О лабораторной работе №5 по курсу "Вычислительные алгоритмы" 2021-2022 уч. года

Михаил Кормановский, студент группы ИУ7-41Б

12 мая 2022 г.

Дисклеймер Данный текст предоставляется как есть, без каких-либо гарантий его математической точности и идеальности с точки зрения *примет ли <ФамилияПреподавателя>?*. Здесь описано, каким образом автору удалось решить лабораторную работу и каких результатов удалось достичь. Используйте данный текст на свой страх и риск. Исходный код программы, реализующей написанное здесь, не предоставляется.

Содержание

Благодарности

- Николаю Артюхину, студенту группы ИУ7-41Б;
- Полине Егоровой, студентке группы ИУ7-44Б;
- Андрею Сапожкову, студенту группы ИУ7-43Б.

1 Условие задачи

Условие задачи приводится по оргинальному файлу с заданием от преподавателя по курсу — Градова В. М. Единицы измерения по условию считаются согласованными и здесь не приводятся.

1.1 Математическая модель

Задано уравнение

$$\frac{d}{dx}(k(T)\frac{dT}{dx}) - p(T)T + f(T) = 0 \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$-k(T(0))\frac{dT}{dx} = F_0; \tag{2}$$

$$-k(T(l))\frac{dT}{dx} = \alpha(T(l))(T(l) - T_0). \tag{3}$$

Заданные функции:

$$p(T) = \frac{2}{R}\alpha(T) \tag{4}$$

$$f(T) = \frac{2T_0}{R}\alpha(T) \tag{5}$$

$$k(T) = a_1(b_1 + c_1 T^{m_1}), \tag{6}$$

$$\alpha(T) = \alpha_0(\frac{T}{\delta} - 1)^4 + \gamma. \tag{7}$$

Значения параметров:

$$a_1 = 0.0134,$$
$$b_1 = 1,$$
$$c_1 = 4.35 \cdot 10^{-4},$$
$$m_1 = 1,$$
$$\alpha_0 = 1.94 \cdot 10^{-2*},$$
$$\delta = 1.5 \cdot 10^3,$$
$$\gamma = 0.2 \cdot 10^{-2},$$
$$l = 10,$$
$$T_0 = 300,$$
$$R = 0.5,$$
$$F_0 = 50.$$

* — в оригинальной задаче это значение было с противоположным знаком, однако требуемые свойства графика не выполнялись.

1.2 Физическое содержание

Сформулированная математическая модель описывает температурное поле $T(x)$ вдоль цилиндрического стержня радиуса R и длиной l, причем $R >> l$ и температуру можно принять постоянной по радиусу цилиндра. Ось x направлена вдоль оси цилиндра и начало координат совпадает с левым торцом стержня. Слева при $x = 0$ цилиндр нагружается тепловым потоком F_0. Стержень обдувается воздухом, температура которого равна T_0. В результате происходит съем тепла с цилиндрической поверхности и поверхности правого торца при $x = l$. Функции $k(T)$, $\alpha(T)$ являются, соответственно, коэффициентами теплопроводности материала стержня и теплоотдачи при обдуве. Эти коэффициенты привязаны к температуре, т.е. $k(T)$ зависит от T.

1.3 Искомая величина

Необходимо найти приближенно зависимость $T(x)$, а также проверить корректность определения искомой зависимости в следующих случаях:

1. $F_0 = 50$ (нагрев);
2. $\alpha_0 = 3 \cdot \alpha_{0_{st}}$ ($\alpha_{0_{st}}$ — значение α_0 из условия, в этом случае теплоотдача выше, чем в предыдущем);
3. $F_0 = -10$ (съем тепла);
4. $F_0 = 0$ (отсутствие нагрева/съема тепла).

2 Подробное решение

2.1 Разбиение отрезка и сеточная функция

Для поиска зависимости $T(x)$ интересующий нас отрезок стержня $[0, l]$ необходимо разбить на участки длиной h каждый, причем

$$h = \frac{l}{N}, \tag{8}$$

Граничные точки участков пронумеруем от 0 до N так, что $0 = x_0, h = x_1, \dots l = x_N$. Зависимость $T(x)$ ищется как сеточная функция $y(x)$, при этом под *сеточной функцией* понимаются значения $T(x)$ в узлах введенной только что сетки. Далее под y_i будем понимать $y(x_i)$, а под k_i, p_i, f_i — соответственно $k(y_i)$, $p(y_i)$, $f(y_i)$.

