Дополнение к лекции Градова В. М. от 23.03.2022 и работе №4 по курсу "Вычислительные алгоритмы". Обобщение аппроксимации методом наименьших квадратов на произвольную степень двумерного полинома

М. Кормановский, студент группы ИУ7-41Б

6 апреля 2022 г.

Введение В лабораторной работе 4 2022 года появилась двумерная аппроксимация методом наименьших квадратов. Может не быть очевидным, каким образом составить систему уравнений и, следовательно, решить её, найдя коэффициенты в двумерном полиноме. Этот небольшой документ призван разрешить этот вопрос.

Вычисления В качестве базисных функций $\phi_{jk}(x, y)$ рассмотрим такие:

$$\phi_{jk}(x, y) = x^j y^k$$

Тогда полностью аппроксимирующая функция $\phi_{jk}(x, y)$ выразится так:

$$\phi(x, y) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-j} a_{jk}\phi_{jk}(x, y) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-j} a_{jk} x^j y^k$$

Здесь пределы суммирования такие, потому что в двумерном полиноме n-й степени $j + k \leq n$. Отклонение I для N точек с весами $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N$в нашем случае вычисляется по формуле:

$$I = \sum_{i=1}^{N} \rho_i [z_i - \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-j} a_{jk} x_i^j y_i^k]^2$$

Из базисных функций выберем некоторую функцию $\phi_{uv}(x, y)$, ей будет соответствоать неизвестный коэффициент a_{uv} в аппроксимирующей функции - двумерном полиноме. Для поиска минимума отклонения вычислим частную производную:

$$\frac{\partial I}{\partial a_{uv}} = \frac{\partial}{\partial a_{uv}} [\sum_{i=1}^{N} \rho_i [z_i - \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-j} a_{jk} x_i^j y_i^k]^2] = -2 \sum_{i=1}^{N} \rho_i x_i^u y_i^v [z_i - \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-j} a_{jk} x_i^j y_i^k]$$

Приравняем результат к 0:

$$\frac{\partial I}{\partial a_{uv}} = 0 \to \sum_{i=1}^{N} \rho_i x_i^u y_i^v [z_i - \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-j} a_{jk} x_i^j y_i^k] = 0 \leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} \rho_i z_i x_i^u y_i^v = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-j} a_{jk} x_i^{j+u} y_i^{k+v}$$

Чтобы образовать систему уравнений, нужно рассмотреть в качестве $\phi_{uv}(x, y)$ все базисные функции:

$$\phi_{00}(x, y), \phi_{01}(x, y), \dots, \phi_{0n}(x, y), \phi_{10}(x, y), \dots, \phi_{1,n-1}(x, y), \dots \phi_{n0}(x, y)$$

Пусть в интересующей системе будет H строк. Тогда

$$H = \sum_{j=0}^{n} n + 1 - j = (n+1)^2 - \sum_{j=0}^{n} j = (n+1)^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Пусть в матричном виде система имеет вид $LA = R$. Тогда

$$L = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N \rho_i x_i^0 y_i^0 & \dots & \sum_{i=1}^N \rho_i x_i^n y_i^0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^N \rho_i x_i^0 y_i^n & \dots & \sum_{i=1}^N \rho_i x_i^n y_i^n \\ \sum_{i=1}^N \rho_i x_i^1 y_i^0 & \dots & \sum_{i=1}^N \rho_i x_i^{n+1} y_i^0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^N \rho_i x_i^1 y_i^{n-1} & \dots & \sum_{i=1}^N \rho_i x_i^{n+1} y_i^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^N \rho_i x_i^n y_i^0 & \dots & \sum_{i=1}^N \rho_i x_i^{2n} y_i^0 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N \rho_i z_i x_i^0 y_i^0 & \dots & \sum_{i=1}^N \rho_i z_i x_i^0 y_i^n & \sum_{i=1}^N \rho_i z_i x_i^1 y_i^0 & \dots & \sum_{i=1}^N \rho_i z_i x_i^1 y_i^{n-1} & \dots & \sum_{i=1}^N \rho_i z_i x_i^n y_i^0 \end{pmatrix}^T$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & \dots & a_{0n} & a_{10} & \dots & a_{1,n-1} & \dots & a_{n0} \end{pmatrix}^T$$

В силу квадратности матрицы L, количество неизвестных коэффициентов a_{jk} равно H.

В частности:

$$n = 1 \to H = \frac{(1+1)(1+2)}{2} = 3$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N \rho_i x_i^0 y_i^0 & \sum_{i=1}^N \rho_i x_i^0 y_i^1 & \sum_{i=1}^N \rho_i x_i^1 y_i^0 \\ \sum_{i=1}^N \rho_i x_i^0 y_i^1 & \sum_{i=1}^N \rho_i x_i^0 y_i^2 & \sum_{i=1}^N \rho_i x_i^1 y_i^1 \\ \sum_{i=1}^N \rho_i x_i^1 y_i^0 & \sum_{i=1}^N \rho_i x_i^1 y_i^1 & \sum_{i=1}^N \rho_i x_i^2 y_i^0 \end{pmatrix}$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N \rho_i z_i x_i^0 y_i^0 & \sum_{i=1}^N \rho_i z_i x_i^0 y_i^1 & \sum_{i=1}^N \rho_i z_i x_i^1 y_i^0 \end{pmatrix}^T$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{10} \end{pmatrix}^T$$

$$\phi_1(x, y) = a_{00} + a_{01} y + a_{10} x$$

$$n = 2 \to H = \frac{(2+1)(2+2)}{2} = 6$$

$$\phi_2(x, y) = a_{00} + a_{01} y + a_{02} y^2 + a_{10} x + a_{11} xy + a_{20} x^2$$

$$n = 3 \to H = \frac{(3+1)(3+2)}{2} = 10$$

Заключение Рассмотренный механизм может быть при желании и требованиях в 2023+ годах расширен до 3, 4, n переменных.