

Решение задач для экзамена по дисциплине «Теория
вероятностей»

Лысцев Никита ИУ7-53Б

4 января 2024 г.

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|-----------------------------------|----|
| 1 Комплект №1. Случайные события | 2 |
| 2 Комплект №2. Случайные величины | 28 |

1 Комплект №1. Случайные события

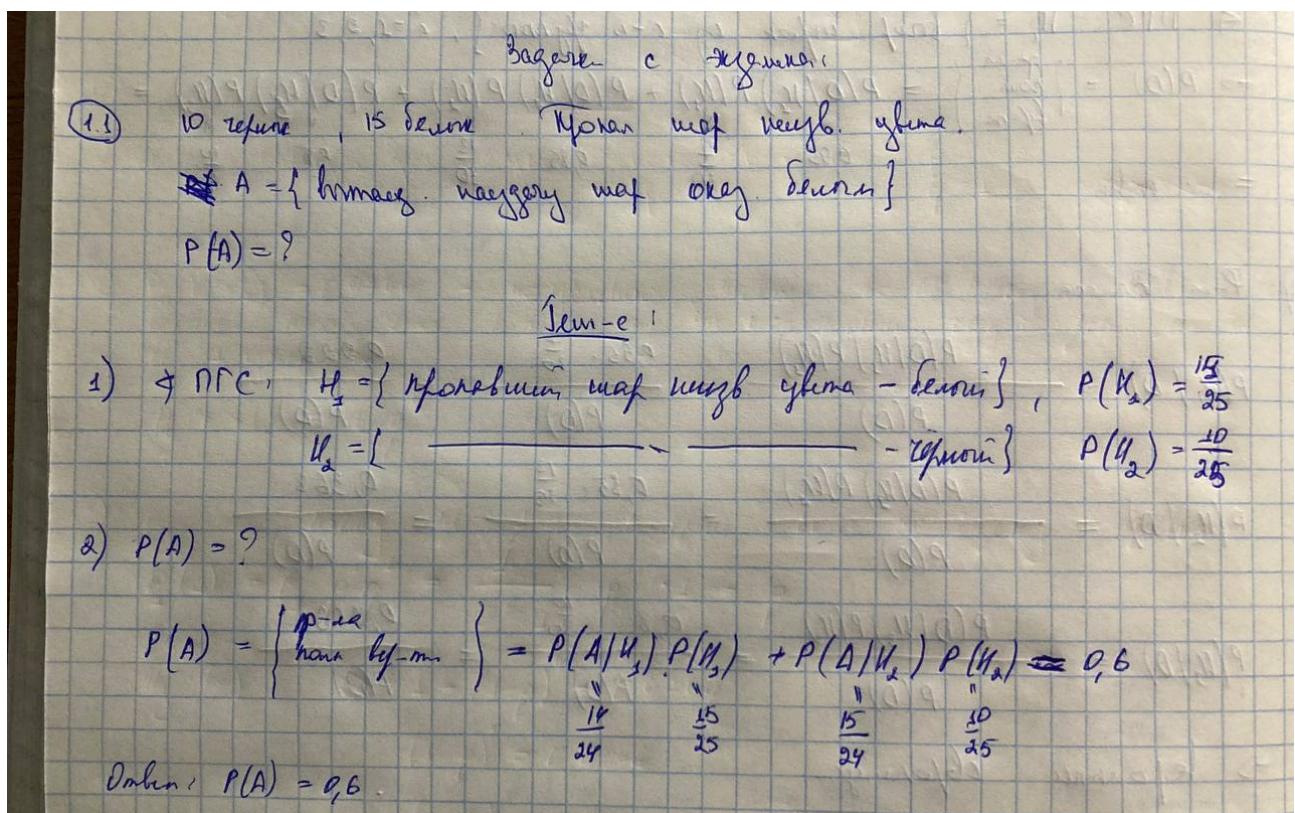


Рисунок 1.1 – Решение задачи 1.1

1.2) 9 элемент, 5 классов

$A = \{ \text{бес броя нарг. элемен} \}$

$$P(A) = ?$$

Решение:

1) ~~Некой $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, че x_i - конк. элем. икв. каки икв. нарг. - разнодост. от 8 до 5 с лобно решени~~

2) $N_A = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, че x_i - конк. элем. икв. каки икв. нарг. - разнодост. от 8 до 5 с лобно решени

$$3) P(A) = ?$$

множ. элемен: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

$$\begin{pmatrix} & \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

A:

$$\Rightarrow N_A = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = A_8^5 = \frac{8!}{5!} = 6720$$

$$N = 8^5 = 32768$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{6720}{32768} = \frac{105}{512}$$

касам

от-о

$$\underline{\text{Решен:}} \quad P(A) = \frac{105}{512}$$

Рисунок 1.2 – Решение задачи 1.2

1.3) Бакет, 5 яблок . Коприм один из которых

Делимся!

$$1) \text{ не бакет} , H_1 = \{ \text{яблоко, не из первых 4 яблок - бакет} \} , P(H_1) = \frac{6}{11}$$

$$H_2 = \{ \text{из первых 4 яблок - бакет} \} , P(H_2) = \frac{5}{11}$$

$$2) A = \{ 2 \text{ яблока из первых 4 яблок}\}$$

~~Решение~~

Формула Банеца:

$$P(H_1 | A) = \frac{P(A|H_1) P(H_1)}{P(A)} \Leftrightarrow$$

$$P(A) = P(A|H_1) \underbrace{P(H_1)}_{\frac{6}{11}} + P(A|H_2) \underbrace{P(H_2)}_{\frac{5}{11}} = \frac{10}{45} \cdot \frac{6}{11} + \frac{15}{45} \cdot \frac{5}{11} = \frac{3}{11}$$

$$P(A|H_1) = \frac{\frac{10}{45}}{\frac{10}{45} + \frac{5}{45}} = \frac{10}{15}$$

$$P(A|H_2) = \frac{\frac{15}{45}}{\frac{10}{45} + \frac{5}{45}} = \frac{15}{25}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{10}{45} \cdot \frac{6}{11}}{\frac{3}{11}} = \frac{4}{9}$$

Ответ: $\frac{4}{9}$

Рисунок 1.3 – Решение задачи 1.3

14) 36 карт в колоде
 $A = \{$ из 3 карт один масти $\}$

a) одна-е карта из пятьнадцати;

$$P(A) = ?$$

Реш-е:

a) 1) Числ. $\{x_1, x_2, x_3\}$ - число комбинаций из 36 по 3, т.е. $\binom{36}{3}$

Общее число исходов: $N = \binom{36}{3} = 7140$

$$2) P(A) = ?$$

$$N_A = \binom{3}{9} \cdot \binom{33}{22} = 84$$

$$\Rightarrow P(A) = \left| \begin{array}{l} \text{исход} \\ \text{из-ны} \end{array} \right| = \frac{N_A}{N} = \frac{84}{7140} = \left(\frac{1}{85} \right)$$

b) 1) Числ. (x_1, x_2, x_3) - число размещ. с повтор-ми 36 по 3, т.е. \tilde{A}_{36}^3

Общее число исходов: $N = \tilde{A}_{36}^3 = 46656$

$$2) P(A) = ?$$

$$N_A = \tilde{A}_9^3 = 9^3 = 729$$

$$\Rightarrow P(A) = \left| \begin{array}{l} \text{исход} \\ \text{из-ны} \end{array} \right| = \frac{N_A}{N} = \frac{729}{46656} = \left(\frac{1}{64} \right)$$

Ответ: а) $\frac{1}{85}$; б) $\frac{1}{64}$

Рисунок 1.4 – Решение задачи 1.4

- (15) ~~у негативного~~ ~~следовательно~~ ~~левое~~ ~~нога~~ ~~когда~~ ~~в~~ ~~человек~~ ~~4-х~~
~~бронхита~~ ~~ребра~~ ~~0,9794~~
- Решение:
- 1) Уч. сущ. Всегдаши гнил чеснок - нога. в челе., $P_q = 1-p$
 - 2) $P_q(k \geq 1) = 0,9794$ - но это ошибочно. Т.к. не сущ. Всегдаши, $P_q(k \geq 1)$ есть левое ноги, это в серии из 4-х одновременно. возможно однажды нога для 1 чеснка.
 - 3) Абсолютно нога. Пр. ноги бывают, как сущ. Всегдаши, ребра

$$P_1(z) = P, P'q^z = \frac{1}{(1-p)1} = P$$

$$\text{Уз } (z) : 1 - q^z = 0,9794$$

$$1 - (1-p)^z = 0,9794$$

$$(1-p)^z = 0,0256$$

$$(1-p) = 0,4$$

$$P = 0,6$$

$$\text{Ответ: } p = 0,6$$

Рисунок 1.5 – Решение задачи 1.5

1.6) 100 билетов, 50 информационных, 3 лотерейные награды
 $A = \{$ все 3 лотерейные награды $\}$
 $B = \{$ хотя бы 1 билет информационный $\}$

$$P(A) = ?, P(B) = ?$$

Решение:

