Теория вероятностей

Домашнее задание №1 (модуль 1)

специальность ИУ7, 3-й курс, 5-й семестр

Люцев Никита Дмитриевич

ИУ7-53Б

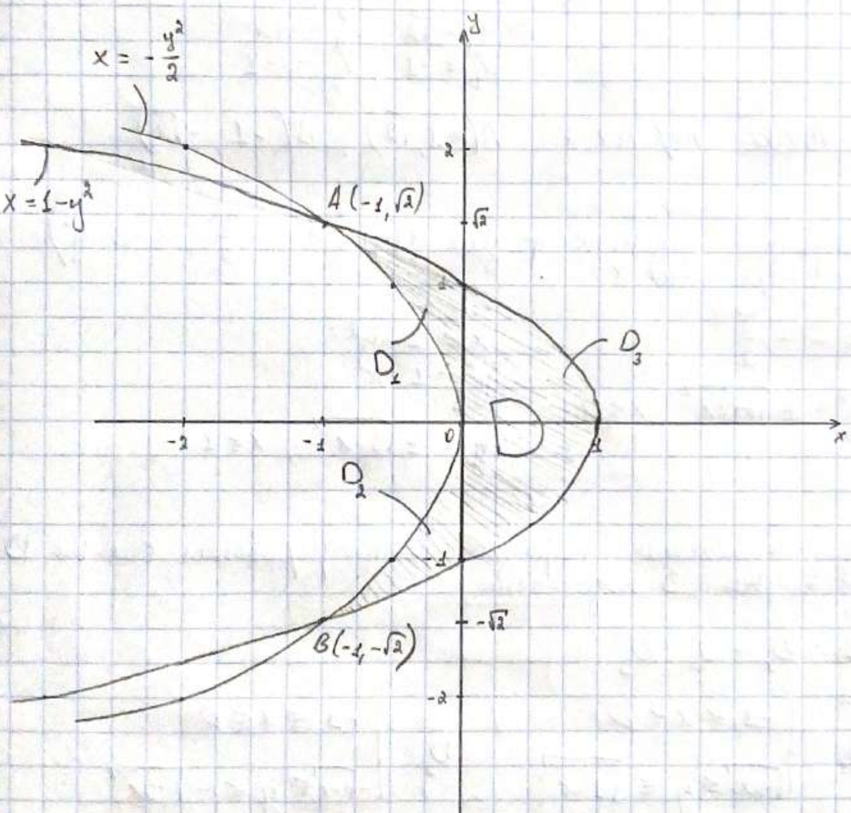
Вариант 14

1	2	3	Σ
3	1	1	5

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле и сделать поясняющий рисунок:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\frac{y^2}{2}}^{1-y^2} f(x,y)\,dx = I$$

Решение:



] обл-ть интегрирования наз D.

$$D: \begin{cases} -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2} \\ -\frac{y^2}{2} \leq x \leq 1-y^2 \end{cases}$$

D ограничена кривыми: $x = -\frac{y^2}{2}$, $x = 1 - y^2$

Найдем (.) пересеч-е этих кривых (точки A и B):

$$\begin{cases} x = -\frac{y^2}{2} \\ x = 1 - y^2 \end{cases} \Rightarrow \quad -\frac{y^2}{2} = 1 - y^2 \quad | \cdot 2$$

$$-y^2 = 2 - 2y^2$$

$$y^2 = 2$$

$$\Rightarrow y_1 = \sqrt{2}, \quad y_2 = -\sqrt{2}$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -1$$

$\Rightarrow$ точки пересеч-я: $A(-1, \sqrt{2})$, $B(-1, -\sqrt{2})$

Выразим заданные ф-ции $x(y)$ $\left(x = -\frac{y^2}{2},\ x = 1 - y^2\right)$ через перем-ю x:

$$x = -\frac{y^2}{2} \qquad\qquad x = 1 - y^2$$

$$y = \pm\sqrt{-2x},\ x \le 0 \qquad\qquad y^2 = 1 - x$$

$$y = \pm\sqrt{1-x},\ x \le 1$$

При изменении порядка интегрирования обл-ть D разбив. на 3 подобласти:

$$D = D_1 + D_2 + D_3$$

$$D_1: \begin{cases} -1 \le x \le 0 \\ \sqrt{-2x} \le y \le \sqrt{1-x} \end{cases} \qquad D_2: \begin{cases} -1 \le x \le 0 \\ -\sqrt{1-x} \le y \le -\sqrt{-2x} \end{cases}$$

$$D_3: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ -\sqrt{1-x} \le y \le \sqrt{1-x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\frac{y^2}{2}}^{1-y^2} f(x,y)\,dx = \int_{-1}^{0} dx \int_{\sqrt{-2x}}^{\sqrt{1-x}} f(x,y)\,dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{-\sqrt{1-x}}^{-\sqrt{-2x}} f(x,y)\,dy +$$

