Теория вероятностей

Домашнее задание №3 (модуль 2)

Специальность ИУ7, - 3-й курс, 5-й семестр

Мосцев Никита Дмитриевич

ИУ7-53Б

Вариант 14

1	2	Σ
1	3	

<u>Задача I</u> Угол λ сноса самолета вычисляется по ф-ле

$\lambda = \arcsin(\frac{u}{v} \sin \varepsilon)$

где ε - угол действия ветра, u - скорость ветра, v - скорость самолета в воздухе (u и v измеряются в одинаковых единицах). Считая, что значения угла равномерно распределены в интервале $(-\pi, \pi)$, найти пл-ть расп-я вероятностей угла сноса при $u = 20$ м/с, $v = 720$ км/ч

<u>Решение:</u>

1) Приведем u и v к одинак. единицам измерения (к м/с):

$u = 20$ м/с

$v = 720$ км/ч $= \frac{720}{3{,}6}$ м/с $= 200$ м/с

$\Rightarrow$ ф-ла для расчета угла сноса самолета примет вид:

$\lambda = \arcsin(\frac{u}{v} \sin \varepsilon) = \arcsin(\frac{20}{200} \sin \varepsilon) = \arcsin(\frac{1}{10} \sin \varepsilon)$

2) Найдем ф-цию пл-ти расп-я вер-ти угла действия ветра ε:

Ф-ция пл-ти имеет вид:

$$f_\varepsilon(\varepsilon) = \begin{cases} c, & \varepsilon \in (-\pi, \pi) \\ 0, & \varepsilon \notin (-\pi, \pi) \end{cases}, \text{ где } c = const$$

Поскольку знач-я ε равномерно распред-ны в интервале $(-\pi, \pi)$, то ε - непрерывная сл. величина $\Rightarrow$ исп. св-во 3° (услов. нормировки) ф-ции пл-ти расп-я вер-ти непрерывн. сл. вел., найдем знач-е константы c:

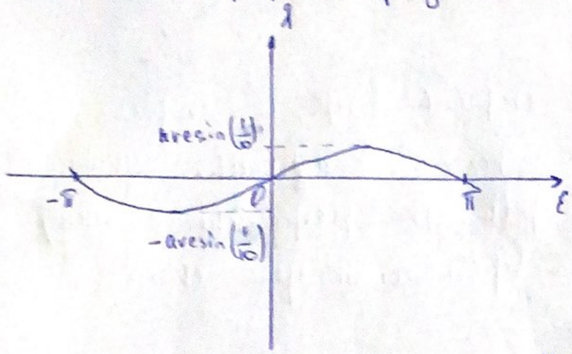
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(\varepsilon)\, d\varepsilon = 1 = \int_{-\pi}^{\pi} c\, d\varepsilon = c\int_{-\pi}^{\pi} d\varepsilon = c\varepsilon \Big|_{-\pi}^{\pi} = c(\pi - (-\pi)) = 2\pi c = 1$$

$\Rightarrow c = \frac{1}{2\pi}$

$\Rightarrow$ ф-ция пл-ти расп-я вер-ти угла действия ветра ε примет вид:

$$f_\varepsilon(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & \varepsilon \in (-\pi, \pi) \\ 0, & \varepsilon \in (-\pi, \pi) \end{cases}$$

3) Построим график ф-ции $\lambda(\varepsilon)$ на интервале $\varepsilon \in (-\pi, \pi)$:



ф-ция λ кусочно-монот-я

$$\Rightarrow f_\lambda(\lambda) = \sum_{j=1}^{k} f_\varepsilon(\psi_j(\lambda))\,|\psi_j'(\lambda)|,$$ где

$\varepsilon_j = \psi_j(\lambda)$, $j=\overline{1,k}$ — все реш-я ур-е $\varphi(\varepsilon) = \lambda$ для данного λ

В нашем случае ф-ция $\varphi(\varepsilon)$ имеет вид:

$$\varphi(\varepsilon) = \arcsin\left(\frac{1}{10}\sin\varepsilon\right) = \lambda(\varepsilon)$$

а) $\lambda < -\arcsin\left(\frac{1}{10}\right) \Rightarrow$ ур-е $\varphi(\varepsilon)$ не имеет решений $\Rightarrow k=0 \Rightarrow f_\lambda(\lambda) = 0$