1) Число: (x_1, x_2, x_3) — число различных из 100 по 3, где 1-й — лотерейный билет, 2-й и 3-й информационные.

$$\text{Общее число чисел: } N = A_{100}^3 = 970\ 200$$

$$2) P(A) = ?$$

$A : \left(\frac{B}{50}, \frac{B}{49}, \frac{B}{48} \right)$, где B — один из лотерейных номеров информационных билетов

$$\Rightarrow N_A = 50 \cdot 49 \cdot 48 = 117\ 600$$

$$\Rightarrow P(A) = \begin{Bmatrix} \text{номер} \\ \text{лотерейн.} \\ \text{билета} \end{Bmatrix} = \frac{N_A}{N} = \frac{117\ 600}{970\ 200} = \boxed{\frac{4}{33}}$$

$$3) P(B) = ?$$

\nexists лотерейный, $C = \overline{B} = \{$ есть 3-я лотерейная — x билетов нет информационных

$$\Rightarrow P(\overline{B}) = \begin{Bmatrix} \text{нет 3-й} \\ \text{лотерейн.} \\ \text{билета} \end{Bmatrix} = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(C)$$

$C : \left(\frac{D}{50}, \frac{D}{49}, \frac{D}{48} \right)$, где D — один из информационных номеров лотерейных билетов

$$\Rightarrow N_C = 50 \cdot 49 \cdot 48 = 117\ 600$$

$$\Rightarrow P(C) = \begin{Bmatrix} \text{номер} \\ \text{инфо-} \\ \text{билета} \end{Bmatrix} = \frac{N_C}{N} = \frac{117\ 600}{970\ 200} = \frac{4}{33}$$

$$\Rightarrow P(B) = 1 - P(C) = 1 - \frac{4}{33} = \boxed{\frac{29}{33}}$$

Рисунок 1.6 – Решение задачи 1.6

(1.7)

$p = 0,9$. Для попадания цель нужно ≥ 2 попаданий

$A = \{ \text{цель попадает при } \geq 2 \text{ попаданиях} \}$

$$P(A) = ?$$

Решение:

1) Исп-н ор. Бернулли для условия - попадание в цель, $p = 0,9$, $q = 1-p = 0,1$

$$n = 3$$

$$P(A) = P_3(k \geq 2) = C_3^2 p^2 q^1 + C_3^3 p^3 q^0 = \dots \text{решение}$$

Рисунок 1.7 – Решение задачи 1.7

(1.8)

1-е число: 5 белых и 4 черных шара
2-е число: 4 белых и 2 черных шара

Чуть. 1-е. шар из 1-й упак. оказался черным.

$A = \{ \text{известно, что 1-й шар был белым из 1-й упак.} \}$

$$P(A) = ?$$

Решение:

1) ~~1-е~~ исп-н МРС $U_i = \{ \text{шар бел. 1-й упак. из } i\text{-й упак.} \}$, $i=1,2$ $P(U_i) = \frac{1}{2}$

2) ~~2-е~~ исп-н МРС $B = \{ \text{бел. шар оказался черным} \}$

~~1-е~~ исп-н МРС U_1

$$P(B) = P(B|U_1) P(U_1) + P(B|U_2) P(U_2) = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{9}$$

2-е исп-н МРС

$$P(U_1 | B) = \frac{P(B|U_1) P(U_1)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{2}{9}} = \boxed{\frac{4}{7}}$$

Рисунок 1.8 – Решение задачи 1.8

(1.9) 18 спичек

| | | | | |
|------|----|-------|-----------------------|-----|
| 5 шт | 18 | полов | в упак с лог-ю, рабоч | 0,8 |
| 7 шт | 18 | " | " | 0,7 |
| 4 шт | 18 | " | " | 0,6 |
| 2 шт | 18 | " | " | 0,5 |

Нашли к какой группе принадлежит упаковка, если она приобретена в магазине.

Последн:

1) $\text{к-м НРС: } H_i = \{ \text{бр-к спичек из } i\text{-й группы} \}, i=1,4$

$$P(H_1) = \frac{5}{18}, \quad P(H_2) = \frac{2}{18}, \quad P(H_3) = \frac{4}{18}, \quad P(H_4) = \frac{3}{18}$$

2)] вид-е $A = \{ \text{бр. бр-к спичек производится} \}$

Р-ра Банка:

$$P(H_1 | A) = \frac{P(H_1) P(A|H_1)}{P(A)} = \left\{ \begin{array}{l} P(A|H_1) = \\ = 0,2 \end{array} \right\} = \frac{0,2 \cdot \frac{5}{18}}{P(A)} = \frac{\frac{1}{18}}{P(A)}$$

$$P(H_2 | A) = \frac{P(H_2) P(A|H_2)}{P(A)} = \left\{ \begin{array}{l} P(A|H_2) = \\ = 0,3 \end{array} \right\} = \frac{0,3 \cdot \frac{2}{18}}{P(A)} = \frac{\frac{2}{60}}{P(A)}$$

$$P(H_3 | A) = \frac{P(H_3) P(A|H_3)}{P(A)} = \left\{ \begin{array}{l} P(A|H_3) = \\ = 0,4 \end{array} \right\} = \frac{0,4 \cdot \frac{4}{18}}{P(A)} = \frac{\frac{4}{45}}{P(A)}$$

$$P(H_4 | A) = \frac{P(H_4) P(A|H_4)}{P(A)} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(A|H_4) = \\ = 0,5 \end{array} \right\} = \frac{0,5 \cdot \frac{3}{18}}{P(A)} = \frac{\frac{1}{18}}{P(A)}$$

$$\frac{1}{18} = \frac{10}{180} \cdot \frac{1}{60} = \frac{21}{180} \cdot \frac{4}{45} = \frac{16}{180}; \quad \frac{1}{18} = \frac{10}{180}$$

\Rightarrow бр. бр-к спичек из 4-й группы.

Рисунок 1.9 – Решение задачи 1.9

1.10 Студент знает 20 из 25 вопросов. Наименее вероятно, что студент знает 20 из 25 вопросов. ~ под A

Решение:

1) Число (x_1, x_2, x_3) — число правильных из 25 на 3, где x_i — номер вопроса.

Общее число способов: $N = A_{25}^3 = 13800$

2) $P(A) = ?$

$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, где $A_i = \{ \text{студент знает } i \text{ вопросов из } 3-х \}$

$A_1: \begin{pmatrix} 20, 19, 18 \\ 3, 3, 3 \end{pmatrix}$, где $\frac{3}{18}$ — один из чисел вопросов, кому знает студент

$$\Rightarrow N_{A_1} = 3 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 = 5700$$

$$A_2: \begin{pmatrix} 20, 19, 18 \\ 3, 4, 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow N_{A_2} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$$

$$\Rightarrow P(A) = P(A_1 + A_2) = \left[\begin{array}{l} \text{один из} \\ A_1 \cap A_2 \text{ и } A_3 \\ \text{чисел} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{один из} \\ A_1 \text{ и } A_2 \\ \text{чисел} \end{array} \right] = P(A_1) + P(A_2) =$$

$$= \frac{N_{A_1}}{N} + \frac{N_{A_2}}{N} = \frac{5700 + 6840}{13800} = \frac{209}{230}$$

$$\text{Ответ: } P(A) = \frac{209}{230}$$

Рисунок 1.10 – Решение задачи 1.10

1.11) 96% выпускаемой продукции удовлетворяет
 критериям стандартной и нестандартной. Критерий пригодности с вероятностью 0,98
~~0,05~~

