1 Вступ.

1.1 Лекція. Відсотки.

Загальновідомо, що гроші змінюють свою вартість з часом, причому, як правило у бік зменшення вартості. Виділяють декілька факторів, які впливають на зменшення вартості грошей у часі:
1. Психологічні, споживання зараз спричиняє більше задоволення, ніж відкладання споживання на майбутнє.
2. Ризики від відкладеного споживання.
3. Інфляція.

Як вимірюють зміну вартості грошей. Це робиться за допомогою відстокової ставки. Які бувають відсоткові ставки, та як ними вимірювати вартість грошей? Найпростіший підхід, це зафіксувати сталу ставку i і нараховувати прості або складні відсотки. Прості відсотки нараховуються за формулою:

$$1 + it$$

складні за формулою:

$$(1 + i)^t.$$

Як правило, при нарахуванні відсотків, необхідно зафіксувати базовий період, і це як правило, один рік. Якщо відсотки нараховуються за схемою складних відсотків, і за рік нараховується i відсотків на 1 гривню, то i - називають **ефективною відсотковою ставкою**.

Оскільки іноді виникають ситуації, коли відсоткова ставка не є сталою, то необхідно розробити більш гнучку теорію, для аналізу таких ситуацій. Для цього вводять поняття номінальної відсоткової ставки.

Розглянемо ситуацію, коли в банк вноситься 1000 грн. під 12% річних. Скільки буде нараховано за місяць? Це буде $1000 * (1+i)^{\frac{1}{12}}$, а чисті відсотки складуть ≈ 9.49 грн.

Нехай t - деякий момент часу, а h - деякий період часу, тоді **номінальною відсотковою ставкою** на проміжку $(t, t+h]$ називається величина $i_h(t)$ така, що накопичення одиничної сума на інтервалі $(t, t+h]$ складає $1 + hi_h(t)$.

Приклад. Нехай $i_h(t)$ - стала, та $h = 1/2$, тобто половині року, або 6 місяцям. Тоді накопичення на інтервалі $(0, 0.5]$ складатиме $1 + \frac{1}{2}i_{1/2}$, а якщо використовується схема складних відсотків, то накопичення за рік складає: $(1+\frac{1}{2}i_{1/2})^2$. Якщо задана ефективна ставка i, скажімо $i = 0.08$, то матимемо співвідношення:

$$1 + i = \left(1 + \frac{1}{2}i_{1/2}\right)^2,$$

звідки можемо виразити $i_{1/2}$ через i:

$$i_{1/2} = 2((1+i)^{\frac{1}{2}} - 1) \approx 0.0785.$$

Нехай маємо загальну ситуацію. Нехай накопичення одиничної суми на інтервалі $(s, t]$ складає $A(s, t)$. Ми вважаємо, що накопичення здійснюється відповідно до схеми складних відсотків (тут немає відсотків, мається на увазі, що здійснюється накопичення на накопичення).

Якщо $A(s, t) = (1 + i)^{t-s}$ то маємо звичайну модель складних відсотків. Для складних відсоктів неважливо як розбивати інтервал $(s, t]$ з подальшим перевкладанням.

Нехай $s < u < t$, тоді: $A(s, u) = (1 + i)^{u-s}$ - це накопичення за час $(s, u]$ (одиничної суми!) а $A(u, t) = (1 + i)^{t-u}$ - накопичення одиничної суми за час $(u, t]$. Тоді з одного боку накопичення одиничної суми за весь період $(s, t]$ рівне $A(s, t) = (1 + i)^{t-s}$ згідно з визаначення A а з іншого боку, якщо розбити період $(s, t]$ на $(s, u]$ та $(u, t]$, тоді загальне накопичення буде $A(s, u)A(u, t) = (1 + i)^{u-s}(1 + i)^{t-u} = (1 + i)^{t-u+u-s} = (1 + i)^{t-s} = A(s, t)$. Будемо говорити, що $A(s, t)$ (тепер уже в загальному випадку) задовільняє принципу узгодженості, якщо $A(s, u)A(u, t) = A(s, t)$ для довільних $s < u < t$.

