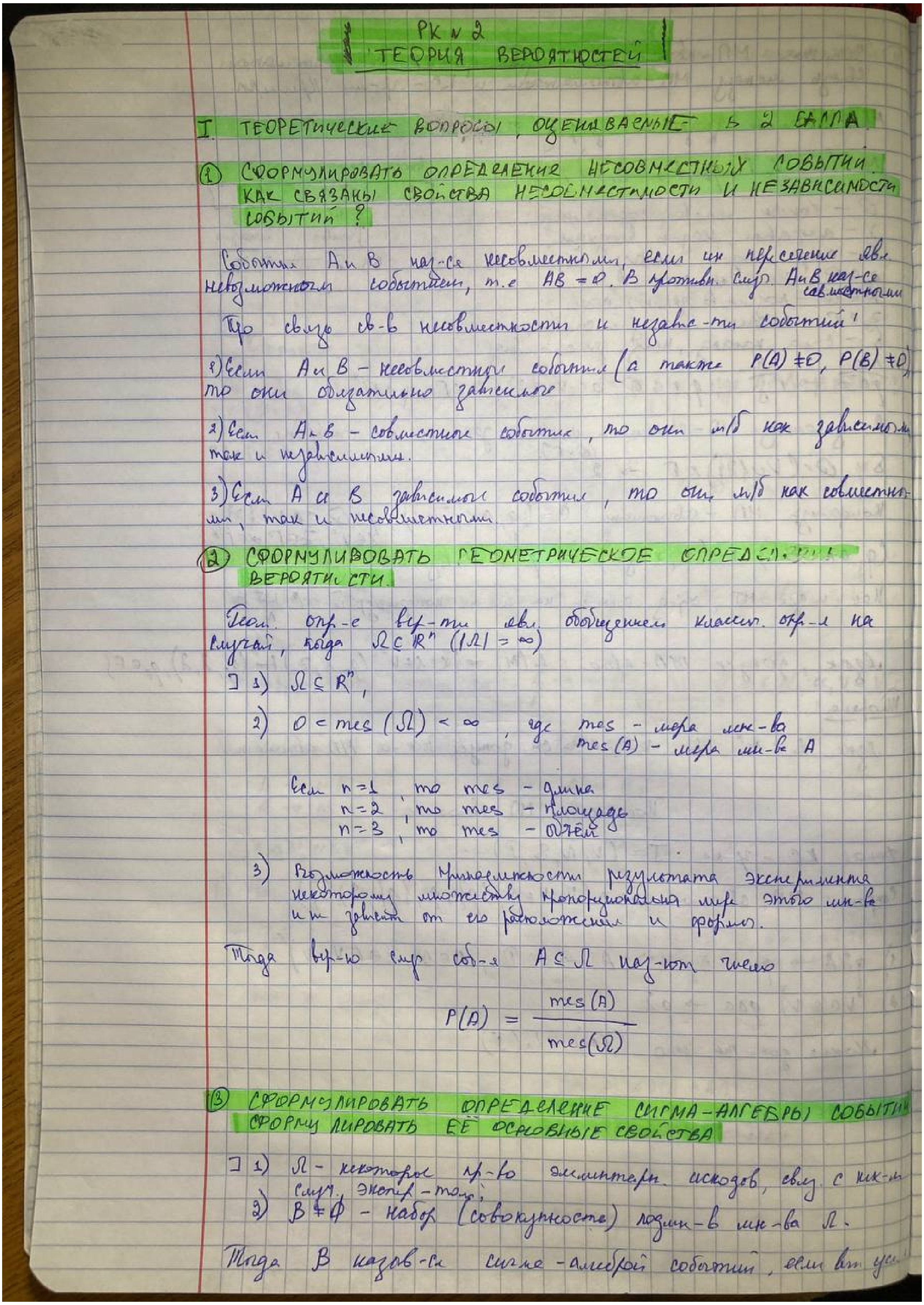
Теория к РК2 по дисциплине «Теория вероятностей»

Лысцев Никита ИУ7-53Б

20 ноября 2023 г.



РК № 2
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ, ОЦЕНИВАЕМЫЕ В 2 БАЛЛА.

① СФОРМУЛИРОВАТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ. КАК СВЯЗАНЫ СВОЙСТВА НЕСОВМЕСТНОСТИ И НЕЗАВИСИМОСТИ СОБЫТИЙ?

События A и B наз-ся несовместными, если их пересечение яв. невозможным событием, т.е $AB = \varnothing$. В противн. случ. A и B наз-ся совместными

Про связь св-в несовместности и незав-ти событий:

1) Если A и B – несовместные события (а также $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$), то они обязательно зависимые

2) Если A и B – совместные события, то они м/б как зависимыми так и независимыми.

3) Если A и B зависимые события, то они м/б как совместными, так и несовместными.

② СФОРМУЛИРОВАТЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ.

Геом. опр-е вер-ти яв. обобщением классич. опр-я на случай, когда $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ $(|\Omega| = \infty)$

$\exists$ 1) $\Omega \subseteq R^n$,

2) $0 < mes(\Omega) < \infty$, где mes – мера мн-ва, $mes(A)$ – мера мн-ва A

Если $n=1$, то mes – длина
$n=2$, то mes – площадь
$n=3$, то mes – объём

3) Возможность принадлежности результата эксперимента некоторому множеству пропорциональна мере этого мн-ва и не зависит от его расположения и формы.

Тогда вер-ю случ соб-я $A \subseteq \Omega$ наз-ют число

$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)}$$

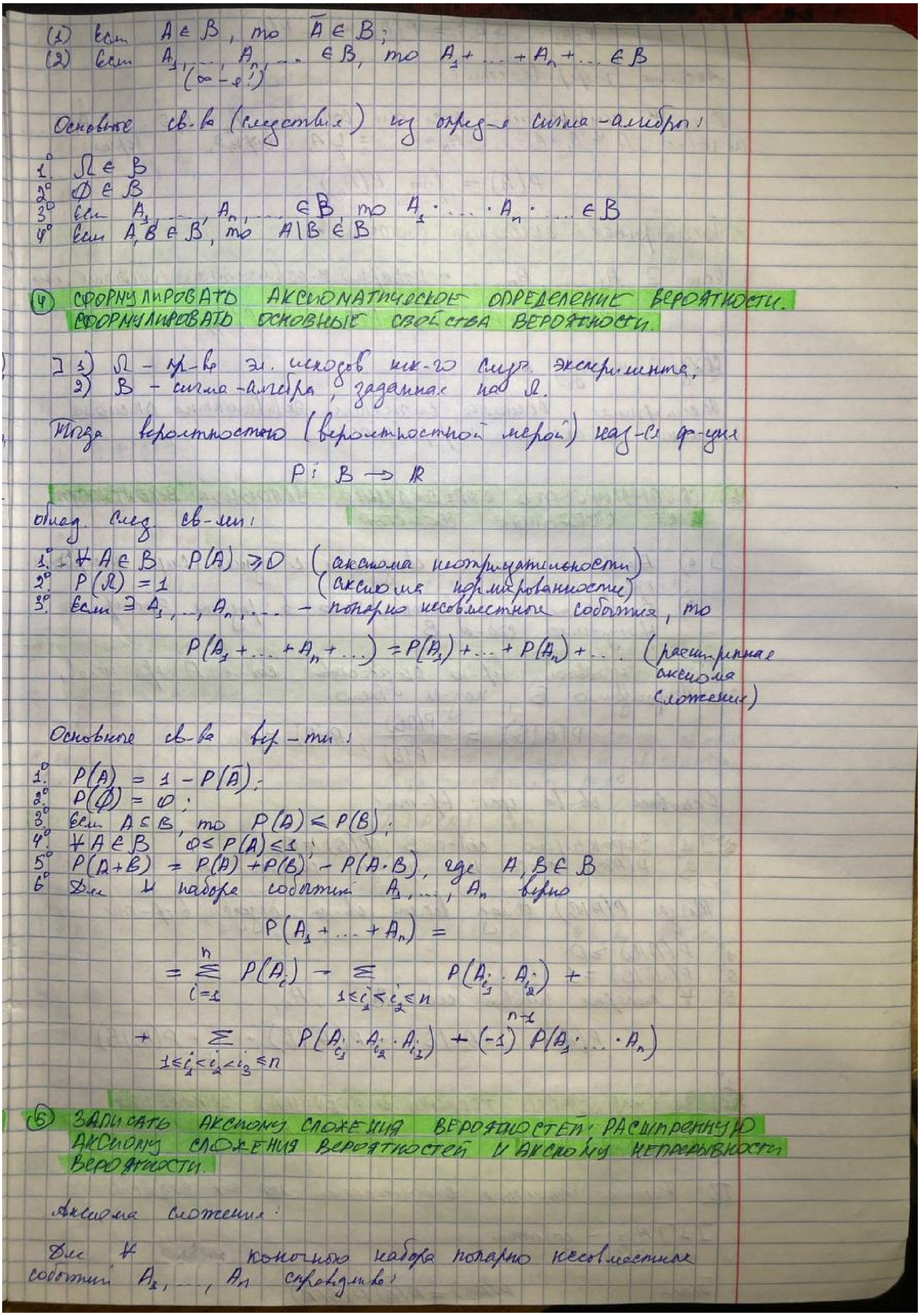
③ СФОРМУЛИРОВАТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИГМА-АЛГЕБРЫ СОБЫТИЙ. СФОРМУЛИРОВАТЬ ЕЁ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

$\exists$ 1) Ω – некоторое пр-во элементарн. исходов, связ. с нек-м случ. экспер-том;

2) $\mathcal{B} \neq \varnothing$ – набор (совокупность) подмн-в мн-ва Ω.

Тогда $\mathcal{B}$ называ-ся сигма-алгеброй событий, если вып. усл.

Рисунок 1 – Вопросы 1-3



(1) если $A \in \mathcal{B}$, то $\bar{A} \in \mathcal{B}$;
(2) если $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{B}$, то $A_1 + \ldots + A_n + \ldots \in \mathcal{B}$
(∞-е!)