б) $-\arcsin\left(\frac{1}{10}\right) < \lambda < 0 \Rightarrow$ ур-е $\varphi(\varepsilon)$ имеет 2 решения $\Rightarrow k=2$

$$\varepsilon_1 = \underbrace{-\pi - \arcsin(10\sin\lambda)}_{\psi_1(\lambda)} \qquad \varepsilon_2 = \underbrace{\arcsin(10\sin\lambda)}_{\psi_2(\lambda)}$$

$$\Rightarrow f_\lambda(\lambda) = f_\varepsilon(-\pi - \arcsin(10\sin\lambda))\left|(-\pi - \arcsin(10\sin\lambda))'\right| +$$

$$+ f_\varepsilon(\arcsin(10\sin\lambda))\left|(\arcsin(10\sin\lambda))'\right| \circledequal$$

$$\varepsilon_{1\lambda}' = -\frac{10\cos(\lambda)}{\sqrt{1-100\sin^2(\lambda)}}, \quad \varepsilon_{2\lambda}' = \frac{10\cos(\lambda)}{\sqrt{1-100\sin^2(\lambda)}}$$

$$\circledequal \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{10\cos(\lambda)}{\sqrt{1-100\sin^2(\lambda)}} + \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{10\cos(\lambda)}{\sqrt{1-100\sin^2(\lambda)}} = \frac{10\cos(\lambda)}{\pi\sqrt{1-100\sin^2(\lambda)}}$$

Почему сл. вел. и аргумент ф-ции плотн. обозначены одной буквой?

в) $0 < \lambda < \arcsin\left(\frac{1}{10}\right) \Rightarrow$ ур-е $\varphi(\varepsilon)$ имеет 2 решения $\Rightarrow k=2$

$$\varepsilon_1 = \underbrace{\arcsin(10\sin(\lambda))}_{\psi_1(\lambda)}, \quad \varepsilon_2 = \underbrace{\pi - \arcsin(10\sin(\lambda))}_{\psi_2(\lambda)}$$

$$\Rightarrow f_\lambda(\lambda) = f_\varepsilon(\arcsin(10\sin\lambda))\left|(\arcsin(10\sin\lambda))'\right| +$$

$$+ f_\varepsilon(\pi - \arcsin(10\sin(\lambda)))\left|(\pi - \arcsin(10\sin(\lambda)))'\right| \boxed{=}$$

$$f'_{2\,\lambda} = \frac{-10\cos(\lambda)}{\sqrt{1-100\sin^2(\lambda)}}$$

$$\boxed{=} \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{10\cos(\lambda)}{\sqrt{1-100\sin^2(\lambda)}} + \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{10\cos(\lambda)}{\sqrt{1-100\sin^2(\lambda)}} = \frac{10\cos(\lambda)}{\pi\sqrt{1-100\sin^2(\lambda)}}$$

1) $\lambda > \arcsin\left(\frac{1}{10}\right) \Rightarrow$ ур-е $\varphi(\varepsilon)$ не имеет решений $\Rightarrow k=0 \Rightarrow f_\lambda(\lambda)=0$

4) Итого:

$$f_\lambda(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{10\cos(\lambda)}{\pi\sqrt{1-100\sin^2(\lambda)}}, & \lambda \in \left(-\arcsin\left(\frac{1}{10}\right); \arcsin\left(\frac{1}{10}\right)\right) \\ 0, & \lambda \notin \left(-\arcsin\left(\frac{1}{10}\right); \arcsin\left(\frac{1}{10}\right)\right) \end{cases}$$

Ответ: $f_\lambda(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{10\cos(\lambda)}{\pi\sqrt{1-100\sin^2(\lambda)}}, & \lambda \in \left(-\arcsin\left(\frac{1}{10}\right); \arcsin\left(\frac{1}{10}\right)\right) \\ 0, & \lambda \notin \left(-\arcsin\left(\frac{1}{10}\right); \arcsin\left(\frac{1}{10}\right)\right) \end{cases}$

Задача 2 Найти $P(X_2 > 2X_1)$, если $(X_1, X_2) \sim N(\vec{m}, \Sigma)$, где

$\vec{m} = (2, 1)$,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 13 \end{pmatrix}$$

