

Теория вероятностей

Домашнее задание №1 (модуль 1)

специальность ИУ7, 3-й курс, 5-й семестр

Искуп Никита Дмитриевич

ИУ7-53Б

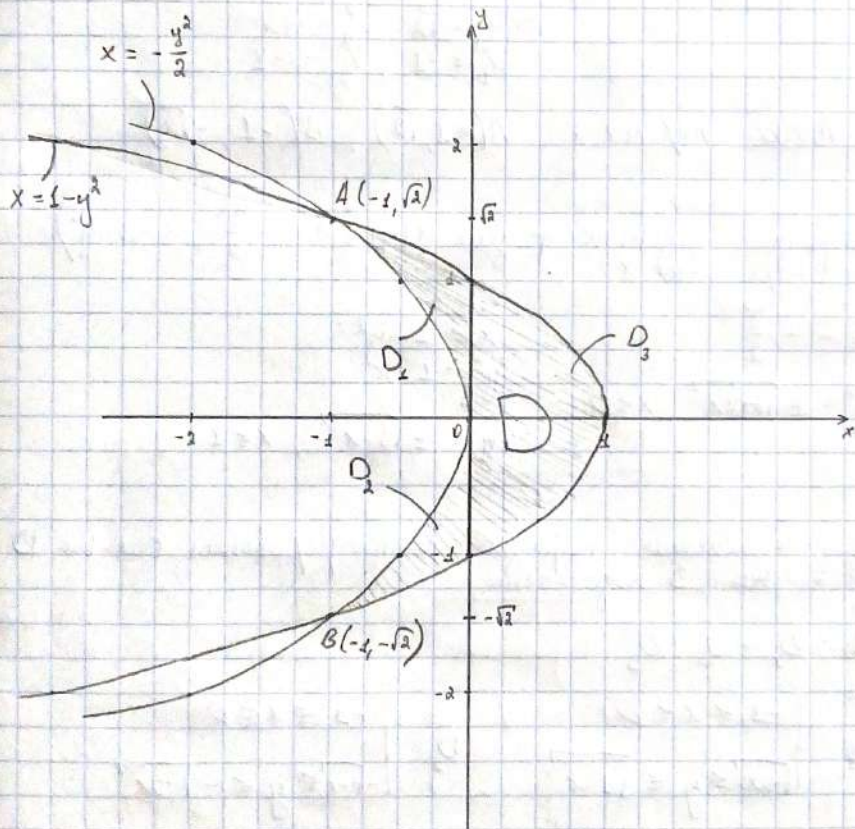
Вариант 14

1	2	3	Σ
3	1	1	5

1. Изменим порядок интегрирования в данном интеграле и составим соответствующий рисунок!

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\frac{y^2}{2}}^{1-y^2} f(x,y) dx = I$$

Решение:



I будем интегрировать по D .

$$D: \begin{cases} -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2} \\ -\frac{y^2}{2} \leq x \leq 1-y^2 \end{cases}$$

О алгебраическая кривая: $x = -\frac{y^2}{2}$, $x = 1 - y^2$

Найти (1) пересек-е точек кривых (точки A и B):

$$\begin{cases} x = -\frac{y^2}{2} \\ x = 1 - y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} -\frac{y^2}{2} &= 1 - y^2 \quad | \cdot 2 \\ -y^2 &= 2 - 2y^2 \\ y^2 &= 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y_1 = \sqrt{2}, y_2 = -\sqrt{2} \\ x_1 = -1, x_2 = -1$$

