“Теория вероятностей”, 3-й курс, 5-й сем., ИУ7

Задачи к экзаменационным билетам

Комплект № 1. Случайные события (56 задач).

Комплект № 2. Случайные величины (65 задач).

Задача 1.1

Из урны, в которой находилось 10 черных и 15 белых шаров, пропал один шар неизвестного цвета. Из оставшихся 24 шаров наудачу вынимают один шар. Какова вероятность, что он окажется белым?

Задача 1.2

В лифт 9-этажного дома сели 5 пассажиров. Каждый, независимо от других, с одинаковой вероятностью может выйти на любом, начиная со 2-го, этаже. Определить вероятность того, что все вышли на разных этажах.

Задача 1.3

Из урны, в которой 6 белых и 5 черных шаров, потеряли один шар. Чтобы определить состав шаров в урне, было наудачу вынуто 2 шара. Они оказались белыми. Какова вероятность, что был потерян белый шар?

Задача 1.4

Какова вероятность извлечь из колоды в 36 карт 3 карты одинаковой масти, если:

а) извлеченные карты не возвращаются;

б) извлеченные карты возвращаются?

Задача 1.5

Вероятность хотя бы одного попадания в цель при 4-х независимых выстрелах равна 0.9744. Какова вероятность попадания при одном выстреле, если при каждом выстреле эта вероятность одинакова?

Задача 1.6

Партия из 100 лотерейных билетов содержит 50 выигрышных билетов. Определить вероятность того, что среди 3-х наудачу взятых билетов

а) все 3 выигрышные;

б) хотя бы 1 выигрышный.

Задача 1.7

Вероятность попадания в цель при одном выстреле $p = 0.9$. Для поражения цели нужно по крайней мере два попадания. Какова вероятность поражения цели при трех выстрелах?

Задача 1.8

В первой урне 5 белых и 4 черных шара, во второй — 4 белых и 2 черных шара. Известно, что шар, случайным образом извлеченный из случайно выбранной урны, оказался черным. Найти вероятность того, что он был взят из первой урны.

Задача 1.9

Из 18 стрелков 5 попадают в мишень с вероятностью 0.8, 7 – с вероятностью 0.7, 4 – с вероятностью 0.6 и 2 – с вероятностью 0.5. Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел, но в мишень не попал. К какой из групп вероятнее всего принадлежал этот стрелок?

ИУ7, Теория вероятностей, 5-й сем.

Задача 1.10

Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность, что студент знает хотя бы два вопроса из предложенных 3-х вопросов.

ИУ7, Теория вероятностей, 5-й сем.

Задача 1.11

Известно, что 96% всей выпускаемой заводом продукции удовлетворяет стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0.98 и нестандартную с вероятностью 0.05. Определить вероятность того, что изделие, прошедшее контроль, удовлетворяет стандарту.

ИУ7, Теория вероятностей, 5-й сем.

Задача 1.12

У одной из подружек 3 "Сникерса" и 5 "Чупа-чупс", а у другой 4 "Сникерса" и 4 "Чупа-чупс". С использованием критерия максимальной вероятности указать, у какой из них будет больше "Чупа-чупс" после того, как они не глядя махнулись по одной конфете.

Задача 1.13

Бросают три монеты. Используя теорему сложения, найти вероятность того, что хотя бы на одной монете выпадет герб.

Задача 1.14

Некоторое изделие последовательно проходит три стадии испытаний и отбраковывается при обнаружении неисправности хотя бы на одной из них. Какова вероятность того, что изделие пройдет все испытания, если вероятность его отбраковки на первой стадии равна 0.1, на второй (если пройдена первая стадия) – 0.3 и на третьей (если пройдены первые две) – 0.2?

Задача 1.15

В урне лежит шар неизвестного цвета – с равной вероятностью белый или черный. В урну опускается один белый шар и после перемешивания наудачу извлекается один шар. Он оказывается белым. Какова вероятность того, что в урне остался белый шар?

