1 Лекція. Форвардні ставки.

1.1 Мотивація

Основна ідея полягає у наступному. Уявімо, що через рік ми отримаємо 1 грн. Після цього ми захочемо його інвестувати. Як нам зафісксувати відсоткову ставку сьогодні? І що це буде за ставка? Тут мова йде про безризикове інвестування, або інвестування з мінімальним ризиком. Нехай r_1 - це відсоткова ставка по однорічній безкупонній облігації. А r_2 - аналогічна відсоткова ставка по дворічній облігації.

Тоді ми позичимо кількість $1/(1+r_1)$ першої облігації та купимо на них других. Тоді через рік, ми повинні повернути суму $\frac{1+r_1}{1+r_1} = 1$, як ми повертаємо з нашого очікуваного доходу в 1. Через два роки ми отримаємо дохід по другій облігації розміром $\frac{(1+r_2)^2}{1+r_1}$. Тоді наша ефективна ставка на інтервалі $1,2$ рівна:

$$f_{1,2} = \frac{(1+r_2)^2}{1+r_1} - 1.$$

1.2 Формальне визначення

Нехай P_n - це ціна облігації одинчного номіналу, без купонів, строком на n років яка погашається за номіналом. Чому рівна прибутковість такої облігації? Позначимо прибутковість через r_n, тоді

$$P_n = (1+r_n)^{-n},$$

звідки

$$r_n = P_n^{-1/n} - 1.$$

Тоді величина r_n - називається спотовою ставкою. Очевидно, що на ринку торгуються також інші облігації, і прибутковість між ними має бути узгоджена. Розглянемо облігацію яка купується продається за номіналом і запезпечує купонні виплати розміром g, раз на рік. Очевидно прибутковість такої облігації рівна g. Назвемо цю величину n-річним номінальним доходом і позначимо yc_n. Очевидно, що yc_n має бути пов'язаним з r_n. Яким чином?

Подібну n річну облігацію (з купоном) можна представити у вигляді n безкупонних облігацій номіналом yc_n та одну безкупонну облігацію номіналом 1. Маємо грошовий потік прибутків:
1-ий рік yc_n,
2-ий рік yc_n,
3-ій рік yc_n,
...
n-ий рік yc_n та 1.

Аналогічний грошовий потік буде згенеровано портфелем з безкупонних облігацій номіналом yc_n на 1, 2, ..., n - років (тобто всього n-облігацій) та однією n-річною облігацією номіналом 1.

Тоді ціна n-річної облігації з купоном має дорівнювати ціні вказаного портфелю. Вартість кожної з перших n облігацій рівна P_k на одиницю номіналу, $k = \overline{1,n}$, тобто $yc_n P_k$, а вартість останньої рівна P_n. Тоді маємо рівність:

$$1 = yc_n(P_1 + \ldots + P_n) + P_n,$$

$$yc_n = \frac{1 - P_n}{P_1 + \ldots + P_n} = \frac{1 - (1 + r_n)^{-n}}{(1 + r_1)^{-1} + \ldots + (1 + r_n)^{-n}}.$$

Розглянемо облігацію, по якій сплачується купон g раз на рік, номіналом 1, яка погашається за номіналом. Ціну такої облігації позначимо через $P_n(g)$. Чому рівна прибутковість такої облігації?

$$P_n(g) = g a_{\overline{n|}} + \nu^n.$$

Розв'язок цього рівняння позначається $y_n(g)$ і називається n-річним прибутком для купонної g. Тому величини r_n, $y_n(g)$, та yc_n взаємозалежні. Величина $y_n(g)$ називається кривою прибутку (при фіксованому g як функція часу n), англ. yield curve. Криві прибутку розглядають для певних видів цінних паперів, наприклад облігацій уряду США.

