

Теория к РК2 по дисциплине «Теория вероятностей»

Лысцев Никита ИУ7-53Б

06 Ноября 2023

РК № 2 ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ, ОЦЕНИВАЕМЫЕ В 2 БАЛЛА

1) СФОРМУЛИРОВАТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ КАК СВЯЗАКИ СВОЙСТВА НЕСОБНУСТНОСТИ И НЕЗАВИСИМОСТИ СОБЫТИЙ?

События A и B называются несовместными, если их пересечение является невозможным событием, т.е. $AB = \emptyset$. В противном случае A и B называются совместными.
Про связь св-в несовместности и независимости событий!

1) Если A и B — несовместные события (а также $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$), то они обязательно зависимы.

2) Если A и B — совместные события, то они могут как зависеть, так и не зависеть.

3) Если A и B — зависимые события, то они могут как совместны, так и несовместны.

2) СФОРМУЛИРОВАТЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ.

Геом. определ-е вер-ти св-ва обобщается классич. определ-е на случай, когда $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ($|\Omega| = \infty$)

1) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$,

2) $0 < \text{mes}(\Omega) < \infty$, где mes — мера мн-ва $\text{mes}(A)$ — мера мн-ва A

Если $n=1$, то mes — длина
 $n=2$, то mes — площадь
 $n=3$, то mes — объем

3) Возможность принадлежности результатов эксперимента некоторому множеству пропорциональна мере этого мн-ва и не зависит от его расположения и профиля.

Тогда вер-ю вып-тия события $A \subseteq \Omega$ найдем по формуле

$$P(A) = \frac{\text{mes}(A)}{\text{mes}(\Omega)}$$

3) СФОРМУЛИРОВАТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИГМА-АЛГЕБРЫ СОБЫТИЙ СФОРМУЛИРОВАТЬ ЕЕ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

1) Ω — некоторое мн-во элементар. исходов, св-ва к-х-то св-ва, эквивалентно;

2) $\mathcal{B} \neq \emptyset$ — набор (совокупность) подмн-в мн-ва Ω .

Тогда \mathcal{B} называется сигма-алгеброй событий, если выполнены

- (1) Если $A \in \mathcal{B}$, то $\bar{A} \in \mathcal{B}$;
 (2) Если $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{B}$, то $A_1 + \dots + A_n + \dots \in \mathcal{B}$
 (∞ -сумма)

Основные св-ва (свойства) из опред-е сигма-алгебры:

- 1° $\Omega \in \mathcal{B}$
 2° $\emptyset \in \mathcal{B}$
 3° Если $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{B}$, то $A_1 \cdot \dots \cdot A_n \cdot \dots \in \mathcal{B}$
 4° Если $A, B \in \mathcal{B}$, то $A|B \in \mathcal{B}$

4) СФОРМУЛИРОВАТЬ АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ. СФОРМУЛИРОВАТЬ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ВЕРОЯТНОСТИ.

- 1) Ω - м-во э. исходов нек-го слух. эксперимента;
 2) \mathcal{B} - сигма-алгебра, заданная над Ω .

Тогда вероятностью (вероятностной мерой) наз-ся ф-ция

$$P: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$$

обладающая св-ми:

- 1° $\forall A \in \mathcal{B} \quad P(A) \geq 0$ (аксиома неотрицательности)
 2° $P(\Omega) = 1$ (аксиома нормированности)
 3° Если $\exists A_1, \dots, A_n, \dots$ - попарно несовместные события, то

$$P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$$
 (расширенная аксиома сложения)

Основные св-ва ф-ции:

- 1° $P(A) = 1 - P(\bar{A})$;
 2° $P(\emptyset) = 0$;
 3° Если $A \in \mathcal{B}$, то $P(A) \leq P(\Omega)$;
 4° $\forall A \in \mathcal{B} \quad 0 \leq P(A) \leq 1$;
 5° $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$, где $A, B \in \mathcal{B}$
 6° Для любого события A_1, \dots, A_n верно

$$\begin{aligned} P(A_1 + \dots + A_n) &= \\ &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cdot A_{i_2}) + \\ &+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot A_{i_3}) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cdot \dots \cdot A_n) \end{aligned}$$

5) ЗАПИСАТЬ АКСИОМУ СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, РАСШИРЕННУЮ АКСИОМУ СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И АКСИОМУ НЕПРЯВЫНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ.