Основные св-ва (следствия) из опред-я сигма-алгебры:

1° $\Omega \in \mathcal{B}$
2° $\varnothing \in \mathcal{B}$
3° если $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{B}$ то $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n \cdot \ldots \in \mathcal{B}$
4° если $A, B \in \mathcal{B}$, то $A \setminus B \in \mathcal{B}$

(4) СФОРМУЛИРОВАТЬ АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ. СФОРМУЛИРОВАТЬ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ВЕРОЯТНОСТИ.

Пусть 1) Ω – мн-во эл. исходов нек-го случ. эксперимента;
2) $\mathcal{B}$ – сигма-алгебра, заданная на Ω.

Тогда вероятностью (вероятностной мерой) наз-ся ф-ция

$$P: \mathcal{B} \to \mathbb{R}$$

обладающая след. св-ми:

1° $\forall A \in \mathcal{B}$ $P(A) \geq 0$ (аксиома неотрицательности)
2° $P(\Omega) = 1$ (аксиома нормированности)
3° Если $\exists A_1, \ldots, A_n, \ldots$ – попарно несовместные события, то

$$P(A_1 + \ldots + A_n + \ldots) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) + \ldots$$ (расширенная аксиома сложения)

Основные св-ва вер-ти:

1° $P(A) = 1 - P(\bar{A})$;
2° $P(\varnothing) = 0$;
3° если $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$;
4° $\forall A \in \mathcal{B}$ $0 \leq P(A) \leq 1$;
5° $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$, где $A, B \in \mathcal{B}$
6° Для $\forall$ наборе событий $A_1, \ldots, A_n$ верно

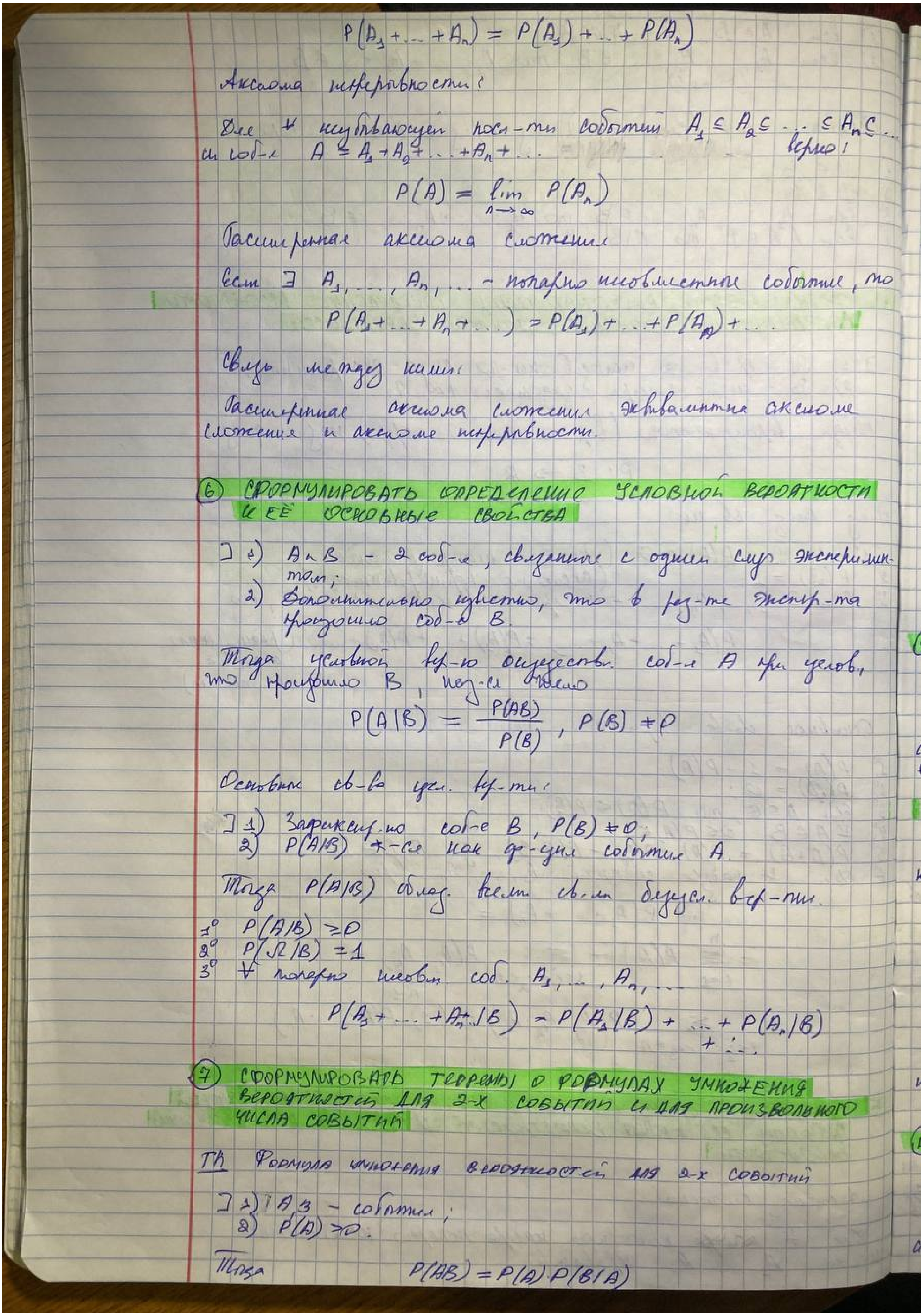
$$P(A_1 + \ldots + A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cdot A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot A_{i_3}) + (-1)^{n-1} P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n)$$

(5) ЗАПИСАТЬ АКСИОМУ СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, РАСШИРЕННУЮ АКСИОМУ СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И АКСИОМУ НЕПРЕРЫВНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ.

Аксиома сложения:

Для $\forall$ конечного набора попарно несовместных событий $A_1, \ldots, A_n$ справедливо:

Рисунок 2 – Вопросы 3-5



$$P(A_1 + \ldots + A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n)$$

Аксиома непрерывности:

Для $\forall$ неубывающей посл-ти событий $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$ и соб-я $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$ верно:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

Расширенная аксиома сложения

Если $\exists$ $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ – попарно несовместные события, то

$$P(A_1 + \ldots + A_n + \ldots) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) + \ldots$$

Связь между ними:

Расширенная аксиома сложения эквивалентна аксиоме сложения и аксиоме непрерывности.

⑥ СФОРМУЛИРОВАТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСЛОВНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И ЕЁ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

$\exists$ 1) A и B – 2 соб-я, связанные с одним случ. экспериментом;
2) Дополнительно известно, что в рез-те экспер-та произошло соб-е B.

Тогда условной вер-ю осуществ. соб-я A при услов., что произошло B, наз-ся число

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0$$

Основные св-ва усл. вер-ти:

$\exists$ 1) Зафиксир. но соб-е B, $P(B) \neq 0$;
2) $P(A|B)$ р-ся как ф-ция события A.

Тогда $P(A|B)$ облад. всеми св-ми безусл. вер-ти.

1° $P(A|B) \geq 0$
2° $P(\Omega|B) = 1$
3° $\forall$ попарно несовм. соб. $A_1, \ldots, A_n, \ldots$

$$P(A_1 + \ldots + A_n + \ldots|B) = P(A_1|B) + \ldots + P(A_n|B) + \ldots$$

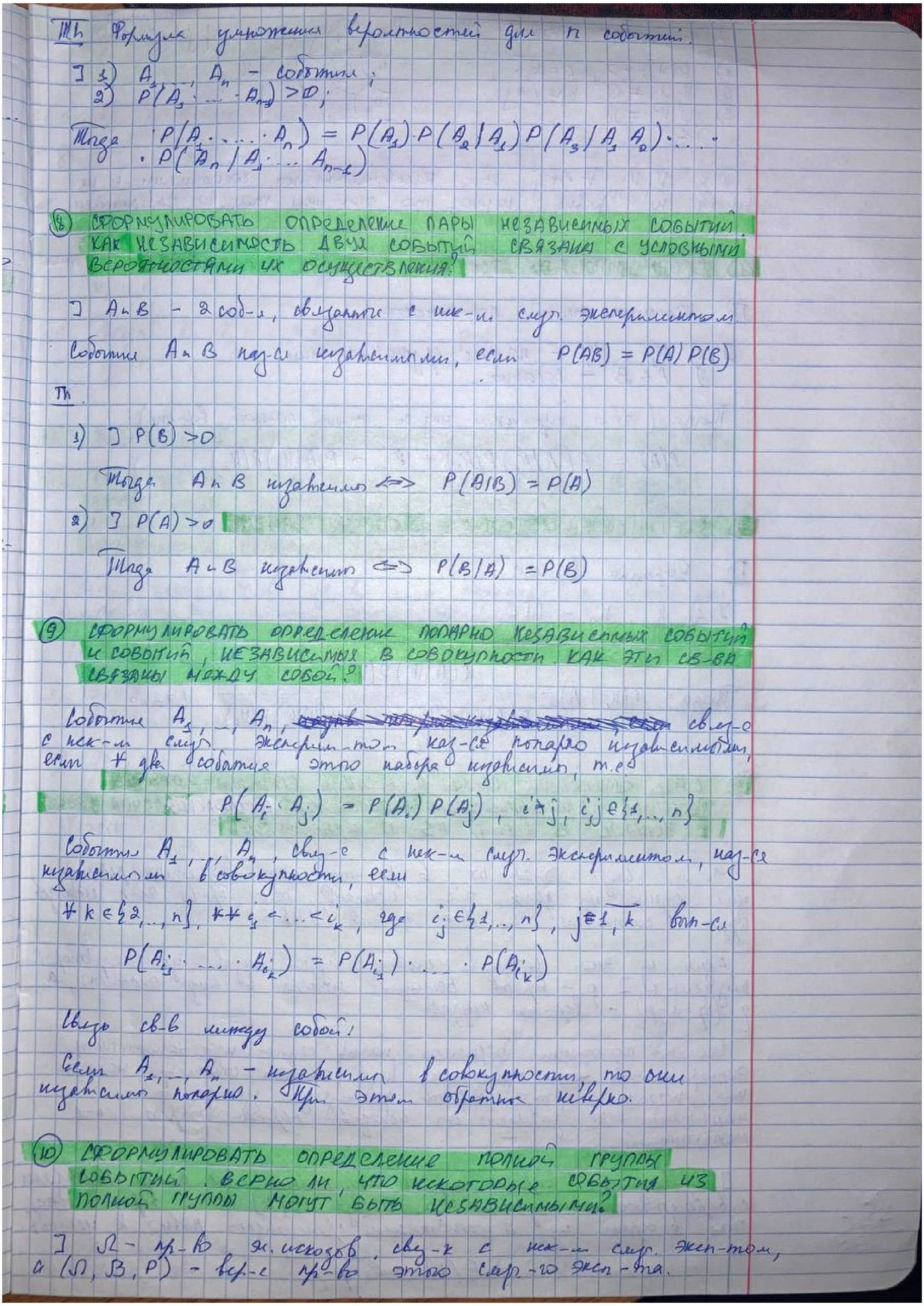
⑦ СФОРМУЛИРОВАТЬ ТЕОРЕМЫ О ФОРМУЛАХ УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ 2-Х СОБЫТИЙ И ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧИСЛА СОБЫТИЙ

ТА Формула умножения вероятностей для 2-х событий

$\exists$ 1) A, B – события;
2) $P(A) > 0$.

