1 Лекція. Споживчий кредит.

Споживчий кредит - це грошовий потік, у якому здійснюється одна виплата розміром L в нульовий момент часу а потім надходить потік платежів X_k в моменти часу $t_1, \dots, t_N$. Зауважимо, що $N \leq \infty$.

Нехай відсоткова ставка стала, та рівна i. При кредтуванні, відсоток нараховується на непогашену суму.

Тобто повинно виконуватися рекурсивне співвідношення:

$$(((((L(1+i)^{t_1}-X_1)(1+i)^{t_2-t_1}-X_2)(1+i)^{t_3-t_2}-X_3)\dots)(1+i)^{t_N-t_{N-1}}-X_N)=0$$

$$A_0 = L,$$
$$A_1 = A_0(1+i)^{t_1} - X_1,$$
$$A_2 = A_1(1+i)^{t_2-t_1} - X_2,$$
$$A_n = A_{n-1}(1+i)^{t_n-t_{n-1}} - X_n,$$
$$A_N = 0.$$
$$A_n = L(1+i)^{t_n} - \sum_{k=1}^{n} X_k(1+i)^{t_n-t_k}, n \geq 1.$$

Звідки взялася ця формула?

$$A_1 = L(1+i)^{t_1} - X_1,$$
$$A_2 = (L(1+i)^{t_1} - X_1)(1+i)^{t_2-t_1} - X_2 = L(1+i)^{t_2} - \left(X_1(1+i)^{t_2-t_1} + X_2\right),$$
$$A_3 = \left((L(1+i)^{t_2} - \left(X_1(1+i)^{t_2-t_1} + X_2\right)\right)(1+i)^{t_3-t_2} - X_3 =$$
$$= L(1+i)^{t_3} - \left(X_1(1+i)^{t_2-t_1+t_3-t_2} + X_2(1+i)^{t_3-t_2} + X_3\right) =$$
$$= L(1+i)^{t_3} - \left(X_1(1+i)^{t_3-t_1} + X_2(1+i)^{t_3-t_2} + X_3\right).$$

Доведемо її за індукцією:

$$A_{n+1} = A_n(1+i)^{t_{n+1}-t_n} - X_{n+1} = L(1+i)^{t_n}(1+i)^{t_{n+1}-t_n} - \sum_{k=1}^{n} X_k(1+i)^{t_n-t_k}(1+i)^{t_{n+1}-t_n} - X_{n+1}$$

$$= L(1+i)^{t_{n+1}} - \sum_{k=1}^{n} X_k(1+i)^{t_{n+1}-t_k} - X_{n+1} = L(1+i)^{t_{n+1}} - \sum_{k=1}^{n+1} X_k(1+i)^{t_{n+1}-t_k}.$$

$$A_N = 0,$$

отже

$$L(1+i)^{t_N} - \sum_{k=1}^{N} X_k(1+i)^{t_N-t_k} = 0,$$

$$L = \sum_{k=1}^{N} X_k \frac{(1+i)^{t_N - t_k}}{(1+i)^{t_N}} = \sum_{k=1}^{N} X_k (1+i)^{-t_k} = \sum_{k=1}^{N} X_k \nu^{t_k}.$$

Дуже важливо розуміти, яка частина кожної виплати X_k йде на погашення тіла боргу (L) а яка частина є відсотком, або прибутком банку (платою за користування грошима).

Це потрібно для того, щоб мати можливість обчислити залишок боргу, а також для звітності перед податковими органами. Розділення кожного платежа на дві частини - прибуток банку та погашення тіла боргу, називається графіком виплати боргу. Прибуток банку називається **відсоктовою складовою** (будемо позначати її g_k - для k-тої виплати), погашення тіла боргу називається **капітальною складовою** (f_k - для k-тої виплати). Повинні виконуватися такі рівності:

$$X_k = f_k + g_k,$$

$$L = \sum_{k=1}^{N} f_k.$$

Для того, щоб очислювати капітальну та відсоткову складову кожного платежу, потрібно знати залишок боргу. Насправді, нам не потрібно виводити нові формули для обчислення залишку боргу. Розглянемо приклад першої виплати.
Залишок боргу після першої виплати рівний

$$F_{t_1} = L - f_1 = L - (X_1 - g_1) = L - (X_1 - L((1+i)^{t_1} - 1)) = L(1+i)^{t_1} - X_1 = A_1,$$

ця формула справедлива для довільного n.