\Rightarrow точки пересек-е: $A(-1, \sqrt{2})$, $B(-1, -\sqrt{2})$

Вывести задание функции $x(y)$ ($x = -\frac{y^2}{2}$, $x = 1 - y^2$)
выразить y от x :

$$x = -\frac{y^2}{2} \\ y = \pm \sqrt{-2x}, \quad x \leq 0$$

$$x = 1 - y^2 \\ y^2 = 1 - x \\ y = \pm \sqrt{1-x}, \quad x \leq 1$$

Для вычисления площади интегрирование по x и y
разоб. на 3 подобласти:

$$D = D_1 + D_2 + D_3$$

$$D_1: \begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{-2x} \leq y \leq \sqrt{1-x} \end{cases}$$

$$D_2: \begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ -\sqrt{1-x} \leq y \leq -\sqrt{-2x} \end{cases}$$

$$D_3: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ -\sqrt{1-x} \leq y \leq \sqrt{1-x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\frac{y^2}{2}}^{1-y^2} f(x, y) dx = \int_{-1}^0 dx \int_{\sqrt{-2x}}^{\sqrt{1-x}} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x}}^{-\sqrt{-2x}} f(x, y) dy + \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1-x}} f(x, y) dy$$

$$+ \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1-x}} f(x,y) dy$$

Ответ:

$$I = \int_{-1}^0 dx \int_{\sqrt{-2x}}^{\sqrt{1-x}} f(x,y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x}}^{-\sqrt{-2x}} f(x,y) dy +$$

$$+ \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1-x}} f(x,y) dy$$

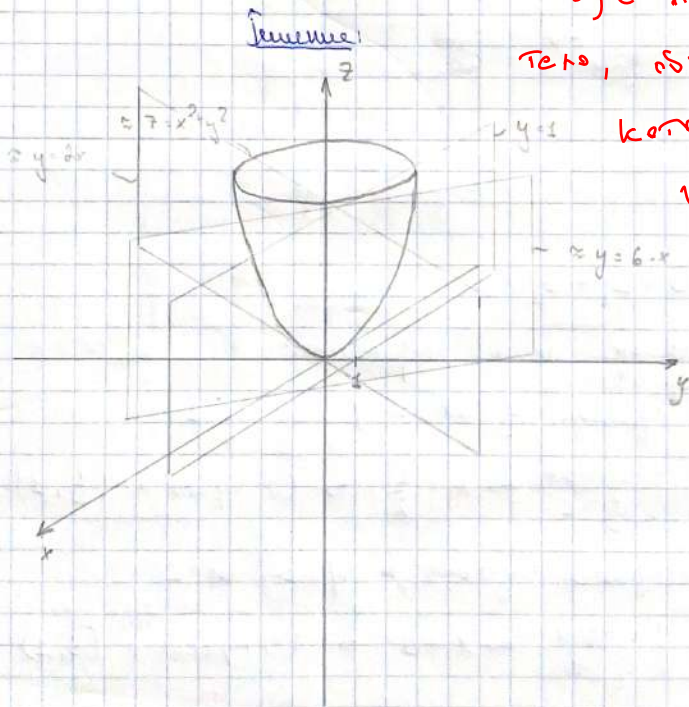
2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями
 $z = x^2 + y^2$, $z = 0$, $y = 1$, $y = 2x$, $y = 6-x$

уже не рис.