Задача 1.16

Известно, что A и B– наблюдаемые события в эксперименте, причем $P(B) = 0.4$, $P(A|B) = 0.3$ и $P(A|\overline{B}) = 0.2$. Найти $P(A)$, $P(\overline{A}\overline{B})$ и $P(\overline{A} + \overline{B})$.

Задача 1.17

На 7-ми карточках написали буквы слова "соловей". Карточки поместили в урну и после тщательного перемешивания наудачу последовательно извлекли 3 штуки. Какова вероятность составить из них слово "вол", если в процесе извлечения а) карточки возвращали обратно в урну; б) не возвращали?

Задача 1.18

Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек придутся на разные месяцы года.

Задача 1.19

Продукция, выпускаемая некоторым станком, содержит 1% брака. Каков должен быть объем произведенной на этом станке партии изделий, чтобы вероятность встретить в ней хотя бы одно бракованное изделие была не меньше 0.95?

Задача 1.20

Найти: а) вероятность события $P(A_1A_2)$, если $P(\overline{A}_2|A_1) = 0.1$, $P(\overline{A}_1) = 0.4$ и б) вероятность события $A = A_1 + A_2$, если $P(A_1) = 0.4$, $P(\overline{A}_2) = 0.6$, $P(A_1A_2) = 0.2$.

Задача 1.21

В урне 5 белых, 10 черных и 15 красных шаров. Извлекаются наугад один за другим 3 шара. Пусть A – событие, состоящее в том, что все три шара белые, а B – событие, состоящее в том, что все три шара имеют разные цвета. Найти $P(A)$ и $P(B)$, если в процессе извлечения а) шары возвращали в урну; б) шары не возвращали в урну.

Задача 1.22

Известно, что 90% продукции, выпускаемой некоторым заводом, является стандартной. Для контроля качества используется упрощенная схема, которая признает стандартную продукцию годной с вероятностью 0.98, а нестандартную признает годной с вероятностью 0.05. Найти вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, является стандартным.

Задача 1.23

Партия содержит 20 деталей, среди которых 4 бракованных. Найти вероятность того, что среди 5 наудачу извлеченных деталей а) ровно 2 окажутся бракованными; б) хотя бы 2 окажутся бракованными.

Задача 1.24

В первой урне лежат 1 белый и 9 черных шаров, во второй – 1 черный и 5 белых шаров. Из каждой урны удаляют случайным образом по одному шару, а оставшиеся шары складывают в третью (свободную) урну. Найдите вероятность того, что шар, вынутый из третьей урны, окажется белым.

Задача 1.25

Из полной колоды карт (52 карты) вынимают одновременно четыре карты. Пусть A – событие, состоящее в том, что среди вынутых карт будет хотя бы одна червонная, а B – событие, состоящее в том, что среди вынутых карт будет хотя бы одна бубновая. Найти вероятность события $C = A + B$.

Задача 1.26

Прибор содержит четыре независимо работающие лампы, вероятности отказа которых соответственно равны 0.1, 0.2, 0.3 и 0.4. Ивестно, что ровно две лампы отказали. Найти вероятность того, что отказали лампы с номерами 1 и 2.

Задача 1.27

Радиолокационная станция ведет наблюдение за объектом, который может создавать или не создавать помехи. За один цикл обзора станция обнаруживает объект с вероятностью p_1, если помехи не создаются, и с вероятностью p_2, если они создаются. Вероятность того, что во время цикла обзора помехи будут созданы, равна p и не зависит от того, создаются ли помехи во время других циклов обзора. Найти вероятность того, что объект будет обнаружен хотя бы один раз за n циклов обзора?

Задача 1.28

Случайный эксперимент заключается в одновременном подбрасывании трех игральных костей. Найти вероятность того, что в серии из пяти независимых экспериментов ровно два раза выпадет по три единицы.

Задача 1.29

Современные исследования показали, что вероятность того, что из выпущенной бароном Мюнхгаузеном в лоб оленю вишневой косточки на лбу последнего вырастет вишневое дерево, составляет 0.8. Найти вероятность того, что на лбах пяти оленей, каждому из которых барон засветил в лоб одной косточкой, вырастут не менее 4-х деревьев. Какова вероятность того, в этом эксперименте вырастет хотя бы одно дерево?