Каждое из двух видов продукции, имеющее контракт,

решение,

$$1) \text{ не годно}, U_1 = \{ \text{негативное решение, стандартной}\} \\ U_2 = \{ \text{негативное решение, нестандартной}\}$$

$$P(U_1) = 0,96, P(U_2) = 0,04$$

$$2) \text{ годно } A = \{ \text{изделие прошло контроль}\}$$

$$P(A) = \left[\begin{array}{l} \text{правильное} \\ \text{неправильное} \\ \text{бракованное} \end{array} \right] = P(U_1) P(A|U_1) + P(U_2) P(A|U_2) =$$

$$= 0,96 \cdot 0,98 + 0,04 \cdot 0,05 = 0,9428$$

3) Оценка вероятности

$$P(U_1 | A) = \frac{P(U_1) P(A|U_1)}{P(A)} = \frac{0,96 \cdot 0,98}{0,9428} = \frac{2352}{2357} \approx 0,998$$

Рисунок 1.11 – Решение задачи 1.11

1.13

Дослідом 3 монети.
 $A = \{ \text{хвости для всіх 3 монет} \}$ (тобто $\Omega = \{HHH, HHT, HTT, TTT\}$)
 $P(A) = ?$ (тобто $P(\text{хвости})$)

Розв'язання:

1) Множини (x_1, x_2, x_3) — всі можливі результати, тобто $x_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, 3$, тобто $\Omega = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$.

Ось всі можливі варіанти: $N = \frac{3}{2}^3 = 8$

2) $P(A) = ?$

$A = A_1 + A_2 + A_3$, де $A_i = \{ \text{хвост для } i\text{-ї монети} \}$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 + A_2 + A_3) = \left| \begin{array}{l} \text{тобто} \\ \text{такий} \end{array} \right| = \\ &= \overbrace{P(A_1)}^{0,5} + \overbrace{P(A_2)}^{0,5} + \overbrace{P(A_3)}^{0,5} - \overbrace{P(A_1 A_2)}^{0,25} - \overbrace{P(A_1 A_3)}^{0,25} - \overbrace{P(A_2 A_3)}^{0,25} + \\ &+ \overbrace{P(A_1 A_2 A_3)}^{0,125} = 0,5 \cdot 3 - 0,25 \cdot 3 + 0,125 = \boxed{0,875} \end{aligned}$$

Рисунок 1.12 – Решение задачи 1.13

(1.14) $A = \{$ изделие качество 1-е центра
 $B = \{$ изделие качество 2-е
 $C = \{$ изделие качество 3-е

$P(A) = 0,1$
 $P(B|A) = 0,3$
 $P(C|AB) = 0,2$

$D = \{$ изделие качество не исповелено $\}$

$P(D) = ?$

Решение:

1) $P(D) = ?$

$P(D) = P(A \cdot B \cdot C) = \left\{ \begin{array}{l} \text{1-е оправе} \\ \text{качес} \\ \text{2-е} \\ \text{качес} \\ \text{3-е} \\ \text{качес} \end{array} \right\} = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|AB) \Leftrightarrow$

$P(B|A) = \left\{ \begin{array}{l} \text{1-е качес} \\ \text{2-е} \\ \text{качес} \\ \text{3-е} \\ \text{качес} \end{array} \right\} = 1 - P(\bar{B}|A) = 1 - 0,3 = 0,7$

$P(C|AB) = \left\{ \begin{array}{l} \text{1-е качес} \\ \text{2-е} \\ \text{качес} \\ \text{3-е} \\ \text{качес} \end{array} \right\} = 1 - P(\bar{C}|AB) = 1 - 0,2 = 0,8$

$P(A) = \left\{ \begin{array}{l} \text{1-е качес} \\ \text{2-е} \\ \text{качес} \\ \text{3-е} \\ \text{качес} \end{array} \right\} = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,1 = 0,9$

$\Leftrightarrow 0,9 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = \boxed{0,504}$

Рисунок 1.13 – Решение задачи 1.14

(1.15)

Решение:

1) \exists -и H_1, H_2 , $H_1 = \{$ 1-е качество белой шар $\}$, $H_2 = \{$ 2-е качество белой шар $\}$,

$P(H_1) = 0,5$, $P(H_2) = 0,5$

2) $A = \{$ гостини белой шар $\}$

$P_{\text{на 1-е качес}} \text{ 1-е качес}$

$P(A) = P(H_1) \underbrace{P(A|H_1)}_{0,5} + P(H_2) \underbrace{P(A|H_2)}_{0,5} = 0,5 \cdot 1 + 0,5 \cdot 0,5 = 0,5 + 0,25 = 0,75$

3) $P_{\text{на белое}}$

$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0,5 \cdot 1}{0,75} = \boxed{\frac{2}{3}}$

Рисунок 1.14 – Решение задачи 1.15

1.16) Всі $A \cup B$, $P(B) = 0,4$, $P(A|B) = 0,3$, $P(A|\bar{B}) = 0,2$
 $P(A) = ?$, $P(\bar{A}\bar{B}) = ?$, $P(\bar{A} + \bar{B}) = ?$

Решение:

1) \exists всі $B \cup \bar{B}$ — нрс (уточн. ф-вн. нрс)

$$\Rightarrow P(A) = \left\{ \begin{array}{l} \text{если } B \\ \text{если } \bar{B} \end{array} \right\} = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B}) \quad \square$$

$$P(\bar{B}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{если } B \\ \text{если } \bar{B} \end{array} \right\} = 1 - P(B) = 1 - 0,4 = 0,6$$

$$\Rightarrow 0,4 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,2 = \boxed{0,24}$$

2) $P(\bar{A}\bar{B}) = ?$

$$P(\bar{A}\bar{B}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{если } \bar{B} \\ \text{если } B \end{array} \right\} = P(\bar{B}) \cdot P(\bar{A}|\bar{B}) \quad \square$$

$$P(\bar{A}|\bar{B}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{если } \bar{B} \\ \text{если } B \end{array} \right\} = 1 - P(A|\bar{B}) = 1 - 0,2 = 0,8$$

$$\Rightarrow 0,6 \cdot 0,8 = \boxed{0,48}$$

3) $P(\bar{A} + \bar{B}) = ?$

$$P(\bar{A} + \bar{B}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{если } (\bar{A} \cap \bar{B}) \\ \text{если } (\bar{A} \cup \bar{B}) \end{array} \right\} = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A}\bar{B}) \quad \square$$

$$P(\bar{A}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{если } \bar{B} \\ \text{если } B \end{array} \right\} = 1 - P(A) = 1 - 0,24 = 0,76$$

$$\Rightarrow 0,76 + 0,6 - 0,48 = \boxed{0,88}$$

Рисунок 1.15 – Решение задачи 1.16

(1.17) 7 квадраток из 3х кирпичей. Квадраток сеч. кубик „бум“.
 $A = \{ \text{из } 3\text{x кирпичей квадраток сеч. кубик „бум“} \}$
 8) Квадраток из 3х кирпичей в 6 группах: $\{O \text{ NO } 10 \text{ ВЕЧИ}\}$
 9) Квадраток из 3х кирпичей в 6 группах: $\{O \text{ NO } 10 \text{ ВЕЧИ}\}$
 $P(A) = ?$

Решение:

а) 1) Ищем: (x_1, x_2, x_3) — число различных из 7 по 3, где x_i — квадраток, имеющий на i-й группе 3 кирпича. Общее число ищемых: $N = A_7^3 = 210$

2) $P(A) = ?$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ \cancel{\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array}} & & & & & & \\ A = (\underbrace{B}_5, \underbrace{D}_2, \underbrace{A}_1) & & & & & & \\ & & & & & & \end{array}$$

$$\Rightarrow N_A = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$$

$$\Rightarrow P(A) = \left\{ \begin{array}{l} \text{различ.} \\ \text{орг.-с.} \\ \text{груп-м.} \end{array} \right\} = \frac{N_A}{N} = \frac{2}{210} = \boxed{\frac{1}{105}}$$

б) Ищем: $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ — число различных с квадратом из 7 по 3, где \tilde{x}_i — квадраток, имеющий на i-й группе 2 кирпича. Общее число ищемых: $N = \tilde{A}_7^3 = 7^3 = 343$