Аксиома сложения:

Для любого конечного набора попарно несовместных событий A_1, \dots, A_n справедливо:

$$P(A_1 + \dots + A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$$

Аксиома непрерывности:

Для \downarrow убывающей пос-ти событий $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$
и соб-е $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots$ верно!

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

Расширенная аксиома сложения

Если $\exists A_1, \dots, A_n, \dots$ - попарно несовместные события, то

$$P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$$

Связь между ними:

Расширенная аксиома сложения эквивалентна аксиоме сложения и аксиоме непрерывности.

6) СФОРМУЛИРОВАТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСЛОВНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И ЕЕ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

1) $A \cap B$ - 2 соб-е, связанные с одним случ эксперимента;

2) Вероятностно известно, что в рез-те exper-та произошло соб-е B .

Тогда условной вер-ю occurrence соб-е A при услов, что произошло B , наз-ет $P(A|B)$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, P(B) \neq 0$$

Основные св-ва усл. вер-ти:

1) Задано соб-е B , $P(B) \neq 0$;

2) $P(A|B)$ \neq с-е как гр-ция события A .

Тогда $P(A|B)$ обладает всеми св-ми безуслов. вер-ти.

$$1^\circ P(A|B) \geq 0$$

$$2^\circ P(B|B) = 1$$

3) \downarrow попарно несовст. соб. A_1, \dots, A_n, \dots

$$P(A_1 + \dots + A_n | B) = P(A_1 | B) + \dots + P(A_n | B) + \dots$$

7) СФОРМУЛИРОВАТЬ ТЕОРЕМЫ О ФОРМУЛАХ УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ 2-х СОБЫТИЙ И ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧИСЛА СОБЫТИЙ

ТН Формула умножения вероятностей для 2-х событий

1) $A \cap B$ - события;

2) $P(A) > 0$.

Тогда

$$P(AB) = P(A)P(B|A)$$

III Формула умножения вероятностей для n событий.

- 1) A_1, \dots, A_n - события;
2) $P(A_1, \dots, A_n) > 0$;

Тогда
$$\frac{P(A_1, \dots, A_n)}{P(A_1, \dots, A_{n-1})} = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1, A_2) \cdot \dots$$

8) СФОРМУЛИРОВАТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРЫ НЕЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ КАК НЕЗАВИСИМОСТЬ ДВУХ СОБЫТИЙ СВЯЗАННОЙ С УСЛОВНЫМИ ВЕРОЯТНОСТЯМИ ИХ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ.

1) A и B - 2 соб-я, связанные с нек-м случ. экспериментом. События A и B наз-ся независимыми, если $P(AB) = P(A)P(B)$

TH

- 1) 1) $P(B) > 0$

Тогда A и B независимы $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$

- 2) 2) $P(A) > 0$

Тогда A и B независимы $\Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$

9) СФОРМУЛИРОВАТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОДПАРЫ НЕЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ И СОБЫТИЙ, НЕЗАВИСИМЫХ В СОВОКУПНОСТИ КАК ЭТИ СВ-ВА СВЯЗАНЫ МЕЖДУ СОБОЙ?

События A_1, \dots, A_n , ~~связанные с нек-м случ. экспериментом~~, наз-ся ~~независимыми~~ ~~в совокупности~~, если \forall для события этого набора независимы, т.е.

$$P(A_i, A_j) = P(A_i)P(A_j), \quad i \neq j, \quad i, j \in \{1, \dots, n\}$$

События A_1, \dots, A_n , связ-е с нек-м случ. экспериментом, наз-ся независимыми в совокупности, если

$\forall k \in \{2, \dots, n\}, k \neq i_1 < \dots < i_k$, где $i_j \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, k\}$ выполн-ся

$$P(A_{i_1}, \dots, A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$$

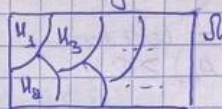
Вывод св-ва между собой.

Если A_1, \dots, A_n - независимы в совокупности, то они независимы попарно. Крм. Этим обратное неверно.

10) СФОРМУЛИРОВАТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОДПАРЫ ГРУППЫ СОБЫТИЙ. ВЕРНО ЛИ ЧТО НЕКОТОРЫЕ СОБЫТИЯ ИЗ ПОДПАРЫ ГРУПП МОГУТ БЫТЬ НЕЗАВИСИМЫМИ?

1) Ω - м-во исходов, связ-е с нек-м случ. эксп-том, а (A, B, P) - вер-е м-во этого случ-го эксп-та.

Рисунок 4 – Вопросы 7-10

$$\begin{aligned} 1) & P(U_i) > 0, \quad i = \overline{1, n}; \\ 2) & P(U_i) = 0 \quad \text{wpr } i \neq j; \\ 3) & \bigcup_{i=1}^n U_i = \Omega \end{aligned}$$


III.к K_i, K_j $f_i \neq f_j$ св. координаты совпадают и их
ф-та не равна, то они не только замкнуты

Th ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

2) $\frac{U_1}{A \in B} \dots \frac{U_n}{\text{событие}}$ — полная группа событий;

Плюс (это влияние из-за групповой работы):

$$P(A) = P(A|K_1)P(K_1) + \dots + P(A|K_n)P(K_n)$$

<u>Th</u>	Dorugue	Bainca
-----------	---------	--------

- 1) μ_1, \dots, μ_n - нгс;
- 2) $A \in \mathcal{B}$ - событие;
- 3) $P(A) > 0$

3) $P(A) > 0$

Durch $P(U_i | A) = \frac{P(A | U_i) P(U_i)}{P(A | U_1) P(U_1) + \dots + P(A | U_n) P(U_n)}$, $i=1, n$

13) ДАТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СХЕМЫ ИСПЫТАНИЙ БЕРНУЛЛИ, ЗАПИСАТЬ ФОРМУЛУ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ РОВНО k УСЛОВИЙ В СЕРИИ ИЗ n ИСПЫТАНИЙ.

7-и сир. экса-т, в р-те кот. водителка реализа-
ции огито из друк зив. икодог м.е. н-б з-х икодог
вудм составмо из 2-е з-мо ($|N| = 2$)

Один из экз. может условно быть назв. основным, второй — ксер-ов. экземпляр.

[illegible]

7) провозитесь серия из n испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха p . Тогда $P_n(k)$ есть вер-ть того, что в серии из n испытаний произойдет ровно k успехов.

$$P_n(k) = C_n \rho^k q^{n-k}$$

Рисунок 5 – Вопросы 10-13

- 14) Записать формулы для вычисления вероятности осуществления в серии из n испытаний а) ровно k успехов, б) хотя бы одного успеха, в) от k_1 до k_2 успехов.

а) см. из вопроса (формула)

б) $\exists P_n(k \geq 1)$ - вер-ть реализации хотя бы одного успеха в серии из n испытаний
Тогда $P_n(k \geq 1) = 1 - q^n$

в) $\exists P_n(k_1 \leq k \leq k_2)$ - вер-ть того, что в серии из n испытаний число успехов оказалось заключено между k_1 и k_2

$$\text{Тогда } P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}$$

I ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ, ОЦЕНИВАЕМЫЕ В 4 БАЛЛА

- 15) Сформулировать определение элементарного исхода случайного эксперимента в пространстве элементарных исходов. Сформулировать классическое определение вероятности. Привести пример.

Элементарный ^{случ. эк-т} в n -к элементарных исходов ка-с один из возможных результатов этого эксперимента:
(б-ка)

- 1) В данной данной эк-та никакой исход нельзя разделить на более мелкие составяющие
- 2) В дан-те эк-та настур. ровно 1 из n исходов.

Классич-е опре-е вер-ти:

- 1) $1 \leq |A| \leq N < \infty$ n -б элементарных исх-ов сур. эк-та
- 2) Во всяком эксперименте нет оснований предполагать, что или иной элем. исход останется.