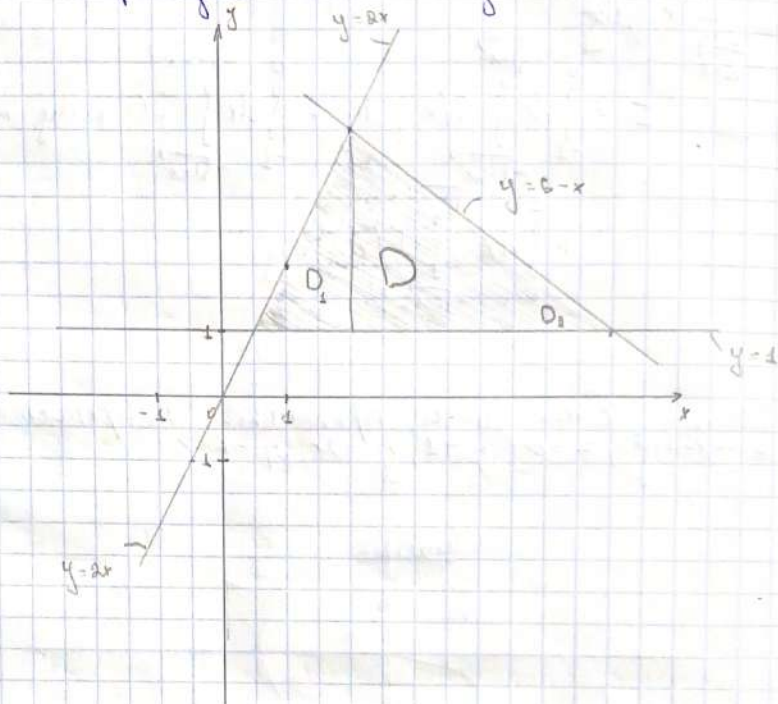
Тело, объем

которого

нужно?



3-я - Нормальная на ~~на~~ Огу!



$$D = D_1 + D_2$$

Найдем точки пересечения:

- 1) Прямой $y = 2x$ и прямой $y = 1$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow (.) \text{ пересечение: } (\frac{1}{2}, 1)$$

- 2) Прямой $y = 6 - x$ и прямой $y = 1$

$$\begin{cases} y = 6 - x \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 5 \Rightarrow (.) \text{ пересечение: } (5, 1)$$

3) Funktion $y=2x$ u. Funktion $y=6-x$

$$\begin{cases} y=2x \\ y=6-x \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} 6-x &= 2x \\ 3x &= 6 \\ x &= 2 \Rightarrow y = 4 \end{aligned}$$

$$D_1: \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x \leq 2 \\ 1 \leq y \leq 2x \end{cases}$$

$$D_2: \begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ 1 \leq y \leq 6-x \end{cases}$$

$$V = \iint_D f(x,y) dx dy \stackrel{\text{ab-lo. gegenläufig}}{=} \iint_{D_1} f(x,y) dx dy + \iint_{D_2} f(x,y) dx dy$$

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)$$

$$\Rightarrow V = \int_{\frac{1}{2}}^2 dx \int_1^{2x} (x^2 + y^2) dy + \int_2^5 dx \int_1^{6-x} (x^2 + y^2) dy =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^2 \left[\int_1^{2x} (x^2 + y^2) dy \Big|_{x=\text{const}} \right] dx + \int_2^5 \left[\int_1^{6-x} (x^2 + y^2) dy \Big|_{x=\text{const}} \right] dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^2 \left[\left(\frac{y^3}{3} + x^2 y \right) \Big|_{y=1}^{y=2x} \right] dx + \int_2^5 \left[\left(\frac{y^3}{3} + x^2 y \right) \Big|_{y=1}^{y=6-x} \right] dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{14x^3}{3} - x^2 - \frac{1}{3} \right) dx + \int_2^5 \left(\frac{(6-x)^3}{3} + (6-x)x^2 - x^2 - \frac{1}{3} \right) dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{14x^3}{3} - x^2 - \frac{1}{3} \right) dx + \int_2^5 \left(\frac{(6-x)^3}{3} + 5x^2 - x^3 - \frac{1}{3} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{7x^4}{6} - \frac{x^2}{3} - \frac{1}{3}x \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^2 + \left(-\frac{(6-x)^4}{12} + \frac{5x^3}{5} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{3}x \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^5 =$$

$$= \left(\frac{112}{6} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{6} \right) + \left(-\frac{1}{12} + \frac{625}{3} -$$

$$- \frac{625}{4} - \frac{5}{3} + \frac{256}{12} - \frac{80}{3} + 4 + \frac{2}{3} \right) =$$