2) $P(A) = ?$

$$N_A = \tilde{A}_1^3 \cdot \tilde{A}_2^1 \cdot \tilde{A}_1^1 = 2$$

$$\Rightarrow P(A) = \left\{ \begin{array}{l} \text{различ.} \\ \text{орг.-с.} \\ \text{груп-м.} \end{array} \right\} = \frac{N_A}{N} = \boxed{\frac{2}{343}}$$

Рисунок 1.16 – Решение задачи 1.17

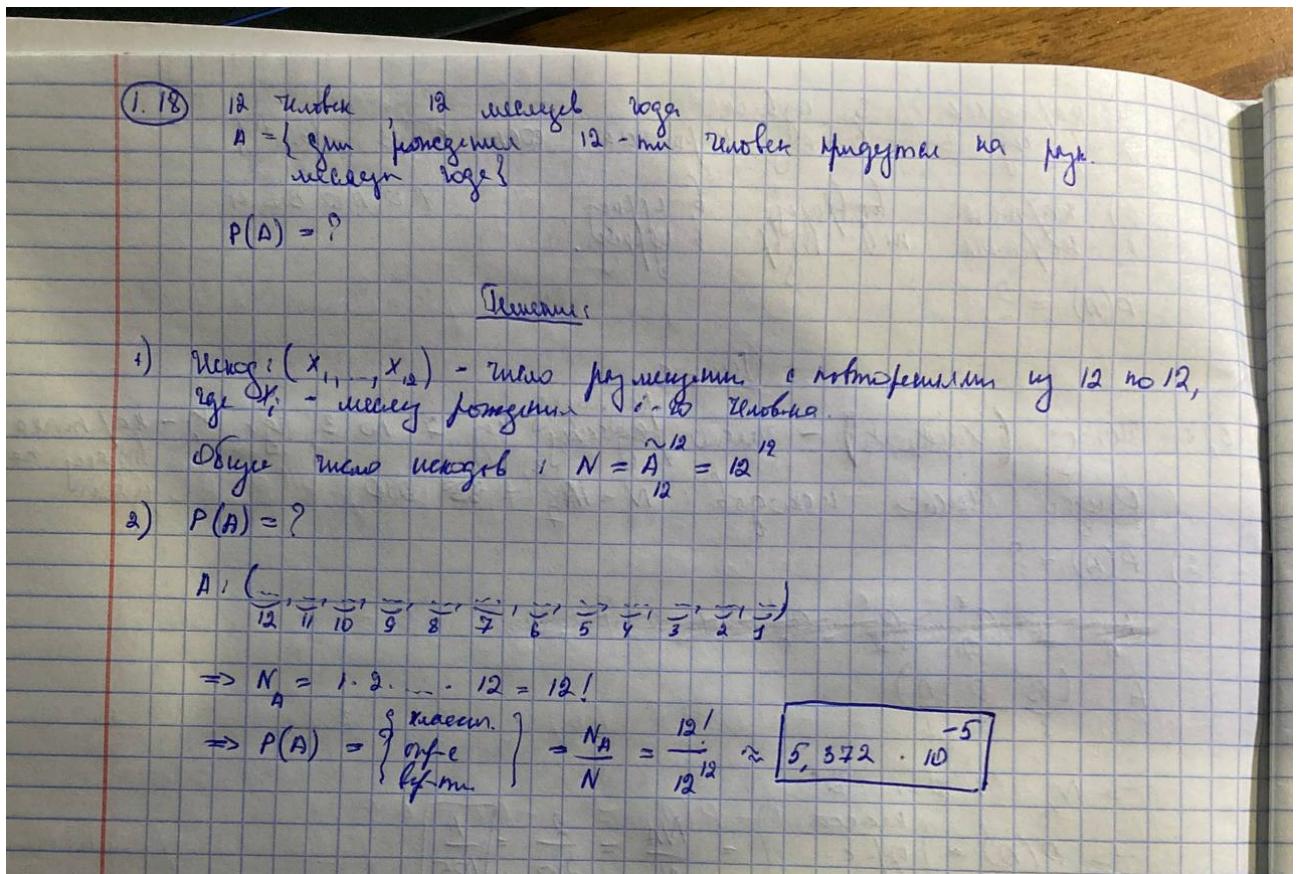


Рисунок 1.17 – Решение задачи 1.18

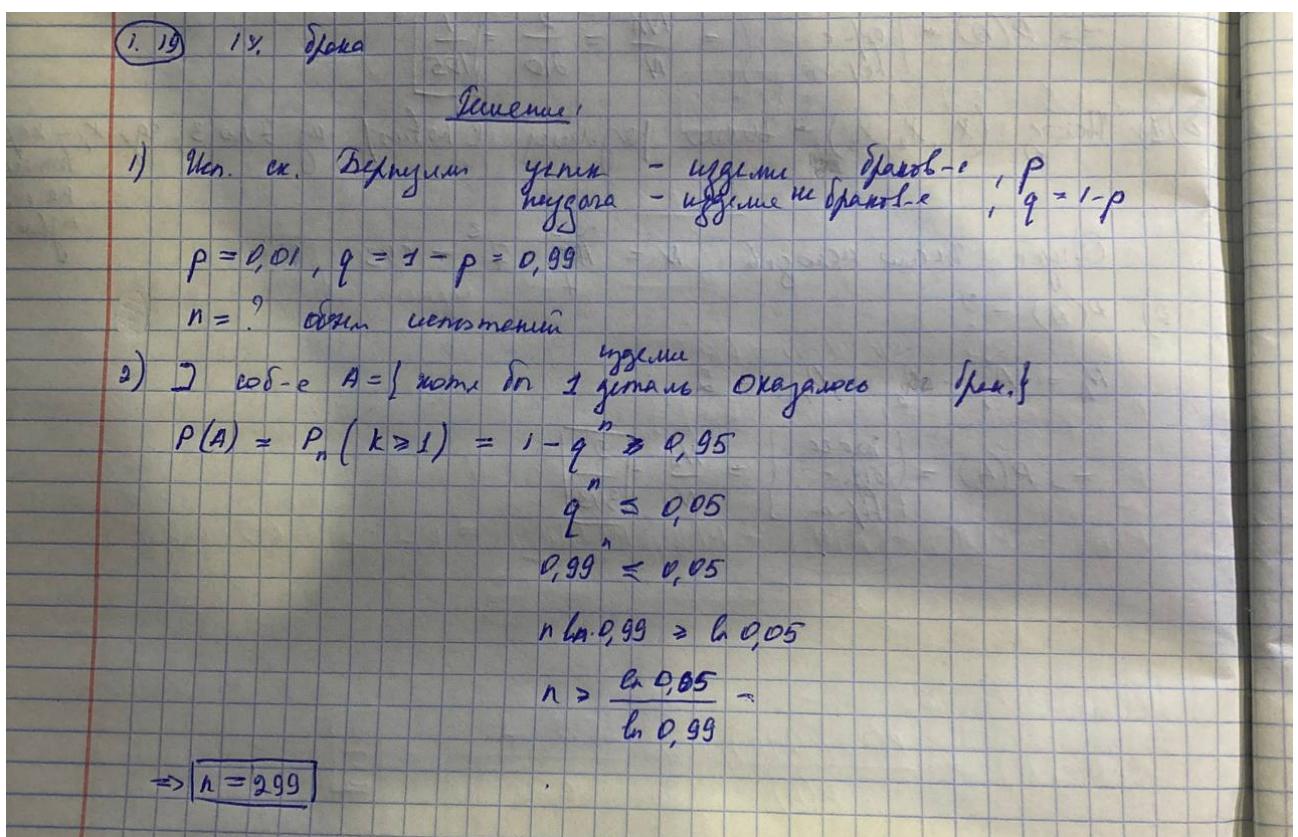


Рисунок 1.18 – Решение задачи 1.19

- (1.20) Наимен: а) $P(A_1, A_2)$, если $P(\bar{A}_2 | A_1) = 0,1$,
 $P(A_1) = 0,4$
б) $P(A_1, A_2)$, $A = A_1 + A_2$, если $P(A_1) = 0,4$,
 $P(\bar{A}_2) = 0,6$, $P(A_1, \bar{A}_2) = 0,2$

Решение:

а) $P(A_1, A_2) = ?$

По th. умнож. лев-мнж 2-х код-кн.