Позначимо $f(t) = A(0, t)$. Нехай h - деякий малий проміжок часу. Тоді:

$$A(0, t + h) = A(0, t)A(t, t + h) = A(0, t)(1 + hi_h(t)),$$

тому що, якщо h дуже малий період часу, то ми можемо вважати, що накопичення $A(t, t + h) \approx 1 + hi_h(t)$. Тоді:

$$f(t + h) = f(t)(1 + hi_h(t)),$$

$$\frac{f(t + h) - f(t)}{h} = f(t)i_h(t),$$

перейдемо тепер до границі при $h \to 0$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(t + h) - f(t)}{h} = f(t) \lim_{h\to 0} i_h(t).$$

Величина $\lim_{h\to 0} i_h(t)$ називається **інтенсивністю або силою відсотка**, та позначається $\delta(t)$ Припустивши, що $A(s, t)$ - непервно-диференційовна (а отже такою є і f),

$$f'(t) = f(t)\delta(t),$$

і окрім того

$$f(0) = 1.$$

$$\frac{df}{dt} = f\delta,$$

$$\frac{df}{f} = \delta(t)dt,$$

$$\int \frac{df}{f} = \int \delta(t)dt,$$

$$\ln(f) = \int_0^t \delta(s)ds + C,$$

$$f(t) = C_1 e^{\int_0^t \delta(s)ds},$$

скориставшись початковою умовою $f(0) = 1$, отримаємо $C_1 = 1$. Отже:

$$f(t) = \exp\left(\int_0^t \delta(s)ds\right).$$

Тепер можемо відтворити $A(s,t)$:

$$A(0,t) = A(0,s)A(s,t),$$

$$A(s,t) = A(0,t)/A(0,s) = f(t)/f(s) = \frac{\exp\left(\int_0^t \delta(u)du\right)}{\exp\left(\int_0^s \delta(u)du\right)}$$

$$= \exp\left(\int_0^t \delta(u)du - \int_0^s \delta(u)du\right) = \exp\left(\int_s^t \delta(u)du\right).$$

Отже за зроблених припущень (умови узгодженості та непервної-диференційовності фунції $A(s,t)$) отримали формулу:

$$A(s,t) = \exp\left(\int_s^t \delta(u)du\right).$$

Якщо $\delta = \delta(s)$ - стала, то накопичення на інтревалі $(0,t]$:

$$A(0,t) = e^{\int_0^t \delta du} = e^{\delta t} = (1+i)^t,$$

звідки маємо співвідношення:

$$e^{\delta} = 1 + i.$$

2 Лекція. Дисконтування, грошові потоки, рівняння вартостей.

Розглянемо задачу, надходження коштів розміру $C_1, \ldots, C_n$ в моменти часу $t_1, \ldots, t_n$. Виникає питання, скільки треба заплатити зараз, щоб отримати ці кошти, або скільки коштують ці виплати сьогодні? Нехай маємо ефективну ставку i, тоді можемо записати так: нехай ми інвестували суму C на початку (це і є наша "справедлива" ціна) і нарахування складних відсотків та ефективною ставкою i "покриває" цей потік платежів. Вважаємо $t_1 < t_2 \ldots < t_n$:

$$(((C(1+i)^{t_1} - C_1)(1+i)^{t_2 - t_1} - C_2)\ldots)(1+i)^{t_n - t_{n-1}} - C_n = 0. \tag{1}$$

Можна міркувати іншим чином. Розглянемо суму D_t в момент часу t, скільки ця сума коштує зараз, якщо задана ефективна відсоткова ставка i? Нехай зараз ця сума коштує D_0. Тоді маємо:

$$D_0(1+i)^t = D_t,$$

$$D_0 = \frac{D_t}{(1+i)^t}.$$

Таким чином, ми маємо можливість обчислювати "теперішню" вартість майбутніх сум за допомогою формули $D_t(1+i)^{-t}$, цей процес (множення суми на $(1+i)^{-t}$) називається **дисконтуванням**, а величина $\nu = \frac{1}{1+i}$ називається **дисконтним множником**, і сума $D_t\nu^t$ називається **сучасною вартістю** суми D_t що надійшла в момент часу t.

Якщо застосувати підхід заснований на дисконтуванні, то ми можемо обчислити, скільки коштуватиме **зараз** кожна із сум $C_1, \dots, C_n$. Тоді сучасна вартість кожної виплати рівна:

$$(C_1\nu^{t_1}, C_2\nu^{t_2}, \dots, C_n\nu^{t_n}),$$

тоді

$$C = \sum_{k=1}^{n} C_k \nu^{t_k}.$$

Насправді отримане C, є розв'язком рівнняння (1).