$$F_{t_2} = F_{t_1} - f_2 = F_{t_1} - (X_2 - F_{t_1}((1+i)^{t_2 - t_1} - 1)) = A_1(1+i)^{t_2 - t_1} - X_2 = A_2.$$

Таким, чином залишок боргу після n-того платежу, в момент часу t_n рівний:

$$F_{t_n} = A_n = L(1+i)^{t_n} - \sum_{k=1}^{n} X_k (1+i)^{t_n - t_k}.$$

Перетворимо цю формулу, так, щоб у неї не входило L. Згадаємо, що

$$L = \sum_{k=1}^{N} X_k \nu^{t_k},$$

і підставимо цей вираз у формулу для F_{t_n}:

$$F_{t_n} = (1+i)^{t_n} \sum_{k=1}^{N} X_k \nu^{t_k} - \sum_{k=1}^{n} X_k (1+i)^{t_n - t_k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} X_k ((1+i)^{t_n} \nu^{t_k} - (1+i)^{t_n - t_k}) + (1+i)^{t_n} \sum_{k=n+1}^{N} X_k \nu^{t_k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} X_k((1+i)^{t_n}(1+i)^{-t_k} - (1+i)^{t_n - t_k}) + (1+i)^{t_n} \sum_{k=n+1}^{N} X_k(1+i)^{-t_k} =$$

$$\sum_{k=n+1}^{N} X_k(1+i)^{-(t_k - t_n)} = \sum_{k=n+1}^{N} X_k \nu^{t_k - t_n}.$$

Наостанок, з'ясуємо як виглядає залишок боргу в довільний момент часу t. Для цього знайдемо $n = n(t)$ таке, що $t_{n(t)} \leq t < t_{n(t)+1}$. Оскільки на проміжку $(t_{n(t)}, t]$ жодних платежів не відбувалося, то залишок боргу рівний:

$$F_t = F_{t_{n(t)}}(1+i)^{t - t_{n(t)}} = \sum_{k=n(t)+1}^{N} X_k(1+i)^{-(t_k - t)} = \sum_{k=n(t)+1}^{N} X_k \nu^{t_k - t}.$$

Отже ми довели наступну теорему:
Теорема (Про залишок боргу).
Залишок боргу F_t в будь-який момент часу $t < t_N$ дорівнює сучасній вартості **на момент t** всіх майбутніх платежів по боргу які залишилися.

Приклад. Розглядається борг, розміром 100000 гривень, строком на 5 років, з відсотковою ставкою 10% річних, з виплатами раз на квартал. Обчислити:
1. Розмір щоквартальної виплати.
2. Залишок боргу після 8 виплати.
3. Відсоткову та капітальну складову 9 виплати.
Розв'язання.
1. Маємо рівняння вартостей:

$$L = 4Xa_{\overline{5}|}^{(4)} = X\frac{1-\nu^5}{(1+i)^{\frac{1}{4}} - 1},$$

$$X = 100000 * \frac{1.1^{0.25} - 1}{1 - 1.1^{-5}} = 6361.13.$$

2. 8 виплата здійснилася в момент $t_8 = 2$, тобто потрібно обчислити F_2.

$$F_2 = 4Xa_{\overline{3}|}^{(4)} = X\frac{1-\nu^3}{(1+i)^{\frac{1}{4}} - 1} = X * \frac{1 - 1.1^{-3}}{1.1^{0.25} - 1} = 65602.53.$$

3.
$$g_9 = F_2((1+i)^{1/4} - 1), f_9 = X_9 - g_9 = X - g_9.$$
$$g_9 = 65602.53 * (1.1^{0.25} - 1) = 1581.919, f_9 = 4779.211.$$

2 Стандартний борг, РФВ, незмінна відсоткова ставка

Стандартним боргом називається борг який виплачується протягом n років, причому платежі робляться раз на рік, наприкінці року і розмір платежу рівний 1. Чому дорівнює позичена сума L?

$$L = a_{\overline{n}|}.$$

Нехай $t = \overline{1, n}$, тоді:
Залишок на початок року: $F_{t-1} = a_{\overline{n-t+1}|}$
Відсоткова складова: $g_t = 1 - \nu^{n-t+1}$
Капітальна складова: $f_t = \nu^{n-t+1}$
Залишок боргу наприкінці року: $F_t = a_{\overline{n-t}|}$.
Зауважимо, що тут момент часу (кінець року) співпадає з номером виплати, тому F та f, g індексуються однаковим індексом. Як правило це не так (коли борг сплачується декілька разів на рік!