$$P(A_1, A_2) = P(A_1) P(A_2 | A_1) \quad \square$$

$$P(A_1) = \begin{cases} \text{лж-кн} & 1^{\circ} \\ \text{тж-кн} & 2^{\circ} \end{cases} = 1 - P(\bar{A}_1) = 1 - 0,4 = 0,6$$

$$P(A_2 | A_1) = \begin{cases} \text{лж-кн} & 1^{\circ} \\ \text{тж-кн} & 2^{\circ} \end{cases} = 1 - P(\bar{A}_2 | A_1) = 1 - 0,1 = 0,9$$

$\Leftrightarrow 0,6 \cdot 0,9 = \boxed{0,54}$

б) $P(A) = P(A_1 + A_2) = ?$

$$P(A) = P(A_1 + A_2) = \begin{cases} \text{лж-кн} & 5^{\circ} \\ \text{тж-кн} & 4^{\circ} \end{cases} = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1, A_2) \quad \square$$

$$P(A_2) = \begin{cases} \text{лж-кн} & 1^{\circ} \\ \text{тж-кн} & 2^{\circ} \end{cases} = 1 - P(\bar{A}_2) = 1 - 0,6 = 0,4$$

$\Leftrightarrow 0,4 + 0,4 - 0,2 = \boxed{0,6}$

Рисунок 1.19 – Решение задачи 1.20

(1. 21)

5 б) 10 т, 15 к куб. метр 3 шара
 $A = \{$ куб. метр 3 шара, бруск. 30 куб. м.
 $B = \{$ бруск. 3 шара, куб. метр 30 куб. м.

a) куб. метр 3 шара б) бруск. 30 куб. м.

$$P(A) = ?, P(B) = ?$$

Решение:

a) 1) Числ. (x_1, x_2, x_3) - число различных комбинаций из 30 по 3, где x_i - куб. метр, бруск. 30 куб. м.

$$\text{Общее число способов: } N = \tilde{A}_{30}^3 = 30^3 = 27000$$

$$2) P(A) = ?$$

$$N_A = \tilde{A}_5^3 = 5^3 = 125$$

$$\Rightarrow P(A) = \left\{ \begin{array}{l} \text{какие} \\ \text{быть} \end{array} \right\} = \frac{N_A}{N} = \frac{125}{27000} = \boxed{\frac{1}{216}}$$

$$3) P(B) = ?$$

Б.: $(B, 4, k)$, где B - один из трех брусков
 $(B, k, 4)$ бруск. 30 куб. м. куб. метр
 $(4, B, k)$

$(4, k, B)$

$(k, B, 4)$

$(k, 4, B)$

$$\Rightarrow N_B = 6 \cdot \tilde{A}_5^1 \cdot \tilde{A}_5^1 \cdot \tilde{A}_{15}^1 = 6 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 15 = 4500$$

$$\Rightarrow P(B) = \left\{ \begin{array}{l} \text{какие} \\ \text{быть} \end{array} \right\} = \frac{N_B}{N} = \frac{4500}{27000} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

б) 1) Числ. (x_1, x_2, x_3) - число различных комбинаций из 30 по 3, где x_i - куб. метр, бруск. 30 куб. м.

$$\text{Общее число способов: } N = \tilde{A}_{30}^3 = 24360$$

$$2) P(A) = ?$$

$$A: \left(\begin{matrix} B & B & B \\ 5 & 4 & 3 \end{matrix} \right)$$

$$\Rightarrow N_A = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

$$\Rightarrow P(A) = \left\{ \begin{array}{l} \text{какие} \\ \text{быть} \end{array} \right\} = \frac{N_A}{N} = \frac{60}{24360} = \boxed{\frac{1}{406}}$$

$$3) P(B) = ?$$

Б.: \dots , где B - один из трех брусков, а остальные 4 куб. метра.

$$\Rightarrow N_B = 6 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 5 = 4500$$

$$\Rightarrow P(B) = \left\{ \begin{array}{l} \text{какие} \\ \text{быть} \end{array} \right\} = \frac{N_B}{N} = \frac{4500}{24360} = \boxed{\frac{75}{406}}$$

1.22) 50% Ногукуен шв. санагаформы

$$\begin{array}{l} \text{без симп.} \\ \text{без нее симп.} \end{array} \begin{array}{l} \text{желуд.} \\ \text{желуд.} \end{array} \begin{array}{l} \text{брюк.} \\ \text{брюк.} \end{array} \begin{array}{l} \text{брюк.} \\ \text{брюк.} \end{array} = 0,98 \\ = 0,05 \end{math>$$

Решение:

$$1) \text{ нет симп.}, H_1 = \left\{ \begin{array}{l} \text{желуд.} \\ \text{брюк.} \end{array} \right. \quad H_2 = \left\{ \begin{array}{l} \text{желуд.} \\ \text{брюк.} \end{array} \right.$$

$$P(H_1) = 0,9, \quad P(H_2) = 0,1$$

$$2) \text{ задача } A = \left\{ \begin{array}{l} \text{ноги и брюк.} \end{array} \right\}$$

$$P(A) = \left| \begin{array}{c} \text{без симп.} \\ \text{без нее симп.} \end{array} \right| = \underbrace{P(H_1)}_{0,9} \underbrace{P(A|H_1)}_{0,98} + \underbrace{P(H_2)}_{0,1} \underbrace{P(A|H_2)}_{0,05} =$$

$$= 0,9 \cdot 0,98 + 0,1 \cdot 0,05 = 0,887$$

P-ва бол. оса:

$$P(H_1 | A) = \frac{P(H_1) P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0,9 \cdot 0,98}{0,887} = \boxed{\frac{882}{887}}$$

Рисунок 1.21 – Решение задачи 1.22

1.23

20 демонстрируют 4 физ-ка и 5 науц.
 $A = \{$ физика, 2 гум. профилей }
 $B = \{$ химия, да 2 гум. окнам. физика }

$$P(A) = ?, P(B) = ?$$

Решение.

1) Числ. $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ - числ. гум. из 20 но 5, где x_i - набор предметов, предметы. Каждый из них избран.

$$\text{Общее число исходов: } N = C_{20}^5 = 15504$$

$$2) P(A) = ?$$

$$N_A = C_9^2 \cdot C_{16}^3 = 6 \cdot 960 = 3360$$

$$\Rightarrow P(A) = \left| \begin{array}{l} \text{како.} \\ \text{объектов} \end{array} \right| = \frac{N_A}{N} = \frac{3360}{15504} = \boxed{\frac{70}{323}}$$

$$3) P(B) = ?$$

\neq если $C = \bar{B} = \{$ кроме 5 выб. демонстрирующие 2-х физ-ка {

$$\Rightarrow P(\bar{B}) = \left| \begin{array}{l} \text{без-ло,} \\ \text{без-} \end{array} \right| = 1 - P(B) \Rightarrow 1 - P(C)$$

$\exists C = C_0 + C_1$, где $C_i = \{$ кроме 5 выб. гум. показ в гум. гум. {

$$P(C) = P(C_0 + C_1) = \left| \begin{array}{l} \text{како.} \\ \text{объектов} \\ \text{без-} \end{array} \right| = P(C_0) + P(C_1) \quad \text{⇒}$$

$$N_{C_0} = C_{16}^5 \cdot C_4^0 = 4368 \cdot 1 = 4368$$

$$N_{C_1} = C_4^1 \cdot C_{16}^4 = 4 \cdot 1820 = 7280$$

$$\text{⇒} \left| \begin{array}{l} \text{како.} \\ \text{объектов} \\ \text{без-} \end{array} \right| = \frac{N_{C_0}}{N} + \frac{N_{C_1}}{N} = \frac{4368 + 7280}{15504} = \boxed{\frac{728}{969}}$$