Тогда $$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Рисунок 3 – Вопросы 5-7



Th. Формула умножения вероятностей для n событий.

] 1) $A_1, \dots, A_n$ — события;
2) $P(A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}) > 0$;

Тогда $P(A_1 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n | A_1 \dots A_{n-1})$

(8) СФОРМУЛИРОВАТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРЫ НЕЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ. КАК НЕЗАВИСИМОСТЬ ДВУХ СОБЫТИЙ СВЯЗАНА С УСЛОВНЫМИ ВЕРОЯТНОСТЯМИ ИХ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ?

] A и B — 2 соб-я, связанные с нек-м случ. экспериментом

События A и B наз-ся независимыми, если $P(AB) = P(A)P(B)$

Th.

1)] $P(B) > 0$

Тогда A и B независимы $\Leftrightarrow$ $P(A|B) = P(A)$

2)] $P(A) > 0$

Тогда A и B независимы $\Leftrightarrow$ $P(B|A) = P(B)$

(9) СФОРМУЛИРОВАТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОПАРНО НЕЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ И СОБЫТИЙ, НЕЗАВИСИМЫХ В СОВОКУПНОСТИ. КАК ЭТИ СВ-ВА СВЯЗАНЫ МЕЖДУ СОБОЙ?

События $A_1, \dots, A_n$, связ-е с нек-м случ. эксперим-том наз-ся попарно независимыми, если $\forall$ два события этого набора независимы, т.е.

$$P(A_i \cdot A_j) = P(A_i) P(A_j), \quad i \ne j, \; i,j \in \{1, \dots, n\}$$

События $A_1, \dots, A_n$, связ-е с нек-м случ. экспериментом, наз-ся независимыми в совокупности, если

$\forall k \in \{2, \dots, n\}$, $\forall i_1 < \dots < i_k$, где $i_j \in \{1, \dots, n\}$, $j = \overline{1,k}$ вып-ся

$$P(A_{i_1} \cdot \dots \cdot A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$$

Связь св-в между собой:

Если $A_1, \dots, A_n$ — независимы в совокупности, то они независимы попарно. При этом обратное неверно.

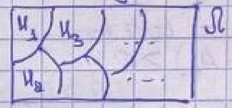
(10) СФОРМУЛИРОВАТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛНОЙ ГРУППЫ СОБЫТИЙ. ВЕРНО ЛИ, ЧТО НЕКОТОРЫЕ СОБЫТИЯ ИЗ ПОЛНОЙ ГРУППЫ МОГУТ БЫТЬ НЕЗАВИСИМЫМИ?

] Ω — пр-во эл. исходов, свя-х с нек-м случ. экс-том, а $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ — вер-е пр-во этого случ-го экс-та.

Рисунок 4 – Вопросы 7-10

Говорят, что события $H_1, \ldots, H_n$ образ. полн. группу событий, если

1) $P(H_i) > 0$, $i = \overline{1, n}$;
2) $H_i H_j = \varnothing$ при $i \neq j$;
3) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega$



Т.к $H_i H_j$ $\forall i \neq j$ явл. несовместными событиями и их вер-ть не равна нулю, то они м/б только зависимыми.

(11) СФОРМУЛИРОВАТЬ ТЕОРЕМУ О ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Th Формула полной вероятности

$\exists$ 1) $H_1, \ldots, H_n$ — полная группа событий;
2) $A \in \mathcal{B}$ — событие.

Тогда (это выражение наз-ся ф-лой полной вер-ти):

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + \ldots + P(A|H_n)P(H_n)$$

(12) СФОРМУЛИРОВАТЬ ТЕОРЕМУ О ФОРМУЛЕ БАЙЕСА

Th Формула Байеса

$\exists$ 1) $H_1, \ldots, H_n$ — ПГС;
2) $A \in \mathcal{B}$ — событие;
3) $P(A) > 0$

Тогда $$P(H_i | A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + \ldots + P(A|H_n)P(H_n)}, \quad i = \overline{1, n}$$

(13) ДАТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СХЕМЫ ИСПЫТАНИЙ БЕРНУЛЛИ. ЗАПИСАТЬ ФОРМУЛУ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ РОВНО k УСПЕХОВ В СЕРИИ ИЗ n ИСПЫТАНИЙ.

$\exists$-м случ. эксп-т, в рез-те кот. возможна реализация одного из двух элем. исходов, т.е. пр-во эл-х исходов будет состоять из 2-х эл-тов ($|\Omega| = 2$)

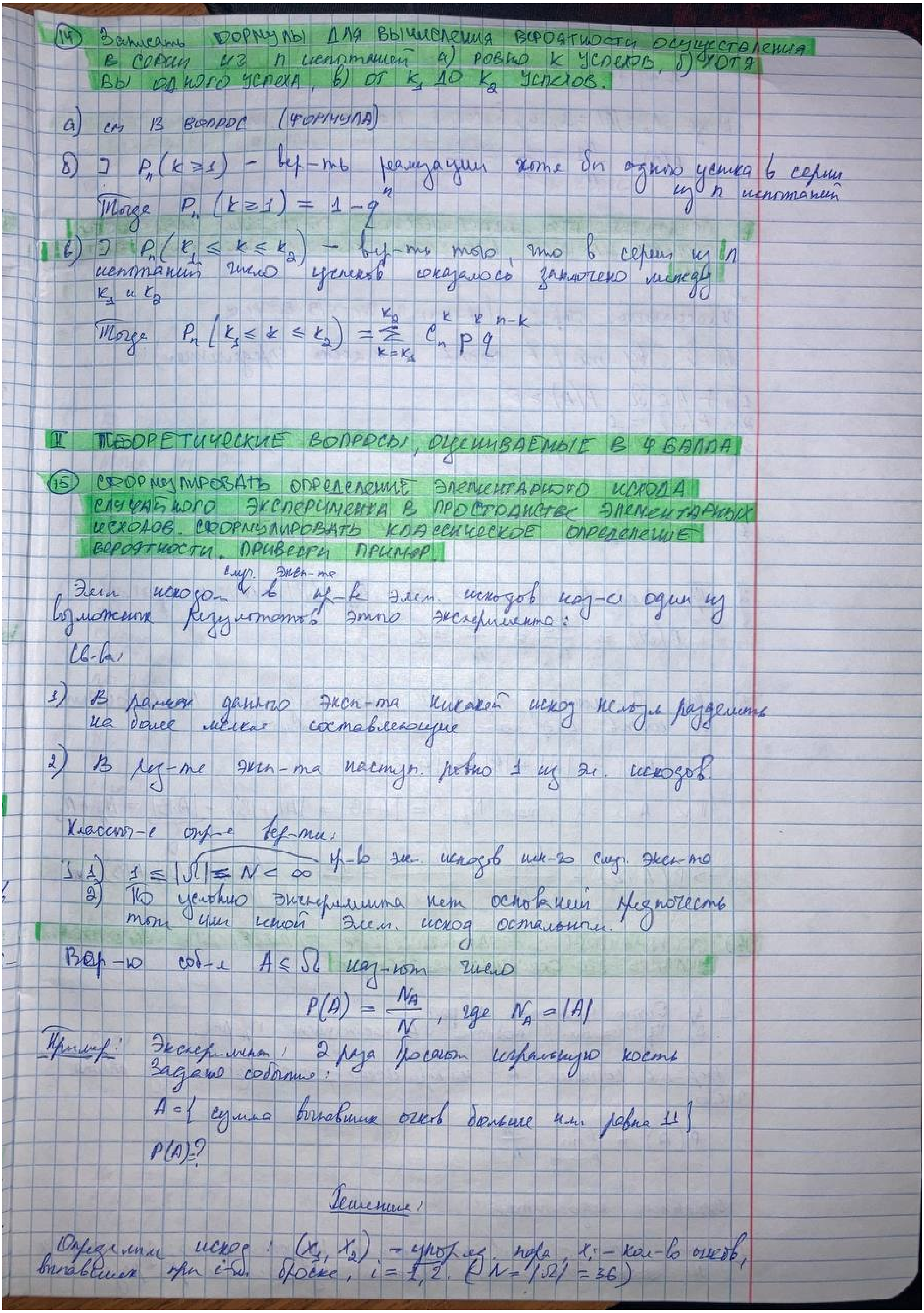
Один из элем. исходов условно будем назыв. успехом, второй — неудачей. $\exists$ p — вер-ть осущ-я успеха в случ. эксп-те, а q ($q = 1 - p$) — вер-ть неудачи.

Схемой испытаний Бернулли назыв. серия из однотипных экспериментов ~~[illegible]~~ указанного вида, в кот. отдельные испытания независимы, т.е. вер-ть реализации успеха в i-м испытании не зависит от исходов первого, второго, ..., $i-1$ испытаний.

$\exists$ проводится серия из n испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха p. Тогда $P_n(k)$ есть вер-ть того, что в серии из n испытаний произойдет ровно k успехов:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Рисунок 5 – Вопросы 10-13



(14) Записать формулы для вычисления вероятности осуществления в серии из n испытаний а) ровно k успехов, б) хотя бы одного успеха, в) от k_1 до k_2 успехов.