Доведемо ці формули за індукцією. Нехай $t = 1$. Ми з'яували, що залишок боргу $F_0 = L = a_{\overline{n}|} = \frac{1-\nu^n}{i}$. Обчислимо відсоткову складову першої виплати:

$$g_1 = F_0 i = 1 - \nu^n,$$
$$f_1 = 1 - g_1 = \nu^n,$$
$$F_1 = F_0 - f_1 = (\nu + \nu^2 + \ldots + \nu^n) - \nu^n = a_{\overline{n-1}|}.$$

Нехай тепер формули вірні для $t = k$, доведемо їх для $t = k + 1$. Тоді залишок боргу на кінець k-того року:

$$F_k = a_{\overline{n-k}|}.$$

$$g_{k+1} = F_k i = 1 - \nu^{n-k} = 1 - \nu^{n-(k+1)+1},$$
$$f_{k+1} = 1 - g_{k+1} = \nu^{n-(k+1)+1},$$
$$F_{k+1} = F_k - f_{k+1} = (\nu + \ldots + \nu^{n-k}) - \nu^{n-k} = (\nu + \ldots + \nu^{n-k-1}) = a_{\overline{n-(k+1)}|}.$$

Зауважимо, що якщо розмір виплати не 1 а X, то ми просто домножаємо наші формули на X.

Розглянемо приклад, коли виплати здійснюються раз на місяць протягом n років, і розмір виплати дорівнює X, тобто за рік виплачується $12X$. Нехай ефективна ставка дорівнює i. Ми можемо замінити базовий період з року на місяць! При цьому нам потрібно перейти до місячної відсоткової ставки, а вона рівна $\frac{i^{(12)}}{12}$. Тепер ми знаходимось в ситуації, коли борг розміром L спалчується протягом $12n$ "років" (тепер ми під "роком" розуміємо календарний місяць) з відсотковою ставкою $\frac{i^{(12)}}{12}$. Тепер ми можемо порахувати залишок боргу, відсоткову та капітальну складові для будь-якого номеру $k <= 12n$. Маємо:

$$F_{k/12} = X\tilde{a}_{\overline{12n-k}|} = X\frac{1 - \tilde{\nu}^{12n-k}}{\tilde{i}} = X\frac{1 - (1 + \frac{i^{(12)}}{12})^{-(12n-k)}}{\frac{i^{(12)}}{12}}$$

$$12X\frac{1-\left(\left(1+\frac{i^{(12)}}{12}\right)^{-12}\right)^{n-\frac{k}{12}}}{i^{(12)}} = 12X\frac{1-\nu^{n-\frac{k}{12}}}{i^{(12)}} = 12Xa^{(12)}_{\overline{n-\frac{k}{12}}|}$$

Аналогічно, якщо ми хочемо порахувати g_k то маємо:

$$g_k = 1-\tilde{\nu}^{12n-k+1}$$

Нехай борг розміром L повертається n однаковими платежами, протягом k років. Нехай D - загальна переплата (сума всіх відсотків). Тоді незмінна відсоткова ставка це

$$F = \frac{D}{Lk}, \text{ або } D = LFk.$$

Тоді сума всіх платежів:

$$L + D = L(1 + Fk),$$

а розмір одного платежу

$$\frac{L+D}{n}.$$

Якщо кредит погашається m платежами на рік, тобто $k = n/m$, тоді:

$$\frac{L+D}{n} = L\left(\frac{1}{n}+\frac{F}{m}\right).$$

Яким чином пов'язана ефективна ставка з незмінною відсотковою ставкою? Ми запишемо рівняння вартостей (де виникне ануїтет, що сплачується m разів на рік, протяком $k = n/m$ років), і обчислимо відсоткову ставку i:

$$L = mL\left(\frac{1}{n}+\frac{F}{m}\right)a^{(m)}_{\overline{\frac{n}{m}}|} = \frac{mL(1+F\frac{n}{m})}{n}a^{(m)}_{\overline{\frac{n}{m}}|}$$

Для того, щоб виразити i через F використовують наближення:

$$i \approx \frac{2F}{\frac{n}{n+1}+\frac{n-3m+2}{3m}F}.$$

Це так зване друге наближення. Перше наближення:

$$i \approx 2F\frac{n}{n+1}$$

3 Відсоткова компенсація, правило 78

Припустимо боржник вирішив повернути борг завчасно. Як ми вже з'ясували за стандартної схеми нараування відсотків, він повинен повернути суму рівну сучасній вартості (на момент дострокового повернення боргу) всіх платежів, що залишились. Нехай D - загальна сума переплати по боргу, якщо він виплачується згідно до графіку. Нехай борг розміру L, досторково погашається в момент t, для спрощення вважатимемо, що виплати розміру X робляться раз на рік, протягом n років. Тоді:

$$L + D = nX, \text{отже } X = \frac{L + D}{n}.$$

Нехай борг погашається в момент t - одразу після чергової виплати. Тоді

$$F_t = X a_{\overline{n-t}|},$$

і відповідно

$$O = (n - t)X - F_t.$$

це “збиток” банку (тобто недоотримані відсотки).