$$\Rightarrow P(B) = 1 - P(C) = 1 - \frac{728}{969} = \boxed{\frac{241}{969}}$$

Рисунок 1.22 – Решение задачи 1.23

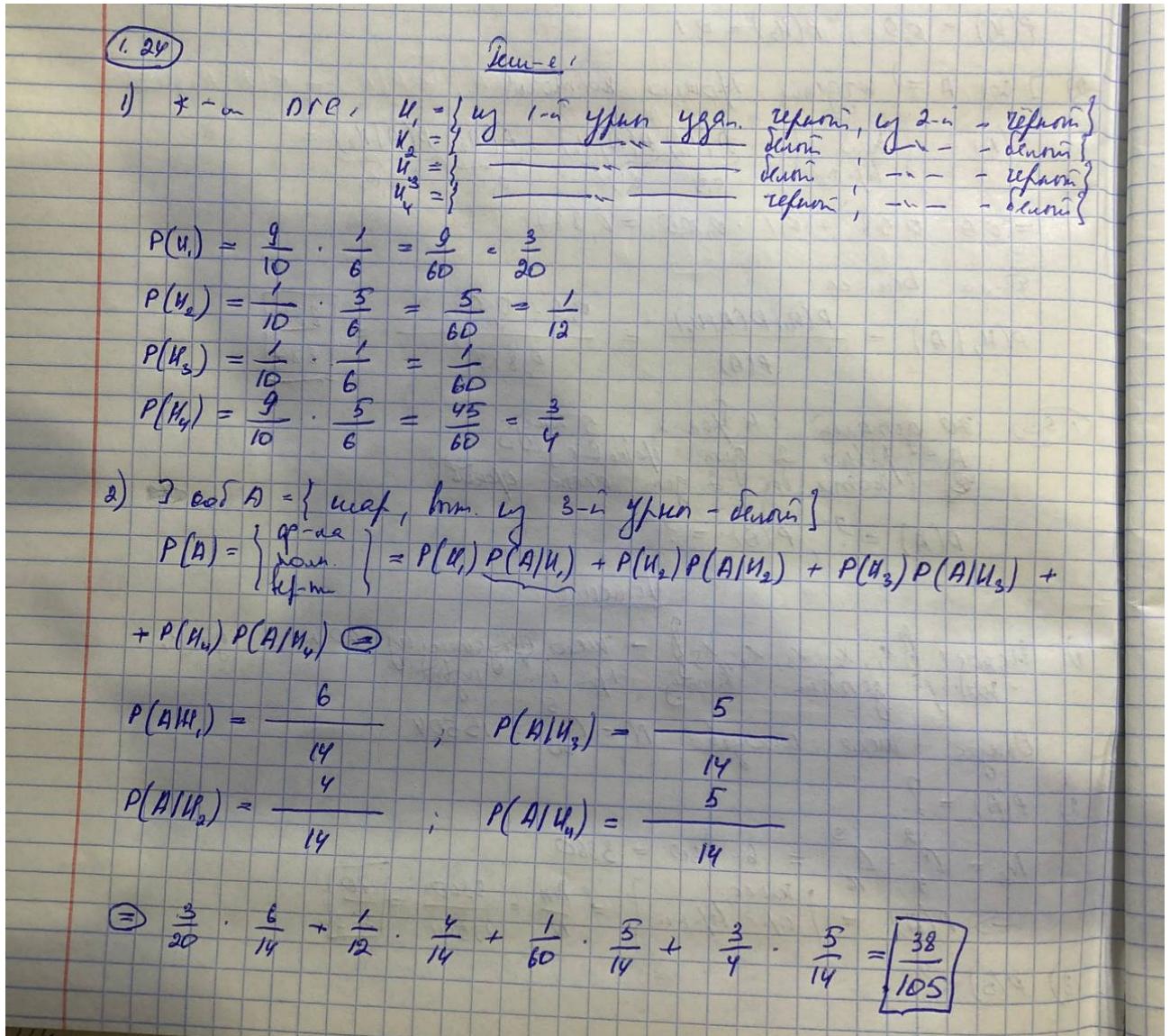


Рисунок 1.23 – Решение задачи 1.24

1.25

52 кефм, 4 кефм чубек.

$$A = \{ \text{кефм барын кефм жадын} \in \text{зерткішкел} \}$$

$$B = \{ \text{кефм} \}$$

$$P(C) = ?$$

Решение:

1) Кесе: $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ - жалғыз сөзмән үз 52 жаңы 4, яғни x_i - кефм, барын кефм жадын.

2) $P(C) = P(A + B) = ?$

Ойнаже кесе шартынан, $N = P_{52}^4 = 270725$

2) $P(C) = P(A + B) = ?$

Есептей: $D = \bar{C} = \{ \text{кефм барын кефм жадын} \text{ нең не одан} \text{ зерткішкел} \}$

$$D = \bar{C} = \overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

$$\Rightarrow P(D) = \left| \begin{array}{c} \text{шеңбердін} \\ \text{бір-бір} \end{array} \right| = 1 - P(\bar{C}) = 1 - P(D) = 1 - P(\bar{A} \cdot \bar{B})$$

$$N_{\bar{A} \cdot \bar{B}} = P_{20}^4 = 14950$$

$$P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = \left| \begin{array}{c} \text{жадын} \\ \text{офт-о} \\ \text{бір-бір} \end{array} \right| = \frac{N_{\bar{A} \cdot \bar{B}}}{N} = \frac{14950}{270725} = \frac{46}{833}$$

$$\Rightarrow P(C) = P(A + B) = 1 - P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = 1 - \frac{46}{833} = \boxed{\frac{787}{833}}$$

Рисунок 1.24 – Решение задачи 1.25

1.26

4 задача. Ряд. наим.

$$\begin{array}{l} \text{1-й ряд} \\ \hline \text{2-й} \\ \hline \text{3-й} \\ \hline \text{4-й} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{1-й элемент} = 0,1 \\ \text{2-й} = 0,2 \\ \text{3-й} = 0,3 \\ \text{4-й} = 0,4 \end{array}$$

Потом 2 элемент откладем - всп. A

~~A = отклад 2-й эл. наим с индексом 1 и 2
P(A) = ?~~Решение:

1) 4-и ряды: $U_1 = \{ \text{отклад } 1 \text{ и } 2 \text{ элемент, остав. числовик} \}$
 $U_2 = \{ \text{--- } 1 \text{ и } 3 \}$
 $U_3 = \{ \text{--- } 1 \text{ и } 4 \}$
 $U_4 = \{ \text{--- } 2 \text{ и } 3 \}$
 $U_5 = \{ \text{--- } 2 \text{ и } 4 \}$
 $U_6 = \{ \text{--- } 3 \text{ и } 4 \}$

$$\begin{array}{l} U_7 = \{ \text{отклад. только } 1 \text{ элемент} \} \\ U_8 = \{ \text{отклад. только } 3 \text{ элемент} \} \\ U_9 = \{ \text{отклад. все } 4 \text{ элемент} \} \\ U_{10} = \{ \text{все элементы числовик} \} \end{array}$$

2) $P(A) = \sum_{U_i} P(U_i) P(A|U_i)$ $= P(U_1) \underbrace{P(A|U_1)}_{\geq 0} + P(U_2) \underbrace{P(A|U_2)}_{\geq 0} + P(U_3) \underbrace{P(A|U_3)}_{\geq 0} +$
 $+ P(U_4) \underbrace{P(A|U_4)}_{\geq 0} + P(U_5) \underbrace{P(A|U_5)}_{\geq 0} + P(U_6) \underbrace{P(A|U_6)}_{\geq 0} + P(U_7) \underbrace{P(A|U_7)}_{\geq 0} + \dots + P(U_{10}) \underbrace{P(A|U_{10})}_{\geq 0} \quad \Leftrightarrow$

$$P(U_1) = 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,7 \cdot 0,6 = 0,0084 \quad (\text{наим. ряд. первое})$$

$$P(U_2) = 0,1 \cdot 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,6 = 0,0144$$

$$P(U_3) = 0,1 \cdot 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,4 = 0,0224$$

$$P(U_4) = 0,9 \cdot 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,6 = 0,0384$$

$$P(U_5) = 0,9 \cdot 0,2 \cdot 0,7 \cdot 0,4 = 0,0504$$

$$P(U_6) = 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,4 = 0,0864$$

$$\Leftrightarrow 0,2144$$

Ряд. наим.

$$P(U_1 | A) = \frac{P(U_1) P(A|U_1)}{P(A)} = \frac{0,0084}{0,2144} = \boxed{\frac{21}{536}}$$

Рисунок 1.25 – Решение задачи 1.26

1.27

Решение:

- 1) \hat{A} - итоги, $H_1 = \{\text{обратим софт-пикин}\}$, $H_2 = \{\text{обратим не софт-пикин}\}$
- $P(H_1) = p$, $P(H_2) = \begin{cases} \text{обратим} \\ \text{не обратим} \end{cases} \} = 1 - P(H_2) = 1 - p$
- 2) \hat{A} под $A = \{\text{обратим обратимен}\}$
- $P(A) = \begin{cases} \text{обратим} \\ \text{не обратим} \end{cases} \} \Rightarrow P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) =$
- $= p \cdot p_1 + (1-p) \cdot p_2$
- 3) Построим биф-диаграмму обратима в одном члене не
затрачено. Он биф-меньше обратим в другом члене, то есть
меньше. Всегда ли это член - обратим обратимен
и член - обратим не обратимен
- \hat{A} биф-меньше членка обратима, $P_{\text{обратим}} = P(A) = p \cdot p_1 + (1-p)p_2$, $P_{\text{не обратим}} = 1 - P_{\text{обратим}} = 1 - p \cdot p_1 - (1-p)p_2$
- \hat{A} под $B = \{\text{обратим обратимен}\}$ хотят ли в 1 раз да и членов
- $\Rightarrow P(B) = P_n (k \geq 1) = 1 - P_{\text{не обратим}} = \boxed{1 - [1 - p \cdot p_1 - (1-p)p_2]^n}$

Рисунок 1.26 – Решение задачи 1.27

Решение

1. 28

1) Число си. зек - ма (x_1, x_2, x_3) - ~~одно~~ ~~разное~~ ~~нужно~~ ~~сум~~ ~~6~~ ~~но 3~~,
где $x_i \in \{1, \dots, 6\}$ - число око, бывающих на i -й коин.

Одн. чисо. чесо. $N = \frac{6^3}{6} = 6^3 = 216$

2) $\Gamma \text{од} A = \{ \text{на 3 коине. бывае 3 единиц} \}$

$$N_A = 1$$

$$\Rightarrow P(A) = \left| \begin{array}{c} \text{усл.} \\ \text{одн.} \\ \text{бывае} \end{array} \right| = \frac{N_A}{N} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$$

3) Чен. ск. Всущим. где чесо. - на 3х коине быв. 3 ег.
кажд. - чесо.

быв. чесо. $P = P(A) = \frac{1}{216}$, а быв. чесо. $q = 1 - p =$
 $= 1 - \frac{1}{216} = \frac{215}{216}$

$\Gamma \text{од} B = \{ 6 \text{ серии из 5 изаже. эка-тоб. ровно 2 раза}\}$
 $\text{иные по 3} \text{ единиц} \}$. Эка-тоб. ровно 2 раза

$$\Rightarrow P(B) = P(2) = C_5^2 p^2 q^3 = 10 \cdot \left(\frac{1}{216} \right)^2 \cdot \left(\frac{215}{216} \right)^3 \approx [2, 1235 \cdot 10]$$

Рисунок 1.27 – Решение задачи 1.28

1. 29

Решение

1) Чен. ск. Всущим. где чесо. - gefeho бирасло, $p = 0,8$
кажд. - gefeho не бирасло, $q = 1 - p = 0,2$

$\Gamma \text{од} A = \{ \text{на 5 окоин бирасло кесе чесо 4-е gefehob} \}$

$$\Rightarrow P(A) = P_5(4) = C_5^4 p^4 q^1 + C_5^5 p^5 q^0 =$$

$$= 5 \cdot 0,8^4 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,8^5 \cdot 1 = \frac{2304}{3125}$$

2) $\Gamma \text{од} B = \{ \text{на 5 окоин бирасло кесе ды огло gefehob} \}$

$$\Rightarrow P(B) = P_5(1) = 1 - q^5 = 1 - 0,2^5 = \boxed{\frac{3124}{3125}}$$

Рисунок 1.28 – Решение задачи 1.29

1.30) 5% брака, 5% других изъянов

$$A = \{ \text{стекло} \text{ браком} \text{ изъяном} \text{ и т.д. 2 браков-2} \}$$

$$B = \{ \text{стекло} \text{ браком} \text{ изъяном} \text{ и т.д. 1 брак} \}$$

$$P(A) = ? \quad P(B) = ?$$

Решение:

- 1) Исп. косн. Бернулли где успех = детали браков-2, $p = 0,05$
неуд - детали не брак-2, $q = 1-p = 0,95$
- 2) $P(A) = P_5(2) = \binom{2}{5} p^2 q^3 = 10 \cdot 0,05^2 \cdot 0,95^3 \approx 0,021$
- 3) $P(B) = P_5(0) = \binom{0}{5} p^0 q^5 = 1 \cdot 1 \cdot 0,95^5 \approx 0,774$

Рисунок 1.29 – Решение задачи 1.30

1.31) 20 стаканов : 10 - шарик A 6 - шарик B 4 - шарик C

| | | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| <u>1)</u> | <u>2)</u> | <u>3)</u> | <u>4)</u> | <u>5)</u> |
| <u>шарик A</u> | <u>шарик B</u> | <u>шарик C</u> | <u>шарик A</u> | <u>шарик B</u> |

Решение:

- 1) 3-е вр. нрс : $\frac{U_1}{U_2} = \left\{ \begin{array}{l} \text{детали шарик A} \\ \text{и т.д.} \end{array} \right\}$ $\frac{U_2}{U_3} = \left\{ \begin{array}{l} \text{детали шарик B} \\ \text{и т.д.} \end{array} \right\}$ $\frac{U_3}{U_1} = \left\{ \begin{array}{l} \text{детали шарик C} \\ \text{и т.д.} \end{array} \right\}$
- 2) $\exists \cos A = \{ \text{детали отсутствуют изъяны} \}$
- 3) $P(A) = \left\{ \begin{array}{l} \text{шарик A} \\ \text{шарик B} \\ \text{шарик C} \end{array} \right\} = P(U_1)P(A|U_1) + P(U_2)P(A|U_2) + P(U_3)P(A|U_3) =$

$$= \frac{10}{20} \cdot 0,9 + \frac{6}{20} \cdot 0,8 + \frac{4}{20} \cdot 0,7 \approx 0,83$$

Рисунок 1.30 – Решение задачи 1.31

1.32

| | | | | | |
|------------|-----------------|---|---------------|-----------|------|
| 20 членов: | 7 геометрическ. | 1 | бес-мн. члены | в корзину | 0,85 |
| " | 11 спрингеров | 1 | | | 0,8 |
| 2 китайца | 3 | | | | 0,7 |

Решение:1) \rightarrow 3-и ареа. $H_i = \{ \text{бр-ж-и из } i-\text{й групп} \}, i=1,2,3$

$$P(H_1) = \frac{7}{20}, \quad P(H_2) = \frac{11}{20}, \quad P(H_3) = \frac{2}{20}$$

2) \exists сор A - 3 ареа. бр-ж-и из трех групп из 3-х

$$\Rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^3 P(H_i) P(A|H_i) = P(H_1) P(A|H_1) + P(H_2) P(A|H_2) + P(H_3) P(A|H_3) \quad \text{□}$$

$$A|H_i : \begin{pmatrix} (A, n, K) \\ (n, n, n) \end{pmatrix} \quad \text{бес-мн. члены} \Rightarrow P(A|H_i) = 3 \cdot 0,95 \cdot 0,95 \cdot 0,05 = \frac{1083}{8000}$$

$$\text{Аналогично } P(A|H_2) = 0,384 \quad \text{и } P(A|H_3) = 0,441$$

$$\text{□} \quad \frac{7}{20} \cdot \frac{1083}{8000} + \frac{11}{20} \cdot 0,384 + \frac{2}{20} \cdot 0,441 = 0,339$$

3) \rightarrow 12-е ванко

$$P(H_2 | A) = \frac{P(H_2) P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{11}{20} \cdot 0,384}{0,339} \approx \boxed{0,623}$$

Рисунок 1.31 – Решение задачи 1.32

1.33

52 крафт бумаги содержит 4 крафта
 $A = \{ \text{из 4 крафтов бумаги выбрано 1 крафт} \}$
 $P(A) = ?$

Решение:1) Испод $\{x_1, \dots, x_4\}$ – совр. из 52 но 4, т.е. x_i – крафтОднажды выбрано исподов? $N = \binom{4}{52} = 220725$ 2) $P(A) = ?$

$$= \binom{1}{13} \cdot \binom{1}{13} \cdot \binom{1}{13} \cdot \binom{1}{13} = 13^4 = 28561$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{\text{число способов}}{\text{бр-ж-и}} = \frac{N_A}{N} = \frac{28561}{220725} = \frac{2197}{20825} \approx \boxed{0,11}$$