а) см. в вопрос (формула)

б) Пусть $P_n(k \ge 1)$ – вер-ть реализации хотя бы одного успеха в серии из n испытаний

Тогда $P_n(k \ge 1) = 1 - q^n$

в) Пусть $P_n(k_1 \le k \le k_2)$ – вер-ть того, что в серии из n испытаний число успехов оказалось заключено между k_1 и k_2

Тогда $P_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}$

II Теоретические вопросы, оцениваемые в 4 балла

(15) Сформулировать определение элементарного исхода случайного эксперимента в пространстве элементарных исходов. Сформулировать классическое определение вероятности. Привести пример.

Элем. исход случ. экспер-та в пр-ве элем. исходов наз-ся один из возможных результатов этого эксперимента:

Св-ва:

1) В рамках данного эксп-та никакой исход нельзя разделить на более мелкие составляющие

2) В рез-те эксп-та наступ. ровно 1 из эл. исходов.

Классич. опр-е вер-ти:

Пусть 1) $1 \le |\Omega| = N < \infty$ кол-во эл. исходов данного случ. эксп-та

2) По условию эксперимента нет оснований предпочесть тот или иной элем. исход остальным.

Вер-ю соб-я $A \subseteq \Omega$ наз-ют число

$$P(A) = \frac{N_A}{N}, \quad \text{где } N_A = |A|$$

Пример: Эксперимент: 2 раза бросают игральную кость. Задано событие:

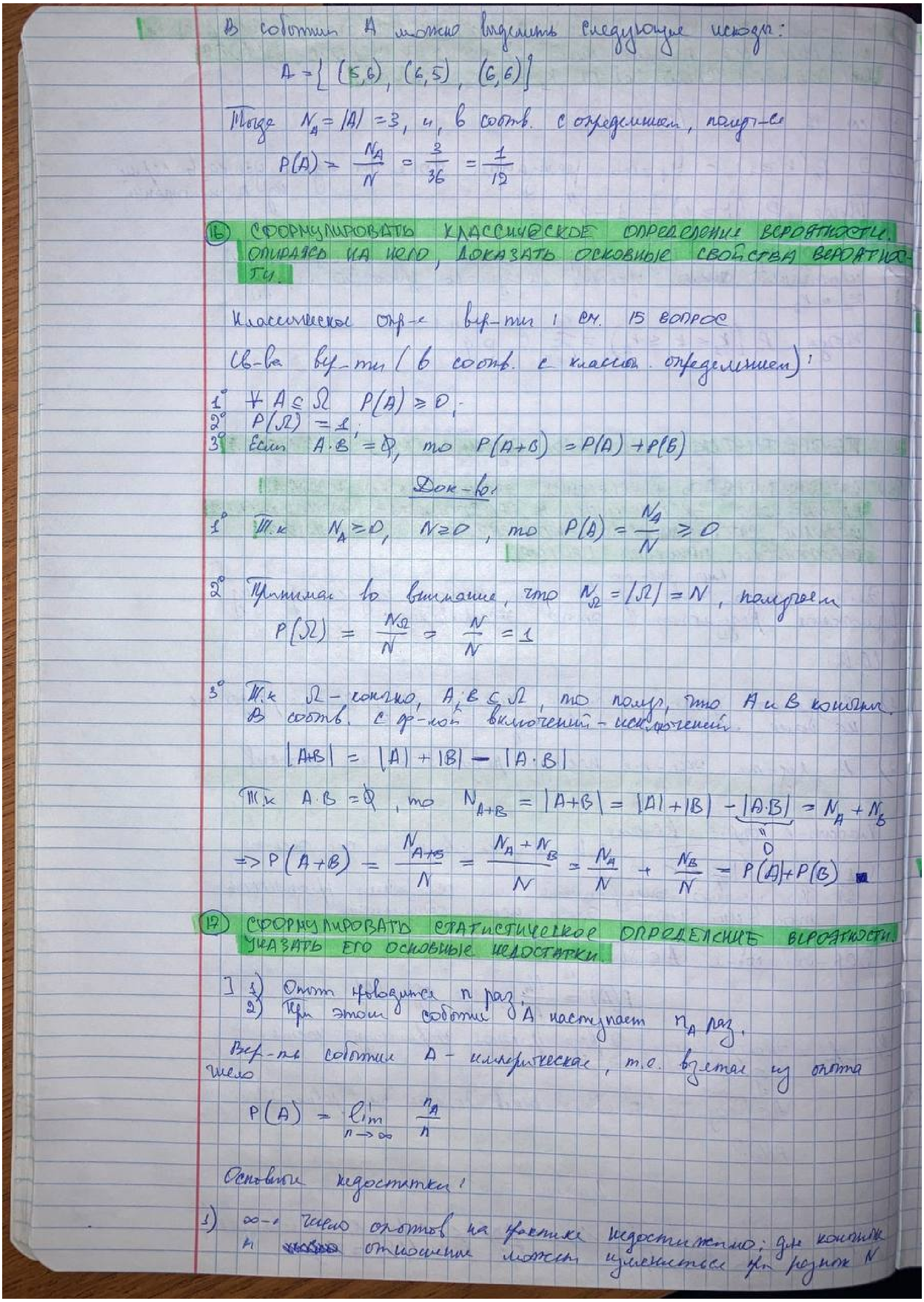
A = {сумма выпавших очков больше или равна 11}

P(A)=?

Решение:

Определим исход: (x_1, x_2) – упоряд. пара, x_i – кол-во очков, выпавших при i-м броске, $i = 1, 2$. ($N = |\Omega| = 36$)

Рисунок 6 – Вопросы 14-15



В событии A можно выделить следующие исходы:

$$A = \{(5,6), (6,5), (6,6)\}$$

Тогда $N_A = |A| = 3$, и, в соотв. с определением, получ-ся

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

16) СФОРМУЛИРОВАТЬ КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ. ОПИРАЯСЬ НА НЕГО, ДОКАЗАТЬ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ВЕРОЯТНОСТИ.

Классическое опр-е вер-ти: см. 15 вопрос

Св-ва вер-ти (в соотв. с классич. определением):

1° $\forall A \subseteq \Omega \quad P(A) \geq 0$;
2° $P(\Omega) = 1$;
3° Если $A \cdot B = \varnothing$, то $P(A+B) = P(A) + P(B)$

Док-во:

1° Т.к. $N_A \geq 0$, $N \geq 0$, то $P(A) = \frac{N_A}{N} \geq 0$

2° Принимая во внимание, что $N_\Omega = |\Omega| = N$, получаем

$$P(\Omega) = \frac{N_\Omega}{N} = \frac{N}{N} = 1$$

3° Т.к. Ω – конечно, $A, B \subseteq \Omega$, то получ, что A и B конечны. В соотв. с ф-лой включений-исключений

$$|A+B| = |A| + |B| - |A \cdot B|$$

Т.к. $A \cdot B = \varnothing$, то $N_{A+B} = |A+B| = |A| + |B| - \underbrace{|A \cdot B|}_{0} = N_A + N_B$

$$\Rightarrow P(A+B) = \frac{N_{A+B}}{N} = \frac{N_A + N_B}{N} = \frac{N_A}{N} + \frac{N_B}{N} = P(A) + P(B) \blacksquare$$

17) СФОРМУЛИРОВАТЬ СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ. УКАЗАТЬ ЕГО ОСНОВНЫЕ НЕДОСТАТКИ.

∃ 1) Опыт проводится n раз;
2) При этом событие A наступает n_A раз.

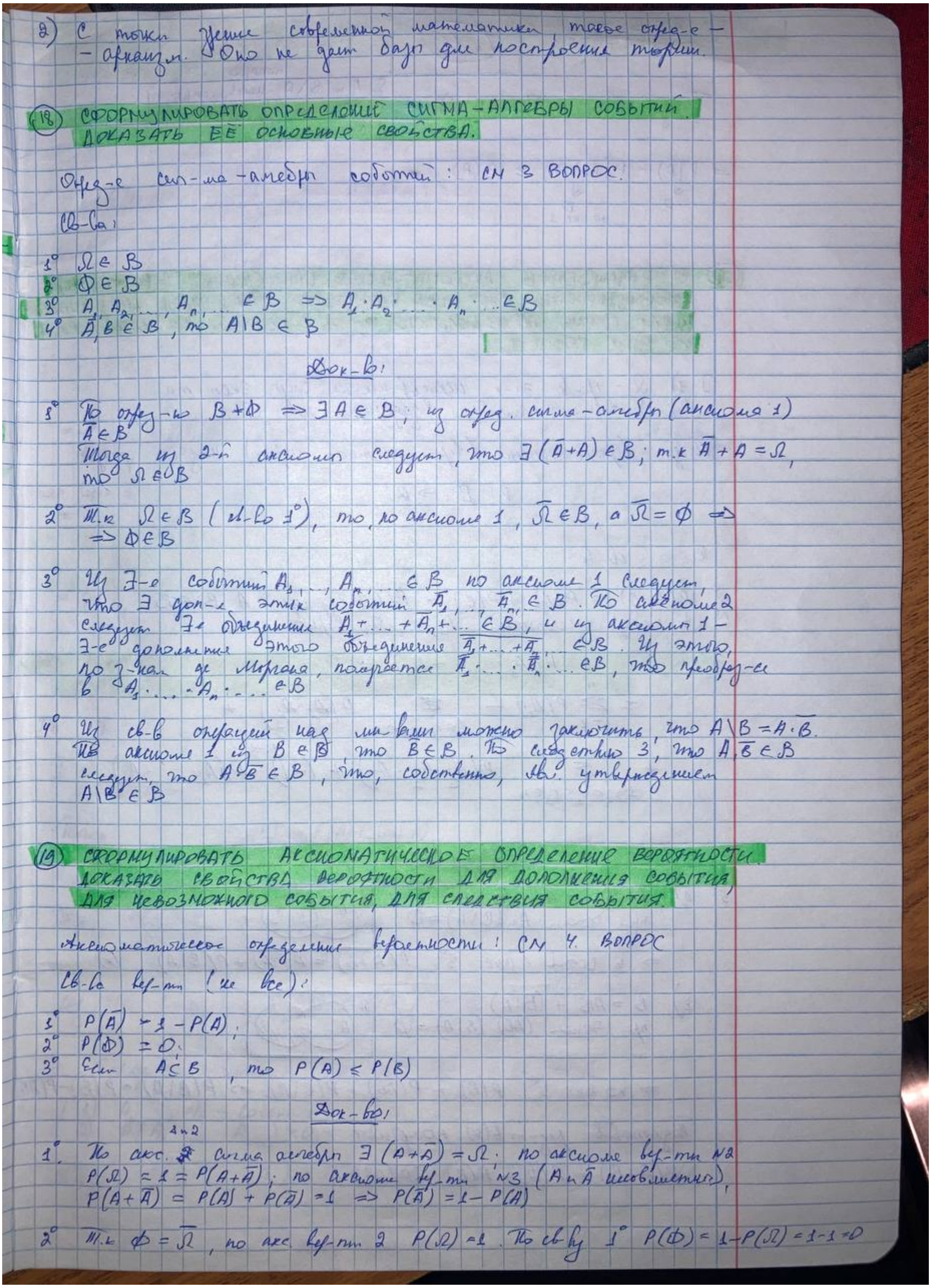
Вер-ть события A – эмпирическая, т.е. взятая из опыта число

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

Основные недостатки:

1) ∞-е число опытов на практике недостижимо; для конечных n отношение может изменяться при разных N

Рисунок 7 – Вопросы 15-17



2) С точки зрения современной математики такое опред-е — архаизм. Оно не дает базы для построения теории.

(18) СФОРМУЛИРОВАТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИГМА-АЛГЕБРЫ СОБЫТИЙ. ДОКАЗАТЬ ЕЁ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА.

Опред-е сигма-алгебры событий: СМ 3 ВОПРОС.

Св-ва:

1° $\Omega \in \mathcal{B}$

2° $\varnothing \in \mathcal{B}$

3° $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{B} \Rightarrow A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n \cdot \ldots \in \mathcal{B}$

4° $A, B \in \mathcal{B}$, то $A \setminus B \in \mathcal{B}$

Док-во:

1° По опред-ию $\mathcal{B} \neq \varnothing \Rightarrow \exists A \in \mathcal{B}$; из опред. сигма-алгебры (аксиома 1) $\overline{A} \in \mathcal{B}$. Тогда из 2-й аксиомы следует, что $\exists (\overline{A}+A) \in \mathcal{B}$; т.к. $\overline{A}+A=\Omega$, то $\Omega \in \mathcal{B}$

2° Т.к. $\Omega \in \mathcal{B}$ (д-во 1°), то, по аксиоме 1, $\overline{\Omega} \in \mathcal{B}$, а $\overline{\Omega} = \varnothing \Rightarrow \varnothing \in \mathcal{B}$

3° Из ∃-я событий $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{B}$ по аксиоме 1 следует, что ∃ доп-е этих событий $\overline{A_1}, \dots, \overline{A_n} \in \mathcal{B}$. По аксиоме 2 следует ∃-е объединения $\overline{A_1} + \dots + \overline{A_n} + \dots \in \mathcal{B}$, и из аксиомы 1 — ∃-е дополнения этого объединения $\overline{\overline{A_1} + \dots + \overline{A_n} \dots} \in \mathcal{B}$. Из этого, по з-нам де Моргана, получается $\overline{\overline{A_1}} \cdot \ldots \cdot \overline{\overline{A_n}} \cdot \ldots \in \mathcal{B}$, что преобраз-ся в $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n \cdot \ldots \in \mathcal{B}$

4° Из св-в операций над мн-вами можно заключить, что $A \setminus B = A \cdot \overline{B}$. По аксиоме 1 из $B \in \mathcal{B}$, что $\overline{B} \in \mathcal{B}$. По следствию 3°, что $A, \overline{B} \in \mathcal{B}$ следует, что $A \cdot \overline{B} \in \mathcal{B}$, что, собственно, и является утверждением $A \setminus B \in \mathcal{B}$

(19) СФОРМУЛИРОВАТЬ АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ. ДОКАЗАТЬ СВОЙСТВА ВЕРОЯТНОСТИ ДЛЯ ДОПОЛНЕНИЯ СОБЫТИЯ, ДЛЯ НЕВОЗМОЖНОГО СОБЫТИЯ, ДЛЯ СЛЕДСТВИЯ СОБЫТИЯ.

Аксиоматическое определение вероятности: СМ 4 ВОПРОС

Св-ва вер-ти (не все):

1° $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

2° $P(\varnothing) = 0$;

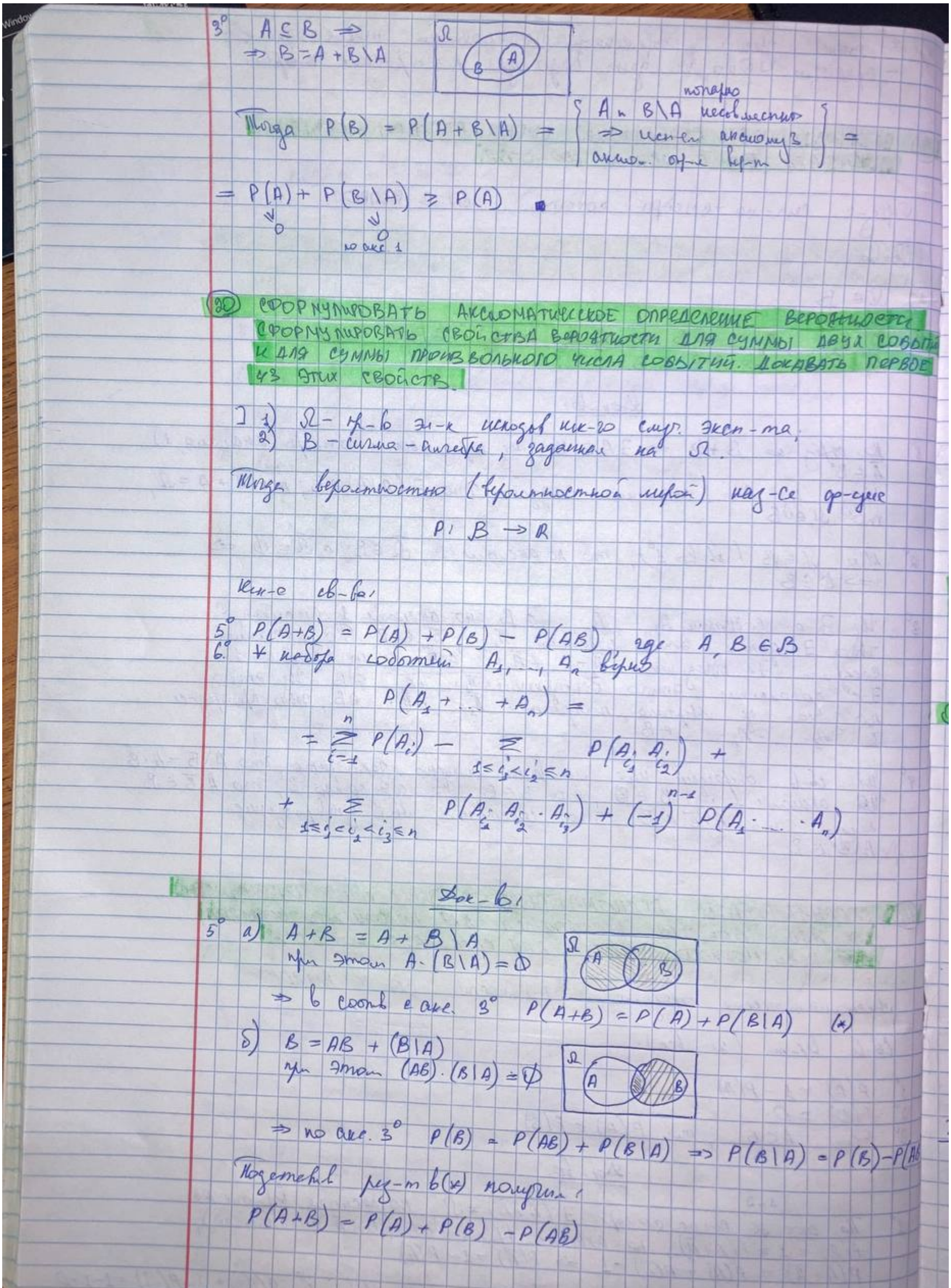
3° Если $A \subseteq B$, то $P(A) \le P(B)$

Док-во:

1° По акс. 2 сигма алгебры $\exists (A+\overline{A}) = \Omega$. по аксиоме вер-ти №2 $P(\Omega) = 1 = P(A+\overline{A})$; по аксиоме вер-ти №3 ($A$ и $\overline{A}$ несовместны), $P(A+\overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

2° Т.к. $\varnothing = \overline{\Omega}$, по акс. вер-ти 2 $P(\Omega) = 1$. По св-ву 1° $P(\varnothing) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$

Рисунок 8 – Вопросы 17-19



3° $A \subseteq B \Rightarrow$

$\Rightarrow B = A + B \setminus A$

Тогда $P(B) = P(A + B\setminus A) = \left\{ \begin{array}{l} A \text{ и } B\setminus A \text{ попарно несовместны} \\ \Rightarrow \text{исп-ем аксиому 3} \\ \text{аксиом. опр-я вер-ти} \end{array} \right\} =$

$= \underbrace{P(A)}_{\geq 0} + \underbrace{P(B\setminus A)}_{\geq 0 \text{ по акс 1}} \geq P(A)$ ■

(20) СФОРМУЛИРОВАТЬ АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ. СФОРМУЛИРОВАТЬ СВОЙСТВА ВЕРОЯТНОСТИ ДЛЯ СУММЫ ДВУХ СОБЫТИЙ И ДЛЯ СУММЫ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧИСЛА СОБЫТИЙ. ДОКАЗАТЬ ПЕРВОЕ ИЗ ЭТИХ СВОЙСТВ.

$\exists$ 1) Ω – мн-во эл-х исходов нек-го случ. эксп-та,
2) $\mathcal{B}$ – сигма-алгебра, заданная на Ω.