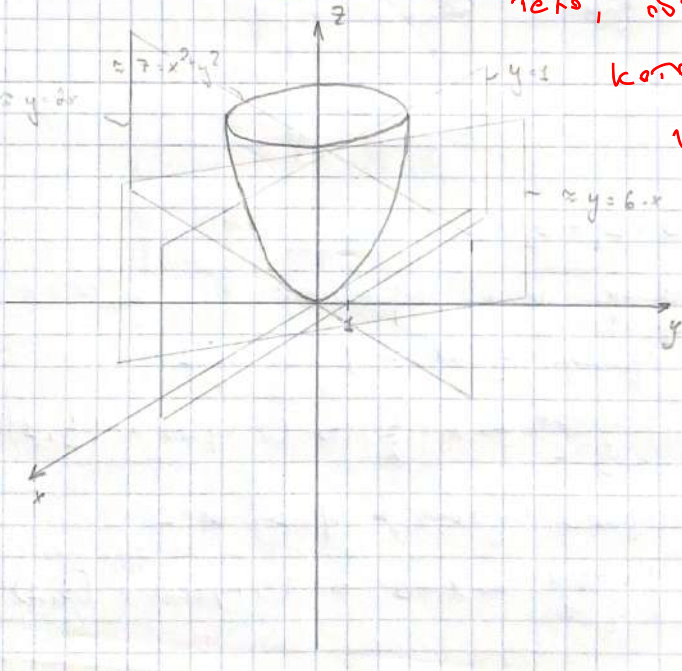
$$+\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1-x}} f(x,y)\,dy$$

<u>Ответ:</u> $$I = \int_{-1}^{0} dx \int_{\sqrt{-2x}}^{\sqrt{1-x}} f(x,y)\,dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{-\sqrt{1-x}}^{-\sqrt{-2x}} f(x,y)\,dy + \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1-x}} f(x,y)\,dy$$

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2+y^2$, $z = 0$, $y = 1$, $y = 2x$, $y = 6-x$

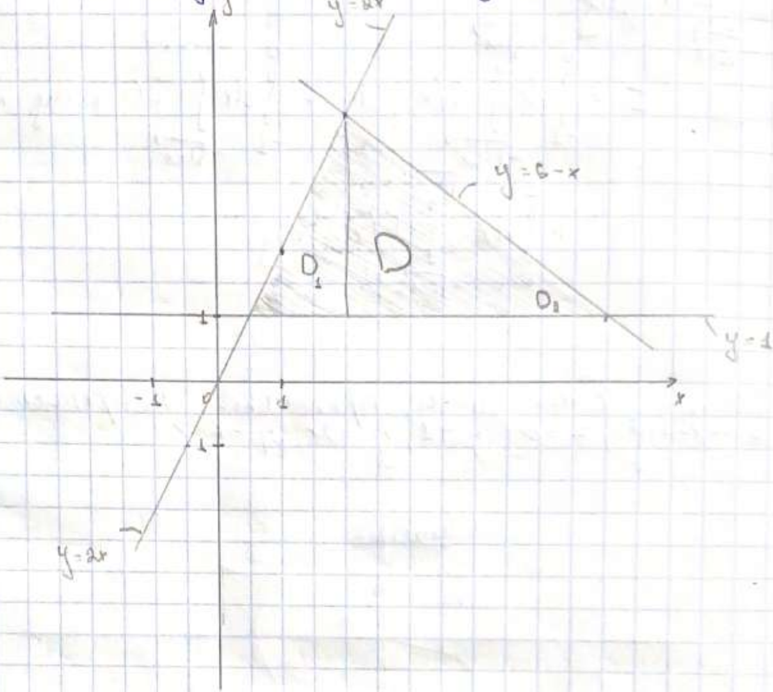
Где на рис. тело, объем которого ищете?

