

Решение задач для экзамена по дисциплине «Теория
вероятностей»

Лысцев Никита ИУ7-53Б

2 января 2024 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1	Комплект №1. Случайные события	2
---	--------------------------------	---

1 Комплект №1. Случайные события

Задача с жеманой

1.1) 10 черных, 15 белых. Проанализируйте игру.

$A = \{ \text{выигрыш наудачу} \}$

$P(A) = ?$

Решение:

1) \rightarrow ПГС: $H_1 = \{ \text{проигрывает наудачу} - \text{белый} \}$, $P(H_1) = \frac{15}{25}$
 $H_2 = \{ \text{проигрывает наудачу} - \text{черный} \}$, $P(H_2) = \frac{10}{25}$

2) $P(A) = ?$

$$P(A) = \left\{ \begin{array}{l} \text{проигрывает} \end{array} \right\} = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) = \frac{15}{25} \cdot \frac{15}{25} + \frac{10}{25} \cdot \frac{10}{25} = 0,6$$

Ответ: $P(A) = 0,6$

Рисунок 1.1 – Решение задачи 1.1

1.2) 9 этажей, 5 лифтов

$A = \{ \text{все возможные пути этажей} \}$

$P(A) = ?$

Решение:

~~1) Непосредственно: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, где x_i — номер этажа, на котором лифт останавливается в i -й раз.~~

1) Непосредственно: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, где x_i — номер этажа, на котором лифт останавливается в i -й раз. — различные числа от 1 до 9 с повторениями

2) $P(A) = ?$

возможные этажи: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

$A: (8, 7, 6, 5, 4)$

$$\Rightarrow N_A = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = A_8^5 = \frac{8!}{3!} = 6720$$

$$N = 8^5 = 32768$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{6720}{32768} = \frac{105}{512}$$

Итак, ответ: $P(A) = \frac{105}{512}$

Рисунок 1.2 – Решение задачи 1.2

1.3) 6 белых, 5 черных. Извлекаем один шар случайным образом

Решение:

1) π гипотезы: $H_1 = \{\text{извлеченный шар случайного цвета - белый}\}$, $P(H_1) = \frac{6}{11}$
 $H_2 = \{\text{извлеченный шар случайного цвета - черный}\}$, $P(H_2) = \frac{5}{11}$

2) $A = \{\text{2 извлеченных шара одного цвета}\}$

~~Решение:~~
 Формула Байеса:

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)} \quad \text{---}$$

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = \frac{10}{45} \cdot \frac{6}{11} + \frac{15}{45} \cdot \frac{5}{11} = \frac{3}{11}$$

$$P(A|H_1) = \frac{C_5^2}{C_{11}^2} = \frac{10}{45}$$

$$P(A|H_2) = \frac{C_6^2}{C_{11}^2} = \frac{15}{45}$$

$$\text{---} \quad \frac{\frac{10}{45} \cdot \frac{6}{11}}{\frac{3}{11}} = \frac{2}{3}$$

Ответ: $\frac{2}{3}$

Рисунок 1.3 – Решение задачи 1.3

1.4) 36 карт в колоде
 $A = \{ \text{извл. 3 карты один масть} \}$

а) извл. 3 карты по безвозвратн.
 б) извл. 3 карты по безвозвратн.

$P(A) = ?$

Реш-е:

а) 1) исход: $\{x_1, x_2, x_3\}$ - масть состоит из 36 по 3, где x_i -

общее число исходов: $N = C_{36}^3 = 7140$

2) $P(A) = ?$

$$N_A = C_9^3 \cdot C_{27}^0 = 84$$

$$\Rightarrow P(A) = \left\{ \begin{array}{l} \text{масть} \\ \text{одн-л} \\ \text{без-возвратн} \end{array} \right\} = \frac{N_A}{N} = \frac{84}{7140} = \left(\frac{1}{85} \right)$$

б) 1) исход: $\{x_1, x_2, x_3\}$ - масть состоит из 36 по 3, где x_i -

общее число исходов: $N = \tilde{A}_{36}^3 = 46656$

2) $P(A) = ?$

$$N_A = \tilde{A}_9^3 = 9^3 = 729$$

$$\Rightarrow P(A) = \left\{ \begin{array}{l} \text{масть} \\ \text{одн-л} \\ \text{без-возвратн} \end{array} \right\} = \frac{N_A}{N} = \frac{729}{46656} = \left(\frac{1}{64} \right)$$

Ответ: а) $\frac{1}{85}$; б) $\frac{1}{64}$

Рисунок 1.4 – Решение задачи 1.4

1.5) 4 попытки ввести пароль. Вероятность того, что пароль будет введен правильно, равна 0,9744. Найти вероятность того, что пароль будет введен правильно в 4-й попытке.