Задача 1.30

Известно, что изделия некоторого производства содержат 5% брака. Найти вероятность того, что среди 5-ти взятых наугад изделий а) будут ровно два бракованных; б) не будет ни одного бракованного.

Задача 1.31

В цехе работают 20 станков, из которых 10 — марки А, 6 — марки В и 4 — марки С. Вероятности того, что качество детали, изготовленной на этих станках, окажется отличным, соответственно равны 0.9, 0.8 и 0.7. Какой процент отличных деталей выпускает цех в целом?

Задача 1.32

Известно, что чернокожий баскетболист попадает в корзину с вероятностью 0.95, европеец – с вероятностью 0.8, а китаец – с вероятностью 0.7. Известно, что наудачу выбранный из команды игрок при трёхкратном бросании мяча попал дважды. Найти вероятность того, что это европеец, если в команде 7 чернокожих, 11 европейцев и 2 китайца.

Задача 1.33

Из полной колоды карт (52 карты) вынимаются одновременно четыре карты. Найти вероятность того, что все четыре карты будут разных мастей.

ИУ7, Теория вероятностей, 5-й сем.

Задача 1.34

Две машинистки печатали рукопись, постоянно заменяя друг друга. В конечном итоге первая напечатала 1/3 всей рукописи, а вторая — оставшуюся часть. Первая машинистка допускает в среднем 8 ошибок на сотню знаков, а вторая – 5 ошибок на сотню. При прочтении рукописи автор обнаружил ошибку. Найти вероятность того, что ее допустила первая машинистка.

ИУ7, Теория вероятностей, 5-й сем.

Задача 1.35

Известно, что мимо автозаправки легковых автомобилей проезжает вчетверо больше, чем грузовых. Вероятность того, что проезжающая машина подъедет на заправку, составляет 0.05 для грузовой машины и 0.15 для легковой. Найти вероятность того, что случайно выбранная на заправке машина окажется грузовой.

ИУ7, Теория вероятностей, 5-й сем.

Задача 1.36

Между разведчиком и Центром установлена следующая система передачи сообщений. Каждое сообщение разведчик должен передавать трижды. При этом вероятность приема Центром первой передачи равна 0.2, второй – 0.3, третьей – 0.4, а успех каждой из передач не зависит от остальных. Найти вероятность того, что Центр получит сообщение.

Задача 1.37

3 завода изготавливают электромашины, при этом первый завод производит 45% общего количества продукции, второй – 40%, а третий – 15%. Также известно, что продукция первого завода содержит 70% стандартных машин, второго – 80%, а третьего – 81%. Найти вероятность того, что случайно выбранная электромашина окажется стандартной?

Задача 1.38

Осколки, образующиеся при разрыве снаряда, делятся на три группы: крупные, средние и мелкие. Известно, что количество крупных осколков составляет 10% от общего числа, средних – 30% и мелких – 60%. При попадании в броню крупный осколок пробивает ее с вероятностью 0.9, средний – с вероятностью 0.2 и мелкий – с вероятностью 0.05. Известно, что в результате выстрела броня пробита одним осколком. К какой группе он вероятнее всего принадлежит?

Задача 1.39

11 автомашин ожидают ремонта. Среди них пять машин имеют повреждение в коробке передач. Случайным образом взяты на ремонт 6 машин. Найти вероятность того, что среди них повреждение в коробке передач имеют не менее двух машин.

Задача 1.40

В урне 2 белых и 3 черных шара. Два игрока поочередно вынимают из урны по одному шару, не возвращая его обратно. Выигравшим считается тот, кто раньше вынет белый шар. Найти вероятность того, что выиграет первый игрок.

Задача 1.41

При наборе телефонного номера абонент забыл две последние цифры и набрал их наугад, помня только, что эти цифры нечетные и разные. Найти вероятность того, что номер набран правильно.

ИУ7, Теория вероятностей, 5-й сем.