Вер-ю соб-и $A \in \Omega$ на-ют след

$$P(A) = \frac{N_A}{N}, \text{ где } N_A = |A|$$

Пример: Эксперимент: 2 раза бросают игральный кубик
Задаче событие:

$A = \{ \text{сумма выпавших очков больше или равна 11} \}$

$P(A) = ?$

Решение:

Определим исход: (x_1, x_2) - упоряд. пара, x_i - ка-во очков, выпавших при i -б. броске, $i = 1, 2$. ($N = 1 \cdot 2^2 = 36$)

Рисунок 6 – Вопросы 14-15

В событии A могут возникнуть следующие исходы:

$$A = \{(5,6), (6,5), (6,6)\}$$

Тогда $N_A = |A| = 3$, и, в соотв. с определением, получим

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

16) СФОРМУЛИРОВАТЬ КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ. ОПИРАЯСЬ НА НЕГО, ДОКАЗАТЬ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ВЕРОЯТНОСТИ.

Классическое определение вероятности 1 сч. 15 вопрос

16-ва вероятности (в соотв. с классическим определением):

$$1^\circ \forall A \subseteq \Omega \quad P(A) \geq 0;$$

$$2^\circ P(\Omega) = 1;$$

$$3^\circ \text{ Если } A \cdot B = \emptyset, \text{ то } P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Док-во:

$$1^\circ \text{ Так как } N_A \geq 0, N \geq 0, \text{ то } P(A) = \frac{N_A}{N} \geq 0$$

$$2^\circ \text{ Принимая во внимание, что } N_\Omega = |\Omega| = N, \text{ получаем}$$

$$P(\Omega) = \frac{N_\Omega}{N} = \frac{N}{N} = 1$$

$$3^\circ \text{ Так как } \Omega - \text{конечна, } A, B \subseteq \Omega, \text{ то получим, что } A \text{ и } B \text{ конечны.}$$

В соотв. с р-ном включения-исключения

$$|A+B| = |A| + |B| - |A \cdot B|$$

$$\text{Так как } A \cdot B = \emptyset, \text{ то } N_{A+B} = |A+B| = |A| + |B| - |A \cdot B| = N_A + N_B$$

$$\Rightarrow P(A+B) = \frac{N_{A+B}}{N} = \frac{N_A + N_B}{N} = \frac{N_A}{N} + \frac{N_B}{N} = \overset{0}{P(A)} + P(B)$$

17) СФОРМУЛИРОВАТЬ СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ. УКАЗАТЬ ЕГО ОСНОВНЫЕ НЕДОСТАТКИ.

1) Опыт проводится n раз;

2) При этом событии A наступает n_A раз.

Вер-но события A - классическая, т.е. берет из опыта

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}$$

Основной недостаток:

1) ∞ -я величина опыта на фактически бесконечно; для конечных n отношение может измениться для разных n

8) С точки зрения современной математики такое определение - архаично. Оно не дает базиса для построения теории.

18) СФОРМУЛИРОВАТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИГМА-АЛГЕБРЫ СОБЫТИЙ.
ДОКАЗАТЬ ЕЕ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА.

Определение сигма-алгебры событий: см 3 вопрос.

СВ-ба:

1° $\Omega \in \mathcal{B}$

2° $\emptyset \in \mathcal{B}$

3° $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{B} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots \in \mathcal{B}$

4° $A, B \in \mathcal{B}$, то $A \cap B \in \mathcal{B}$

Доказ-во:

1° По определению $\mathcal{B} \neq \emptyset \Rightarrow \exists A \in \mathcal{B}$; из определ. сигма-алгебры (аксиома 1) $\bar{A} \in \mathcal{B}$

Тогда из 2-й аксиомы следует, что $\exists (\bar{A} \cup A) \in \mathcal{B}$; т.к. $\bar{A} \cup A = \Omega$, то $\Omega \in \mathcal{B}$

2° т.к. $\Omega \in \mathcal{B}$ (из-за 1°), то, по аксиоме 1, $\bar{\Omega} \in \mathcal{B}$, а $\bar{\Omega} = \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{B}$

3° Из 1-го события $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{B}$ по аксиоме 1 следует, что \exists конеч. этих событий $A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{B}$. По аксиоме 2 следует \exists дополнение $\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n} \in \mathcal{B}$, и из аксиомы 1-й \exists дополнение этого объединения $\overline{\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}} \in \mathcal{B}$. Из этого, по 3-й акс. теореме, получается $A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{B}$, то есть по индукции $A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{B}$