Решение:

- 1) Исп. схему Бернулли для успеха - пароль введен, p
неудача - пароль не введен, $q = 1 - p$
- 2) $P_4(k \geq 1) = 0,9744$ - по условию. Также по сх. Бернулли, $P_4(k \geq 1)$ есть вероятность того, что в серии из 4-х испытаний не будет ни одного неудачного. Тогда $P_4(k \geq 1) = 1 - q^4$ (*)
- 3) Вероятность того, что пароль будет введен правильно в 4-й попытке, по сх. Бернулли, равна $P_4(1) = C_4^1 p^1 q^{4-1} = \frac{4!}{(4-1)! 1!} p$

Из (*): $1 - q^4 = 0,9744$
 $1 - (1 - p)^4 = 0,9744$
 $(1 - p)^4 = 0,0256$
 $(1 - p) = 0,4$
 $p = 0,6$

Ответ: $p = 0,6$

Рисунок 1.5 – Решение задачи 1.5

1.6) 100 билетов, 50 выигрышных, 3 билет. наудачу
 $A = \{ \text{все 3 билета выигрышны} \}$
 $B = \{ \text{хотя бы 1 билет выигрышн} \}$
 $P(A) = ?$, $P(B) = ?$

Реш-е:

1) Искос: (x_1, x_2, x_3) - число разницы из 100 по 3, где x_i - номер билета, выигрышн или проигрышн.
 Общее число исходов: $N = A_{100}^3 = 970200$

2) $P(A) = ?$

$A: \left(\frac{B}{50}, \frac{B}{49}, \frac{B}{48} \right)$, где B - один из возможных номеров выигрышн билетов

$$\Rightarrow N_A = 50 \cdot 49 \cdot 48 = 117600$$

$$\Rightarrow P(A) = \left\{ \begin{array}{l} \text{класс.} \\ \text{выб-е} \\ \text{без-м.} \end{array} \right\} = \frac{N_A}{N} = \frac{117600}{970200} = \frac{4}{33}$$

3) $P(B) = ?$

Зам. $C = \bar{B}$ - все 3 билета - не выигрышн

$$\Rightarrow P(B) = \left\{ \begin{array}{l} \text{сл. по 3} \\ \text{без-м.} \end{array} \right\} = 1 - P(C) = 1 - P(\bar{B})$$

$C: \left(\frac{D}{50}, \frac{D}{49}, \frac{D}{48} \right)$, где D - один из возможных номеров проигрышн билетов

$$\Rightarrow N_C = 50 \cdot 49 \cdot 48 = 117600$$

$$\Rightarrow P(C) = \left\{ \begin{array}{l} \text{класс.} \\ \text{выб-е} \\ \text{без-м.} \end{array} \right\} = \frac{N_C}{N} = \frac{117600}{970200} = \frac{4}{33}$$

$$\Rightarrow P(B) = 1 - P(C) = 1 - \frac{4}{33} = \frac{29}{33}$$

Рисунок 1.6 – Решение задачи 1.6

17) $p = 0,9$. Для поражения цели нужно ≥ 2 попадания
 $A = \{ \text{цель поражена при 3-х выстрелах} \}$
 $P(A) = ?$

Решение:

1) Исп-ие сл. Биномиальное для успеха - попадания в цель, $p = 0,9$
 неудача - промах, $q = 1 - p = 0,1$

$n = 3$

$$P(A) = P_3(k \geq 2) = C_3^2 p^2 q^1 + C_3^3 p^3 q^0 = \dots \text{ответ}$$

Рисунок 1.7 – Решение задачи 1.7

18) 1-е урне: 5 белых и 4 черных шара
 2-е урне: 4 белых и 2 черных шара
 Извл. сл. шар из сл. урны оказался черным.
 $A = \{ \text{извлеч. шар был взят из 2-й урны} \}$
 $P(A) = ?$