Задача 1.42

В урне 5 белых и 10 черных шаров. Из урны последовательно вынимают два шара. Найти вероятность того, что оба шара окажутся белыми, если первый шар а) возращается в урну; б) не возвращается.

ИУ7, Теория вероятностей, 5-й сем.

Задача 1.43

В одном ящике 5 белых и 10 красных шаров, в другом ящике 10 белых и 5 красных шаров. Из каждого ящика извлекают по одному шару. Найти вероятность того, что хотя бы из них будет белым.

ИУ7, Теория вероятностей, 5-й сем.

Задача 1.44

Рабочий обслуживает три независимо работающих станка. Вероятность того, что в течение часа первый станок потребует внимания рабочего, равна 0.9, для второго эта вероятность равна 0.8, для третьего – 0.85. Какова вероятность того, что в течение часа а) ни один из станков не потребует внимания рабочего; б) хотя бы один из станков потребует внимания рабочего.

Задача 1.45

На сборку поступают детали, производимые тремя станками-автоматами. Первый производит 25%, второй – 30%, а третий – 45% деталей данного типа. Первый автомат допускает 0.1% нестандартных деталей, второй – 0.2%, а третий – 0.3%. Найти вероятность того, что поступившая на сборку нестандартная деталь изготовлена первым автоматом.

Задача 1.46

Из десяти студентов, пришедших на экзамены, 3 студента подготовлены отлично, 4 – хорошо, 2 – посредственно и 1 – плохо. Экзаменационная программа содержит 20 вопросов. Отлично подготовленные студенты могут ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленные – на 16, посредственно подготовленные – на 10, плохо подготовленные – на 5. Вызванный наугад студент ответил на три случайно выбранных вопроса. Найти вероятность того, что он подготовлен плохо.

Задача 1.47

Из колоды, содержащей 36 карт, вынимают 3 карты. Событие A состоит в том, что среди вынутых карт имеется хотя бы одна карта бубновой масти. Событие B состоит в том, что среди вынутых карт имеется хотя бы одна пиковой масти. Найти $P(AB)$.

Задача 1.48

В урне находится 5 белых и 4 черных шаров. Каждую минуту из урны пропадает один из шаров. Найдите вероятность того, что через 4 минуты в урне останется 3 белых и 2 черных шара.

Задача 1.49

Колода в 36 карт делится между тремя игроками следующим образом: первый получает 16 карт, а два других по 10 карт. Какова вероятность, что все трефы окажутся у первого игрока.

ИУ7, Теория вероятностей, 5-й сем.

Задача 1.50

Прибор состоит из двух последовательно включённых узлов. Вероятность безотказной работы в течение времени t_0 первого узла равна 0.9, а второго – 0.8. В процессе испытания в течение времени t_0 зарегистрирован отказ прибора. Найдите вероятность отказа двух узлов.

ИУ7, Теория вероятностей, 5-й сем.

Задача 1.51

Из колоды в 36 карт наудачу выбирают 12 карт. Какова вероятность того, что ими будут 4 туза, 4 короля, 4 дамы?

ИУ7, Теория вероятностей, 5-й сем.

Задача 1.52

40% выпускаемой предприятием продукции имеет первый сорт, а остальная продукция имеет второй сорт. Какова вероятность того, что среди пяти взятых наудачу изделий будет по крайней мере два изделия первого сорта?

Задача 1.53

Из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 наудачу выбирают 3 числа. Какова вероятность, что их произведение является нечётным числом?

Задача 1.54

Попарно независимые события A, B и C удовлетворяют следующим условиям:
а) $P(A) = P(B) = P(C) = p$.
б) $ABC = \varnothing$.
в) $P(A + B + C) = \dfrac{3}{4}$.
Найдите значение p.

Задача 1.55

Три завода выпускают одинаковые изделия. Продукция первого завода имеет 15% брака, второго – 10%, а третьего – 5%. Нормоконтролер наудачу отобрал по одному изделию из продукции каждого завода. Какова вероятность, что среди них окажется хотя бы одно бракованное изделие?