$$\left(\sum_{k=1}^{n} C_k(1+i)^{-t_k}\right)(1+i)^{t_1} - C_1 = \left(C_1(1+i)^{-t_1}(1+i)^{t_1} + \sum_{k=2}^{n} C_k \nu^{t_k - t_1}\right) - C_1$$

$$= \sum_{k=2}^{n} C_k(1+i)^{t_1 - t_k}$$

Зробимо другий крок:

$$\left(\sum_{k=2}^{n} C_k(1+i)^{t_1-t_k}\right)(1+i)^{t_2-t_1} - C_2$$

$$= \left(C_2(1+i)^{t_1-t_2}(1+i)^{t_2-t_1} + \sum_{k=3}^{n} C_k(1+i)^{t_1-t_k+t_2-t_1}\right) - C_2$$

$$= \sum_{k=3}^{n} C_k(1+i)^{t_2-t_k}.$$

Розглянемо тепер ситуацію, коли задано інтенсивність відсотка $\delta(t)$. Розглянемо задачу знаходження D_0 якщо відомо D_t, що надійшло в момент часу t:

$$D_0 \exp\left(\int_0^t \delta(u)du\right) = D_t,$$

$$D_0 = D_t \exp\left(-\int_0^t \delta(u)du\right) = D_t\nu(t),$$

де
$$\nu(t) = \exp\left(-\int_0^t \delta(u)du\right).$$
Якщо інтенсивність відсотка стала $\delta = \delta(u)$, то $\nu(t) = e^{-\delta t} = \nu^t$, де
$$\nu = e^{-\delta} = \frac{1}{1+i}.$$
Тоді сума C з першої задачі записується так:
$$C = \sum_{k=1}^{n} C_k \nu(t_k) = \sum_{k=1}^{n} C_k \exp\left(-\int_0^{t_k} \delta(u)du\right).$$

Дискретним грошовим потоком називається набір платежів $\{C_1, \ldots, C_n, \ldots\}$ (можливо нескінченний) які надходять у моменти часу $\{t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_n \le \ldots\}$. Сучасною вартістю грошового потоку називається величина:
$$PV = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \exp\left(-\int_0^{t_k} \delta(u)du\right),$$
якщо ефективна відсоткова ставка стала, та рівна i, то
$$PV = PV(i) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \nu^{t_k} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k (1+i)^{-t_k}.$$

Рівнянням вартостей дискретного грошового потоку, називають рівняння:
$$PV = 0.$$

Зауваження. Взагалі кажучи, за допомогою функції накопичення (або $(1+i)^t$ або $\exp\left(\int_0^t \delta(u)du\right)$) можна обчислювати вартість грошей на будь-який момент часу s, не обов'язково нульовий. У цьому випадку ми будемо говорити, про сучасну вартість на момент s.

Приклад. Нехай інвестовано суму $C = 2000000$ грн. у купівлю нерухомості, яка генерує 20000 грн прибутку на місяць, через три роки нерухомість продається за 1500000. Якою є відсоткова ставка, що відповідає цьому грошовому потоку?

Грошовий потік має вигляд (у тис. грн.): $\{-2000, +20, \ldots, +20, +1500\}$, $\{0, \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \ldots, 3, 3\}$. Якою має бути ставка, щоб відворити цей грошовий потік?

Міркування такі, приносимо 2000 в банк, чекаємо один місяць, має накопичення $2000(1+i)^{\frac{1}{12}}$, тепер забираємо 20 і залишається $\left(2000(1+i)^{\frac{1}{12}} - 20\right)$. Чекаємо, це місяць. Через місяць матимемо $\left(2000(1+i)^{\frac{1}{12}} - 20\right)(1+i)^{1/12}$ на рахунку і знову забираємо 20. Тоді через два місяці залишається: $\left(\left(2000(1+i)^{\frac{1}{12}} - 20\right)(1+i)^{\frac{1}{12}} - 20\right)$ і так робимо до кінця третього року, потім забираємо останні 20 і ще 1500, після чого в банку нічого не залишається.

Введемо послідовність A_n - залишок на рахунку наприкінці n-того місяця, так, що $A_0 = 2000$, $A_{n+1} = A_n(1+i)^{\frac{1}{12}} - 20$, $n \in \{1, \ldots, 36\}$, причому $A_{36} = 1500$.

$$A_n = A_0(1+i)^{\frac{n}{12}} - 20\sum_{k=0}^{n-1}(1+i)^{\frac{k}{12}}$$

Перевіримо для $n = 2$:

$A_2 = A_1(1+i)^{\frac{1}{12}} - 20 = (A_0(1+i)^{\frac{1}{12}} - 20)(1+i)^{\frac{1}{12}} - 20 = A_0(1+i)^{\frac{2}{12}} - 20 - 20(1+i)^{\frac{1}{12}}$.