Решение:

1) Из ковариационной матрицы Σ и в-ра средних $\vec{m}$:

$M[X_1] = 2$, $M[X_2] = 1$

$D[X_1] = 1$, $D[X_2] = 13$, $\operatorname{cov}(X_1, X_2) = -2$

~~2) Как известно, ЛК нормальных сл. величин также явл. норм. сл. вел., поэтому рассмотрим~~

~~$Z =$~~

2) $P\{X_2 > 2X_1\} = P\{\overbrace{2X_1 - X_2}^{Z} < 0\} = P\{Z < 0\}$

Как известно, ЛК нормальных сл. величин также явл. нормальной сл. величиной, поэтому рассмотрим

$Z = 2X_1 - X_2$, причём $Z \sim N(m_Z, \sigma_Z^2)$

$m_Z = M[Z] = M[2X_1 - X_2] \overset{\text{св-во лин. мат. ожид-я}}{=} 2M[X_1] - M[X_2] = 2 \cdot 2 - 1 = 3$

$\sigma_Z^2 = D[Z] = D[2X_1 - X_2] \overset{\text{св-ва ковариации и дисперсии}}{=} 4D[X_1] + D[X_2] - 2 \cdot 2 \cdot 1 \operatorname{cov}(X_1, X_2) =$

$= 4D[X_1] + D[X_2] - 4\operatorname{cov}(X_1, X_2) = 4 \cdot 1 + 13 - 4 \cdot (-2) = 25$

$P\{Z < 0\} = \Phi_0\left(\frac{0 - m_Z}{\sigma_Z}\right) - \Phi_0(-\infty) = \Phi_0\left(\frac{-3}{5}\right) + \frac{1}{2} =$

$= 0{,}5 - 0{,}22575 = 0{,}27425$

Ответ: $P\{X_2 > 2X_1\} = 0{,}27425$

Работа над ошибками

Задача 1

Решение:

1) Приведём u и v к одинак. единицам измерения (к м/с):

$u = 20$ м/с

$v = 720$ км/ч $= \frac{720}{3,6}$ м/с $= 200$ м/с

$\Rightarrow$ ф-ла для расчёта угла сноса самолёта примет вид:

$$\lambda = \arcsin\left(\frac{u}{v}\sin\varepsilon\right) = \arcsin\left(\frac{20}{200}\sin\varepsilon\right) = \arcsin\left(\frac{1}{10}\sin\varepsilon\right)$$

2) Пусть $X = \varepsilon$, $Y = \lambda \Rightarrow Y = \arcsin\left(\frac{1}{10}\sin X\right)$

Найдём ф-цию пл-ти распред-я сл. вел. X:

Ф-ция пл-ти имеет вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} c, & x \in (-\pi, \pi) \\ 0, & x \notin (-\pi, \pi) \end{cases}, \text{ где } c = const$$

Поскольку знач-е ε равномерно распред-но в интервале $(-\pi, \pi)$, то X – непрерывн. сл. вел-на $\Rightarrow$ исп. св-во $3°$ (услов. нормировки) ф-ции плотности распред-я вер-ти непрерывн. сл. вел, найдём знач-е константы c:

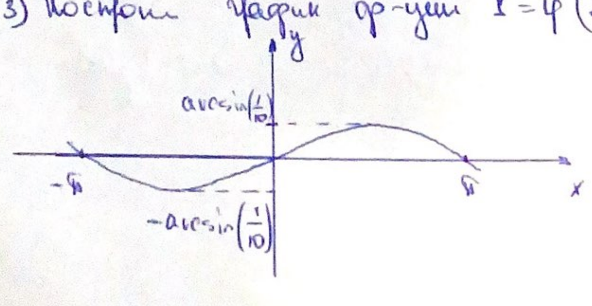
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 = \int_{-\pi}^{\pi} c\,dx = c\int_{-\pi}^{\pi} dx = cx\Big|_{-\pi}^{\pi} = c(\pi - (-\pi)) = 2\pi c = 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{2\pi}$$