2 Лекція. Грошові індикатори

2.1 Аналіз інвестиційних проектів

Перше, з чого починається аналіз інвестиційного проекту - це визначення його грошового потоку. Грошові потоки можуть бути дуже різними. Наприклад:

1. Найпростіший випадок коли весь грошовий потік (інвестицій та прибутків) зафіксований.
2. Може бути ситуація коли відомий лише потік прибутків, а розмір інвестиції може варіюватися, як за розміром так і за часом.
3. Може бути ситуація коли зафіксовано лише потік інвестицій, а прибутки можуть варіюватися.
4. Типовою для інвестування в реальний сектор (бізнес) є ситуація коли ні прибутки ні видатки не є зафіксованими.

Вважатимемо, що грошовий потік відомий. Тоді обчислимо різні характеристики цього грошового потоку, для того, щоб можна було порівнювати різні проекти. Зауважимо, що типово інвестиційні проекти мають таку структуру при якій спочатку йде потік видатків (приблизно) а потім прибутків.

Першою характеристикою грошового потоку пов'язаного з інвестиційним проектом є **сучасна вартість**:

$$PV = \sum_{k \geq 1} C_k \nu^{t_k} + \int_0^\infty \rho(t) \nu^t dt,$$

за умови, що відсоткова ставка стала. Питання яке тут виникає - яку обирати відсоткову ставка, та чому вона має бути сталою?

Наступною характеристикою є **прибутковість**, або розв'язок рівняння вартостей.

Іншою важливою характеристикою є **рентабельність**. Для спрощення, припустимо, що грошовий потік складається з однієї інвестиції в момент 0 розміру C, та грошового потоку прибутків $\{(C_k, t_k),\ k \geq 1\}, \rho(t)$. Тоді рентабельність це величина:

$$\frac{\sum_{k\geq 1} C_k + \int_0^\infty \rho(t)dt}{C}$$

Наступні дві характеристики пов'язані з часом, коли вкладені кошти "повертаються".
Визначимо величину:

$$S(t) = \sum_{t_k \leq t} C_k + \int_0^t \rho(t)dt,$$

тут ми не припускаємо, що єдина інвестиція була здійснена на початку. Якщо існує таке t_0, що $S(t) < 0,\ t < t_0,\ S(t) \geq 0,\ t \geq t_0$, то найменше таке t_0 називається **терміном окупності проекту**. Аналогічно визначається, **дисконтований термін окупності**, де $S(t)$ заміняється на $V(t)$.

$$V(t) = \sum_{t_k \leq t} C_k \nu^{t_k} + \int_0^t \rho(t)\nu^t dt.$$

2.2 Більш загальні грошові індикатори

Індикатори які ми розглянемо далі можуть застосовуватися як до загального грошового потоку, так і до потоку лише прибутків (що типово при аналізі фінансових інструментів).

Середній час надходження платежів. Він визначається за формулою:

$$\frac{\sum_{k\geq 1} t_k C_k + \int_0^\infty t\rho(t)dt}{\sum_{k\geq 1} C_k + \int_0^\infty \rho(t)dt}.$$

Розглядається також дисконтований середній час, або **тривалість грошового потоку**:

$$\tau(t) = \frac{\sum_{k\geq 1} t_k C_k \nu^{t_k} + \int_0^\infty t\rho(t)\nu^t dt}{\sum_{k\geq 1} C_k \nu^{t_k} + \int_0^\infty \rho(t)\nu^t dt}.$$

Наступний індикатор це **волатильність** грошового потоку. Слово волатильність означає мінливість, і в даному контексті ми будемо розуміти волатильність як мінливість по відношенню до зміни відсоткової ставки.