<u>Решение:</u>



пл-ть

1-я проекция на Oxy:



$D = D_1 + D_2$

Найдем точки пересечения:

1) прямой $y = 2x$ и прямой $y = 1$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow (\cdot) \text{ пересеч-я}: \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

2) прямой $y = 6 - x$ и прямой $y = 1$

$$\begin{cases} y = 6 - x \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 5 \Rightarrow (\cdot) \text{ пересеч-я}: (5, 1)$$

3) прямой $y=2x$ и прямой $y=6-x$

$$\begin{cases} y=2x \\ y=6-x \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} 6-x &= 2x \\ 3x &= 6 \\ x &= 2 \Rightarrow y=4 \end{aligned}$$

$$D_1: \begin{cases} \frac{1}{2} \le x \le 2 \\ 1 \le y \le 2x \end{cases} \qquad D_2: \begin{cases} 2 \le x \le 5 \\ 1 \le y \le 6-x \end{cases}$$

$$V = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \overset{\text{св-во аддитивности}}{=} \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$f(x,y) = (x^2+y^2)$$

$$\Rightarrow V = \int_{\frac{1}{2}}^{2} dx \int_{1}^{2x} (x^2+y^2)\,dy + \int_{2}^{5} dx \int_{1}^{6-x} (x^2+y^2)\,dy =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left[\int_{1}^{2x} (x^2+y^2)\,dy \Big|_{x=const} \right] dx + \int_{2}^{5} \left[\int_{1}^{6-x} (x^2+y^2)\,dy \Big|_{x=const} \right] dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left[\left(\frac{y^3}{3} + x^2 y \right) \Big|_{y=1}^{y=2x} \right] dx + \int_{2}^{5} \left[\left(\frac{y^3}{3} + x^2 y \right) \Big|_{y=1}^{y=6-x} \right] dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\frac{14x^3}{3} - x^2 - \frac{1}{3} \right) dx + \int_{2}^{5} \left(\frac{(6-x)^3}{3} + (6-x)x^2 - x^2 - \frac{1}{3} \right) dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\frac{14x^3}{3} - x^2 - \frac{1}{3} \right) dx + \int_{2}^{5} \left(\frac{(6-x)^3}{3} + 5x^2 - x^3 - \frac{1}{3} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{7x^4}{6} - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}x \right) \Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2} + \left(-\frac{(6-x)^4}{12} + \frac{5x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{3}x \right) \Bigg|_{2}^{5} =$$

$$= \left(\frac{112}{6} - \frac{8}{3} - \frac{2}{3} - \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{6} \right) + \left(-\frac{1}{12} + \frac{625}{3} - \right.$$

$$\left. - \frac{625}{4} - \frac{5}{3} + \frac{256}{12} - \frac{40}{3} + 4 + \frac{2}{3} \right) =$$

$$= \frac{495}{32} + 63 = \frac{2511}{32}$$

<u>Ответ:</u> $V = \frac{2511}{32}$

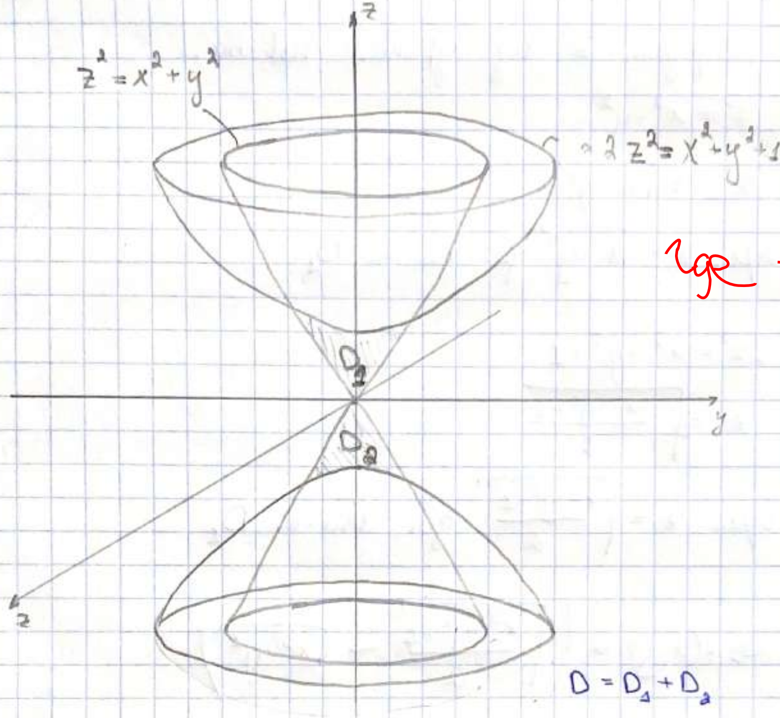
3. Найти объём тела, ограниченного поверхностями $z^2 = x^2 + y^2$, $2z^2 = x^2 + y^2 + 1$