$\Rightarrow$ ф-ция пл-ти сл. вел. X примет вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & x \in (-\pi, \pi) \\ 0, & x \notin (-\pi, \pi) \end{cases}$$

3) Построим график ф-ции $Y = \varphi(X)$, где $\varphi(X) = \arcsin\left(\frac{1}{10}\sin X\right)$



ф-ция φ кусочно-монот.

$$\Rightarrow f_Y(y) = \sum_{j=1}^{k} f_X(\psi_j(y))\left|\psi_j(y)\right|, \text{ где}$$

$x_j = \psi_j(y)$, $j = \overline{1,k}$ – все реш-я ур-я $\varphi(x) = y$ для данного y; $\psi = \varphi^{-1}$

а) $y < -\arcsin\left(\frac{1}{10}\right) \Rightarrow$ ур-е $\varphi(x)$ не имеет решений $\Rightarrow k=0 \Rightarrow f_Y(y)=0$

б) $-\arcsin\left(\frac{1}{10}\right) < y < 0 \Rightarrow$ ур-е $\varphi(x)$ имеет 2 реш-я $\Rightarrow k=2$

$$x_1 = \underbrace{-\pi - \arcsin(10\sin y)}_{\psi_1(y)} \quad ; \quad x_2 = \underbrace{\arcsin(10\sin y)}_{\psi_2(y)}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = f_X(-\pi - \arcsin(10\sin y))\left|(-\pi - \arcsin(10\sin y))'\right| +$$

$$+ f_X(\arcsin(10\sin y))\left|(\arcsin(10\sin y))'\right| \ominus$$

$$x'_{1_y} = -\frac{10\cos(y)}{\sqrt{1-100\sin^2(y)}} \quad ; \quad x'_{2_y} = \frac{10\cos(y)}{\sqrt{1-100\sin^2(y)}}$$

$$\ominus \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{10\cos(y)}{\sqrt{1-100\sin^2(y)}} + \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{10\cos(y)}{\sqrt{1-100\sin^2(y)}} = \frac{10\cos(y)}{\pi\sqrt{1-100\sin^2(y)}}$$

в) $0 < y < \arcsin\left(\frac{1}{10}\right) \Rightarrow$ ур-е $\varphi(x)$ имеет 2 реш-я $\Rightarrow k=2$

$$x_1 = \underbrace{\arcsin(10\sin(y))}_{\psi_1(y)} \quad ; \quad x_2 = \underbrace{\pi - \arcsin(10\sin(y))}_{\psi_2(y)}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = f_X(\arcsin(10\sin y))\left|(\arcsin(10\sin y))'\right| +$$

$$+ f_X(\pi - \arcsin(10\sin y))\left|(\pi - \arcsin(10\sin y))'\right| \boxminus$$

$$x'_{2_y} = -\frac{10\cos y}{\sqrt{1-100\sin^2(y)}}$$

$$\boxminus \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{10\cos(y)}{\sqrt{1-100\sin^2(y)}} + \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{10\cos(y)}{\sqrt{1-100\sin^2(y)}} = \frac{10\cos(y)}{\pi\sqrt{1-100\sin^2(y)}}$$

г) $y > \arcsin\left(\frac{1}{10}\right) \Rightarrow$ ур-е $\varphi(x)$ не имеет решений $\Rightarrow k=0 \Rightarrow f_Y(y)=0$

4) Итого:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{10\cos(y)}{\pi\sqrt{1-100\sin^2(y)}}, & y \in \left(-\arcsin\left(\frac{1}{10}\right); \arcsin\left(\frac{1}{10}\right)\right) \\ 0, & y \notin \left(-\arcsin\left(\frac{1}{10}\right); \arcsin\left(\frac{1}{10}\right)\right) \end{cases}$$

<u>Ответ:</u> ф-ция пл-ти распред-я вер-тей угла сноса λ при $u = 20$ м/с и $v = 720$ км/ч имеет вид:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{10\cos(y)}{\pi\sqrt{1-100\sin^2(y)}}, & y \in \left(-\arcsin\left(\frac{1}{10}\right); \arcsin\left(\frac{1}{10}\right)\right) \\ 0, & y \notin \left(-\arcsin\left(\frac{1}{10}\right); \arcsin\left(\frac{1}{10}\right)\right) \end{cases}$$