$$= \frac{495}{32} + 63 = \frac{2511}{32}$$

Ответ: $V = \frac{2511}{32}$

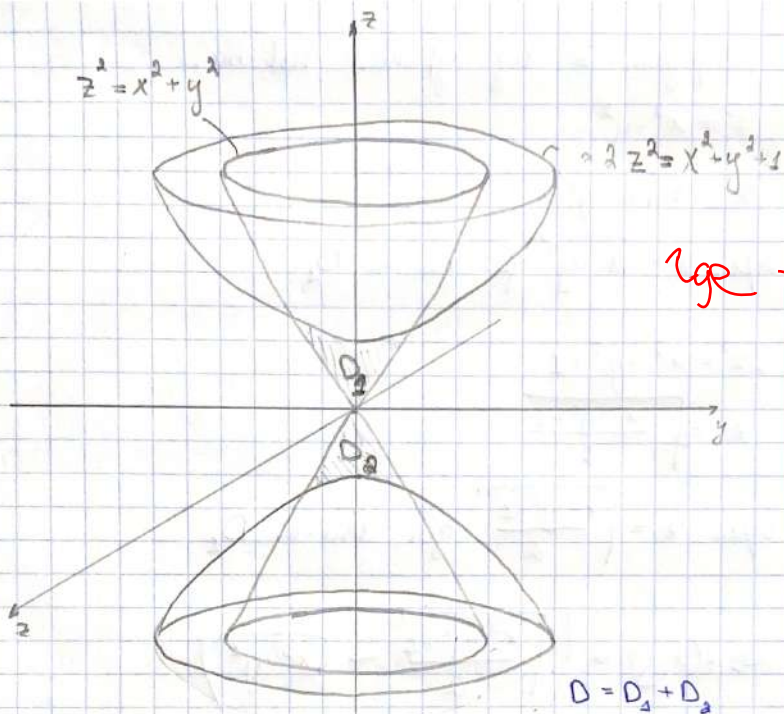
3. Найти объём тела, ограниченное поверхностями $z^2 = x^2 + y^2$, $2z^2 = x^2 + y^2 + 1$

Решение:

Найти меньшую поверхность $z^2 = x^2 + y^2$ и $2z^2 = x^2 + y^2 + 1$!

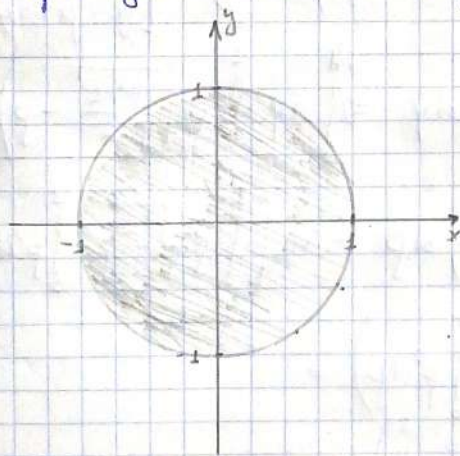
$$\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ 2z^2 = x^2 + y^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} z^2 = 1 \\ z = \pm 1 \end{matrix} \text{ — на этих поверхностях}$$

$$\begin{cases} 2z^2 = (x^2 + y^2) \cdot 2 \\ 2z^2 = x^2 + y^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2x^2 + 2y^2 = x^2 + y^2 + 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{matrix} \text{ — окружность}$$



где $z > 0$?

→ проекция на плоскость Oxy :



Поскольку объём $D_1 \cup D_2$ симметричен относительно плоскости $z=0$, ~~тогда~~ где некоторый объём D_1 равен объёму D_2 , поэтому будем считать объём D_1 и удвоим наш результат

И.о. $V = \iint_D f(x,y) dx dy = 2 \iint_{D_1} f(x,y) dy$

Вектор \vec{z} из ун-наи ноб-мун:

$$\vec{z}^2 = x^2 + y^2$$

$$z = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$$

Если $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ где обн-н D_1

$$2z^2 = x^2 + y^2 + 1$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + 1}{2}}$$