Тогда вероятностью (вероятностной мерой) наз-ся ф-ция

$$P: \mathcal{B} \to \mathbb{R}$$

Нек-е св-ва:

5° $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, где $A, B \in \mathcal{B}$

6° $\forall$ набора событий $A_1, \dots, A_n$ верно

$$P(A_1 + \dots + A_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} A_{i_2}) +$$

$$+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(A_{i_1} A_{i_2} \cdot A_{i_3}) + (-1)^{n-1} P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n)$$

Док-во:

5° а) $A + B = A + B \setminus A$

при этом $A \cdot (B \setminus A) = \varnothing$

$\Rightarrow$ в соотв. с акс. 3° $P(A+B) = P(A) + P(B|A)$ (*)

б) $B = AB + (B|A)$

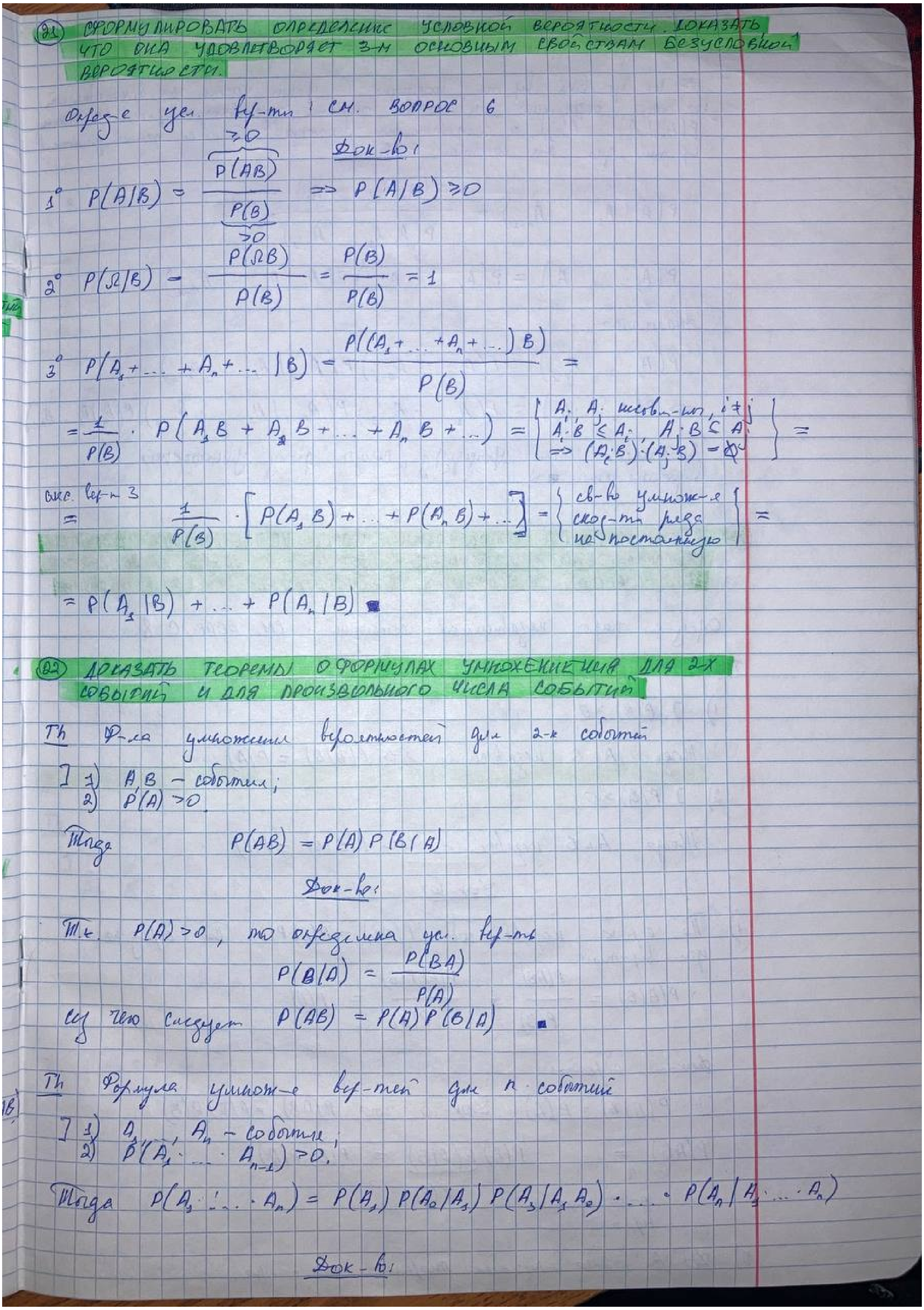
при этом $(AB) \cdot (B|A) = \varnothing$

$\Rightarrow$ по акс. 3° $P(B) = P(AB) + P(B|A) \Rightarrow P(B|A) = P(B) - P(AB)$

Подставив рез-т в (*) получим:

$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Рисунок 9 – Вопросы 19-20



(21) СФОРМУЛИРОВАТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСЛОВНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ДОКАЗАТЬ ЧТО ОНА УДОВЛЕТВОРЯЕТ 3-М ОСНОВНЫМ СВОЙСТВАМ БЕЗУСЛОВНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ.

Опред-е усл. вер-ти: см. вопрос 6

Док-во:

1° $P(A|B) = \dfrac{\overbrace{P(AB)}^{\geq 0}}{\underbrace{P(B)}_{>0}} \Rightarrow P(A|B) \geq 0$

2° $P(\Omega|B) = \dfrac{P(\Omega B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$

3° $P(A_1 + \ldots + A_n + \ldots | B) = \dfrac{P((A_1 + \ldots + A_n + \ldots) B)}{P(B)} =$

$= \dfrac{1}{P(B)} \cdot P(A_1 B + A_2 B + \ldots + A_n B + \ldots) = \left\{ \begin{array}{l} A_i, A_j \text{ несовм-ые}, i \neq j \\ A_i B \subseteq A_i \quad A_j B \subseteq A_j \\ \Rightarrow (A_i B) \cdot (A_j B) = \varnothing \end{array} \right\} =$

акс. вер-ти 3

$= \dfrac{1}{P(B)} \cdot \left[P(A_1 B) + \ldots + P(A_n B) + \ldots \right] = \left\{ \begin{array}{l} \text{св-во умнож-е} \\ \text{сход-то ряда} \\ \text{на постоянную} \end{array} \right\} =$

$= P(A_1|B) + \ldots + P(A_n|B)$ ■

(22) ДОКАЗАТЬ ТЕОРЕМЫ О ФОРМУЛАХ УМНОЖЕНИЯ ДЛЯ 2-Х СОБЫТИЙ И ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧИСЛА СОБЫТИЙ

Th Ф-ла умножения вероятностей для 2-х событий

] 1) A, B – события;
2) $P(A) > 0$.

Тогда $P(AB) = P(A) P(B|A)$

Док-во:

Т.к. $P(A) > 0$, то определена усл. вер-ть

$P(B|A) = \dfrac{P(BA)}{P(A)}$

Из чего следует $P(AB) = P(A) P(B|A)$ ■

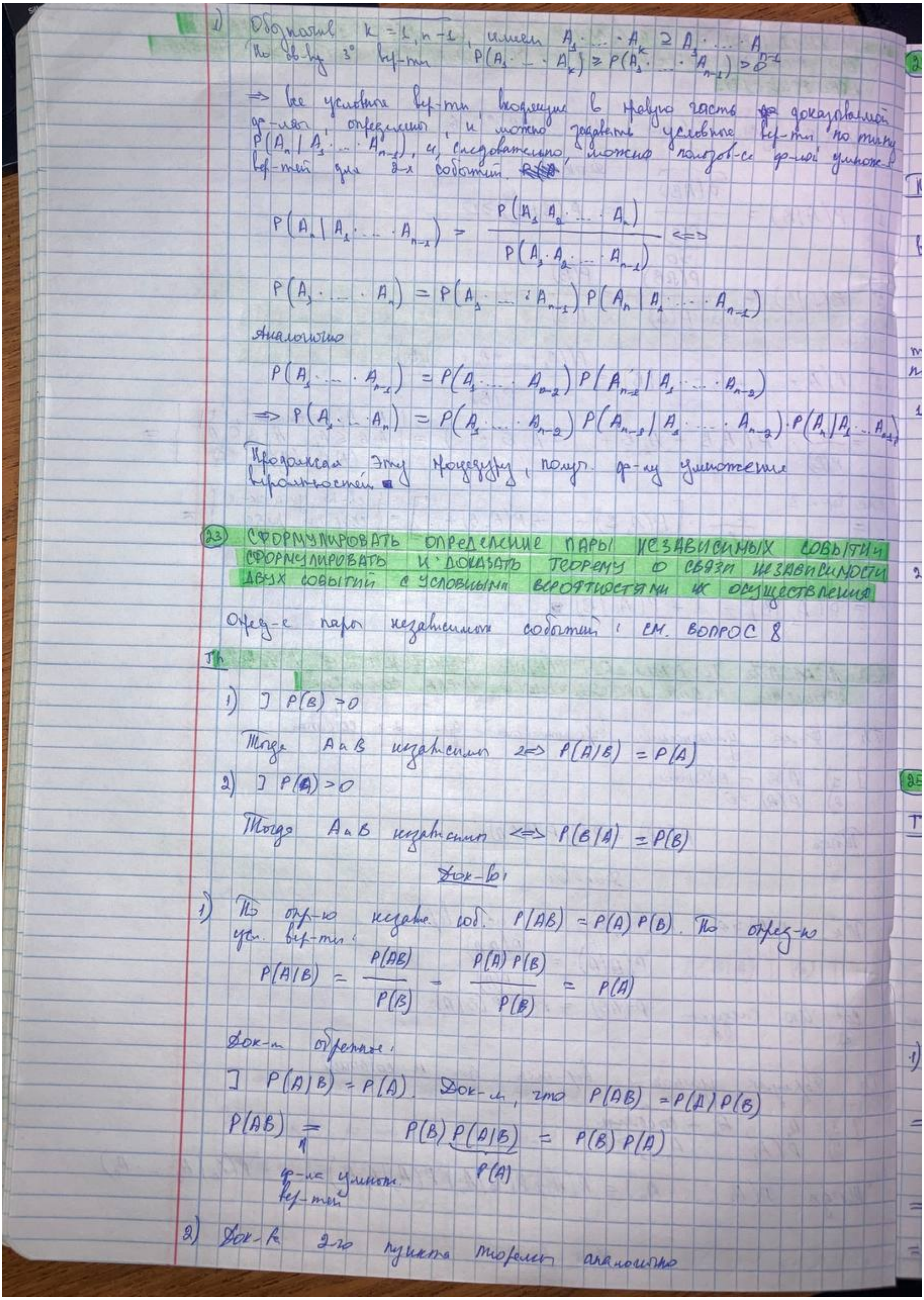
Th Формула умнож-е вер-тей для n событий

] 1) $A_1, \ldots, A_n$ – события;
2) $P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}) > 0$.