Задача 1.56

Из урны, содержащей 5 черных и 7 белых шаров, наудачу извлекают 3 шара. Найти вероятность того, что среди них будет не менее 2-х черных шаров.

Задача 2.1

Случайный вектор (X, Y) имеет нормальный закон распределения с вектором математических ожиданий $(3,\ 1)$ и ковариационной матрицей

$$\begin{bmatrix} 9 & 8.4 \\ 8.4 & 16 \end{bmatrix}.$$

Найти $\mathrm{M}[Y \mid X = 2]$ и $P\{|X| \leqslant 3 \mid Y = 1\}$.

ИУ7, Теория вероятностей, 5-й сем.

Задача 2.2

Может ли функция

$$g(x) = \begin{cases} a\cos(x/4), & x \in [0, 2\pi]; \\ 0 & x \notin [0, 2\pi] \end{cases}$$

являться функцией распределения некоторой случайной величины? Плотностью распределения некоторой случайной величины? Если да, то при каком значении параметра a и чему в этом случае равны $\mathrm{M}[X]$ и $\mathrm{D}[X]$?

ИУ7, Теория вероятностей, 5-й сем.

Задача 2.3

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = 2X - 3Y$, если $\mathrm{M}X = 0$, $\mathrm{M}Y = 2$, $\mathrm{D}X = 2$, $\mathrm{D}Y = 1$ и $\mathrm{cov}(X, Y) = -1$.

ИУ7, Теория вероятностей, 5-й сем.

Задача 2.4

Найти плотность распределения объема куба, сторона которого имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = 3$.

Задача 2.5

Случайные величины X и Y нормально распределены с математическими ожиданиями $\mu_X = 2$, $\mu_Y = -3$ и дисперсиями $\sigma_X^2 = 1$ и $\sigma_Y^2 = 2$ соответственно. Найти $P\{Y \leqslant X - 5\}$, если X и Y независимы.

Задача 2.6

Случайная величина X имеет равномерный закон распределения на отрезке $[-2,\, 2]$. Найти функцию плотности распределения вероятностей случайной величины $Y = X^2$.

Задача 2.7

Найти вероятность попадания случайного вектора (X, Y) в прямоугольник

$$\Pi = \{1 \leqslant x \leqslant 2,\ -5 \leqslant y \leqslant 3\},$$

если известно, что

$$P(X < x, Y < y) = \\ = \begin{cases} 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y}, & x > 0,\ y > 0; \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Задача 2.8

Случайная величина X равномерно распределена на промежутке $(0, \pi/2)$. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = \sin X$.

Задача 2.9

Найти функцию распределения вероятностей случайной величины, которая является площадью квадрата, сторона которого имеет равномерный закон распределения в промежутке $[0,\ 2]$.

ИУ7, Теория вероятностей, 5-й сем.

Задача 2.10

Случайный вектор (X_1, X_2) распределен по нормальному закону с вектором математических ожиданий $(3,\ 1)$ и ковариационной матрицей

$$\begin{bmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}.$$

Найти $P(|X_1| \leqslant 3\ |X_2 = 4)$.

ИУ7, Теория вероятностей, 5-й сем.

Задача 2.11

Случайные величины X_1 и X_2 нормально распределены с математическими ожиданиями 2, -3 и дисперсиями 3, 4 соответственно. Найти $P\{X_2 \leqslant X_1 - 5\}$, если X_1 и X_2 независимы.

ИУ7, Теория вероятностей, 5-й сем.

Задача 2.12

Производится стрельба по круглой мишени радиуса R. Найти математическое ожидание и дисперсию расстояния от точки попадания до центра мишени, если коорднаты точки попадания имеют равномерное распределение.

Задача 2.13

Случайный вектор (X_1, X_2) имеет нормальное распределение с вектором математических ожиданий $(3,\,1)$ и ковариационной матрицей

$$\begin{bmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}.$$

Найти $P\{|X_1| \leqslant 3\}$ и $P\{|X_1| < 3 \,|\, X_2 = 1\}$.