Решение:

1) \mathcal{H} -м $\text{ПРВ: } H_i = \{ \text{шар был взят из } i\text{-й урны} \}, i = \overline{1,2} \quad P(H_i) = \frac{1}{2}$

2) ~~По формуле полной вероятности~~ $B = \{ \text{взят шар оказался черным} \}$
~~По формуле полной вероятности:~~

$$P(B) = \underbrace{P(B|H_1)}_{\frac{4}{9}} \underbrace{P(H_1)}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{P(B|H_2)}_{\frac{2}{6}} \underbrace{P(H_2)}_{\frac{1}{2}} = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{9}$$

По формуле Байеса:

$$P(H_2|B) = \frac{P(B|H_2) P(H_2)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2}{9}} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

Рисунок 1.8 – Решение задачи 1.8

1.9) 18 степеней

5	из	18	показ	в	числ	с	вер-ю	, равной	0,8
7	из	18							0,7
4	из	18							0,6
2	из	18							0,5

Найти: к какой группе вер-е все принадлежит с. выбор-и степеней, если он максимальное

Решение:

- 1) \mathcal{H} -м ДРС: $H_i = \{ \text{выбр-и степеней из } i\text{-й группы}, i=1,4 \}$
 $P(H_1) = \frac{5}{18}$, $P(H_2) = \frac{2}{18}$, $P(H_3) = \frac{4}{18}$, $P(H_4) = \frac{2}{18}$
- 2) \mathcal{A} событие $A = \{ \text{с. выбор степеней максимальное} \}$

Ф-на Байеса:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \left\{ \begin{array}{l} P(A/H_1) = \\ = 0,2 \end{array} \right\} = \frac{0,2 \cdot \frac{5}{18}}{P(A)} = \frac{\frac{1}{18}}{P(A)}$$

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \left\{ \begin{array}{l} P(A/H_2) = \\ = 0,3 \end{array} \right\} = \frac{0,3 \cdot \frac{2}{18}}{P(A)} = \frac{\frac{1}{60}}{P(A)}$$

$$P(H_3/A) = \frac{P(H_3)P(A/H_3)}{P(A)} = \left\{ \begin{array}{l} P(A/H_3) = \\ = 0,4 \end{array} \right\} = \frac{0,4 \cdot \frac{4}{18}}{P(A)} = \frac{\frac{1}{45}}{P(A)}$$

$$P(H_4/A) = \frac{P(H_4)P(A/H_4)}{P(A)} = \left\{ \begin{array}{l} P(A/H_4) = \\ = 0,5 \end{array} \right\} = \frac{0,5 \cdot \frac{2}{18}}{P(A)} = \frac{\frac{1}{18}}{P(A)}$$

$$\frac{1}{18} = \frac{10}{180}; \frac{1}{60} = \frac{3}{180}; \frac{1}{45} = \frac{4}{180}; \frac{1}{18} = \frac{10}{180}$$

\Rightarrow с. выбор степеней вер-е все принадлежит ко 2-й группе.

Рисунок 1.9 – Решение задачи 1.9

1.10 Студент знает 20 из 25 вопросов. Найти вероятность, что студент знает хотя бы 2 вопроса из предложенных 3-х вопросов. - об А

Решение:

1) Мног. (x_1, x_2, x_3) - число правильн. из 25 до 3, где x_i - кол-во

Общее число исходов: $N = A_{25}^3 = 13800$

2) $P(A) = ?$

1) $A = A_1 + A_2$, где $A_i = \{ \text{студент знает ровно } i \text{ вопросов из 3-х} \}$
 $A_1: \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 20 & 20 & 15 \end{pmatrix}$
 $A_2: \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 14 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, где 3 - один из номеров вопросов, к-м знает студент, а 4 - номер вопроса, к-м не знает студент

$$\Rightarrow N_{A_1} = 3 \cdot 20 \cdot 15 \cdot 5 = 5700$$

$$A_3: \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 20 & 19 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow N_{A_3} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$$

$$\Rightarrow P(A) = P(A_1 + A_2) = \left[\begin{matrix} \text{код-н} \\ A_1 \text{ и } A_2 \\ \text{клетки} \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} \text{н. слов} \\ \text{те-ми} \end{matrix} \right] = P(A_1) + P(A_2) =$$