Тогда $P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \ldots A_n)$

Док-во:

Рисунок 10 – Вопросы 21-22


1) Обозначив $k=\overline{1,n-1}$, имеем $A_1\cdot\ldots\cdot A_k \supseteq A_1\cdot\ldots\cdot A_{n-1}$

По св-ву 3° вер-ти $P(A_1\cdot\ldots\cdot A_k)\geq P(A_1\cdot\ldots\cdot A_{n-1})>0$

$\Rightarrow$ все условные вер-ти, входящие в правую часть доказываемой ф-лы, определены, и можно задавать условные вер-ти по типу $P(A_n|A_1\cdot\ldots\cdot A_{n-1})$, и, следовательно, можно пользов-ся ф-лой умнож-я вер-тей для 2-х событий.

$$P(A_n|A_1\cdot\ldots\cdot A_{n-1}) = \frac{P(A_1 A_2\cdot\ldots\cdot A_n)}{P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_{n-1})} \iff$$

$$P(A_1\cdot\ldots\cdot A_n) = P(A_1\cdot\ldots\cdot A_{n-1})\,P(A_n|A_1\cdot\ldots\cdot A_{n-1})$$

Аналогично

$$P(A_1\cdot\ldots\cdot A_{n-1}) = P(A_1\cdot\ldots\cdot A_{n-2})\,P(A_{n-1}|A_1\cdot\ldots\cdot A_{n-2})$$

$$\Rightarrow P(A_1\cdot\ldots\cdot A_n) = P(A_1\cdot\ldots\cdot A_{n-2})\,P(A_{n-1}|A_1\cdot\ldots\cdot A_{n-2})\cdot P(A_n|A_1\ldots A_{n-1})$$

Продолжая эту процедуру, получ. ф-лу умножения вероятностей ■

(23) СФОРМУЛИРОВАТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРЫ НЕЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ. СФОРМУЛИРОВАТЬ И ДОКАЗАТЬ ТЕОРЕМУ О СВЯЗИ НЕЗАВИСИМОСТИ ДВУХ СОБЫТИЙ С УСЛОВНЫМИ ВЕРОЯТНОСТЯМИ ИХ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ

Опред-е пары независимых событий: см. вопрос 8

Th

1)] $P(B)>0$

Тогда A и B независимы $\iff P(A|B)=P(A)$

2)] $P(A)>0$

Тогда A и B независимы $\iff P(B|A)=P(B)$

Док-во

1) По опр-ю незав. соб. $P(AB)=P(A)P(B)$. По опред-ю усл. вер-ти:

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B)}{P(B)}=P(A)$$

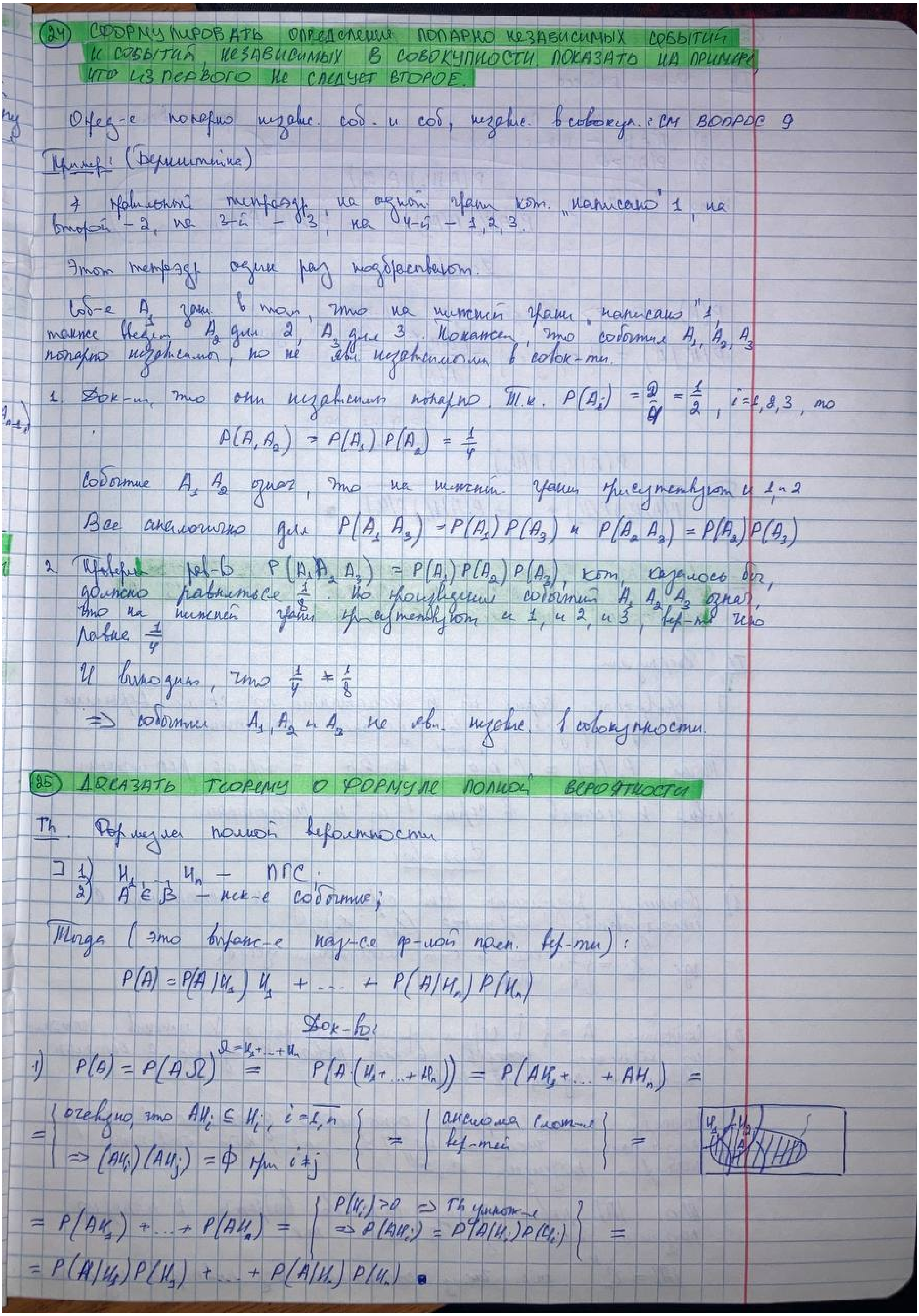
Док-м обратное:

] $P(A|B)=P(A)$. Док-м, что $P(AB)=P(A)P(B)$

$$P(AB) \underset{\text{ф-ла умнож. вер-тей}}{=} P(B)\underbrace{P(A|B)}_{P(A)} = P(B)P(A)$$

2) Док-во 2-го пункта теоремы аналогично

Рисунок 11 – Вопросы 22-23



(24) СФОРМУЛИРОВАТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОПАРНО НЕЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ И СОБЫТИЙ НЕЗАВИСИМЫХ В СОВОКУПНОСТИ. ПОКАЗАТЬ НА ПРИМЕРЕ, ЧТО ИЗ ПЕРВОГО НЕ СЛЕДУЕТ ВТОРОЕ.

Опред-е попарно незав. соб. и соб. незав. в совокуп.: СМ ВОПРОС 9

Пример (Бернштейна)

Правильный тетраэдр, на одной грани кот. „написано" 1, на второй – 2, на 3-й – 3, на 4-й – 1, 2, 3.

Этот тетраэдр один раз подбрасывают.

Соб-е A_1 закл. в том, что на нижней грани „написано" 1, также введем A_2 для 2, A_3 для 3. Покажем, что события A_1, A_2, A_3 попарно независимы, но не яв. независимыми в совок-ти.

1. Док-м, что они независимы попарно. Т.к. $P(A_i) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $i=1,2,3$, то

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{1}{4}$$

Событие A_1A_2 означ., что на нижней грани присутствуют и 1, и 2

Все аналогично для $P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3)$ и $P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3)$

2. Проверим рав-во $P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$, кот., казалось бы, должно равняться $\frac{1}{8}$. Но произведение событий $A_1A_2A_3$ означ., что на нижней грани присутствуют и 1, и 2, и 3, вер-ть чего равна $\frac{1}{4}$

И выходит, что $\frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}$

$\Rightarrow$ события A_1, A_2 и A_3 не яв. незав. в совокупности.