Тоді $A_{36} = A_0(1+i)^3 - 20\sum_{k=0}^{35}(1+i)^{\frac{k}{12}} = 1500$. Розділимо його на $(1+i)^3$:

$$A_0 = 20\sum_{k=0}^{35}(1+i)^{\frac{k-36}{12}} + 1500(1+i)^{-3} = 20\sum_{j=1}^{36}(1+i)^{\frac{-j}{12}} + 1500(1+i)^{-3} =$$

$$= 20\sum_{j=1}^{36}\nu^{\frac{j}{12}} + 1500\nu^3.$$

Маємо:

$$-A_0 + 20\sum_{j=1}^{36}\nu^{\frac{j}{12}} + 1500\nu^3 = 0.$$

$$-2000 + 20\nu^{\frac{1}{12}}\frac{1-\nu^3}{1-\nu^{\frac{1}{12}}} + 1500\nu^3 = 0,$$

$$\nu = 0.9593069,\ \ i = \frac{1}{\nu} - 1 = 0.04241927.$$

3 Практика. Дисконтування грошових потоків.

Приклад 1. Якою є сучасна вартість серії виплат, що почнуться через десять років, становитимуть 20 тис. гривень щомісяця, і триватимуть довічно, якщо номінальна відсоткова ставка, що конвертується щомісяця рівна 9%.

Розв'язання.

Маємо грошовий потік у якому $C_k = 20000$, $k = \overline{1,\infty}$, а моменти часу t_k задовільняють рівнянню:

$$t_k = 10 + k/12,$$

тут ми вважаємо, що виплати здійснюються наприкінці місяця, тобто перша виплата буде через 10 років та 1 місяць. Запишемо сучасну вартість за формулою:

$$C = \sum_{k=1}^{\infty} 20000\nu^{10+k/12} = 20000\nu^{10}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\nu^{1/12}\right)^k = 20000\nu^{10}\nu^{1/12}\frac{1}{1-\nu^{1/12}}$$

$$= 20000\frac{(1+i)^{-\frac{121}{12}}}{1-(1+i)^{-\frac{1}{12}}} = 20000\frac{(1+\frac{i^{(12)}}{12})^{-121}}{1-(1+\frac{i^{(12)}}{12})^{-1}}$$

$$= 20000\frac{(1+\frac{0.09}{12})^{-121}}{1-(1+\frac{0.09}{12})^{-1}} = 1087832.81.$$

Задача 1. Розглянемо інвестицію в бізнес, яка передбачає внески розміром 1000 на початку кожного з перших трьох років та доходи розміром 85 щомісяця протягом п'яти років. Обчислити прибутковість такого проекту. Розв'язання.

Запишемо рівняння вартостей:

$$-1000 - 1000\nu - 1000\nu^2 + \sum_{k=1}^{5*12} 85\nu^{\frac{k}{12}} = -1000\frac{1-\nu^3}{1-\nu} + 85\nu^{\frac{1}{12}}\frac{1-\nu^5}{1-\nu^{\frac{1}{12}}}$$

$$\nu = 0.6553523,\ \ i = 1/\nu - 1 = 0.5258968.$$

Можна переписати рівняння, перейшовши до додатніх степенів, це сприятиме чисельній стійкості. Покладемо $x = 1+i$.

$$-1000(x^5+x^4+x^3) + 85\sum_{k=1}^{60} x^{\frac{60-k}{12}} = -1000x^3\frac{x^3-1}{x-1} + 85\sum_{j=0}^{59} x^{\frac{j}{12}} =$$

$$= -1000x^3\frac{x^3-1}{x-1} + 85\frac{x^5-1}{x^{1/12}-1}$$

Задача 2. Якою є сучасна вартість серії виплат, що почнуться через десять років, становитимуть 20 тис. гривень щомісяця, і триватимуть довічно, якщо сила відсотка задана формулою:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0.06, \text{ якщо } 0 < t \le 20, \\ 0.08, \text{ якщо } 20 < t < \infty \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\sum_{k=1}^{\infty} 20000\exp\left(-\int_0^{10+k/12}\delta(u)du\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} 20000\exp\left(-\left(\int_0^{10}\delta(u)du + \int_{10}^{10+k/12}\delta(u)du\right)\right)$$

$$= 20000e^{-10\cdot 0.06}\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left(-\int_{10}^{10+k/12}\delta(u)du\right)$$