2.2 Переход к почти СЛАУ

Введем в рассмотрение функцию

$$F(x) = -k(T)\frac{dT}{dx}. \tag{9}$$

Тогда уравнение (1) запишется в виде:

$$-\frac{dF}{dx} - p(T)T + f(T) = 0 \tag{10}$$

Пусть x_i — некоторая граничная точка участка, $x_{i-\frac{1}{2}} = x_i - \frac{h}{2}$, $x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}$. Проинтегрируем уравнение (10) от $x_{i-\frac{1}{2}}$ до $x_{i+\frac{1}{2}}$:

$$-\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{dF}{dx}dx - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} p(T)Tdx + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(T)dx = 0 \tag{11}$$

При довольно малых h можно считать (11) равносильным следующему:

$$F(x_{i-\frac{1}{2}}) - F(x_{i+\frac{1}{2}}) - p_i y_i h + f_i h = 0 \tag{12}$$

Снова пользуясь малостью h, отметим следующее:

$$k_{i-\frac{1}{2}} = \frac{k_{i-1} + k_i}{2}, \tag{13}$$

$$k_{i+\frac{1}{2}} = \frac{k_i + k_{i+1}}{2}, \tag{14}$$

$$T'(x_{i-\frac{1}{2}}) = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \tag{15}$$

$$T'(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}. \tag{16}$$

Тогда

$$F(x_{i-\frac{1}{2}}) = \frac{(k_{i-1} + k_i)(y_{i-1} - y_i)}{2h}, \tag{17}$$

$$F(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{(k_i + k_{i+1})(y_i - y_{i+1})}{2h}, \tag{18}$$

а уравнение (12) запишется как

$$\frac{(k_{i-1} + k_i)(y_{i-1} - y_i)}{2h} - \frac{(k_i + k_{i+1})(y_i - y_{i+1})}{2h} - p_i y_i h + f_i h = 0. \tag{19}$$

Умножим (19) на h и выделим коэффициенты при y_{i-1}, y_i, y_{i+1}:

$$\frac{k_{i-1} + k_i}{2} y_{i-1} - (\frac{k_{i-1} + k_i}{2} + \frac{k_i + k_{i+1}}{2} + p_i h^2) y_i + \frac{k_i + k_{i+1}}{2} y_{i+1} + f_i h^2 = 0. \tag{20}$$

Если сравнить написанное выше с уравнением СЛАУ с трехдиагональной матрицей

$$A_i y_{i-1} - B_i y_i + C_i y_{i+1} + D_i = 0,$$

нетрудно выяснить, что в случае уравнения (20):

$$A_i = \frac{k_{i-1} + k_i}{2}, \tag{21}$$

$$B_i = \frac{k_{i-1} + k_i}{2} + \frac{k_i + k_{i+1}}{2} + p_i h^2, \tag{22}$$

$$C_i = \frac{k_i + k_{i+1}}{2}, \tag{23}$$

$$D_i = f_i h^2. \tag{24}$$

2.3 Учет краевых условий

На данный момент не решены две проблемы: не используются никак заданные краевые условия и для $N+1$ переменной есть всего $N-1$ уравнение. Ключом к решению обеих проблем является следующее. Давайте присмотримся к краевым условиям (2) и (3) и сопоставим их с выражением (9). Можно заметить, что краевые условия — это, по сути, значения $F(x_0)$ и $F(x_N)$!

То есть:

$$F(x_0) = F_0; \tag{25}$$

$$F(x_N) = \alpha(y_N)(y_N - T_0). \tag{26}$$

Если для отрезка $[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$ написать выражение, подобное (11), и поступить с этим выражением так же, как и с (11), получим аналог выражения (12):

$$F(x_0) - F(x_{\frac{1}{2}}) - p_0 y_0 h + f_0 h = 0. \tag{27}$$

В выражении выше было допущено, опять же в силу малости h, что $F(x_{-\frac{1}{2}}) = F(x_0)$. Пользуясь достигнутыми ранее в этом разделе результатами, получим:

$$F_0 - \frac{(k_0 + k_1)(y_0 - y_1)}{2h} - p_0 y_0 h + f_0 h = 0. \tag{28}$$

Умножим на h и выделим коэффициенты при y_0 и y_1:

$$-(\frac{k_0 + k_1}{2} + p_0 h^2) y_0 + \frac{k_0 + k_1}{2} y_1 + f_0 h^2 + F_0 h = 0. \tag{29}$$