Задача 2.14

Найти функцию плотности распределения вероятостей площади квадрата, если его сторона является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону с параметром $\lambda = 2$.

Задача 2.15

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = 2X_1 - 3X_2$, если известно, что $\mathrm{M}[X_1] = 0$, $\mathrm{M}[X_2] = 2$, $\mathrm{D}[X_1] = 2$, $\mathrm{D}[X_2] = 4$, $\mathrm{cov}(X_1, X_2) = -2$.

Задача 2.16

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = X - 3Y$, если известно, что $\mathrm{M}X = 4$, $\mathrm{M}Y = 1$, $\sigma_X^2 = 9$, $\sigma_Y^2 = 9$, $\rho_{XY} = 0.8$.

Задача 2.17

Пусть K – число выпадений герба при подбрасывании монеты 5 раз, а N – число выпавших очков при двух подбрасываниях игральной кости. Найти $P\{K+N \leqslant 14\}$.

ИУ7, Теория вероятностей, 5-й сем.

Задача 2.18

Случайный вектор (X_1, X_2) имеет нормальное распределение с вектором математических ожиданий (3, 1) и ковариационной матрицей

$$\begin{bmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}.$$

Найти $P(|X_2| \leqslant 2 \,|\, X_1 = 3)$.

ИУ7, Теория вероятностей, 5-й сем.

Задача 2.19

Функция плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \frac{a}{e^{-x} + e^{x}}.$$

Найти постоянную a и вероятность того, что в двух независимых испытаниях X примет значения меньше 1.

ИУ7, Теория вероятностей, 5-й сем.

Задача 2.20

Функция плотности распределения вероятностей случайного вектора (X, Y) имеет вид

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xye^{-x^2-y^2}, & x > 0,\ y >, 0 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Являются ли случайные величины X и Y зависимыми? Коррелированными?

Задача 2.21

Случайный вектор (X_1, X_2) имеет нормальное распределение с вектором математических ожиданий $(10, -3)$. Найти

$$P\{X_1 \leqslant X_2 + 1.3\},$$

если известно, что $\mathrm{D}X_1 = 3$, $\mathrm{D}X_2 = 1$, а X_1,X_2 – независимые случайные величины.

Задача 2.22

Случайные величины X и Y имеют следующие числовые характеристики:

$$\mathrm{M}X = 10, \quad \mathrm{M}Y = 8,$$
$$\mathrm{D}X = 9, \quad \mathrm{D}Y = 1,$$
$$\mathrm{cov}(X, Y) = -2.$$

Найти $\mathrm{M}Z$ и $\mathrm{D}Z$, если $Z = 3X - 2Y$.

Задача 2.23

Известно, что $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim N(2, 1)$. Найдите $P\{Y > X + 2\}$, если случайные величины X и Y являются независимыми.

Задача 2.24

Вероятность того, что после заупуска станок не остановится в течение времени τ, составляет

$$P(\tau) = e^{-\alpha\tau}, \qquad \tau > 0.$$

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины X – времени безотказной работы станка с момента включения.

Задача 2.25

Найти ковариацию случайных величин X и Y, если $Y = 2 - 3X$, а $\mathrm{M}[X] = -1$, $\mathrm{D}[X] = 4$.

Задача 2.26

Функция плотности распределения вероятностей случайного вектора (X, Y) имеет вид

$$f(x,y) = \begin{cases} 2^{-x-y}(\ln 2)^2, & x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найти закон распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Задача 2.27

Найти $P\{X < Y\}$, если случайные величины X и Y являются независимыми и

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y \geqslant 0 \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

Задача 2.28

Случайный вектор (X, Y) равномерно распределен в области

$$G = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1 \right\}.$$

Найти маргинальные плотности распределения случайных величин X и Y.

Задача 2.29

Случайные величины X и Y независимы и нормально распределены с параметрами

$$\mu = 0, \quad \sigma = 1.$$

Найдите вероятность попадания случайного вектора (X, Y) в кольцо $4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9$.