4° Из св-ва операции над множествами можно заключить, что $A \cap B = \overline{A \cup \bar{B}}$. По аксиоме 1 из $B \in \mathcal{B}$ то $\bar{B} \in \mathcal{B}$. По следствию 3, то $A \cup \bar{B} \in \mathcal{B}$ следует, то $A \cap B \in \mathcal{B}$, то, собственно, св. утверждением $A \cap B \in \mathcal{B}$

19) СФОРМУЛИРОВАТЬ АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ.
ДОКАЗАТЬ СВОЙСТВА ВЕРОЯТНОСТИ ДЛЯ ДОПОЛНЕНИЯ СОБЫТИЯ,
ДЛЯ НЕВОЗМОЖНОГО СОБЫТИЯ, ДЛЯ СЛЕДСТВИЯ СОБЫТИЯ.

Аксиоматическое определение вероятности: см 4. вопрос

СВ-ба вероятн (не все):

1° $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;

2° $P(\emptyset) = 0$;

3° Если $A \subset B$, то $P(A) \leq P(B)$

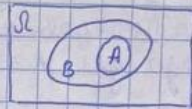
Доказ-во:

1° По акс. 1-й акс. алгебры $\exists (A \cup \bar{A}) = \Omega$; по аксиоме вероятн на $P(\Omega) = 1 = P(A \cup \bar{A})$; по аксиоме вероятн 2-й $(A \cap \bar{A} = \emptyset)$, $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

2° т.к. $\emptyset = \bar{\Omega}$, по акс. вероятн 2 $P(\Omega) = 1$. По св-ву 1° $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$

Рисунок 8 – Вопросы 17-19

$$3^\circ \quad A \subseteq B \Rightarrow \\ \Rightarrow B = A + B \setminus A$$



$$\text{Тогда } P(B) = P(A + B \setminus A) = \left\{ \begin{array}{l} \text{попарно} \\ A \text{ и } B \setminus A \text{ несовместны} \\ \Rightarrow \text{используем аксиому 3} \\ \text{аксиом. для вероят.} \end{array} \right\} =$$

$$= P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$$

\Downarrow 0 \Downarrow 0
 по акс. 1 по акс. 1

20) СФОРМУЛИРОВАТЬ АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ. СФОРМУЛИРОВАТЬ СВОЙСТВА ВЕРОЯТНОСТИ ДЛЯ СУММЫ ДВУХ СОБЫТИЙ И ДЛЯ СУММЫ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧИСЛА СОБЫТИЙ. ДОКАЗАТЬ ПЕРВОЕ ИЗ ЭТИХ СВОЙСТВ.

- 1) Ω - n -б э-к исходов к-го слуг. эксп-та,
 2) \mathcal{B} - σ -алгебра, заданная на Ω .

Тогда вероятностная (кратчайшей мерой) на \mathcal{B} -се σ -сис

$$P: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$$

к-е св-ва:

$$5^\circ \quad P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad \text{для } A, B \in \mathcal{B}$$

6. + к-е св-ва событий A_1, \dots, A_n взаимно

$$\begin{aligned} P(A_1 + \dots + A_n) &= \\ &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cdot A_{i_2}) + \\ &+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot A_{i_3}) + (-1)^{n-1} P(A_1 \cdot \dots \cdot A_n) \end{aligned}$$

Доказ.

$$5^\circ \text{ а) } A+B = A + B \setminus A$$

$$\text{т.к. тогда } A \cdot (B \setminus A) = \emptyset$$

$$\Rightarrow \text{по акс. 3}^\circ \quad P(A+B) = P(A) + P(B \setminus A) \quad (*)$$

$$\text{б) } B = AB + (B \setminus A)$$

$$\text{т.к. тогда } (AB) \cdot (B \setminus A) = \emptyset$$

$$\Rightarrow \text{по акс. 3}^\circ \quad P(B) = P(AB) + P(B \setminus A) \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(AB)$$

Подставим в (*) получим:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Рисунок 9 – Вопросы 19-20

(21) СФОРМУЛИРОВАТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСЛОВНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ДОКАЗАТЬ ЧТО ОНА УДОВЛЕТВОРАЕТ ЭТИ ОСНОВНЫМИ СВОЙСТВАМИ БЕЗУСЛОВНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ.

