Теория к РК2 по дисциплине «Теория вероятностей»

Лысцев Никита ИУ7-53Б

06 Ноября 2023

РК № 2
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ, ОЦЕНИВАЕМЫЕ В 2 БАЛЛА

① СФОРМУЛИРОВАТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ. КАК СВЯЗАНЫ СВОЙСТВА НЕСОВМЕСТНОСТИ И НЕЗАВИСИМОСТИ СОБЫТИЙ?

События A и B наз-ся несовместными, если их пересечение явл. невозможным событием, т.е $AB = \varnothing$. В противн. случ. A и B наз-ся совместными

Про связь св-в несовместности и независ-ти событий:

1) Если A и B – несовместные события (а также $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$), то они обязательно зависимые

2) Если A и B – совместное событие, то они м/б как зависимыми так и независимыми.

3) Если A и B зависимые события, то они м/б как совместными, так и несовместными.

② СФОРМУЛИРОВАТЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ.

Геом. опр-е вер-ти явл. обобщением класс. опр-я на случай, когда $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ $(|\Omega| = \infty)$

∃ 1) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$,

2) $0 < mes(\Omega) < \infty$, где mes – мера мн-ва
$mes(A)$ – мера мн-ва A

Если $n=1$, то mes – длина
$n=2$, то mes – площадь
$n=3$, то mes – объём

3) Вероятность принадлежности результата эксперимента некоторому множеству пропорциональна мере этого мн-ва и не зависит от его расположения и формы.

Тогда вер-ю соб-я $A \subseteq \Omega$ наз-ют число

$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)}$$

③ СФОРМУЛИРОВАТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИГМА-АЛГЕБРЫ СОБЫТИЙ СФОРМУЛИРОВАТЬ ЕЁ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

∃ 1) Ω – некоторое м-во элементарных исходов, связ. с мн-м случ. экспер-том;

2) $B \neq \Phi$ – набор (совокупность) подмн-в мн-ва Ω.

Тогда B наз-ся сигма-алгеброй событий, если вып. усл.

Рисунок 1 – Вопросы 1-3

(1) Если $A \in \mathcal{B}$, то $\bar{A} \in \mathcal{B}$;
(2) Если $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{B}$, то $A_1 + \ldots + A_n + \ldots \in \mathcal{B}$ (∞-е)

Основные св-ва (следствия) из опред-я сигма-алгебры:

1° $\Omega \in \mathcal{B}$
2° $\emptyset \in \mathcal{B}$
3° Если $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{B}$, то $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n \cdot \ldots \in \mathcal{B}$
4° Если $A, B \in \mathcal{B}$, то $A \setminus B \in \mathcal{B}$

(4) СФОРМУЛИРОВАТЬ АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ. СФОРМУЛИРОВАТЬ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ВЕРОЯТНОСТИ.

Пусть 1) Ω – пр-во эл. исходов ин-го сл. эксперимента;
2) $\mathcal{B}$ – сигма-алгебра, заданная на Ω.

Тогда вероятностью (вероятностной мерой) наз-ся ф-ция

$$P: \mathcal{B} \to \mathbb{R}$$

обладающая след. св-ми:

1° $\forall A \in \mathcal{B}$ $P(A) \geq 0$ (аксиома неотрицательности)
2° $P(\Omega) = 1$ (аксиома нормированности)
3° Если $\exists A_1, \ldots, A_n, \ldots$ – попарно несовместные события, то

$$P(A_1 + \ldots + A_n + \ldots) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) + \ldots$$ (расширенная аксиома сложения)

Основные св-ва вер-ти:

1° $P(A) = 1 - P(\bar{A})$;
2° $P(\emptyset) = 0$;
3° Если $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$;
4° $\forall A \in \mathcal{B}$ $0 \leq P(A) \leq 1$;
5° $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$, где $A, B \in \mathcal{B}$
6° Для $\forall$ набора событий $A_1, \ldots, A_n$ верно

$$P(A_1 + \ldots + A_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cdot A_{i_2}) +$$

$$+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot A_{i_3}) + \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n)$$

(5) ЗАПИСАТЬ АКСИОМУ СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, РАСШИРЕННУЮ АКСИОМУ СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И АКСИОМУ НЕПРЕРЫВНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ.

