Теория вероятностей

Домашнее задание №3 (модуль 2)

Специальность ИУ7, - 3-й курс, 5-й семестр

Моисеев Никита Дмитриевич

ИУ7-53Б

Вариант 14

Задача I Угол λ сноса самолета вычисляется по ф-ле

$$\lambda = \arcsin\left(\frac{u}{v}\sin\varepsilon\right)$$

где ε - угол действия ветра, u - скорость ветра, v - скорость самолета в воздухе (u и v измеряются в одинаковых единицах). Считая, что значения угла равномерно распределены в интервале $(-\pi, \pi)$, найти пл-ть расп-я вероятностей угла сноса при $u = 20$ м/с, $v = 720$ км/ч

Решение:

1) Приведем u и v к одинак. единицам измерения (к м/с):

$u = 20$ м/с

$v = 720$ км/ч $= \frac{720}{3,6}$ м/с $= 200$ м/с

$\Rightarrow$ ф-ла для расчета угла сноса самолета примет вид:

$$\lambda = \arcsin\left(\frac{u}{v}\sin\varepsilon\right) = \arcsin\left(\frac{20}{200}\sin\varepsilon\right) = \arcsin\left(\frac{1}{10}\sin\varepsilon\right)$$

2) Найдем ф-цию пл-ти расп-я вер-ти угла действия ветра ε:

Ф-ция пл-ти имеет вид:

$$f_\varepsilon(\varepsilon) = \begin{cases} c, & \varepsilon \in (-\pi, \pi) \\ 0, & \varepsilon \notin (-\pi, \pi) \end{cases}, \text{ где } c = const$$

Поскольку знач-я ε равномерно распред-ны в интервале $(-\pi, \pi)$, то ε - непрерывная сл. величина $\Rightarrow$ исп. св-во 3° (услов. нормировки) ф-ции пл-ти расп-я вер-ти непрерывн. сл. вел., найдем знач-е константы c:

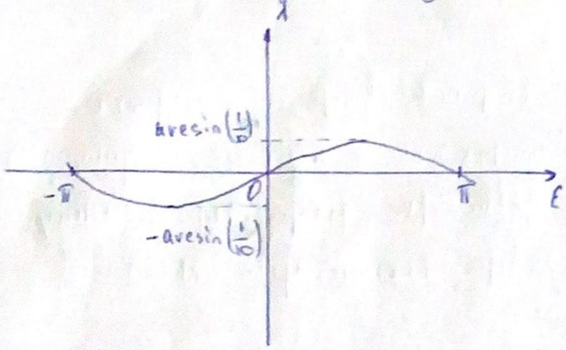
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(\varepsilon)\,d\varepsilon = 1 = \int_{-\pi}^{\pi} c\,d\varepsilon = c\int_{-\pi}^{\pi} d\varepsilon = c\varepsilon\Big|_{-\pi}^{\pi} = c(\pi - (-\pi)) = 2\pi c = 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{2\pi}$$

$\Rightarrow$ ф-ция пл-ти расп-я вер-ти угла действия ветра ε примет вид:

$$f_\varepsilon(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & \varepsilon \in (-\pi, \pi) \\ 0, & \varepsilon \in (-\pi, \pi) \end{cases}$$

3) Построим график ф-ции $\lambda(\varepsilon)$ на интервале $\varepsilon \in (-\pi, \pi)$:



ф-ция λ кусочно-монот-е

$$\Rightarrow f_\lambda(\lambda) = \sum_{j=1}^{k} f_\varepsilon(\psi_j(\lambda)) \left| \psi_j'(\lambda) \right|, \text{ где}$$

$\varepsilon_j = \psi_j(\lambda)$, $j = \overline{1,k}$ – все реш-е ур-е $\varphi(\varepsilon) = \lambda$ для данного λ

В нашем случае ф-ция $\varphi(\varepsilon)$ имеет вид:

$$\varphi(\varepsilon) = \arcsin\left(\frac{1}{10}\sin\varepsilon\right) = \lambda(\varepsilon)$$

а) $\lambda < -\arcsin\left(\frac{1}{10}\right) \Rightarrow$ ур-е $\varphi(\varepsilon)$ не имеет решений $\Rightarrow k = 0 \Rightarrow f_\lambda(\lambda) = 0$

б) $-\arcsin\left(\frac{1}{10}\right) < \lambda < 0 \Rightarrow$ ур-е $\varphi(\varepsilon)$ имеет 2 решения $\Rightarrow k = 2$

$$\varepsilon_1 = \underbrace{-\pi - \arcsin(10\sin\lambda)}_{\psi_1(\lambda)} \qquad \varepsilon_2 = \underbrace{\arcsin(10\sin\lambda)}_{\psi_2(\lambda)}$$

$$\Rightarrow f_\lambda(\lambda) = f_\varepsilon\left(-\pi - \arcsin(10\sin\lambda)\right)\left|\left(-\pi - \arcsin(10\sin\lambda)\right)'\right| +$$

$$+ f_\varepsilon\left(\arcsin(10\sin\lambda)\right)\left|\left(\arcsin(10\sin\lambda)\right)'\right| =$$

$$\varepsilon_{1\lambda}' = -\frac{10\cos(\lambda)}{\sqrt{1 - 100\sin^2(\lambda)}}, \quad \varepsilon_{2\lambda}' = \frac{10\cos(\lambda)}{\sqrt{1 - 100\sin^2(\lambda)}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{10\cos(\lambda)}{\sqrt{1 - 100\sin^2(\lambda)}} + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{10\cos(\lambda)}{\sqrt{1 - 100\sin^2(\lambda)}} = \frac{10\cos(\lambda)}{\pi\sqrt{1 - 100\sin^2(\lambda)}}$$