Позначимо через $V(i)$ сучасну вартість грошового потоку, як функцію від i:

$$V(i) = \sum_{k \geq 1} C_k \nu^{t_k} + \int_0^\infty \rho(t) \nu^t dt.$$

Взагалі кажучи, щоб оцінити "міру мінливості" функції слід взяти похідну. Але це матиме декілька небажаних наслідків. По-перше похіда буде лінійною від грошового потоку (тобто збільшення грошового потоку вдвічі приведе до збільшення похідної вдвічі). По-друге, для аналізу фінансових інструментів, використовують потоки прибутків, а для них похідна буде від'ємна. Тому для волатильності беруть мінус похідну та ділять її на сучасну вартість.

$$v(i) = -\frac{V'(i)}{V(i)} = \frac{\sum_{k \geq 1} t_k C_k \nu^{t_k+1} + \int_0^\infty t\rho(t)\nu^{t+1} dt}{\sum_{k \geq 0} C_k \nu^{t_k} + \int_0^\infty \rho(t) \nu^t dt}.$$

Бачимо, що між волатильністю та тривалістю є взаємо зв'язок:

$$v(i) = \tau(i)\nu.$$

Зауважимо також, що якщо замість i розглядається (стала) інтенсивність відсотка δ, то волатильність визначається як ф-ція δ:

$$v(\delta) = -\frac{V'(\delta)}{V(\delta)}.$$

3 Імунізація

Для будь-якої компанії важливо утримвати баланс доходів та витрат не лише в абсолютних значеннях а ще і з точки зору сучасних вартостей. Тобто сучасна вартість доходів повинна дорівнювати сучасній вартості витрат.

Нехай прибутки розміром $A_1, \ldots, A_n$ надходять в моменти часу $t_1, \ldots, t_n$, та в ті ж самі моменти часу компанії здійснює витрати $L_1, \ldots, L_n$. Тут $A_k \geq 0$, та $L_k \geq 0$ причому важливо, що можлива рівність 0. Нехай відсоткова ставка рівна i. Тоді позначимо сучасну вартість доходів $V_A(i) = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \nu^{t_k}$, та сучасну вартість витрат $V_L(i) = \sum\limits_{k=1}^{n} L_k \nu^{t_k}$. І запишемо умову:

$$V_A(i) = V_L(i). \tag{1}$$

Рівність (1) називається **першою умовою імунізації** (за Редінгтоном). Імунізація - це стратегія управління активами компанії з метою захисту від коливань відсоткових ставок. Припустимо, що відсоткова змінилася з i на i'. Нам би хотілося, щоб при цьому виконувалась нерівність

$$V_A(i') \geq V_L(i').$$

Що це означає? Розглянемо функцію $f(i) = V_A(i) - V_L(i)$, і ми прагнемо, щоб при малих змінах i на i' $f(i') \geq 0$, при тому, що $f(i) = 0$. Це означає, що i - це точка локального мінімуму. З математичного аналізу відомо, що необхідною умовою мінімуму є $f'(i) = 0$.

$$f'(i) = -\sum_{k=1}^{n} t_k (A_k - L_k) \nu^{t_k+1} = 0$$

що еквівалентно тому, що:

$$\sum_{k=1}^{n} t_k A_k \nu^{t_k+1} = \sum_{k=1}^{n} t_k L_k \nu^{t_k+1}$$

але оскільки $V_A(i) = V_L(i)$ то можемо розділити обидві частини останньої рівності на $V_A(i)$ та $V_L(i)$:

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} t_k A_k \nu^{t_k+1}}{\sum\limits_{k=1}^{n} A_k \nu^{t_k}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} t_k L_k \nu^{t_k+1}}{\sum\limits_{k=1}^{n} L_k \nu^{t_k}},$$

або

$$v_A(i) = v_L(i), \tag{2}$$

де v - це волатильність. Умова (2) називається **другою умовою імунізації** (за Редінгтоном).