Аксиома сложения:

Для $\forall$ конечного набора попарно несовместных событий $A_1, \ldots, A_n$ справедливо:

Рисунок 2 – Вопросы 3-5

$$P(A_1 + \ldots + A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n)$$

Аксиома непрерывности:

Для ∀ неубывающей посл-ти событий $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$ и соб-е $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$ верно:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

Расширенная аксиома сложения:

Если $\exists A_1, \ldots, A_n, \ldots$ – попарно несовместные события, то

$$P(A_1 + \ldots + A_n + \ldots) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) + \ldots$$

Связь между ними:

Расширенная аксиома сложения эквивалентна аксиоме сложения и аксиоме непрерывности.

(6) Сформулировать определение условной вероятности и её основные свойства

] 1) $A \cap B$ – 2 соб-я, связанные с одним сл. экспериментом;
2) Дополнительно известно, что в рез-те экспер-та произошло соб-е B.

Тогда условной вер-ю осуществ. соб-я A при условии, что произошло B, нед-ся число

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0$$

Основные св-ва усл. вер-ти:

] 1) Зафиксировано соб-е B, $P(B) \neq 0$;
2) $P(A|B)$ – т-ся как ф-ция события A.

Тогда $P(A|B)$ обладает всеми св-ми безусл. вер-ти.

1° $P(A|B) \geq 0$
2° $P(\Omega|B) = 1$
3° ∀ попарно несовм. соб. $A_1, \ldots, A_n, \ldots$

$$P(A_1 + \ldots + A_n + \ldots | B) = P(A_1|B) + \ldots + P(A_n|B) + \ldots$$

(7) Сформулировать теоремы о формулах умножения вероятностей для 2-х событий и для произвольного числа событий

Т1 Формула умножения вероятностей для 2-х событий

] 1) A, B – события;
2) $P(A) > 0$.

Тогда $P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$

Рисунок 3 – Вопросы 5-7

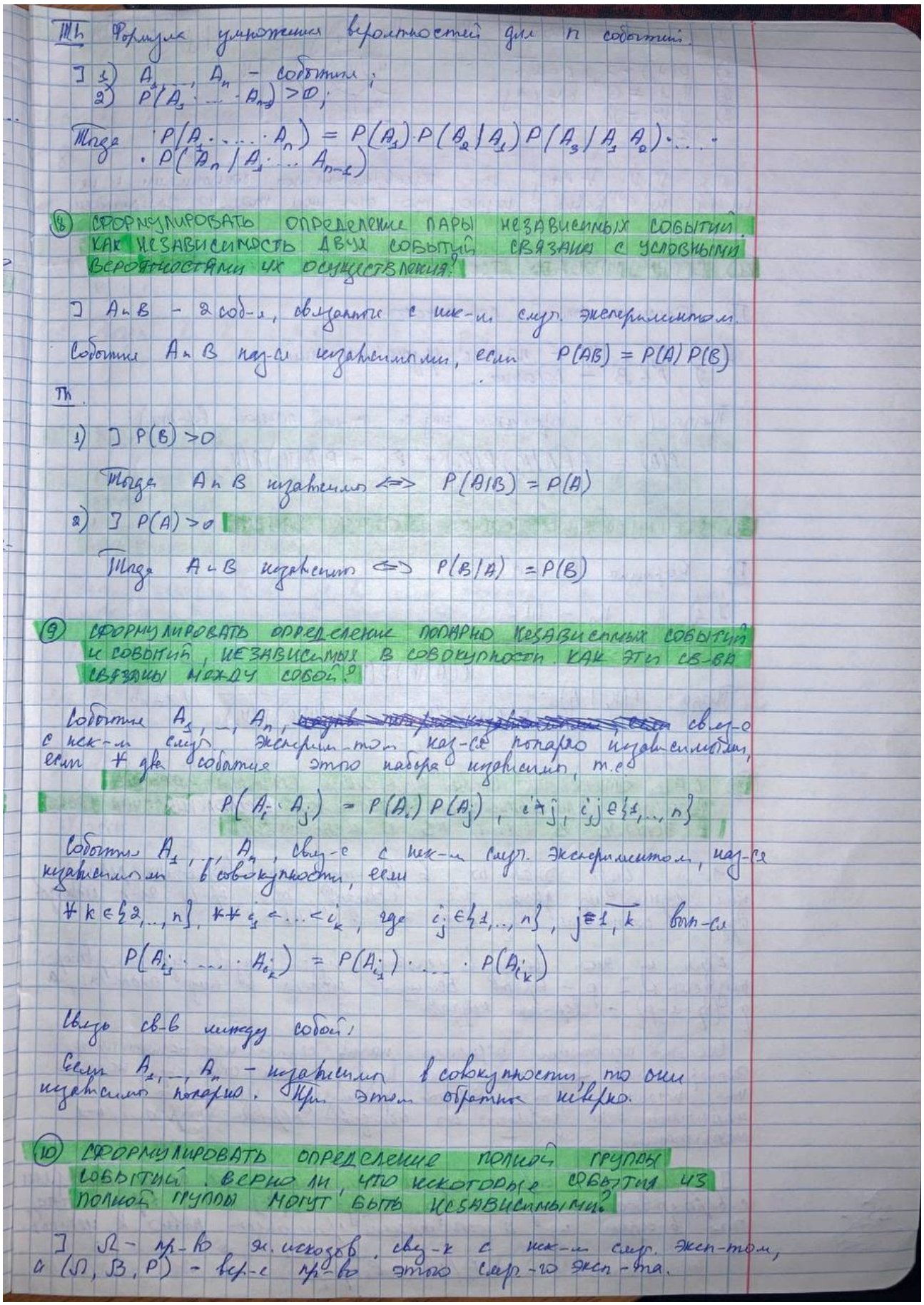
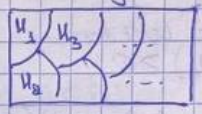


