ЗАДАНИЕ
на лабораторные работы №4

Тема: Построение и программная реализация алгоритма наилучшего среднеквадратичного приближения.

Цель работы. Получение навыков алгоритмизации метода наименьших квадратов *при аппроксимации* табличных функций с весами с использованием полиномов заданной степени в одномерном и двумерном вариантах и для получении *приближенного аналитического решении* обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка в краевой постановке.

Содержание задания.

1 ***Одномерная аппроксимация***.

1.1. Задана таблица функции $y = f(x)$ с **весами** ρ_i с количеством узлов N. Сформировать таблицу самостоятельно со случайным разбросом точек.

x_i	y_i	ρ_i

Предусмотреть в интерфейсе удобную возможность изменения пользователем весов в таблице.

1.2. Задана степень аппроксимирующего полинома - n.

2. ***Двумерная аппроксимация***.

2.1 Задана таблица функции 2-х переменных $z = f(x, y)$ с весами ρ_i с количеством узлов N. Сформировать таблицу самостоятельно со случайным разбросом точек.

x_i	y_i	z_i	ρ_i

2.2. Задачу решить для д**вумерного** полинома первой степени.

Результаты работы по п.1 и п.2.

Графики, содержащие *точки* - заданная табличная функция и *кривые (поверхности)*, отображающие найденные полиномы.

Представить результаты в **двух вариантах**:

1. Веса всех точек **одинаковы** и равны, например, единице. В одномерном варианте обязательно построить полиномы степеней n=1 и 2. Можно привести результаты и при других степенях полинома, однако, не загромождая сильно при этом рисунок.

В двумерном варианте построить точки и поверхности, представляющие двумерные полиномы.

2. Веса точек **разные**. Продемонстрировать, как за счет назначения весов точкам можно изменить положение на плоскости прямой линии (полином первой степени), аппроксимирующей **один и тот же набор точек** (**одну** таблицу y(x)). Например, назначая веса узлам в таблице **изменить знак углового коэффициента прямой**. На графике в итоге должны быть представлены точки исходной функции и две аппроксимирующие их прямые линии: одна отвечает значениям ρ_i =1 для всех узлов, а другая- назначенным весам точек.

3. ***Приближенное аналитическое решение обыкновенного дифференциального уравнения*** второго порядка для краевой задачи.

$$
\begin{aligned}
& y'' + x y' + y = 2x \\
& y(0) = 1, \ y(1) = 0
\end{aligned}.
$$

Результаты работы по п.3.

3.1. Найти решение уравнения с заданными краевыми условиями в виде

$$y(x) = u_0(x) + \sum_{k=1}^{m} C_k u_k(x).$$

3.2. Нарисовать графики, позволяющие сравнить результаты, полученные при m=2 и m=3.

Примерные вопросы при защите лабораторной работы.

1. Каков будет результат при задании степени одномерного полинома n=N-1 (числу узлов таблицы минус 1)?

2. Будет ли работать Ваша программа при $n \geq N$? Что именно в алгоритме требует отдельного анализа данного случая и может привести к аварийной остановке?

3. Получить формулу для коэффициента одномерного полинома a_0 при степени полинома n=0. Какой смысл имеет величина, которую представляет данный коэффициент?

4. Показать, что при аппроксимации одномерным полиномом 1-й степени прямая пройдет через «центр тяжести» заданного множества точек, т.е. через точку

$$X = \frac{\sum_i \rho_i x_i}{\sum_i \rho_i}, Y = \frac{\sum_i \rho_i y_i}{\sum_i \rho_i}.$$

5. Записать и вычислить определитель матрицы СЛАУ для нахождения коэффициентов одномерного полинома для случая, когда n=N=2. Принять все ρ_i =1.

6. Построить СЛАУ при выборочном задании степеней аргумента полинома

$\varphi(x) = a_0 + a_1 x^m + a_2 x^n$, причем степени n и m в этой формуле известны.

7. Предложить схему алгоритма решения задачи из вопроса 6, если степени n и m подлежат определению наравне с коэффициентами a_k, т.е. количество неизвестных равно 5.

8. Построить функцию $u_0(x)$ в п.3 Задания, удовлетворяющую краевым условиям $y(0) = 2,\ y(2) = 2$

Методика оценки работы.

Модуль 2, срок - 11-я неделя..

1. Задание полностью выполнено, все графики приведены - 11 баллов (минимум).

2. В дополнение к п.1 даны исчерпывающие ответы на вопросы – до 17 баллов (максимум).