$A' = \frac{(1 - t_2)K + (1 - t_1)I}{1 - t_2\frac{K}{C}} = 939.5,$$

де $K = C\nu^5$, $C = 1000$, $I = \frac{g(C-K)}{i^{(4)}}$.

$$I = 0.08 * (1000 - 1000 * 1.08^{-5})/i^{(4)} = 328.8457,$$

$$A' = \frac{(1 - 0.1) * 1000 * 1.08^{-5} + (1 - 0.2) * I}{(1 - 0.1 * 1.08^{-5})}$$

2. Через 14 місяців перший інвестор продав облігацію другому інвестору, що сплачує податки на прибуток та приріст капіталу у розмірі 20%. Другий інвестор отримав прибутковість у 8.5%. Обчисліть ціну продажу.

Розв'язок.
З'ясуємо, чи є приріст капіталу. Нехай ціна купівлі A, тоді:

$$A = \nu^{1/12}\left(20(1 - t_1)\sum_{k=0}^{15}\nu^{k/4} + 1000 * \nu^{15/4} - t_2(1000 - A)^+\nu^{15/4}\right) =$$

$$\nu^{\frac{1}{12}}20(1 - t_1)\frac{1 - \nu^4}{1 - \nu^{1/4}} + 1000\nu^{\frac{1}{12}}\nu^{\frac{15}{4}} - t_2(1000 - A)^+\nu^{\frac{1}{12}}\nu^{\frac{15}{4}} =$$

$$950.6189 - 0.1462905 * (1000 - A)^+ = 950.6189 - 0.1462905 * (1000 - A).$$

$$A(1 + 0.1462905) = 950.6189 - 0.1462905 * 1000,$$

$$A = 701.6794.$$

3. Маємо облігацію, з ефективною ставкою у 10%, купоном 6%, виплатами щокварталу, строк дії облігації 6 років, номінал 1000, погашається за 980. Інвестор платить податок на прибуток 20%, на приріст капіталу 12%. Обчисліть ціну.

Через 16 місяців інвестор продає облігацію другому інвестору, отримавши при цьому прибутковість у 9%. Другий інвестор платить податок на прибуток та приріст капіталу 15%. Обчисліть ціну та прибутковість другого інвестора.