Рисунок 4 – Вопросы 7-10

Говорят, что события $H_1, \dots, H_n$ образ. полн. группу событий, если

1) $P(H_i) > 0$, $i = \overline{1,n}$;
2) $H_i \cdot H_j = \varnothing$ при $i \neq j$;
3) $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$



Т.к. $H_i \cdot H_j$ $\forall i \neq j$ явл. несовместными событиями и их вер-ть не равна нулю, то они т.н. только зависимыми.

(11) Сформулировать теорему о полной вероятности

Th Формула полной вероятности

I 1) $H_1, \dots, H_n$ – полная группа событий;
2) $A \in B$ – событие.

Тогда (это выражение наз-ся ф-ой полной вер-ти):

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)$$

(12) Сформулировать теорему о формуле Байеса

Th Формула Байеса

I 1) $H_1, \dots, H_n$ – ПГС;
2) $A \in B$ – событие;
3) $P(A) > 0$

Тогда $$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)}, \quad i = \overline{1,n}$$

(13) Дать определение схемы испытаний Бернулли. Записать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний.

i-м сл. эксп-т, в рез-те кот. возможна реализ. одно из двух эл. исходов, т.е. пр-во эл-х исходов будет состоять из 2-х эл-тов ($|\Omega| = 2$)

Один из эл. исходов условно будем наз. успехом, второй неудачей. P – вер-ть осущ-я успеха в сл. эксп-те, а q ($q = 1 - p$) – вер-ть неудачи.

Схемой испытаний Бернулли наз. серию из одинаковых экспериментов, указанную выше, в кот. отдельные испытания независимы, т.е. вер-ть реализ. успеха в i-м испытании не зависит от исходов первого, второго, ..., $i-1$ испытаний.

I проводится серия из n испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха p. Тогда $P_n(k)$ есть вер-ть того, что в серии из n испытаний произойдет ровно k успехов:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Рисунок 5 – Вопросы 10-13

(14) Записать формулы для вычисления вероятности осуществления в серии из n испытаний а) ровно k успехов, б) хотя бы одного успеха, в) от k_1 до k_2 успехов.

а) см. в вопрос (формула)

б) $P_n(k \geq 1)$ – вер-ть реализации хотя бы одного успеха в серии из n испытаний

Тогда $P_n(k \geq 1) = 1 - q^n$

в) $P_n(k_1 \leq k \leq k_2)$ – вер-ть того, что в серии из n испытаний число успехов оказалось заключено между k_1 и k_2

Тогда $P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}$

II ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ, ОЦЕНИВАЕМЫЕ В 4 БАЛЛА

(15) СФОРМУЛИРОВАТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ИСХОДА СЛУЧАЙНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА В ПРОСТРАНСТВЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ИСХОДОВ. СФОРМУЛИРОВАТЬ КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ. ПРИВЕСТИ ПРИМЕР.