$$= \frac{N_{A_1}}{N} + \frac{N_{A_2}}{N} = \frac{5700 + 6840}{13800} = \frac{209}{230}$$

$$\text{Итак: } P(A) = \frac{209}{230}$$

Рисунок 1.10 – Решение задачи 1.10

1.11) 96% выпускаемой продукции удов. стандарту
 при стандартной продукции пришло с вер-ю 0,98
 и нестандарт. 0,05
 Если это удов. стандарту, то изделие, прошедшее контроль,
 Беш-о.

1) 2 гипотезы: $H_1 = \{ \text{изделие удов. стандарту} \}$
 $H_2 = \{ \text{изделие не удов. стандарту} \}$
 $P(H_1) = 0,96, P(H_2) = 0,04$

2) 1 событие $A = \{ \text{изделие прошло контроль} \}$
 $P(A) = \begin{cases} \text{пр-на} \\ \text{нак-е} \\ \text{кф-ти} \end{cases} = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) =$
 $= 0,96 \cdot 0,98 + 0,04 \cdot 0,05 = 0,9428$

3) По формуле Байеса:
 $P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0,96 \cdot 0,98}{0,9428} = \frac{2352}{2357} \approx 0,998$

Рисунок 1.11 – Решение задачи 1.11

1.13) Дросанат 3 монети,
 $A = \{ \text{хотне ба на огнон монете имагет герб} \}$
 $P(A) = ?$ (геру th монет)

Решение:

1) Иског: (x_1, x_2, x_3) — тимо разменув. ^{е повтор.} из 2-и до 3, где $x_i \in \{0, 1\}$, где 0 — орис, 1 — реше.

Обагее тимо искогов: $N = \binom{3}{2} = 2^3 = 8$

2) $P(A) = ?$

$A = A_1 + A_2 + A_3$, где $A_i = \{ \text{герб на } i\text{-и монете} \}$

$\Rightarrow P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3) = \left\{ \begin{array}{l} \text{th монет} \\ \text{her-mon} \end{array} \right\} =$

$= \overbrace{P(A_1)}^{0,5} + \overbrace{P(A_2)}^{0,5} + \overbrace{P(A_3)}^{0,5} - \overbrace{P(A_1, A_2)}^{0,25} - \overbrace{P(A_1, A_3)}^{0,25} - \overbrace{P(A_2, A_3)}^{0,25} + \underbrace{P(A_1, A_2, A_3)}_{0,125} = 0,5 \cdot 3 - 0,25 \cdot 3 + 0,125 = \boxed{0,875}$

Рисунок 1.12 – Решение задачи 1.13

1.14

$A = \{ \text{издана книга 1-е издани-е} \}$
 $B = \{ \text{издана книга 2-е издани-е} \}$
 $C = \{ \text{издана книга 3-е издани-е} \}$

$P(\bar{A}) = 0,1$
 $P(\bar{B}|A) = 0,3$
 $P(\bar{C}|AB) = 0,2$

$D = \{ \text{издана книга все издани-е} \}$
 $P(D) = ?$

Решение:

1) $P(D) = ?$

$P(D) = P(A \cdot B \cdot C) = \left\{ \begin{array}{l} \text{th o op-ue} \\ \text{yame-1} \\ \text{ky-mei gni} \\ \text{n co-1-a} \end{array} \right\} = P(A)P(B|A) \cdot P(C|AB) \Leftrightarrow$

$P(B|A) = \left\{ \begin{array}{l} \text{ob-1a yai} \\ \text{ky-mi} \end{array} \right\} = 1 - P(\bar{B}|A) = 1 - 0,3 = 0,7$

$P(C|AB) = \left\{ \begin{array}{l} \text{ob-1a} \\ \text{yai} \\ \text{ky-mi} \end{array} \right\} = 1 - P(\bar{C}|AB) = 1 - 0,2 = 0,8$

$P(A) = \left\{ \begin{array}{l} \text{ob-1a} \\ \text{ky-mi} \end{array} \right\} = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,1 = 0,9$

$\Leftrightarrow 0,9 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = \boxed{0,504}$