Получили еще одно уравнение для нашей системы, а коэффициенты в нем будут такие:

$$A_0 = 0, \tag{30}$$

$$B_0 = \frac{k_0 + k_1}{2} + p_0 h^2, \tag{31}$$

$$C_0 = \frac{k_0 + k_1}{2}, \tag{32}$$

$$D_0 = f_0 h^2 + F_0 h. \tag{33}$$

$(N+1)$—е уравнение для системы получается аналогичным образом, приведем лишь коэффициенты в нем:

$$A_N = \frac{k_{N-1} + k_N}{2}, \tag{34}$$

$$B_N = \frac{k_{N-1} + k_N}{2} + p_N h^2 + \alpha(y_N) h, \tag{35}$$

$$C_N = 0, \tag{36}$$

$$D_N = f_N h^2 + \alpha(y_N) T_0 h. \tag{37}$$

2.4 Линеаризация

Раздел "Переход к *почти* СЛАУ" называется так неслучайно. Полученное уравнение (20) могло бы быть уравнением СЛАУ, если бы не нелинейность входящих в него выражений. Для того, чтобы получить действительную СЛАУ и решать её известными из предыдущих работ курса методами, проведем *линеаризацию* уравнения (20) со вспомогательными обозначениями (21) — (24) по методу Ньютона.

Метод Ньютона является итерационным, согласно ему, линеаризация производится так. Если задана система некоторых дифференцируемых функций $G_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), i = 1, 2, \ldots, n$, то на очередной итерации с номером s:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial G_i(x_k^{(s)})}{\partial x_k} \triangle x_k^{(s)} + G_i(x_1^{(s)}, \ldots, x_n^{(s)}) = 0, \tag{38}$$

а на следующей, $(s+1)$—й итерации:

$$x_k^{(s+1)} = x_k^{(s)} + \triangle x_k^{(s)}, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{39}$$

Если принять на очередном шаге процесса поиска решения нашей задачи (с поправкой на равенство нулю A_0 и C_N)

$$G_i(y_{i-1}, y_i, y_{i+1}) = A_i y_{i-1} - B_i y_i + C_i y_{i+1} + D_i, \tag{40}$$

тогда в силу равенств (21) — (24):

$$\frac{\partial G_i}{\partial y_{i-1}} = \frac{\partial A_i}{\partial y_{i-1}} y_{i-1} + A_i - \frac{\partial B_i}{\partial y_{i-1}} y_i, \tag{41}$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial y_i} = \frac{\partial A_i}{\partial y_i} y_{i-1} - \frac{\partial B_i}{\partial y_i} y_i - B_i + \frac{\partial C_i}{\partial y_i} y_{i+1} + \frac{\partial D_i}{\partial y_i}, \tag{42}$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial y_{i+1}} = -\frac{\partial B_i}{\partial y_{i+1}} y_i + \frac{\partial C_i}{\partial y_{i+1}} y_{i+1} + C_i. \tag{43}$$

Предполагается, что читатель уже знаком с частными производными, и вычислить необходимые для выражений выше сможет самостоятельно. Приведем лишь некоторые полезные равенства:

$$\frac{\partial k_i}{\partial y_i} = a_1 c_1 m_1 y_i^{m_1 - 1}, \tag{44}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial y_i} = \frac{8\alpha_0}{\delta R} (\frac{y_i}{\delta} - 1)^3, \tag{45}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_i} = \frac{8T_0\alpha_0}{\delta R} (\frac{y_i}{\delta} - 1)^3. \tag{46}$$

Вводя новые обозначения:

$$A_i' = \frac{\partial G_i}{\partial y_{i-1}}, \tag{47}$$

$$B_i' = -\frac{\partial G_i}{\partial y_i}, \tag{48}$$

$$C_i' = \frac{\partial G_i}{\partial y_{i+1}}, \tag{49}$$

$$D_i' = G_i, \tag{50}$$

получим все уравнения для СЛАУ с трехдиагональной матрицей относительно переменных $\triangle y_0, \triangle y_1, \ldots, \triangle y_N$:

$$-B_0' \triangle y_0 + C_0' \triangle y_1 + D_0' = 0, \tag{51}$$

$$A_i' \triangle y_{i-1} - B_i' \triangle y_i + C_i' \triangle y_{i+1} + D_i' = 0, i = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{52}$$

$$A_N' \triangle y_{N-1} - B_N' \triangle y_N + D_N' = 0. \tag{53}$$

Заметим, что слагаемые, содержащие в качестве множителя A_0' и C_N', пропущены в силу равенства последних нулю, в чем нетрудно убедиться, вычислив соответствующие частные производные.