Элем. исход эксп-та в п-ве элем. исходов каждый из возможных результатов этого эксперимента:

Св-ва:

1) В рамках данного эксп-та никакой исход нельзя разделить на более мелкие составляющие

2) В рез-те эксп-та наступ. ровно 1 из эл. исходов.

Классич-е опр-е вер-ти:

1) $1 \leq |\Omega| \leq N < \infty$ ч-ло эл. исходов исх-го сл. эксп-та

2) По условию эксперимента нет оснований предпочесть тот или иной элем. исход остальным.

Вер-ю соб-я $A \subseteq \Omega$ ид-ют число

$$P(A) = \frac{N_A}{N}, \text{ где } N_A = |A|$$

Пример: Эксперимент: 2 раза бросают игральную кость

Задано событие:

$A = \{$ сумма выпавших очков больше или равна 11$\}$

$P(A) = ?$

Решение:

Определим исход: (x_1, x_2) – упор. пара, x_i – кол-во очков, выпавших при i-м броске, $i = 1, 2$. ($N = |\Omega| = 36$)

Рисунок 6 – Вопросы 14-15

В событии A можно выделить следующие исходы:

$$A = \{(5,6), (6,5), (6,6)\}$$

Тогда $N_A = |A| = 3$, и, в соотв. с определением, получаем

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

16. СФОРМУЛИРОВАТЬ КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ. ОПИРАЯСЬ НА НЕГО, ДОКАЗАТЬ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ВЕРОЯТНОСТИ.

Классическое опр-е вер-ти: см. 15 вопрос

Св-ва вер-ти (в соотв. с класс. определением):

1° $\forall A \subseteq \Omega \quad P(A) \geq 0$;
2° $P(\Omega) = 1$;
3° Если $A \cdot B = \emptyset$, то $P(A+B) = P(A) + P(B)$

Док-во:

1° Т.к. $N_A \geq 0$, $N \geq 0$, то $P(A) = \frac{N_A}{N} \geq 0$

2° Принимая во внимание, что $N_\Omega = |\Omega| = N$, получаем

$$P(\Omega) = \frac{N_\Omega}{N} = \frac{N}{N} = 1$$

3° Т.к. Ω – конечно, $A, B \subseteq \Omega$, то получ, что A и B конечны. В соотв. с ф-лой включений – исключений

$$|A+B| = |A| + |B| - |A \cdot B|$$

Т.к. $A \cdot B = \emptyset$, то $N_{A+B} = |A+B| = |A| + |B| - \underbrace{|A \cdot B|}_{0} = N_A + N_B$

$$\Rightarrow P(A+B) = \frac{N_{A+B}}{N} = \frac{N_A + N_B}{N} = \frac{N_A}{N} + \frac{N_B}{N} = P(A) + P(B) \blacksquare$$

17. СФОРМУЛИРОВАТЬ СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ. УКАЗАТЬ ЕГО ОСНОВНЫЕ НЕДОСТАТКИ.

1) Опыт проводится n раз;
2) При этом событие A наступает n_A раз.

Вер-ть события A – статистическая, т.е. взятая из опыта число

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

Основные недостатки:

1) ∞-е число опытов на практике недостижимо; для конечных n ~~xxxxx~~ отношение может существенно отл. от предел. N