Рисунок 1.13 – Решение задачи 1.14

1.15

Решение:

1) 4-м ПГС:

$H_1 = \{ \text{в урне лежат белый шар} \}$
 $H_2 = \{ \text{в урне лежат черный шар} \}$

$P(H_1) = 0,5$, $P(H_2) = 0,5$

2) $A = \{ \text{достали белый шар} \}$

Для полн. кр-ти:

$P(A) = P(H_1) \underbrace{P(A|H_1)}_1 + P(H_2) \underbrace{P(A|H_2)}_{0,5} = 0,5 \cdot 1 + 0,5 \cdot 0,5 =$
 $= 0,5 + 0,25 = 0,75$

3) Для Байеса:

$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0,5 \cdot 1}{0,75} = \boxed{\frac{2}{3}}$

Рисунок 1.14 – Решение задачи 1.15

1.16) Если $A \sim B$, $P(B) = 0,4$, $P(A|B) = 0,3$, $P(A|\bar{B}) = 0,2$
 $P(A) = ?$, $P(\bar{A}\bar{B}) = ?$, $P(\bar{A} + \bar{B}) = ?$

Решение:

1) \square Если $B \sim \bar{B}$ - нгс (угодно быть с какой нгс)
 $\Rightarrow P(A) = \left\{ \begin{array}{l} \text{по-по} \\ \text{по-по} \\ \text{по-по} \end{array} \right\} = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B}) \Rightarrow$

$$P(\bar{B}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{сб-б} \\ \text{по-по} \end{array} \right\} = 1 - P(B) = 1 - 0,4 = 0,6$$

$$\Rightarrow 0,4 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,2 = \boxed{0,24}$$

2) $P(\bar{A}\bar{B}) = ?$

$$P(\bar{A}\bar{B}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{по-по} \\ \text{по-по} \\ \text{по-по} \end{array} \right\} = P(\bar{B}) \cdot P(\bar{A}|\bar{B}) \Rightarrow$$

$$P(\bar{A}|\bar{B}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{сб-б} \\ \text{по-по} \end{array} \right\} = 1 - P(A|\bar{B}) = 1 - 0,2 = 0,8$$

$$\Rightarrow 0,6 \cdot 0,8 = \boxed{0,48}$$

3) $P(\bar{A} + \bar{B}) = ?$

$$P(\bar{A} + \bar{B}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{по-по} \\ \text{по-по} \end{array} \right\} = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A}\bar{B}) \Rightarrow$$

$$P(\bar{A}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{сб-б} \\ \text{по-по} \end{array} \right\} = 1 - P(A) = 1 - 0,24 = 0,76$$

$$\Rightarrow 0,76 + 0,6 - 0,48 = \boxed{0,88}$$

Рисунок 1.15 – Решение задачи 1.16

1.17) 7 карточек, 3 игровых.
 $A = \{ \text{из 3-х игровых карточек составлено слово "бу"} \}$
 8) карточка буфетная, 6 игровых; С О П О В Е Т
 9) карточка игровых, 6 игровых;
 $P(A) = ?$

Решение:

а) 1) Искос: $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow$ число различий из 7 по 3, где x_i - карточка, игровая или нет.

Общее число исходов: $N = A_7^3 = 210$

2) $P(A) = ?$

~~$N_A = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$~~

$A: (\underbrace{B}_1, \underbrace{O}_2, \underbrace{U}_3)$

$\Rightarrow N_A = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$

$\Rightarrow P(A) = \left\{ \begin{array}{l} \text{класс.} \\ \text{игр.} \\ \text{не игр.} \end{array} \right\} = \frac{N_A}{N} = \frac{2}{210} = \boxed{\frac{1}{105}}$

б) 2) Искос: $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow$ число различий с повторениями из 7 по 3, где x_i - карточка, игровая или нет.

Общее число исходов: $N = \frac{7^3}{1} = 343$

2) $P(A) = ?$

$N_A = \frac{7^3}{1} = 343$

$\Rightarrow P(A) = \left\{ \begin{array}{l} \text{класс.} \\ \text{игр.} \\ \text{не игр.} \end{array} \right\} = \frac{N_A}{N} = \boxed{\frac{2}{343}}$

Рисунок 1.16 – Решение задачи 1.17