$$= 20000e^{-0.6}\left(\sum_{k=1}^{120}\exp\left(-\int_{10}^{10+k/12}\delta(u)du\right) + \sum_{k=121}^{\infty}\exp\left(-\int_{10}^{10+k/12}\delta(u)du\right)\right)$$

$$= 20000e^{-0.6}\left(\sum_{k=1}^{120} e^{-0.06\cdot\frac{k}{12}} + \sum_{k=121}^{\infty}\exp\left(-\int_{10}^{10+k/12}\delta(u)du\right)\right)$$

$$= 20000e^{-0.6}\left(\sum_{k=1}^{120} e^{-0.06\cdot\frac{k}{12}} + \sum_{k=121}^{\infty}\exp\left(-\int_{10}^{10+10+\frac{k-120}{12}}\delta(u)du\right)\right)$$

$$= 20000e^{-0.6}\left(\sum_{k=1}^{120} e^{-0.06\cdot\frac{k}{12}} + \sum_{j=1}^{\infty}\exp\left(-\int_{10}^{20+\frac{j}{12}}\delta(u)du\right)\right)$$

$$= 20000e^{-0.6}\left(\sum_{k=1}^{120} e^{-0.06\cdot\frac{k}{12}} + e^{-10\cdot 0.06}\sum_{j=1}^{\infty}\exp\left(-\int_{20}^{20+\frac{j}{12}}\delta(u)du\right)\right)$$

$$= 20000e^{-0.6}\left(\sum_{k=1}^{120} e^{-0.06\cdot\frac{k}{12}} + e^{-10\cdot 0.06}\sum_{j=1}^{\infty} e^{-0.08\cdot\frac{j}{12}}\right)$$

$$= 20000e^{-0.6}\left(e^{-\frac{0.06}{12}}\frac{1-e^{-\frac{0.06}{12}\cdot 120}}{1-e^{-\frac{0.06}{12}}} + e^{-0.6}\frac{e^{-\frac{0.08}{12}}}{1-e^{-\frac{0.08}{12}}}\right)$$

$$= 20000e^{-0.6}\left(e^{-\frac{0.06}{12}}\frac{1-e^{-0.6}}{1-e^{-\frac{0.06}{12}}} + e^{-0.6}\frac{1}{e^{\frac{0.08}{12}}-1}\right) = 1888569.626181.$$

4 Лекція. Рівнння вартостей, неперервні грошові потоки.

Нехай ми маємо грошовий потік $\{C_1, \ldots, C_n\}$, що сплачуються в моменти часу $\{t_1, \ldots, t_n\}$, тоді р-ння вартостей:

$$PV(i) = 0, \text{ або} \sum_{k=1}^{n} C_k \nu^{t_k} = 0,$$

за умови, що відсоткова ставка стала протягом всього періоду. Розв'язок рівнняня вартостоей по відношенню до i називається **прибутковістю**.

Приклад.

Нехай маємо інвестиційний проект, у якому інвестується сума 100 тис на початку, а потім отримуються дві виплати - 50 тис. через 6 місяців, та 70 через 14 місяцв. Якою є прибутковість проекту?

$$-100\nu^0 + 50\nu^{1/2} + 70\nu^{7/6} = 0$$

$$\frac{50}{(1+i)^{1/2}} + \frac{70}{(1+i)^{7/6}} = 100,$$

$$50(1+i)^{4/6} + 70 = 100(1+i)^{7/6},$$

зробимо заміну змінної $x = (1+i)^{1/6}$:

$$50x^4 - 100x^7 + 70 = 0,$$

$$5x^4 - 10x^7 + 7 = 0,$$

$$x \approx 1.035241,\ 1+i = x^6 = (1.035241)^6 = 1.230974,\ i \approx 23.1\%.$$

Якою буде сучасна вартість цього грошового потоку, якщо $i = 10\%$?

$$PV(0.1) = -100 + 50*(1.1)^{-1/2} + 70*(1.1)^{-7/6} = 10.30661$$

$$PV(0.25) = -100 + 50*(1.25)^{-1/2} + 70*(1.25)^{-7/6} = -1.32.$$

Функція $\rho\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається інтенсивністю платежів, або **інтенсивністю грошового потоку**, якщо сума, що надходить на проміжку часу $[s,t)$, $s < t$ рівна:

$$S(s,t) = \int_s^t \rho(u)du.$$

Іншими словами в момент часу t надходить сума $\rho(t)dt$.

Носієм функції ρ назвемо множину $supp(\rho) = \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid \rho(x) \neq 0\}}$. Ми вважатимемо, що функція ρ неперервна на своєму носіїї, що носій складається зі скінченого набору інтервалів $[a_k, b_k],\ a_k < b_k \leq \infty$, і що на кожному інтервалі функція має сталий знак.