Перша і друга умови імунізації називаються необхідними умовами імунізації. Є ще достатня умова імунізації, вона полягає в тому, що достатньою умовою локального мінімуму є умова $f''(i) > 0$

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} t_k (t_k+1) A_k \nu^{t_k+2}}{\sum\limits_{k=1}^{n} A_k \nu^{t_k}} > \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} t_k (t_k+1) L_k \nu^{t_k+2}}{\sum\limits_{k=1}^{n} L_k \nu^{t_k}},$$

або

$$c_A(i) > c_L(i), \tag{3}$$

де c - називається опуклістю. Умова (3) називається **третьою, або достатньою умовою імунізації** за Редінгтоном.

Якщо виконані умови (1)-(3) то кажуть, що компанія є імунізованою відносно малих змін у відсотковій ставці.

Умову (3) використовуючи умови (1) та (2) можна подати у вигляді:

$$\sum_{k=1}^{n} (t_k - \tau_A(i))^2 A_k \nu^{t_k} \geq \sum_{k=1} (t_k - \tau_L(i))^2 L_k \nu^{t_k}.$$

Умови (1)-(3) це умови локальної імунізації, в той же час існують умови повної імунізації.

Теорема Нехай виконано умови (1), (2) та існують такі два моменти часу t' та t'' що $L_k = 0$ при $t_k \notin [t', t'']$ а $A_k = 0$ при $t_k \in [t', t'']$. Тоді імунізація є повною (тобто компанія захищена від будь-яких коливань відсоткової ставки).

Всі умови імунізації залишаються вірними, якщо присутня неперервна складова.

3.1 Задача 12.12

Маємо послідовність виплат, розміром 100 тис. наприкінці кожного з наступних 5 років. Отже послідовність витрат $L_k = 100$, $t_k = k$, $k = 1,5$. Прибутки надійдуть дві двох облігацій, без купонів, через один та 5 років, позначимо A_1 та A_2, відповідно $t_1 = 1$, $t_2 = 5$, $i = 0.05$.

Обчислимо сучасну вартість пасивів.

$$V_L(i) = 100a_{\overline{5|}} = 100\frac{1-\nu^5}{i} = 100 * (1 - 1.05^{-5})/0.05 = 432.9477$$

Формула для тривалості:

$$\tau(i) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} t_k C_k \nu^{t_k}}{\sum\limits_{k=1}^{n} C_k \nu^{t_k}}$$

$$\tau_L(i) = 100\sum_{k=1}^{n} k\nu^k / V_L(i) = 1256.639/432.9477 = 2.9$$

Обчислимо сучасну вартість A_1 та A_2 використавши першу та другу умови імунізації, на помітивши, що $v(i) = \nu\tau(i)$. Тобто маємо два рівняння:

$$V_A(i) = A_1\nu + A_2\nu^5 = V_L(i),$$

$$\frac{A_1\nu + 5A_2\nu^5}{V_A(i)} = \tau_L(i)$$

$$A_1 = (432.9477 - A_2 * 1.05^{-5}) * 1.05,$$
$$A_1 = ((2.9 * 432.947) - 5 * A_2 * 1.05^{-5}) * 1.05$$
$$1.9 * 432.947 = 4A_2 1.05^{-5}$$
$$A_2 = ((1.9 * 432.947) * 1.05^5)/4 = 262.46,$$
$$A_1 = 238.6628$$

Підрахуємо опуклість активів:

$$c_A(i) = \frac{2A_1\nu^3 + 30A_2\nu^7}{V_A(i)} =$$

$$(2 * 238.6628 * 1.05^{-3} + 30 * 262.46 * 1.05^{-7})/432.9477 = 13.87718$$

3.2 Завдання додому

Розглянемо ануїтет по якому виплачується сума 20 гривень щомісяця, протягом двох років починаючи з третього. Компанія хоче імунізуватися відносно коливань відсоткових ставок навколо $i = 0.08$ придбавши ануїтет, за яким щоквартально сплачується сума X протягом двох років, починаючи з першого, та одноразову виплату розміром Y через шість років. Обчислити X та Y, з'ясувати чи виконана достатня умова імунізації, та чи виконана умова повної імунізації.