Задача 2.30

Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = X^2 - 1$, если плотность распределения вероятностей случайной величины X имеет вид

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}.$$

Задача 2.31

Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = X^2 - 2X$, если плотность распределения вероятностей случайной величины X имеет вид

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Задача 2.32

Случайный вектор (X, Y) имеет нормальный закон распределения с вектором математических ожиданий $(3,\ 1)$ и ковариационной матрицей

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 16 \end{bmatrix}.$$

Найти $P\{X \leqslant 3 | Y = 1\}$.

Задача 2.33

Известно, что случайные величины

$$X \sim N(2, 1), \quad Y \sim N(-3, 2)$$

являются независимыми. Найти

$$P\{Y \leqslant X - 5\}.$$

Задача 2.34

Случайная величина X имеет плотность распределения вероятностей

$$f_X(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+1)^2}{8}}$$

а случайная величина Y равномерно распределена в промежутке $[0,\, 2]$. Найти $\mathrm{D}[X - Y]$, если $\mathrm{cov}(X, Y) = 2$.

Задача 2.35

Случайный вектор (X, Y) равномерно распределен в круге с центром в начале координат и радиуса 1. Найдите условную плотность распределения вероятностей случайной величины X относительно $Y = y$.

Задача 2.36

Известно, что $X \sim N(m, \sigma^2)$. Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = X^2$.

Задача 2.37

Случайный вектор (X, Y) равномерно распределен в треугольнике с вершинами $(0,\ 0)$, $(3,\ 0)$, $(0,\ 2)$. Найти условную плотность распределения вероятностей случайной величины X относительно $Y = y$.

Задача 2.38

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = 2X_1 - 3X_2$, если $\mathrm{M}X_1 = 0$, $\mathrm{M}X_2 = 2$, $\mathrm{D}X_1 = 2$, $\mathrm{D}X_2 = 1$, $\mathrm{cov}(X_1, X_2) = -1$.

Задача 2.39

Случайные величины ξ и η независимыми и равномерно распределены на отрезке $[0,\ 1]$. Найти вероятность того, что корни уравнения

$$x^2 - 2\xi x + \eta = 0$$

являются комплексными.

Задача 2.40

Случайная величина Y распределена по закону Релея:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ 2h^2 x e^{-h^2 x^2}, & x > 0 \end{cases}$$

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = -2X + \dfrac{\sqrt{\pi}}{h}$.

Задача 2.41

Из партии в 25 изделий, среди которых имеются 6 бракованных, выбраны случайным образом 3 изделия для проверки их качества.

Постройте ряд распределения и функцию распределения вероятностей случайной величины X – числа бракованных изделий, содержащегося в выборке.

Задача 2.42

Случайный вектор (X, Y) равномерно распределен в круге радиуса R с центром в начале координат. Выяснить, зависимы ли случайные величины X и Y.

Задача 2.43

Найти коэффициент корреляции случайной величины X – числа выпадений единицы – и случайной величины Y – числа выпадений шестерки – при двух бросках игральной кости.

Задача 2.44

Двумерный случайный вектор $(X,\ Y)$ имеет плотность распределения вероятностей

$$p(x;y) = \begin{cases} 4xye^{-x^2-y^2}, & x > 0,\ y > 0; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Найдите вектор математических ожиданий и ковариационную матрицу вектора (X, Y).

Задача 2.45

Годовой прирост заработной платы начальника отдела средней корпорации является нормально распределенной случайной величиной с параметрами $\mu = 12\%$ и $\sigma = 3.6\%$. Найдите вероятность того, что средний годовой прирост заработной платы для каждого из 9 случайно отобранных начальников отделов составит не менее 10%.

Задача 2.46

При каком значении параметра a функция

$$g(x) = \begin{cases} ax^2, & x \in [0,\, 1]; \\ 0, & x \notin [0,\, 1] \end{cases}$$

является плотностью распределения вероятностей некоторой случайной величины X? Найдите $\mathrm{M}[X]$ и $\mathrm{D}[X]$.