Рисунок 1.32 – Решение задачи 1.33

2 Комплект №2. Случайные величины

Задача 2. Выявление функции

$$\text{2.1) } \text{Пусть } b\text{-р. } (X, Y), \quad (X, Y) \sim N(\vec{m}, \Sigma), \quad \vec{m} = (3, 1), \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 9 & 8,4 \\ 8,4 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\text{Найти } M[Y | X=2] \text{ и } P\{|X| \leq 3 | Y = 1\}$$

Решение:

1) Чему б-ре среднее \vec{m} ?

$$M[X] = 3, \quad M[Y] = 1$$

Чему коэф-т коррел. ρ :

$$\Sigma[X] = 9, \quad \Sigma[Y] = 16, \quad \text{cov}(X, Y) = 8,4, \quad G_X = \sqrt{9} = 3, \quad G_Y = \sqrt{16} = 4$$

$$x) \quad M[Y | X=2] = ?$$

$$M[Y | X=x] = \begin{cases} \text{если } x = m_X \\ \text{если } x \neq m_X \end{cases} = m_Y + \rho \frac{G_Y}{G_X} (x - m_X) \Leftrightarrow$$

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\Sigma[X] \cdot \Sigma[Y]}} = \frac{8,4}{3 \cdot 4} = 0,7$$

$$\Leftrightarrow 1 + 0,7 \cdot \frac{4}{3} (x - 3) = \begin{cases} x=2 \end{cases} = 1 + 0,7 \cdot \frac{4}{3} (2 - 3) = \boxed{\frac{1}{15}}$$

$$3) \quad P\{|X| \leq 3 | Y = 1\} = ?$$

$$P\{|X| \leq 3 | Y = 1\} = P\{-3 \leq X \leq 3 | Y = 1\} \Leftrightarrow$$

$$M[X | Y=1] = \begin{cases} \text{если } x = m_X \\ \text{если } x \neq m_X \end{cases} = m_X + \rho \frac{G_X}{G_Y} (y - m_Y) = 3 + 0,7 \cdot \frac{3}{4} (1 - 1) = 3$$

$$\Sigma[X | Y=1] = \begin{cases} \text{если } x = m_X \\ \text{если } x \neq m_X \end{cases} = G_X^2 \cdot (1 - \rho^2) = 3^2 \cdot (1 - 0,7^2) = 4,59, \quad G_{X|Y=1} = \sqrt{\Sigma[X | Y=1]} = \frac{3\sqrt{51}}{10}$$

$$\Leftrightarrow \Phi_0\left(\frac{3 - M[X | Y=1]}{G_{X|Y=1}}\right) \rightarrow \Phi_0\left(\frac{-3 - M[X | Y=1]}{G_{X|Y=1}}\right) =$$

Чему коррел.
коэф-т

$$\approx \Phi_0\left(-\frac{3 - 3}{\frac{3\sqrt{51}}{10}}\right) = \Phi_0\left(-\frac{3 - 3}{\frac{3\sqrt{51}}{10}}\right) =$$

$$= \Phi_0(0) - \Phi_0\left(-\frac{20\sqrt{51}}{51}\right) = \Phi_0(0) + \Phi_0\left(\frac{20\sqrt{51}}{51}\right) =$$

Рисунок 2.1 – Решение задачи 2.1

$$(2) g(x) = \begin{cases} a \cdot \cos\left(\frac{x}{4}\right), & x \in [0, 2\pi] \\ 0, & x \notin [0, 2\pi] \end{cases}$$

Демонстрируем

1) Д-р-уим $g(x)$ и/б гр-уим, пасиф-и ик-и а. бн $\Leftrightarrow g(x)$ узобн.

Проверим иск. узобноконформное гр-уим $g(x)$ в-в-е:

1° $x \in [0, 2\pi] \Rightarrow \frac{x}{4} \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \cos\left(\frac{x}{4}\right) \geq 0$. Но для a и/б идентична в-в-е зас.

~~\Rightarrow гр-уим $g(x)$ не узобн. в-в-е гр-уим пасиф-и и онформ~~

~~\Rightarrow гр-уим $g(x)$ не и/б гр-уим пасиф-и ик-и а. бн.~~

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0, x \in [0, 2\pi]$$

\Rightarrow гр-уим $g(x)$ не и/б гр-уим пасиф-и ик-и си. бн.

2) Наша ик-и зас-е-е неф-фа

Д-р-уим $g(x)$ симметрично на ф-ии об-в-и определения, т.к. ик-и зас-е-е неф-фа а она и/б несимметрична \Rightarrow при ик-и зас-е-е неф-фа а гр-уим $g(x)$ и/б гр-уим не-и ик-и си. бн.

Наша ик-и зас-е-е неф-фа а уз. член. норимблек:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 = \left(f(x) = g(x) = 0, x \notin [0, 2\pi] \right) \Rightarrow \int_0^{2\pi} a \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx =$$

$$= a \int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx = a \cdot 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{x}{4}\right) d\left(\frac{x}{4}\right) = 4a \sin\left(\frac{x}{4}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 4a \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) = 4a (1-0) = 4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

\Rightarrow гр-уим $g(x)$ не-и пасиф-и ик-и си. бн X приведен лог:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} \cos\left(\frac{x}{4}\right), & x \in [0, 2\pi] \\ 0, & x \notin [0, 2\pi] \end{cases}$$

3) $M[X] = ?$

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \left\{ f(x) = g(x) = 0, \begin{array}{l} x \notin [0, 2\pi] \\ x \in [0, 2\pi] \end{array} \right\} = \int_0^{2\pi} x \cdot \frac{1}{4} \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} x \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{4} \cos\left(\frac{x}{4}\right) d\left(\frac{x}{4}\right) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{4} = t \Rightarrow x = 4t \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 2\pi \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} =$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{члены-ко-члены} \\ u = t \Rightarrow u' = 1 \\ v' = \cos t \Rightarrow v = \sin(t) \end{array} \right\} =$$

$$= 4 \left(t \cdot \sin(t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) dt \right) =$$

$$= 4 \left(\frac{\pi}{2} - 0 - \left(-\cos(t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) \right) =$$

$$= 4 \left(\frac{\pi}{2} - (-1 + 1) \right) = 4 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \boxed{2\pi} \approx 2,283$$

Рисунок 2.2 – Решение задачи 2.2 (часть 1)

4) $D[X] = ?$

$$D[X] = \left\{ \begin{array}{l} \text{el.-loz}^{\circ} \\ \text{quadrat.} \end{array} \right\} = N[X^2] - (M[X])^2 \quad \text{□}$$

$$N[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = g(x) = 0, \\ x \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{array} \right\} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \frac{1}{4} \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx =$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{4} \cdot x \cdot \cos\left(\frac{x}{4}\right) d\left(\frac{x}{4}\right) = 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{4} \cdot \frac{x}{4} \cos\left(\frac{x}{4}\right) d\left(\frac{x}{4}\right) = \left\{ \begin{array}{l} x=t \\ x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \end{array} \right\} =$$

$$= 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos(t) dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{no замен} \\ u=t^2 \Rightarrow u'=2t \\ v=\cos(t) \Rightarrow v'=-\sin(t) \end{array} \right\} =$$

$$= 16 \left(t^2 \sin(t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(t) dt \right) =$$

$$= 16 \left(t^2 \sin(t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 32 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(t) dt \right) = 16 \frac{\pi^2}{4} - 32 = 4\pi^2 - 32$$

$$m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(t) dt = \left\{ \begin{array}{l} u=t \\ v'=\sin(t) \Rightarrow -\cos(t) \end{array} \right\} =$$

$$= -t \cos(t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot (-\cos(t)) dt = -t \cos(t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt =$$

$$= -t \cos(t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin(t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -0 - (-0) + 1 - 0 = 1$$

$$\text{□} \quad \boxed{16\pi^2 - 48}$$

$$\text{□} \quad 4\pi^2 - 32 - (2\pi - 4)^2 = 4\pi^2 - 32 - (4\pi^2 - 2 \cdot 2\pi \cdot 4 + 16) =$$

$$= 4\pi^2 - 32 - 4\pi^2 + 16\pi - 16 = \boxed{16\pi - 48}$$

Рисунок 2.3 – Решение задачи 2.2 (часть 2)