1.1.2. Линейная интерполяция. Полином Эрмита.

Помимо полинома Ньютона в практике вычислений находит применение еще один полином, называемый полиномом **Эрмита**. Его используют, если в узлах задана не только функция, но и ее производные различного порядка. В этом случае целесообразно осуществлять так называемую эрмитову интерполяцию, когда в узлах совпадают не только значения заданной функции, но и значения производных. Полином, обладающий указанным свойством, обозначают $H_n(x)$.

Вывод формулы для $H_n(x)$ производят построением по $(n+1)$ узлам полинома Ньютона. В областях между узлами средние наклоны кривых $y(x)$ и полинома совпадают. Если сближать узлы x_i и x_{i+1}, то средний наклон будет все точнее передавать первую производную функции. В пределе после совпадения узлов получают искомый многочлен $P_n(x, x_0, x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ с кратным узлом, являющийся полиномом Эрмита n-й степени. В общем случае полином Эрмита

$$H_n(x) = P_n(x, \underbrace{x_0, x_0, \ldots, x_0}_{n_0}, x_1, x_1, \ldots, x_1, x_2, x_2, \ldots, x_2, \underbrace{x_k, x_k, \ldots, x_k}_{n_k}),$$

$$\sum_{l=0}^{k} n_l = n+1, \qquad (1.9)$$

в произвольном узле x_l, имеет производные, значения которых равны производным интерполируемой функции вплоть до порядка $n_l - 1$. Использовать формулу (1.9) в вычислениях непосредственно нельзя, так как в выражениях для разделенных разностей появляется неопределенность типа 0/0. При кратности узлов не выше двух формулы для разделенных разностей получают предельным переходом:

$$y(x_0, x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{y(x_0) - y(x_1)}{x_0 - x_1} = y'(x_0),$$

$$y(x_0, x_0, x_1) = \frac{y(x_0, x_0) - y(x_0, x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{y'(x_0) - y(x_0, x_1)}{x_0 - x_1},$$

$$y(x_0, x_0, x_1, x_1) = \frac{y(x_0, x_0, x_1) - y(x_0, x_1, x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{y'(x_0) - 2y(x_0, x_1) + y'(x_1)}{(x_0 - x_1)^2}.$$

Выражения для разделенных разностей в случае узлов кратности выше второй удобнее находить дифференцированием полинома Ньютона. В итоге общее выражение для разделенных разностей при кратности узлов m имеет вид:

$$\underbrace{y(x_0, x_0, \ldots, x_0)}_{m} = \frac{1}{(m-1)!} y^{(m-1)}(x_0).$$

Пример 1.2. Построить полином Эрмита, передающий в двух узлах значения функции и ее первой производной.

Имеем 4 условия (заданы 2 значения функции и 2 значения её производной), значит, полином будет иметь 3-ю степень. Формально строим полином Ньютона по четырем узлам, каждый из которых повторяется дважды

$$P_n(x, x_0, x_0, x_1, x_1) = y(x_0) + (x - x_0)\, y(x_0, x_0) + (x - x_0)^2\, y(x_0, x_0, x_1) +$$
$$+ (x - x_0)^2 (x - x_1)\, y(x_0, x_0, x_1, x_1) =$$
$$= y(x_0) + (x - x_0) y'(x_0) + (x - x_0)^2 \frac{y'(x_0) - y(x_0, x_1)}{x_0 - x_1} +$$
$$+ [y'(x_0) - 2y(x_0, x_1) + y'(x_1)] \frac{(x - x_0)^2 (x - x_1)}{(x_0 - x_1)^2}.$$

Алгоритм построения полинома Эрмита во многом аналогичен алгоритму построения полинома Ньютона.