в) $0 < \lambda < \arcsin\left(\frac{1}{10}\right) \Rightarrow$ ур-е $\varphi(\varepsilon)$ имеет 2 решения $\Rightarrow k = 2$

$$\varepsilon_1 = \underbrace{\arcsin(10\sin(\lambda))}_{\psi_1(\lambda)}, \quad \varepsilon_2 = \underbrace{\pi - \arcsin(10\sin(\lambda))}_{\psi_2(\lambda)}$$

$$\Rightarrow f_\lambda(\lambda) = f_\varepsilon\left(\arcsin(10\sin\lambda)\right)\left|\left(\arcsin(10\sin\lambda)\right)'\right| +$$

$$+ f_\varepsilon\left(\pi - \arcsin(10\sin(\lambda))\right)\left|\left(\pi - \arcsin(10\sin(\lambda))\right)'\right| \boxed{=}$$

$$f'_{2_\lambda} = \frac{-10\cos(\lambda)}{\sqrt{1-100\sin^2(\lambda)}}$$

$$\boxed{=} \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{10\cos(\lambda)}{\sqrt{1-100\sin^2(\lambda)}} + \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{10\cos(\lambda)}{\sqrt{1-100\sin^2(\lambda)}} = \frac{10\cos(\lambda)}{\pi\sqrt{1-100\sin^2(\lambda)}}$$

1) $\lambda > \arcsin\left(\frac{1}{10}\right) \Rightarrow$ ур-е $\varphi(\varepsilon)$ не имеет решений $\Rightarrow k=0 \Rightarrow f_\lambda(\lambda)=0$

4) <u>Итого</u>:

$$f_\lambda(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{10\cos(\lambda)}{\pi\sqrt{1-100\sin^2(\lambda)}}, & \lambda \in \left(-\arcsin\left(\frac{1}{10}\right); \arcsin\left(\frac{1}{10}\right)\right) \\ 0, & \lambda \notin \left(-\arcsin\left(\frac{1}{10}\right); \arcsin\left(\frac{1}{10}\right)\right) \end{cases}$$

<u>Ответ</u>: $f_\lambda(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{10\cos(\lambda)}{\pi\sqrt{1-100\sin^2(\lambda)}}, & \lambda \in \left(-\arcsin\left(\frac{1}{10}\right); \arcsin\left(\frac{1}{10}\right)\right) \\ 0, & \lambda \notin \left(-\arcsin\left(\frac{1}{10}\right); \arcsin\left(\frac{1}{10}\right)\right) \end{cases}$

Задача 2 Найти $P(X_2 > 2X_1)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$\vec{m} = (2, 1)$,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 13 \end{pmatrix}$$

Решение:

1) Из ковариационной матрицы Σ и в-ра средних $\vec{m}$:

$M[X_1] = 2$, $M[X_2] = 1$

$D[X_1] = 1$, $D[X_2] = 13$, $cov(X_1, X_2) = -2$

~~2) Как известно, ЛК нормальных сл. величин также явл. норм. сл. вел-ой, поэтому рассмотрим~~

~~Z =~~

2) $$P\{X_2 > 2X_1\} = P\{\overbrace{2X_1 - X_2}^{Z} < 0\} = P\{Z < 0\}$$

Как известно, ЛК нормальных сл. величин также явл. нормальной сл. величиной, поэтому рассмотрим

$Z = 2X_1 - X_2$, причём $Z \sim N(m_Z, \sigma_Z^2)$

$$m_z = M[Z] = M[2X_1 - X_2] = 2M[X_1] - M[X_2] = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

$$\sigma_z^2 = D[Z] = D[2X_1 - X_2] = 4D[X_1] + D[X_2] - 2 \cdot 2 \cdot 1 \, cov(X_1, X_2) =$$

$$= 4D[X_1] + D[X_2] - 4\, cov(X_1, X_2) = 4 \cdot 1 + 13 - 4 \cdot (-2) = 25$$

$$P\{Z < 0\} = \Phi_0\left(\frac{0 - m_z}{\sigma_z}\right) - \Phi_0(-\infty) = \Phi_0\left(\frac{-3}{5}\right) + \frac{1}{2} =$$

$$= 0{,}5 - 0{,}22575 = 0{,}27425$$

Ответ: $P\{X_2 > 2X_1\} = 0{,}27425$