Загальне рівняння вартостей:

$$L = \frac{L + D}{n} a_{\overline{n}|},$$

$$L(n - a_{\overline{n}|}) = D a_{\overline{n}|},$$

$$L(n - a_{\overline{n}|}) = nD - D(n - a_{\overline{n}|}) = D a_{\overline{n}|},$$

$$X = \frac{L + D}{n} = \frac{D}{n - a_{\overline{n}|}}.$$

Якщо боржник повертає борг в момент t після чергової виплати

$$O = (n - t)\frac{L + D}{n} - \frac{L + D}{n} a_{\overline{n-t}|}.$$

$$O = \frac{L + D}{n}\left((n - t) - a_{\overline{n-t}|}\right),$$

$$\frac{O}{(n - t) - a_{\overline{n-t}|}} = \frac{L + D}{n}.$$

Тепер, якщо зробити заміну $m = n-t$, тобто m - це кількість років (виплат), що залишились.

$$\frac{O}{m - a_{\overline{m}|}} = \frac{L + D}{n} = \frac{D}{n - a_{\overline{n}|}},$$

$$O = \frac{m - a_{\overline{m}|}}{n - a_{\overline{n}|}} D = kD,$$

де

$$k = O/D = \frac{m - a_{\overline{m}|}}{n - a_{\overline{n}|}}.$$

Банк може застосовувати інший підхід до розбиття виплат на відсоткову та капітальну складову. Один із варіантів такого альтернативного розбиття називається “правилом 78”. Суть полягає у наступному. Загальну переплату (прибуток банку) D розбивають на n нерівних частин, що утворюють спадаючу арифметичну прогресію: $n, n-1, n-2, \ldots, 1$. Тобто всього D розбивається на $\frac{n(n+1)}{2}$ частин, і при першій виплаті погашаєть n частин, при другій $n-1$ і так далі.

За такого підходу, дуже легко рахувати відсоткову складову для кожного платежу. Вона рівна:

$$g_k = \frac{n-k+1}{n(n+1)/2} D = \frac{2D(n-k+1)}{n(n+1)}.$$

Якщо тепер боржник захоче погасити кредит достроково, то його відсоткова ставка зміниться! Нехай кредит погашається в момент t, після чергової виплати і залишається ще $m = n - t$ виплат. Тоді загальна частина переплати, яку не виплатить боржнинк (відсоткова компенсація) рівна:

$$O = (m + (m-1) + \ldots + 1) \frac{2D}{n(n+1)} = \frac{m(m+1)}{n(n+1)} D = k'D.$$

Можна показати, що $k' < k$. Залишок боргу:

$$L + D - O - tX = L - tX - (1-k')D.$$

Приклад. Нехай маємо борг у 100 гривень на два роки, з виплатами раз на рік зі ставкою 10%. Нехай розмір платежу X, тоді:

$$100 = X\nu + X\nu^2,$$

$$X = 57.61905.$$

Загальна переплата:

$$D = 2X - 100 = 15.2381.$$

За стандартним правилом:

$$g_1 = 10,\ \ f_1 = 47.61905,\ \ F_1 = 100 - f_1 = 52.38095.$$

Тоді відсоткова компенсація за стандартної схеми, якщо борг погашається в момент часу 1:

$$O = (L+D) - (X + F_1) = 5.238102 = kD,$$

$$k = 0.3437504.$$

Тепер рахуємо за правилом 78. Тоді у нас буде 3 частини на які ми розбиваємо D, розмір одієї частини

$$D/3 = 5.079367,$$

$$g_1^* = 2 * (D/3) = 10.15873,$$

$$g_2^* = 1 * (D/3) = 5.079367.$$

Який тоді залишок боргу через рік?

$$F_1^* = L - f_1^* = L - (X - g_1^*) = 100 - (57.61905 - 10.15873) = 100 - 47.46032 = 52.53968.$$

$$O^* = L + D - F_1^* - X = 5.079372.$$

$$k' = 0.3333337.$$