2.5 Метод прогонки

Согласно методу прогонки, необходимо найти прогоночные коэффициенты ξ_i и η_i, после чего станет возможным вычисление $\triangle y_i$. Стандартные выражения для ξ_i и η_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$:

$$\xi_i = \frac{C'_{i-1}}{B'_{i-1} - A'_{i-1}\xi_{i-1}}, \tag{54}$$

$$\eta_i = \frac{A'_{i-1}\eta_{i-1} + D'_{i-1}}{B'_{i-1} - A'_{i-1}\xi_{i-1}}. \tag{55}$$

Здесь нужно учесть, что $A'_{i-1} = 0$ при $i = 1$, поэтому нет необходимости каким-то специальным образом задавать η_0 и ξ_0. Можно принять их равными нулю.

После вычисления прогоночных коэффициентов (прямой ход) выполяется уже вычисление $\triangle y_i$ (обратный ход) по формулам:

$$\triangle y_N = \frac{A'_N\eta_N + D'_N}{B'_N - A'_N\xi_N}, \tag{56}$$

$$\triangle y_i = \xi_{i+1} \triangle y_{i+1} + \eta_{i+1}, i = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{57}$$

Таким образом, в результате метода прогонки будут получены значения $\triangle y_0, \triangle y_1, \ldots, \triangle y_N$ для очередной итерации, которые можно использовать для перехода к следующей итерации согласно (39).

2.6 Основной итерационный процесс

Итерационный процесс состоит из вычисления $\triangle y_0, \triangle y_1, \ldots, \triangle y_N$ согласно методу прогонки и корректировки значений сеточной функции в соответствии с (39).
Условие прекращения процесса:

$$max|\frac{\triangle y_i^{(s)}}{y_i^{(s)}}| < \varepsilon, \tag{58}$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots, N, \tag{59}$$

$$\varepsilon = 10^{-6} \ldots 10^{-4} \tag{60}$$

Здесь i — номер граничной точки, s — номер итерации.
Стоит отметить, что в силу сложности краевых условий (нельзя явно найти значения $T(0)$ и $T(l)$) в качестве начального приближения зависимости $T(x)$ стоит брать $T(x) = T_0$.