Тоді кількість грошей в момент t (отриманих на проміжку [0,t]), описується інтегралом:

$$S_t = S(0,t) = \int_0^t \rho(u)du,$$

за такої конструкції $\rho(t) = S_t'$.

Щоб обчислити сучасну вартість виплати в момент часу t треба помножити розмір виплати (тобто $\rho(t)dt$) на дисконтний множник ν^t, тоді загальна сучасна вартість вийде:

$$PV_t(i) = \int_0^t \nu^u \rho(u)du = \int_0^t \frac{\rho(u)}{(1+i)^u}du.$$

Якщо відсоток задано за допомоги сили відсотка $\delta(t)$, як тоді рахувати сучасну вартість неперервного грошового потоку?

$$PV_t(i) = \int_0^t \nu(u)\rho(u)du = \int_0^t \exp\left(-\int_0^u \delta(s)ds\right)\rho(u)du.$$

5 Практика. Рівняння вартостей.

Задача 1. Нехай маємо грошовий потік, що складається з двох інвестицій розміром 100 тис. гривень, на початку та через півроку. Прибутки будуть надходити раз на місяць у розмірі 5 тис. гривень протягом семи років, і перша виплата прийде через три місяці після початку. Обчисліть прибутковість.

Розв'язання.
1. Намалювати картинку. З'ясувати як виглядає грошовий потік.
2. Написати формулу для сучасної вартості.
3. Отримаєте вираз у якому фігуруватиме ν. Спростіть цей вираз.
4. Або розв'яжіть його чисельними методами відносно ν з великою точністю (6 знаків після коми), або виразіть через i ($\nu = \frac{1}{1+i}$), та розв'яжіть відносно $x = (1+i)$, можна взяти 4 знаки після коми.

Формула має вигляд:

$$-100 - 100\nu^{\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^{84} 5\nu^{\frac{2+k}{12}} = 0,$$

$$-100 - 100\nu^{\frac{1}{2}} + 5\nu^{\frac{1}{6}} \sum_{k=1}^{84} \left(\nu^{\frac{1}{12}}\right)^k = 0,$$

$$-100 - 100\nu^{\frac{1}{2}} + 5\nu^{\frac{1}{6}}\nu^{\frac{1}{12}} \frac{1-\nu^7}{1-\nu^{\frac{1}{12}}} = 0.$$

$$\nu \approx 0.7788474, \ i \approx 0.2839486.$$

Задача 2. Розглянемо грошовий потік у якому здійснюються інвестиції розміром 10 тис. щомісяця, на початку місяця починаючи з першого. Інвестиції тривають протягом одного року. Прибутки почнуть надходити через півроку (перша виплата через шість місяців) розміром 20 тис. раз на квартал. Всього буде здійснено 10 виплат. Обчисліть прибутковість.

6 Лекція. Ануїтети.

Ануїтетом називається грошовий потік у якому розмір виплати та час виплати розраховують за наперед заданим правилом.

Стандартним сталим ануїтетом постнумерандо (із заборгованістю) на n років називають грошовий потік у якому щороку, наприкінці року сплачують 1, протягом n років.

Стандартним сталим ануїтетом пренумерандо (авансовим) на n років називають грошовий потік у якому щороку, на початку року сплачують 1, протягом n років.

Чому дорівнює сучасна вартість таких грошових потоків? Розглянемо спочатку ануїтет постнумерандо. Йому відповідає грошовий потік: $C_1 = 1, \ldots, C_n = 1$, $t_1 = 1, t_2 = 2, \ldots, t_n = n$. Його сучасна вартість:

$$PV = \nu + \nu^2 + \ldots \nu^n = \sum_{k=1}^{n} \nu^k = \nu \frac{1-\nu^n}{1-\nu} = \frac{\nu}{1-\nu}(1-\nu^n) = \frac{\frac{1}{1+i}}{1-\frac{1}{1+i}}(1-\nu^n) =$$

$$= \frac{\frac{1}{1+i}}{\frac{i}{1+i}}(1-\nu^n) = \frac{1-\nu^n}{i}.$$

Для сучасних вартостей ануїтетів існують спеціальні позначення. Для сучасної вартості стандартного стало ануїтету постнумерандо використовують позначення $a_{\overline{n}|}$. Тоді

$$a_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|}(i) = \frac{1-\nu^n}{i}.$$

Для сучасної вартості стандартного стало ануїтету пренумерандо використовують символ $\ddot{a}_{\overline{n}|}$.