Если $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + 1}{2}}$ где обн-н D_1

$$\Rightarrow f(x, y) = \left(\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + 1}{2}} - \sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

$$\Rightarrow V = 2 \iint_{D_1} \left(\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + 1}{2}} - \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx dy = \left[\begin{array}{l} x = p \cos \varphi \\ y = p \sin \varphi \end{array} \right] =$$

$$= 2 \iint_{D_1} \left(\sqrt{\frac{p^2 + 1}{2}} - p \right) p dp d\varphi = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 p \left(\sqrt{\frac{p^2 + 1}{2}} - p \right) dp$$

$$= 2\pi \int_0^1 p \left(\sqrt{\frac{p^2 + 1}{2}} - p \right) dp = 4\pi \left(\int_0^1 p \sqrt{\frac{p^2 + 1}{2}} dp - \int_0^1 p^2 dp \right) =$$

$$= 4\pi \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^1 \sqrt{p^2 + 1} d(p^2) - \int_0^1 p^2 dp \right) =$$

$$= 4\pi \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \left. \frac{(p^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^1 - \left. \frac{p^3}{3} \right|_0^1 \right) =$$

$$= 4\pi \left(\frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot 2^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{3} + 0 \right) =$$

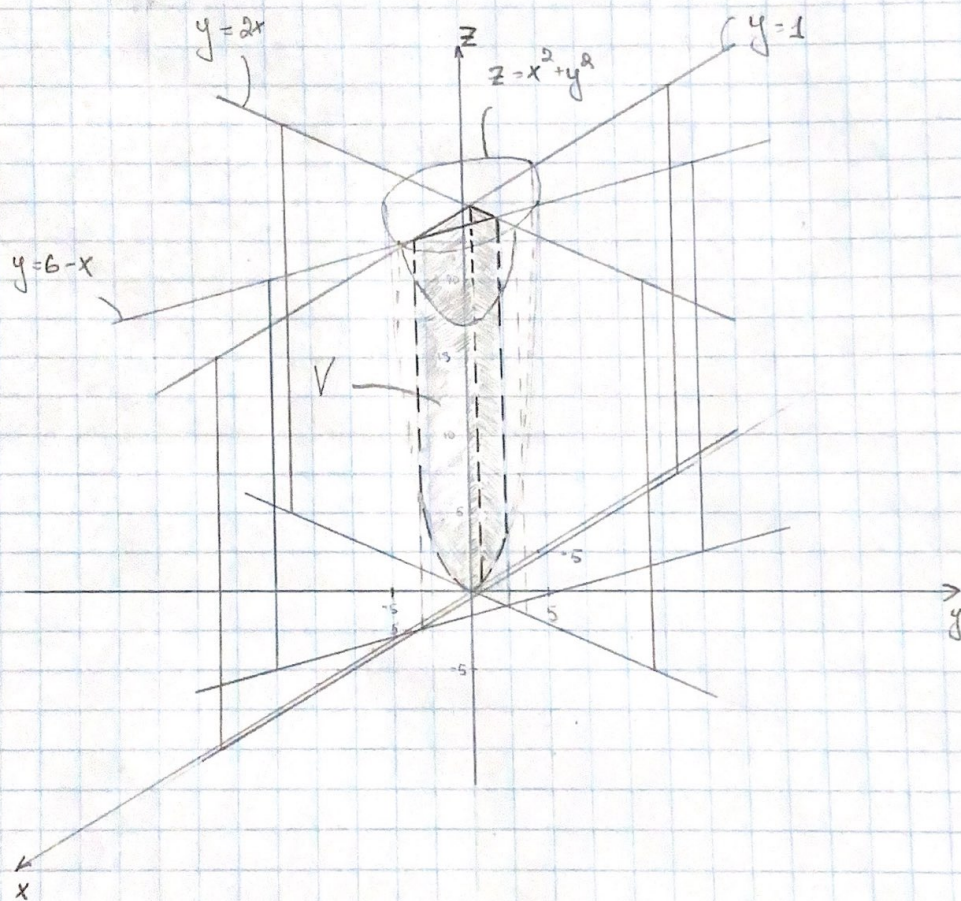
$$= 4\pi \left(\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{3} \right) = 4\pi \left(\frac{2\sqrt{2} - 1 - \sqrt{2}}{3\sqrt{2}} \right) =$$

$$= 4\pi \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{3\sqrt{2}} \right) = \frac{4\pi \cdot (2 - \sqrt{2})}{6}$$