<u>Решение:</u>

Найдем линией пересеч-е поверхности $z^2 = x^2 + y^2$ и $2z^2 = x^2 + y^2 + 1$:

$$\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ 2z^2 = x^2 + y^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} z^2 = 1 \\ z = \pm 1 \end{array}$$ – пл-ти пересеч-я пов-тей

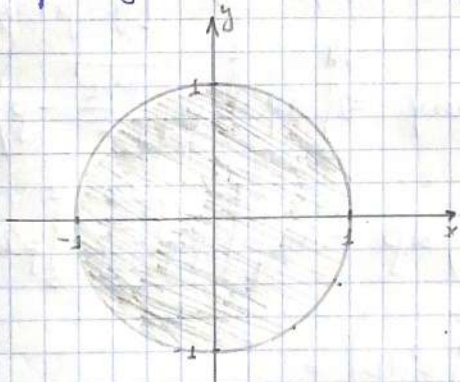
$$\begin{cases} 2z^2 = (x^2 + y^2) \cdot 2 \\ 2z^2 = x^2 + y^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x^2 + 2y^2 = x^2 + y^2 + 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}$$ – окр-ть



где тело?

$D = D_1 + D_2$

Д проекцию на пл-ть Oxy:



Поскольку обл-ти D_1 и D_2 симметричны отн-но пл-ти $z=0$, ~~достаточно~~ для нахождения объема тела, огранич-го пов-ми $z^2=x^2+y^2$ и $2z^2=x^2+y^2+1$, достаточно будет вычислить объем тела в обл-ти D_1 и удвоить получ. результат

Т.о. $V = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dy$

Выразим z из ур-ний пов-тей:

$$z^2 = x^2+y^2$$

$$z = \pm\sqrt{x^2+y^2}$$

Берем $z = \sqrt{x^2+y^2}$ для обл-ти D_1

$$2z^2 = x^2+y^2+1$$

$$z = \pm\sqrt{\frac{x^2+y^2+1}{2}}$$

Берем $z = \sqrt{\frac{x^2+y^2+1}{2}}$ для обл-ти D_1

$$\Rightarrow f(x,y) = \left(\sqrt{\frac{x^2+y^2+1}{2}} - \sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$\Rightarrow V = 2\iint\limits_{D_1} \left(\sqrt{\frac{x^2+y^2+1}{2}} - \sqrt{x^2+y^2}\right) dx\,dy = \begin{bmatrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{bmatrix} =$$

$$= 2\iint\limits_{D_1} \left(\sqrt{\frac{\rho^2+1}{2}} - \rho\right) \rho\,d\rho\,d\varphi = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\left(\sqrt{\frac{\rho^2+1}{2}} - \rho\right) d\rho =$$

$$= 2\varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \int_0^1 \rho\left(\sqrt{\frac{\rho^2+1}{2}} - \rho\right) d\rho = 4\pi\left(\int_0^1 \rho\sqrt{\frac{\rho^2+1}{2}}\,d\rho - \int_0^1 \rho^2 d\rho\right) =$$

$$= 4\pi\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 \sqrt{\rho^2+1}\,d(\rho^2+1) - \int_0^1 \rho^2 d\rho\right) =$$

$$= 4\pi\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{(\rho^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 - \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^1\right) =$$

$$= 4\pi\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\cdot 2^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{3} + 0\right) =$$

$$= 4\pi\left(\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{3}\right) = 4\pi\left(\frac{2\sqrt{2} - 1 - \sqrt{2}}{3\sqrt{2}}\right) =$$

$$= 4\pi\left(\frac{\sqrt{2} - 1}{3\sqrt{2}}\right) = \frac{4\pi\cdot(2-\sqrt{2})}{6}$$

<u>Ответ:</u> $V = \frac{4\pi(2-\sqrt{2})}{6}$