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|}(i) = 1 + \nu + \ldots + \nu^{n-1} = \frac{1-\nu^n}{1-\nu} = \frac{1-\nu^n}{d}.$$

Стандартні сталі ануїтети можуть тривати до нескінечнності, тоді вони позначатимуться:

$$a_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{i},\ \ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{1-\nu} = \frac{1}{d}.$$

Розглянемо ануїтети, що сплачуються p разів на рік.

Стандартним сталим **ануїтетом *постнумерандо*, що сплачується p разів на рік**, на n років називається грошовий потік, у якому платежі здійснюються p разів на рік, наприкінці p-тої частини року, кожен платіж рівний $1/p$ (**за рік сплачується 1!**) протягом n років (у даному випадку n не обов'язково ціле, np має бути цілим). Його сучасна вартість позначається $a^{(p)}_{\overline{n}|}$.

$$a^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{1}{p}\nu^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{p}\nu^{\frac{2}{p}} + \ldots \frac{1}{p}\nu^{\frac{np}{p}} = \frac{1}{p}\nu^{\frac{1}{p}}\frac{1-\nu^n}{1-\nu^{\frac{1}{p}}} =$$

$$= \frac{1}{p}\left(\frac{\frac{1}{(1+i)^{\frac{1}{p}}}}{1-\frac{1}{(1+i)^{\frac{1}{p}}}}\right)(1-\nu^n) = \frac{1}{p}\left(\frac{\frac{1}{(1+\frac{i^{(p)}}{p})}}{1-\frac{1}{(1+\frac{i^{(p)}}{p})}}\right)(1-\nu^n) =$$

$$\frac{1}{p}\left(\frac{\frac{p}{p+i^{(p)}}}{1-\frac{p}{p+i^{(p)}}}\right)(1-\nu^n) = \frac{1}{p}\left(\frac{\frac{p}{p+i^{(p)}}}{\frac{i^{(p)}}{p+i^{(p)}}}\right)(1-\nu^n) = \frac{1-\nu^n}{i^{(p)}}.$$

Стандартним сталимо **ануїтетом *пренумерандо*, що сплачується** p **разів на рік**, на n років називається грошовий потік, у якому платежі здійснюються p разів на рік, на початку p-тої частини року, кожен платіж рівний $1/p$ (**за рік сплачується 1!**) протягом n років (у даному випадку n не обов'язково ціле, np має бути цілим). Його сучасна вартість позначається $\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}$.

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{1}{p}\frac{1-\nu}{1-\nu^{\frac{1}{p}}}.$$

Також мають місце формули для $n=\infty$:

$$a^{(p)}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{i^{(p)}},\ \ddot{a}^{(p)}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{p}\frac{1}{1-\nu^{\frac{1}{p}}}.$$

Приклад. Нехай маємо пенсійну схему, у якій протягом перших десяти років робляться виплати розміром X, раз на рік, наприкінці року, а протягом наступних 20 років отримуються виплати розміром 20 тис., раз на місяць, наприкінці місяця. Відсоткова ставка 5%. Обчислити X.
Розв'язання: Запишемо рівняння вартостей:

$$-X\sum_{k=1}^{10}\nu^k + \sum_{k=1}^{240}20\nu^{10+\frac{k}{12}} = 0$$

$$-Xa_{\overline{10}|} + \sum_{k=1}^{240}20\nu^{10+\frac{k}{12}} = -Xa_{\overline{10}|} + 20\nu^{10}\sum_{k=1}^{240}\nu^{\frac{k}{12}}$$

$$= -Xa_{\overline{10}|} + 240\nu^{10}\sum_{k=1}^{240}\frac{1}{12}\nu^{\frac{k}{12}} = -Xa_{\overline{10}|} + 240\nu^{10}a^{(12)}_{\overline{20}|} = 0$$

$$Xa_{\overline{10}|} = 240\nu^{10}a^{(12)}_{\overline{20}|},$$

$$X = \frac{240\nu^{10}a^{(12)}_{\overline{20}|}}{a_{\overline{10}|}} = \frac{240\cdot 1.05^{-10}\cdot\frac{1-1.05^{-20}}{12(1.05^{\frac{1}{12}}-1)}}{\frac{1-1.05^{-10}}{0.05}} = 243.194.$$