При этом как обычно из имеющейся таблицы значений функции и её производных формируется вспомогательная таблица, исходя из заданного значения точки интерполяции и степени полинома. Например, в варианте задания функции и её первой производной при степени полинома, допустим, 5 около заданного значения аргумента выбираем участок таблицы типа

x_i	y_i	y_i'
x_0	y_0	y_0'
x_1	y_1	y_1'
x_2	y_2	y_2'

Затем данную таблицу преобразуем к виду, удобному для отыскания разделенных разностей согласно изложенной выше процедуре обработки полинома Ньютона.

x_i	y_i	$y(x_k, x_m)$	$y(x_k, x_m, x_l)$
x_0	y_0	$y_0^{'}$	$(y_0^{'} - y(x_0, x_1))/(x_0 - x_1)$
x_0	y_0	$y(x_0, x_1)$	$(y(x_0, x_1) - y_1^{'})/(x_0 - x_1)$
x_1	y_1	$y_1^{'}$	и.т.д.
x_1	y_1	$y(x_1, x_2)$	
x_2	y_2	$y_2^{'}$	
x_2	y_2		

1.1.3. Линейная интерполяция. Полином Лагранжа.

Помимо полинома Ньютона существует еще одна важная форма интерполяционного многочлена- полином в форме Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i^{(n)}(x)\, y(x_i),$$

где лагранжевы коэффициенты $L_i^{(n)}(x)$ определяются по формуле

$$L_i^{(n)}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}.$$

Полином Лагранжа в отличие от полинома Ньютона содержит в явном виде значения интерполируемой функции в узлах $y(x_i)$.

В заключение данного подраздела отметим, что в практике вычислений для интерполяции полиномы степени выше пятой обычно не используют, т.е. число узлов интерполяции не превышает шести. Если при таком числе узлов не обеспечивается заданная погрешность, следует уменьшать расстояние между узлами.

1.1.4. Нелинейная интерполяция

Для табулирования быстроменяющихся функций требуется весьма малый шаг, т.е. возникает необходимость создавать таблицы очень больших объемов, что в ряде случаев неприемлемо. Оказывается, что преобразованием переменных $\eta = \eta(y)$ и $\xi = \xi(x)$ можно добиться того, чтобы в новых переменных график $\eta(\xi)$ был близок к прямой хотя бы на отдельных участках. В этом случае интерполяцию проводят в переменных (η, ξ), а затем обратным интерполированием находят $y_i = y(\eta_i)$.

Преобразования $\eta(y)$ и $\xi(x)$ должны быть достаточно простыми (логарифмическая, экспоненциальная, тригонометрические и некоторые другие функции). При этом надо заботиться о том, чтобы и обратное преобразование $y(\eta)$ оказалось несложным. Во многих задачах теплофизики, гидродинамики, оптики, переноса излучения и других областей науки и техники часто встречается степенная зависимость функции от своих аргументов. В этом случае удобны преобразования типа логарифмирования.

Вообще говоря, в каждом конкретном случае приходится специально подбирать вид функций $\eta = \eta(y)$ и $\xi = \xi(x)$. Например. функция $y = \dfrac{a}{b + c \cdot x^2}$ может быть линеаризована с помощью замены $\eta = \dfrac{1}{y}$, $\xi = x^2$.

Для функциональной зависимости $y = \dfrac{x}{ax + b}$ линеаризация достигается заменой переменных $\eta = \dfrac{1}{y}$, $\xi = \dfrac{1}{x}$, а для функции $y = axe^{-bx}$ - $\eta = ln(\dfrac{y}{x})$, $\xi \equiv x$.

Пример 1.3. Получить формулу для нелинейной двухточечной интерполяции функции $y(x)$, если переменные можно преобразовать по формулам $\eta = ln(y)$ и $\xi = \dfrac{1}{x}$.

Составим интерполяционный полином Ньютона на двухточечном шаблоне:

$$\eta = \eta_0 + \frac{\eta_1 - \eta_0}{\xi_1 - \xi_0}(\xi - \xi_0).$$

В исходных переменных имеем

$$\ln y = \ln y_0 + \frac{\ln y_1 - \ln y_0}{\dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_0}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right),$$

и окончательно

$$y = y_0 (y_1 / y_0)^{(x - x_0)/(x_1 - x_0)(x_1 / x)}.$$