Answer: $V = \frac{4\pi (2 - \sqrt{2})}{6}$

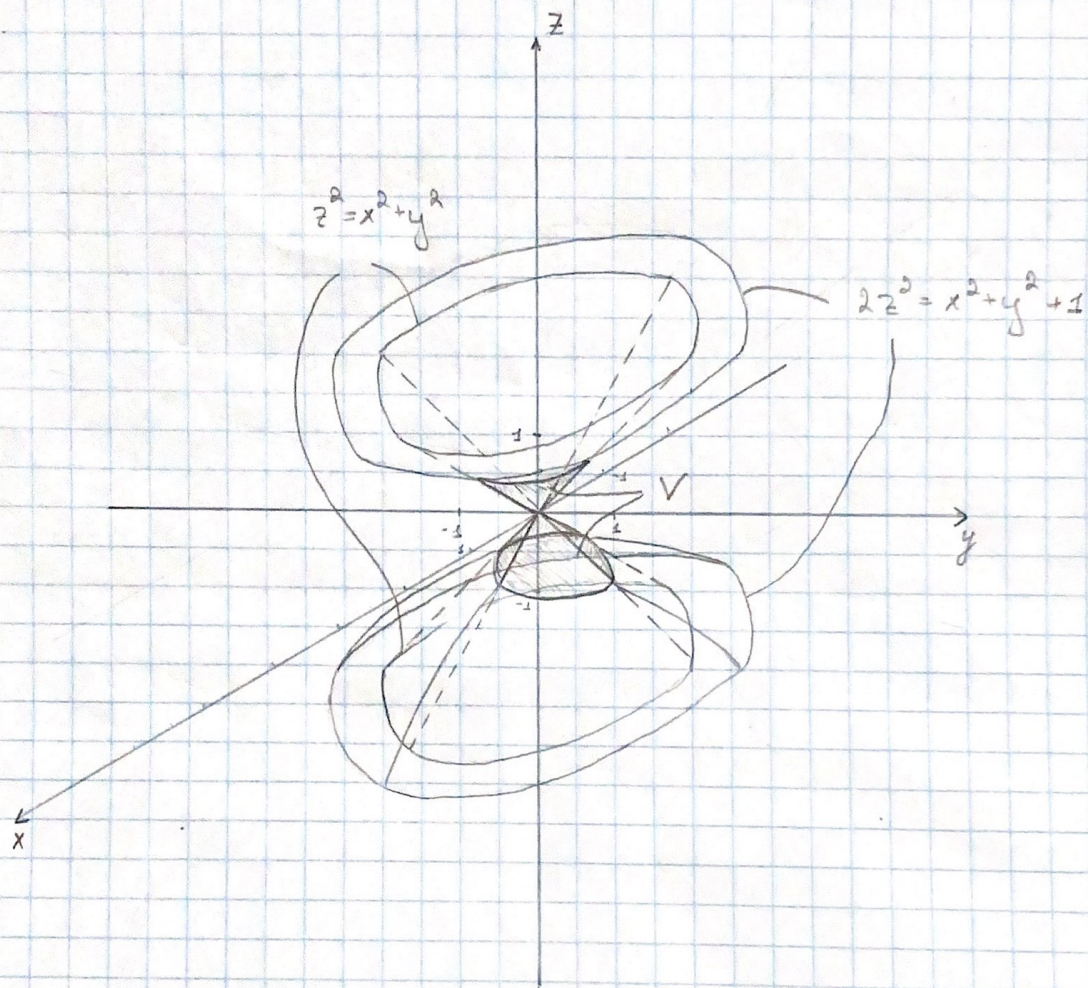
Работа над задачей

Задача 2. Неправильный пространственный рисунок, изображающий тело V , объем которого необходимо вычислить



V - ~~тело~~ тело, объем которого необходимо вычислить

Задача 3. Неправильный плоский рисунок, изображающий тело V , объем которого можно вычислить



V - тело, объем которого можно вычислить