Задача 2.47

Два стрелка производят по одному выстрелу каждый по своей мишени. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0.8, вторым – 0.7. Найти $\mathrm{M}Z$ и $\mathrm{D}Z$, если $Z = X - Y$, где X – число попаданий первого стрелка, Y – число попаданий второго.

Задача 2.48

Независимые случайные величины X и Y равномерно распределены на отрезке $[0,\, 6]$. Найдите $P\{X^2 + X \leqslant Y\}$.

Задача 2.49

Случайная величина X равномерно распределены на отрезке $[1, 2]$, случайная величина Y равномерно распределена на отрезке $[3, 6]$. Найти $P\{Y \leqslant 7 - X^2\}$, если X и Y независимы.

Задача 2.50

Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[1, 2]$. Найти закон распределения случайной величины $Y = 7 - X^2$.

Задача 2.51

Случайные величины X и Y независимы и распределены по экспоненциальному закону с параметрами $\lambda_X = 2$ и $\lambda_Y = 5$ соответственно. Найдите $P\{Y \leqslant X\}$.

Задача 2.52

Найдите плотность распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = 7 - 3X$, если случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-1, 3]$.

Задача 2.53

Случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[1, 3]$. Найдите плотность распределения вероятностей и математическое ожидание случайной величины $Y = \ln X$.

Задача 2.54

Случайные величины X и Y независимы и имеют соответственно плотности распределения:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0; \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

и

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0; \\ 0, & y \leqslant 0. \end{cases}$$

Найдите $P\{Y + X < 5\}$.

Задача 2.55

Случайные величины X_1 и X_2 распределены по нормальному закону с математическими ожиданиями -2, 3 и дисперсиями 4, 3 соответственно. Найти $P\{X_2 < X_1 + 5\}$, если X_1 и X_2 независимы.

Задача 2.56

Случайная величина X распределена по стандартному нормальному закону. Найдите математическое ожидание и дисперию случайной величины $Y = e^X$.

Задача 2.57

Двумерный случайный вектор (X, Y) распределен равномерно в треугольнике с вершинами $O(0,\,0)$, $A(3,\,0)$, $B(0,\,2)$. Найдите условную плотность распределения случайной величины Y при условии $X = x$.

Задача 2.58

Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-3,\,1]$. Найти функцию распределения вероятностей случайной величины $Y = X^2 - 4$.

Задача 2.59

Случайный вектор (X, Y) равномерно распределен в круге радиуса 2 с центром в начале координат. Найдите условную плотность распределения случайной величины X при условии $Y = y$.

Задача 2.60

Найдите ковариацию случайных величин $Y = X - 1$ и $Z = 4X + 3$, если $\mathrm{D}X = 6$.

Задача 2.61

Два стрелка производят по одному выстрелу по общей мишени. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0.8, для второго – 0.7. Постройте ряд распределения случайной величины $Z = X - Y$ и найдите её математическое ожидание и дисперсию, если X – число попаданий первого стрелка, Y – число попаданий второго.

ИУ7, Теория вероятностей, 5-й сем.

Задача 2.62

Поезда метрополитена идут с интервалом 2 минуты. Оцените вероятность того, что пассажир, вышедший на платформу в случайный момент времени, будет ожидать поезд не более одной минуты?

ИУ7, Теория вероятностей, 5-й сем.

Задача 2.63

Случайный вектор (X, Y) имеет функцию плотности распределения вероятностей

$$f(x, y) = \begin{cases} A(3x - y), & (x, y) \in D; \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

где D – область, ограниченная прямыми $y = x$, $y = 3x$, $x = 3$. Найдите постоянную A и вероятность попадания случайного вектора (X, Y) в треугольник с вершинами (0, 0), (2, 0) и (0, 2).

ИУ7, Теория вероятностей, 5-й сем.

Задача 2.64

Случайная величина X имеет стандартный нормальный закон распределения. Найдите $\mathrm{M}[X^2]$ и $\mathrm{D}[X^2]$.

Задача 2.65

Независимые случайные величины X и Y равномерно распределены в промежутках $[0, 2]$ и $[1, 5]$ соответственно. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины X^2Y.