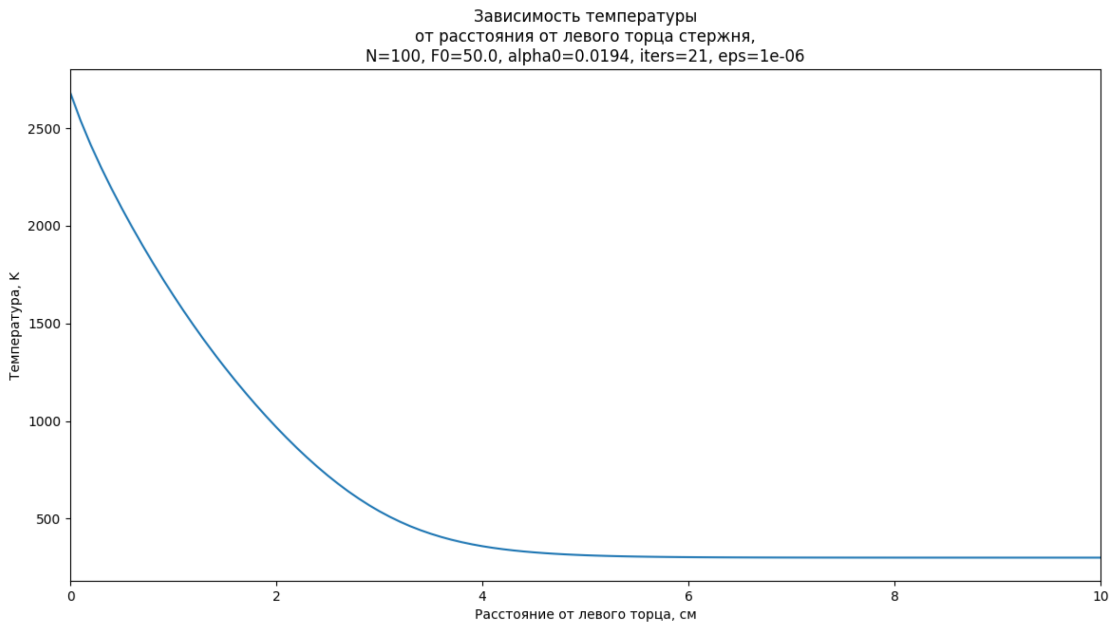
3 Краткий алгоритм

1. Разбить отрезок на участки;
2. Установить начальное приближение $T(x) = y_i = T_0, i = 0, \ldots, N$;
3. Для всех $i = 0, \ldots, N$ вычислить $\triangle y_i$:
   (a) Вычислить k_i, p_i, f_i (см. 1.1,2.1);
   (b) Вычислить A_i, B_i, C_i, D_i (см. (21) — (24), (30) — (33),(34) — (37));
   (c) Вычислить A'_i, B'_i, C'_i, D'_i (см. (47) — (50));
   (d) Вычислить ξ_i, η_i (см. (54) — (55));
   (e) Вычислить собственно $\triangle y_i$ (см. (56) — (57));
4. Если условие (58) выполняется, перейти к шагу 5, иначе — скорректировать y_i на $\triangle y_i$ и перейти к шагу 3;
5. Представить полученный результат в виде графика.

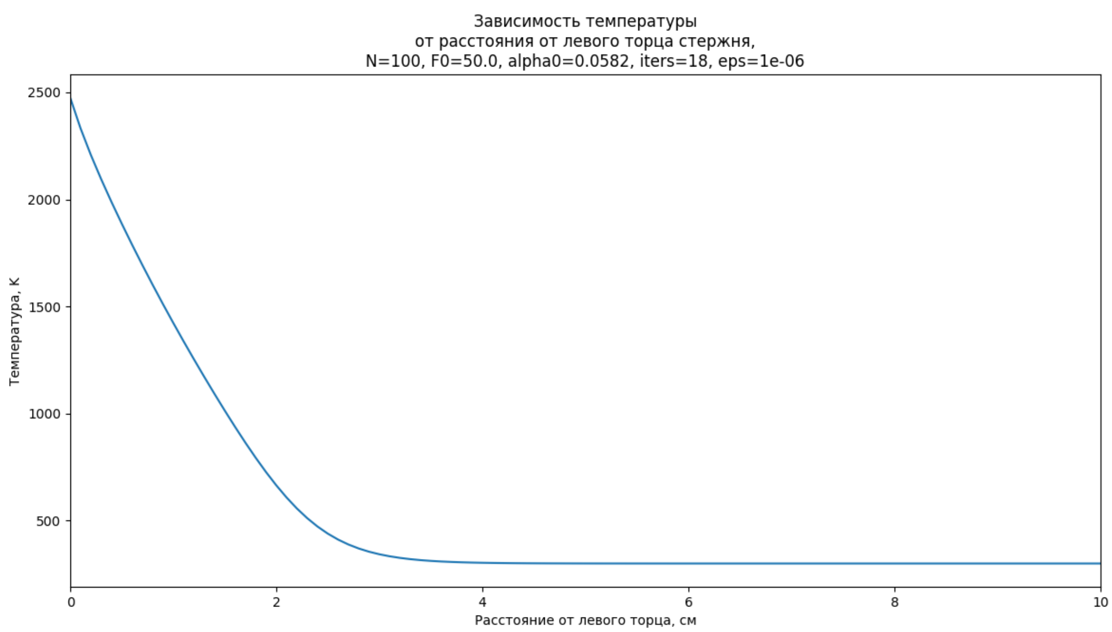
4 Результаты работы алгоритма

Приводятся графики, построенные с помощью matplotlib по результатам работы алгоритма. Обозначения на изображениях: N — число отрезков, F_0 — значение потока у левого торца, α_0 — значение соответствующего коэффициента в данном тесте, $iters$ — число итераций, за которое был получен график, ε — значение точности.
Тесты приводятся в порядке, в котором они изложены в п. 1.3.