Відкладеним на n ануїтетом називається ануїтет який стартує із затримкою в n років. Позначається шляхом додавання $_n|$. Тобто $_{10}|a^{(12)}_{\overline{20}|}$ позначатиме $\nu^{10}a^{(12)}_{\overline{20}|}$. Тоді наша формула могла б виглядати так:

$$Xa_{\overline{10}|} = 240{}_{10}|a^{(12)}_{\overline{20}|},$$

Окрім сталих ануїтетів використовують також змінні ануїтети. Найбільш поширений це - стандартний зростаючий ануїтет постнумерандо на n років. Це грошовий потік, який триває n років, при якому наприкінці k-того року сплачується сума k. Його сучасна вартість:

$$(Ia)_{\overline{n}|} = 1 \cdot \nu^1 + 2 \cdot \nu^2 + \ldots + n \cdot \nu^n = \sum_{k=1}^{n} k\nu^k = \nu \sum_{k=1}^{n} k\nu^{k-1} =$$

$$\nu \left(\sum_{k=1}^{n} \nu^k \right)' = \nu \left(\frac{\nu - \nu^{n+1}}{1-\nu} \right)' = \nu \left(\frac{(1-\nu)(1-(n+1)\nu^n) + \nu - \nu^{n+1}}{(1-\nu)^2} \right) =$$

$$= \nu \left(\frac{1-(n+1)\nu^n + (n+1)\nu^{n+1} - \nu^{n+1}}{(1-\nu)^2} \right) = \nu \left(\frac{1-(n+1)\nu^n + n\nu^{n+1}}{(1-\nu)^2} \right) =$$

$$= \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{1-\nu^n}{1-\nu} + \frac{n\nu^{n+1} - n\nu^n}{1-\nu} \right) = \frac{1}{i} \left(\ddot{a}_{\overline{n}|} + n\nu^n \frac{\nu-1}{1-\nu} \right) = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - n\nu^n}{i}.$$

Спадним ануїтетом постнумерандо на n років, називається грошовий потік при якому наприкінці k-того року, сплачується сума $n+1-k$.

$$(Da)_{\overline{n}|} = \frac{n - a_{\overline{n}|}}{i}.$$

Виводиться ця формула зі співвідношення:

$$(Da)_{\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)\nu^k = (n+1) \sum_{k=1}^{n} \nu^k - \sum_{k=1}^{n} k\nu^k = (n+1)a_{\overline{n}|} - (Ia)_{\overline{n}|}.$$

Арифметичний ануїтет це ануїтети при якому розмір k-ої виплати рівний $a + (k-1)b$. Розмір виплати можна переписати як $a - b + kb$, і тоді сучасна вартість такого такого ануїтету на n років рівна:

$$\sum_{k=1}^{n} \left((a-b)\nu^k + kb\nu^k \right) = (a-b)a_{\overline{n}|} + b(Ia)_{\overline{n}|}.$$

Стандартний сталий неперервний ануїтет на n - це грошовий потік, при якому виплати надходять неперервно протягом n років, з інтенсивністю $\rho(t) = 1$.

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n \rho(t)\nu^t dt = \int_0^n \nu^t dt = \int_0^n e^{-\delta t} dt = \frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta} = \frac{1-\nu^n}{\delta}.$$

Зростаючі неперервні ануїтети бувають двох видів: коли $\rho(t) = t$ на проміжку $[0, n]$, або $\rho(t) = \lfloor t \rfloor + 1$, де $\lfloor t \rfloor$ - ціла частина на інтервалі $[0, n]$.

Для першого ануїтету сучасна вартість позначається:

$$(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|} = \int_0^n \rho(t)\nu^t dt = \int_0^n te^{-\delta t} dt = -\frac{1}{\delta} ne^{-\delta n} + \frac{1}{\delta} \int_0^n e^{-\delta t} dt =$$

$$= \frac{\bar{a}_{\overline{n}|} - ne^{-\delta n}}{\delta} = \frac{\bar{a}_{\overline{n}|} - n\nu^n}{\delta}.$$

Для другого ануїтету сучасна вартість позначається:

$$(I\bar{a})_{\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} k\nu^t dt = \sum_{k=1}^{n} k \int_{k-1}^{k} e^{-\delta t} dt = \sum_{k=1}^{n} k \frac{e^{-\delta(k-1)} - e^{-\delta k}}{\delta} =$$

$$\frac{1}{\delta} \sum_{k=1} k e^{-\delta k}(e^{\delta} - 1) = \frac{i}{\delta} \sum_{k=1}^{n} k\nu^k = \frac{i}{\delta}(Ia)_{\overline{n}|}.$$

Зауважимо, що формули справдливі для $n = \infty$.