Опреде уе. $P(A|B)$ см. ВОПРОС 6

$$1^\circ P(A|B) = \frac{\overbrace{P(AB)}^{>0}}{\underbrace{P(B)}_{>0}} \Rightarrow P(A|B) > 0$$

$$2^\circ P(B|B) = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

$$3^\circ P(A_1 + \dots + A_n + \dots | B) = \frac{P((A_1 + \dots + A_n + \dots) \cap B)}{P(B)} =$$

$$= \frac{1}{P(B)} \cdot P(A_1 B + A_2 B + \dots + A_n B + \dots) = \left\{ \begin{array}{l} A_i, A_j \text{ несовм-мы, } i \neq j \\ A_i B \subseteq A_i, A_j B \subseteq A_j \\ \Rightarrow (A_i B) \cap (A_j B) = \emptyset \end{array} \right\} =$$

$$\stackrel{\text{акс. Вейн 3}}{=} \frac{1}{P(B)} \cdot [P(A_1 B) + \dots + P(A_n B) + \dots] = \left\{ \begin{array}{l} \text{св-во умнож-ия} \\ \text{вер-тй} \\ \text{на постоянную} \end{array} \right\} =$$

$$= P(A_1 | B) + \dots + P(A_n | B) \quad \blacksquare$$

(22) ДОКАЗАТЬ ТЕОРЕМУ О ФОРМУЛАХ УМНОЖЕНИЯ ДЛЯ 2-Х СОБЫТИЙ И ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧИСЛА СОБЫТИЙ

Тн Ф-ла умножения вероятностей для 2-х событий

- 1) A, B — события;
2) $P(A) > 0$.

Тогда $P(AB) = P(A)P(B|A)$

Доказ-во:

Т.к. $P(A) > 0$, то определим уе. $P(B|A)$

$$P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)}$$

Согл-но сущест $P(AB) = P(A)P(B|A) \quad \blacksquare$

Тн Формула умнож-ия вер-тй для n событий

- 1) A_1, \dots, A_n — события;
2) $P(A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}) > 0$.

Тогда $P(A_1 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1})$

Доказ-во:

24) СФОРМУЛИРОВАТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОПАРНО НЕЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ И СОБЫТИЙ НЕЗАВИСИМЫХ В СОВОКУПНОСТИ. ПОКАЗАТЬ НА ПРИМЕРЕ, ЧТО ИЗ ПЕРВОГО НЕ СЛЕДУЕТ ВТОРОЕ.

Опред-е попарно независ. соб. и соб., независ. в совокупности: см. ВОПРОС 9

Пример: (Ферми-миссия)

4 возможных исхода, на одной чаше кот. "написано" 1, на второй - 2, на 3-й - 3, на 4-й - 1, 2, 3.

Этот эксперимент один раз повторяется.

Соб-е A_i значит, что на i -й чаше "написано" 1, также A_2 для 2, A_3 для 3. Показано, что события A_1, A_2, A_3 попарно независимы, но не являются независимыми в совокупности.

1. Значит, что они независимы попарно. Так $P(A_i) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, i=1, 2, 3$, то

$$P(A_1, A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{1}{4}$$

События A_1, A_2 означают, что на i -й чаше присутствуют 1 и 2.

Все аналогично для $P(A_1, A_3) = P(A_1)P(A_3)$ и $P(A_2, A_3) = P(A_2)P(A_3)$

2. Проверим, верно ли $P(A_1, A_2, A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$, кот. должно быть равно $\frac{1}{8}$. Но совместные события A_1, A_2, A_3 означают, что на i -й чаше присутствуют 1, 2 и 3, т.е. на чаше 1, 2 и 3, что не равно $\frac{1}{8}$.

И выводим, что $\frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}$

\Rightarrow события A_1, A_2 и A_3 не являются независимыми в совокупности.