(25) ДОКАЗАТЬ ТЕОРЕМУ О ФОРМУЛЕ ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Th. Формула полной вероятности

∃ 1) $H_1, \dots, H_n$ – ППС;
2) $A \in \mathcal{B}$ – нек-е событие;

Тогда (это выраж-е наз-ся ф-лой полн. вер-ти):

$$P(A) = P(A|H_1)H_1 + \dots + P(A|H_n)P(H_n)$$

Док-во:

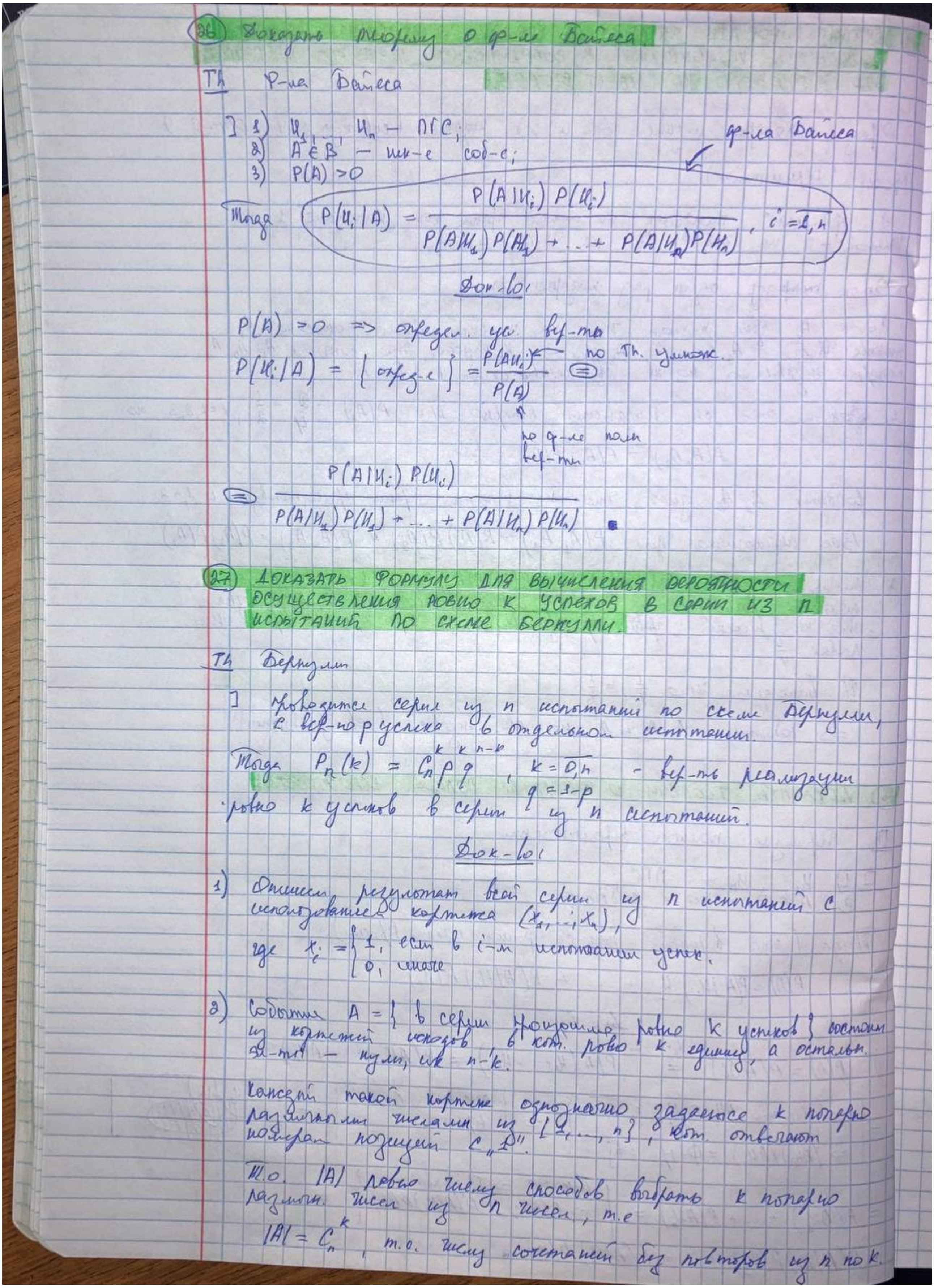
1) $P(A) = P(A\Omega) \overset{\Omega = H_1 + \dots + H_n}{=} P(A(H_1 + \dots + H_n)) = P(AH_1 + \dots + AH_n) =$

$= \left\{ \begin{array}{l} \text{очевидно, что } AH_i \subseteq H_i,\ i = \overline{1,n} \\ \Rightarrow (AH_i)(AH_j) = \varnothing \text{ при } i \neq j \end{array} \right\} = \left\{ \text{аксиома сложения вер-тей} \right\} =$

$= P(AH_1) + \dots + P(AH_n) = \left\{ \begin{array}{l} P(H_i) > 0 \Rightarrow \text{Th умнож-е} \\ \Rightarrow P(AH_i) = P(A|H_i)P(H_i) \end{array} \right\} =$

$= P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)$ ■

Рисунок 12 – Вопросы 24-25



(26) Доказать теорему о ф-ле Байеса.

Th Ф-ла Байеса

] 1) $H_1, \dots, H_n$ – ПГС;
2) $A \in \mathcal{B}$ – пр-е соб-е;
3) $P(A) > 0$

ф-ла Байеса

Тогда $P(H_i|A) = \dfrac{P(A|H_i)\,P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)}$, $i = \overline{1,n}$

Док-во:

$P(A) > 0 \Rightarrow$ опред. усл. вер-ть

$P(H_i|A) = \{\text{опред-е}\} = \dfrac{P(AH_i)}{P(A)}$ по Th. умнож. $=$

по ф-ле полн вер-ти

$= \dfrac{P(A|H_i)\,P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)}$ ■

(27) ДОКАЗАТЬ ФОРМУЛУ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ РОВНО k УСПЕХОВ В СЕРИИ ИЗ n ИСПЫТАНИЙ ПО СХЕМЕ БЕРНУЛЛИ.

Th Бернулли

] проводится серия из n испытаний по схеме Бернулли, с вер-ю p успеха в отдельном испытании.

Тогда $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $k = \overline{0,n}$, $q = 1-p$ – вер-ть реализации ровно k успехов в серии из n испытаний.

Док-во:

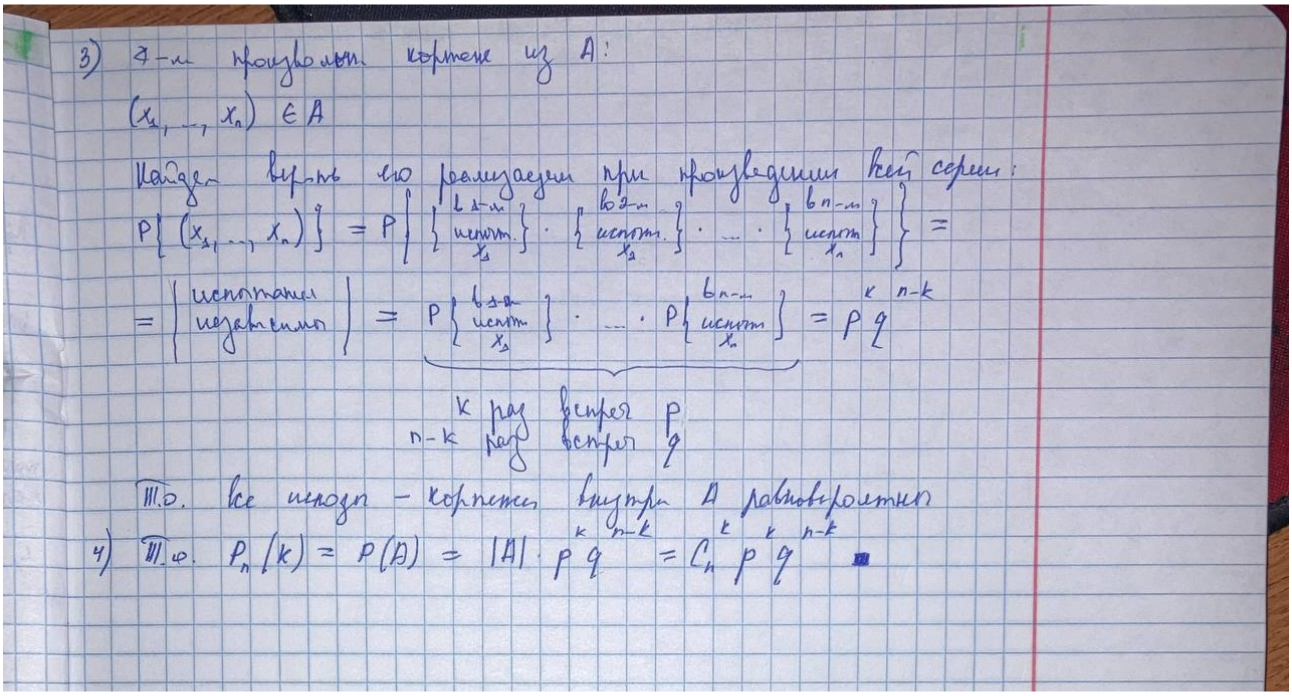
1) Опишем результат всей серии из n испытаний с использованием кортежа $(x_1, \dots, x_n)$,
где $x_i = \begin{cases} 1, & \text{если в } i\text{-м испытании успех} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

2) Событие $A = \{$в серии произошло ровно k успехов$\}$ состоит из кортежей исходов, в кот. ровно k единиц, а остальн. эл-ты – нули, их $n-k$.

Каждый такой кортеж однозначно задается k попарно различными числами из $\{1, \dots, n\}$, кот. отвечают номерам позиций с „1".

Т.о. $|A|$ равно числу способов выбрать k попарно различн. чисел из n чисел, т.е.
$|A| = C_n^k$, т.о. числу сочетаний без повторов из n по k.

Рисунок 13 – Вопросы 26-27


3) Р-м произвольн. кортеж из A:

$(x_1, \dots, x_n) \in A$

Найдем вер-ть его реализации при проведении всей серии:

$$P\{(x_1, \dots, x_n)\} = P\left\{ \begin{Bmatrix} \text{в 1-м} \\ \text{испыт.} \\ x_1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \text{во 2-м} \\ \text{испыт.} \\ x_2 \end{Bmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{Bmatrix} \text{в } n\text{-м} \\ \text{испыт.} \\ x_n \end{Bmatrix} \right\} =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{испытания} \\ \text{независимы} \end{matrix} \right| = \underbrace{P\begin{Bmatrix} \text{в 1-м} \\ \text{испыт.} \\ x_1 \end{Bmatrix} \cdot \ldots \cdot P\begin{Bmatrix} \text{в } n\text{-м} \\ \text{испыт.} \\ x_n \end{Bmatrix}}_{\substack{k \text{ раз встрет } p \\ n-k \text{ раз встрет } q}} = p^k q^{n-k}$$

Т.о. все исходы – кортежи внутри A равновероятны

4) Т.о. $P_n(k) = P(A) = |A| \cdot p^k q^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}$ ■

Рисунок 14 – Вопросы 27