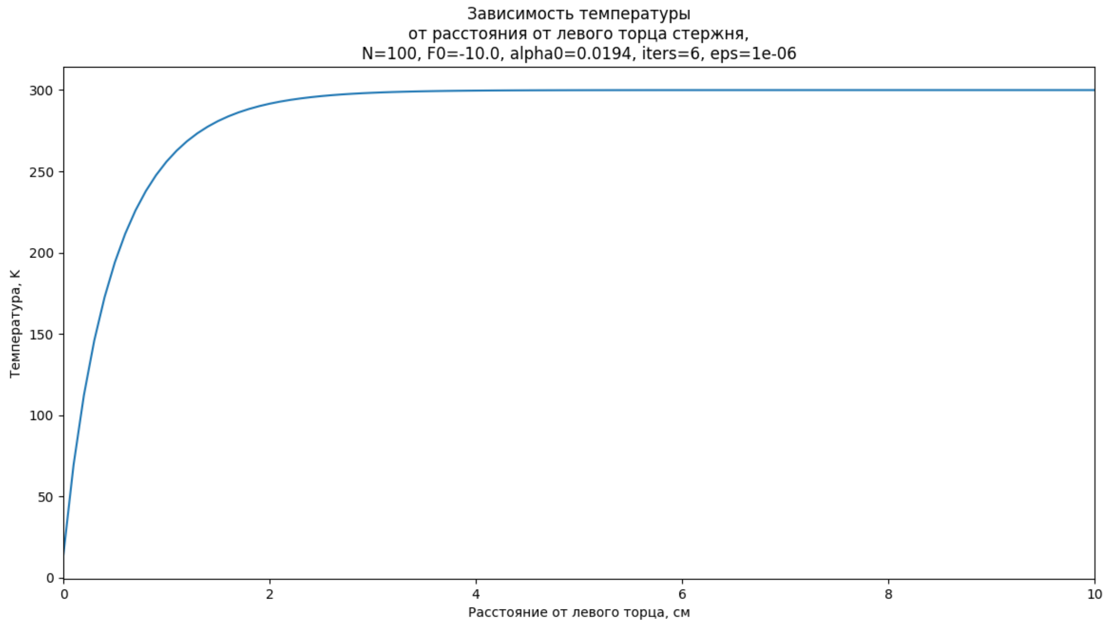
4.1 Тест 1



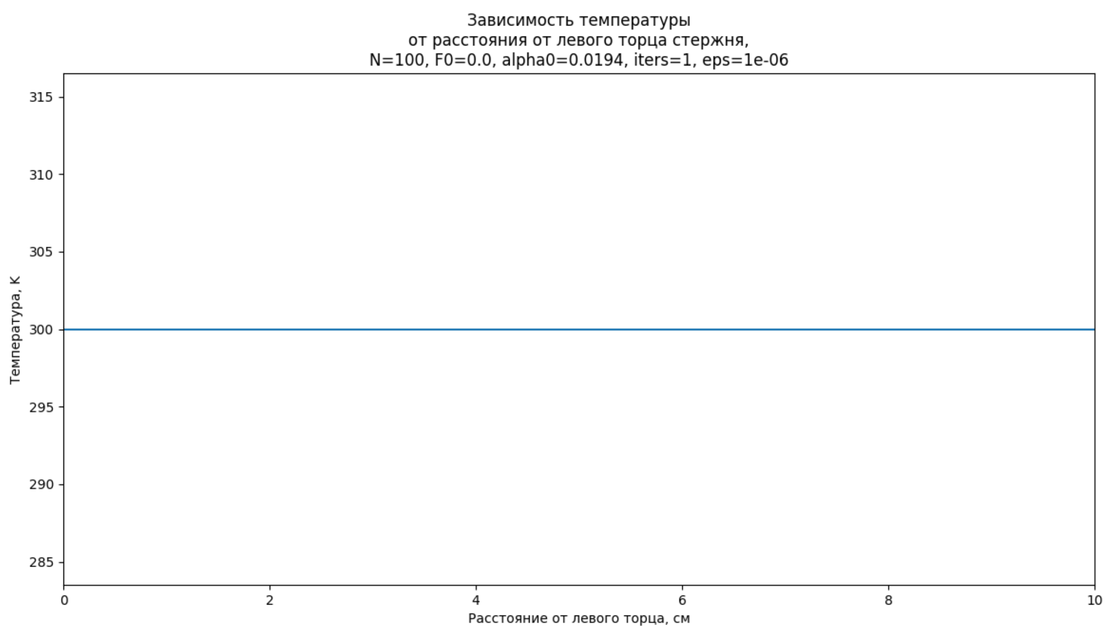
4.2 Тест 2



4.3 Тест 3



4.4 Тест 4



5 Источники

1. Курс лекций Градова В. М. по курсу "Вычислительные алгоритмы".

2. https://algowiki-project.org/ru/Метод_Ньютона_для_систем_нелинейных_уравнений.

3. https://www.wikiwand.com/ru/Метод_прогонки