25) ДОКАЗАТЬ ТЕОРЕМУ О ФОРМУЛЕ ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Тн. Формула полной вероятности

- 1) H_1, \dots, H_n - ПГС;
2) $A \in B$ - некое событие;

Тогда (это событие некое разбито на n частей):

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)$$

Доказ-во:

$$1) P(A) = P(A|H) = P(A|(H_1 + \dots + H_n)) = P(A|H_1 + \dots + H_n) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{поэтому, что } A \cap H_i \subseteq H_i, i=1, n \\ \Rightarrow (A \cap H_i) \cap (A \cap H_j) = \emptyset \text{ при } i \neq j \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{аксиома сложения} \\ \text{ф-мы} \end{array} \right\} =$$

$$= P(A \cap H_1) + \dots + P(A \cap H_n) = \left\{ \begin{array}{l} P(H_i) > 0 \Rightarrow \text{т.е. условно} \\ \Rightarrow P(A \cap H_i) = P(A|H_i)P(H_i) \end{array} \right\} =$$

$$= P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)$$

26) Доказать теорему о ф-ле Байеса

Тн Ф-ла Байеса

- 1) U_1, \dots, U_n — ПДС;
- 2) $A \in B$ — нек-е событие;
- 3) $P(A) > 0$

ф-ла Байеса

Тогда

$$P(U_i | A) = \frac{P(A | U_i) P(U_i)}{P(A | U_1) P(U_1) + \dots + P(A | U_n) P(U_n)}, \quad i = \overline{1, n}$$

Форм-ла

$P(A) > 0 \Rightarrow$ опреде. ун. ф-та

$$P(U_i | A) = \left\{ \text{отв-е} \right\} = \frac{P(A | U_i) P(U_i)}{P(A)} \quad \text{по Тн. умнож.}$$

по ф-ле полн. ф-та

$$= \frac{P(A | U_i) P(U_i)}{P(A | U_1) P(U_1) + \dots + P(A | U_n) P(U_n)}$$

27) Доказать формулы для вычисления вероятности осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли

Тн Бернулли

- 1) Проводится серия из n испытаний по схеме Бернулли, с вер-но успеха в отдельном испытании.

Тогда $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $k = \overline{0, n}$ — ф-та реализации ровно k успехов в серии из n испытаний.

Форм-ла

- 1) Определим результат всей серии из n испытаний с использованием кортежа (x_1, \dots, x_n) , где $x_i = \begin{cases} 1, & \text{если в } i\text{-м испытании успех;} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

- 2) Событие $A = \{ \text{в серии произошло ровно } k \text{ успехов} \}$ состоит из кортежей успехов в кот. ровно k единиц, а остальные $n-k$ — нулей, т.е. $n-k$.

Каждый такой кортеж однозначно задается k номерами различн. мест из $\{1, \dots, n\}$, кот. отвечают номерам позиций с "1".

Или $|A|$ равно числу способов выбрать k номеров различн. мест из n мест, т.е.

$$|A| = C_n^k, \quad \text{т.е. числ. сочетаний без повторений из } n \text{ по } k.$$

3) k -и произвольн. кортени из A :

$$(x_1, \dots, x_k) \in A$$

Каждое событие ω реализуется при проведении всей серии:

$$P\{(x_1, \dots, x_k)\} = P\left\{\left\{\begin{smallmatrix} \text{всп} \\ \text{испыт} \end{smallmatrix} \right\}_{x_1} \cdot \left\{\begin{smallmatrix} \text{всп} \\ \text{испыт} \end{smallmatrix} \right\}_{x_2} \cdot \dots \cdot \left\{\begin{smallmatrix} \text{всп} \\ \text{испыт} \end{smallmatrix} \right\}_{x_k}\right\} =$$

$$= \left| \begin{smallmatrix} \text{испытания} \\ \text{неудачи} \end{smallmatrix} \right| = \underbrace{P\left\{\begin{smallmatrix} \text{всп} \\ \text{испыт} \end{smallmatrix} \right\}_{x_1}}_{\substack{k \text{ раз} \text{ выпад} p \\ n-k \text{ раз} \text{ выпад} q}} \cdot \dots \cdot P\left\{\begin{smallmatrix} \text{всп} \\ \text{испыт} \end{smallmatrix} \right\}_{x_k}} = p^k q^{n-k}$$

III. д. Все исходы - кортени внутри A равновероятны

$$4) \text{ III. ф. } P_n(k) = P(A) = |A| \cdot p^k q^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k} \quad \blacksquare$$

Рисунок 13 – Вопросы 27