

Решение задач для экзамена по дисциплине «Теория
вероятностей»

Лысцев Никита ИУ7-53Б

19 ноября 2023 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1	Комплект №1. Случайные события	2
---	--------------------------------	---

1 Комплект №1. Случайные события

Задача с жеман.

1.1) 10 черных, 15 белых. Проанализируйте игру.

$A = \{ \text{выигрыш наудачу} \}$

$P(A) = ?$

Решение:

1) НПС: $H_1 = \{ \text{проигрывает} \}$, $P(H_1) = \frac{15}{25}$
 $H_2 = \{ \text{выигрывает} \}$, $P(H_2) = \frac{10}{25}$

2) $P(A) = ?$

$$P(A) = \left\{ \begin{array}{l} \text{проигрывает} \end{array} \right\} = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) = 0,6$$

Далее: $P(A) = 0,6$

Рисунок 1.1 – Решение задачи 1.1

1.2) 9 этажей, 5 лифтов

$A = \{ \text{все выходы из разн. этажей} \}$

$P(A) = ?$

Решение.

~~1) Непосредственно: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, где x_i — этаж, на котором находится лифт i -й.~~

1) Непосредственно: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, где x_i — этаж, на котором находится лифт i -й.

2) $P(A) = ?$

количество этажей: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

$A: \begin{pmatrix} 8 \\ 8'7'6'5'4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow N_A = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = A_8^5 = \frac{8!}{3!} = 6720$

$N = 8^5 = 32768$

$\Rightarrow P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{6720}{32768} = \frac{105}{512}$

Ответ: $P(A) = \frac{105}{512}$

Рисунок 1.2 – Решение задачи 1.2

1.3) 6 белых, 5 черных. Извлекаем один шар случайным образом

Решение:

1) π гипотезы: $H_1 = \{\text{извлеченный шар случайного цвета - белый}\}$, $P(H_1) = \frac{6}{11}$
 $H_2 = \{\text{извлеченный шар случайного цвета - черный}\}$, $P(H_2) = \frac{5}{11}$

2) $A = \{\text{2 извлеченных шара одного цвета}\}$

~~Решение:~~
 Ф-ла Байеса:

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)} \quad \text{---}$$

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = \frac{10}{45} \cdot \frac{6}{11} + \frac{15}{45} \cdot \frac{5}{11} = \frac{3}{11}$$

$$P(A|H_1) = \frac{C_5^2}{C_{11}^2} = \frac{10}{45}$$

$$P(A|H_2) = \frac{C_6^2}{C_{11}^2} = \frac{15}{45}$$

$$\text{---} \quad \frac{\frac{10}{45} \cdot \frac{6}{11}}{\frac{3}{11}} = \frac{4}{9}$$

Ответ: $\frac{4}{9}$

Рисунок 1.3 – Решение задачи 1.3

1.5

Решение:

1) Вер. с. Бернулли для $n=4$ p - успех в цель, $q = 1-p$ ~~неудача~~

2) $P_4(k \geq 1) = 0,9744$ - по условию. Также, по с. Бернулли, $P_4(k=1)$ есть вер-ть того, что в серии из 4х испытаний будет реализован ровно 1 успех.

$$P_4(k \geq 1) = 1 - q^4 \quad (*)$$

3) Вер-ть того, что 1-ый выстрел, с с. Бернулли, равен

$$P_1(1) = C_1^1 p^1 q^0 = \frac{1!}{0! \cdot 1!} p^1 \cdot 1 = p$$

$$\text{из } (*) : 1 - (1-p)^4 = 0,9744$$

$$(1-p)^4 = 0,0256$$

$$(1-p) = 0,16$$

$$p = 0,84$$

Рисунок 1.4 – Решение задачи 1.5

1.6) 100 билетов: 50 выигрышных 3 каждому вытаскив.

Капити вы-ть: а) все 3 выигрыш. - соб. А
б) хотя бы 1 выигрыш. - соб. В

Реш-е:

1) Исход: (x_1, x_2, x_3) - число разменений из 100 по 3, где $x_i \in \{0, 1\}$
где 0 - выигрыш билет, 1 - проигрыш билет

$$N = A_{100}^3 = \frac{100!}{(100-3)!} = 970200 \text{ - общее число исходов}$$

2) $P(A) = ?$

$$A: \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \quad N_A = 50 \cdot 49 \cdot 48 = 117600$$

$$\Rightarrow P(A) = \left\{ \begin{smallmatrix} \text{класс} \\ \text{вы-е} \\ \text{вы-ти} \end{smallmatrix} \right\} = \frac{N_A}{N} = \frac{117600}{970200} = \boxed{\frac{4}{33}}$$

3) $P(B) = ?$

4) соб. $C = \bar{B} = \{ \text{среди 3-х вытаск-х билетов нет выигрышного} \}$

$$\Rightarrow P(B) = \left\{ \begin{smallmatrix} \text{сб-во} \\ \text{вы-ти} \end{smallmatrix} \right\} = 1 - P(\bar{B}) = 1 - P(C)$$

$$C: \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \quad N_C = 50 \cdot 49 \cdot 48 = 117600$$

$$\Rightarrow P(C) = \left\{ \begin{smallmatrix} \text{класс} \\ \text{вы-е} \\ \text{вы-ти} \end{smallmatrix} \right\} = \frac{N_C}{N} = \frac{4}{33}$$

$$\Rightarrow P(B) = 1 - P(C) = 1 - \frac{4}{33} = \boxed{\frac{29}{33}}$$

Рисунок 1.5 – Решение задачи 1.6

17) $p = 0,9$. Для поражения цели нужно ≥ 2 попадания
 $A = \{ \text{цель поражена при 3-х выстрелах} \}$
 $P(A) = ?$

Решение:

1) Исл-н сл. Биномиат для успеха - попадания в цель, $p = 0,9$
 неудача - промах, $q = 1 - p = 0,1$

$n = 3$

$$P(A) = P_3(k \geq 2) = C_3^2 p^2 q^1 + C_3^3 p^3 q^0 = \dots \text{ответ}$$

Рисунок 1.6 – Решение задачи 1.7

18) 1-я урна: 5 белых и 4 черных шара
 2-я урна: 4 белых и 2 черных шара
 Извл. сл. шар из сл. урны оказался черным.
 $A = \{ \text{извлеч. шар был взят из 2-й урны} \}$
 $P(A) = ?$

Решение:

1) \mathcal{H} -м $\text{ПРВ: } H_i = \{ \text{шар был взят из } i\text{-й урны} \}, i = \overline{1,2} \quad P(H_i) = \frac{1}{2}$

2) ~~По др-е полн. бур-ти~~ $B = \{ \text{ввл. шар оказался черным} \}$
~~По др-е полн. бур-ти:~~

$$P(B) = \underbrace{P(B|H_1)}_{\frac{4}{9}} \underbrace{P(H_1)}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{P(B|H_2)}_{\frac{2}{6}} \underbrace{P(H_2)}_{\frac{1}{2}} = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{9}$$

По др-е Байеса:

$$P(H_2|B) = \frac{P(B|H_2) P(H_2)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2}{9}} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

Рисунок 1.7 – Решение задачи 1.8