Рисунок 7 – Вопросы 15-17

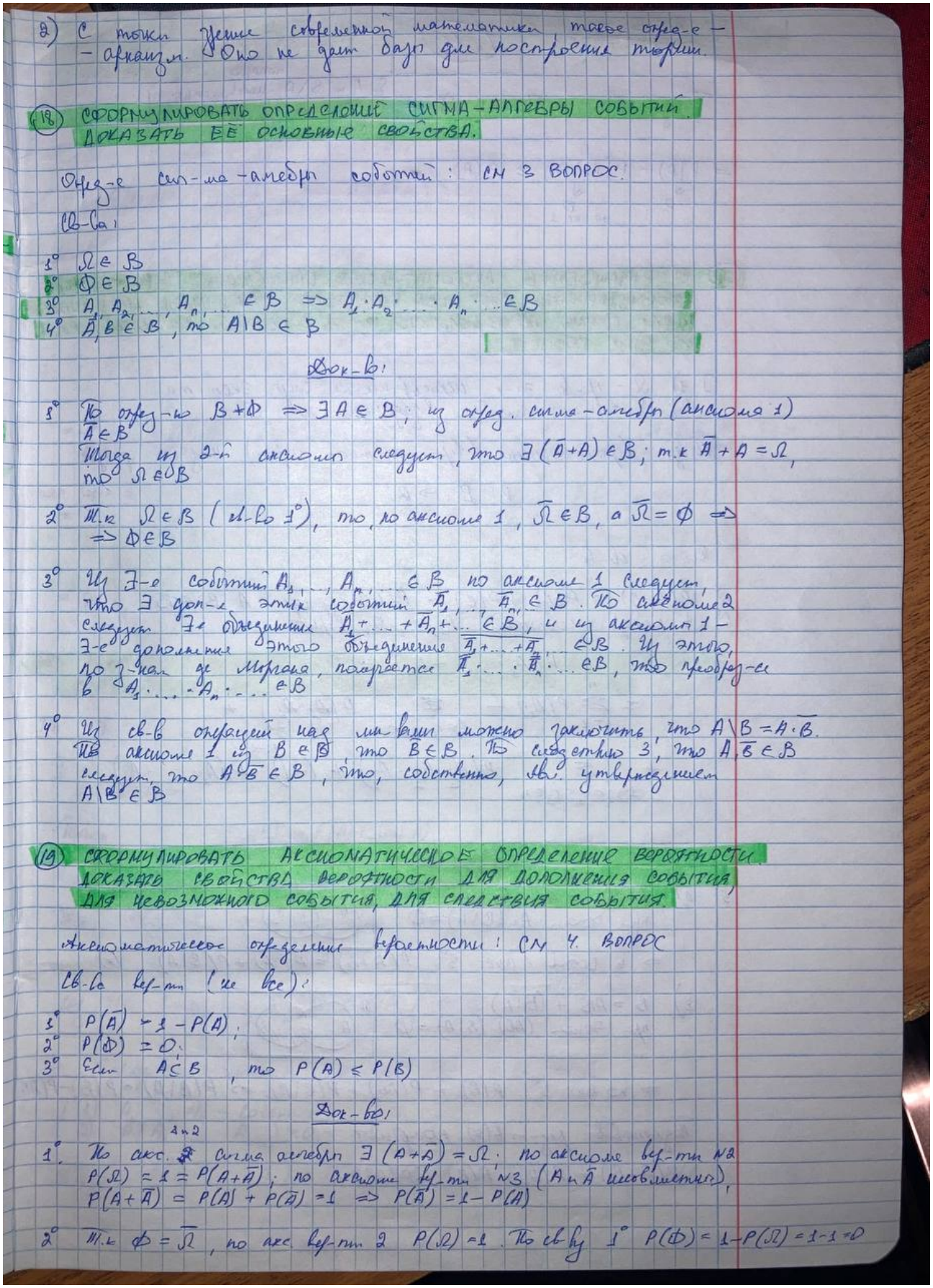


Рисунок 8 – Вопросы 17-19

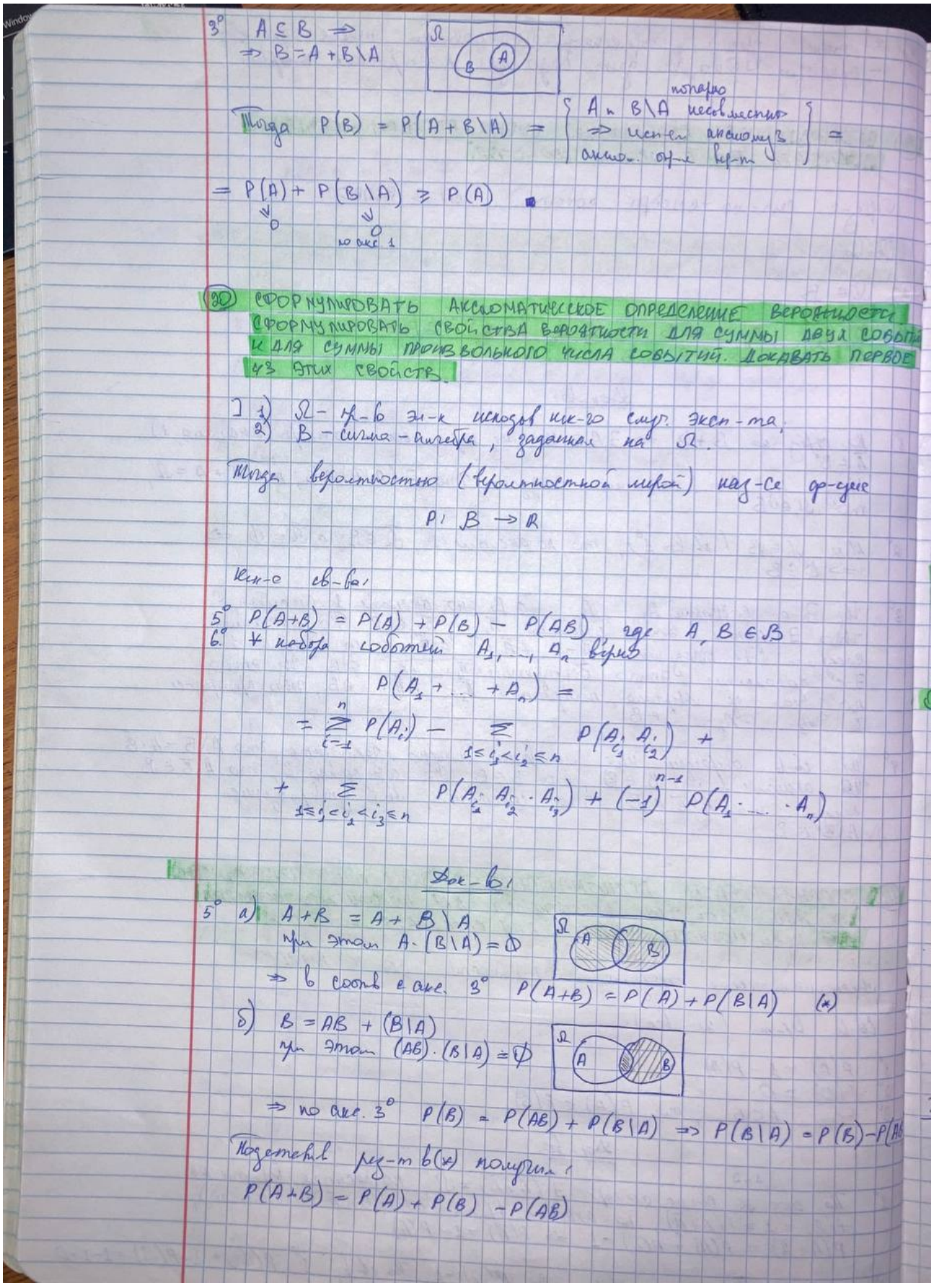


Рисунок 9 – Вопросы 19-20

(21) СФОРМУЛИРОВАТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСЛОВНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ДОКАЗАТЬ ЧТО ОНА УДОВЛЕТВОРЯЕТ 3-М ОСНОВНЫМ СВОЙСТВАМ БЕЗУСЛОВНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ.

Опред-е усл. вер-ти: см. вопрос 6

Док-во:

1° $P(A|B) = \frac{\overbrace{P(AB)}^{\geq 0}}{\underbrace{P(B)}_{>0}} \Rightarrow P(A|B) \geq 0$

2° $P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

3° $P(A_1 + \ldots + A_n + \ldots | B) = \frac{P((A_1 + \ldots + A_n + \ldots)B)}{P(B)} =$

$= \frac{1}{P(B)} \cdot P(A_1 B + A_2 B + \ldots + A_n B + \ldots) = \left\{ \begin{array}{l} A_i, A_j \text{ несовм-ны, } i \neq j \\ A_i B \subseteq A_i,\ A_j B \subseteq A_j \\ \Rightarrow (A_i B) \cdot (A_j B) = \varnothing \end{array} \right\} =$

$= \frac{1}{P(B)} \cdot \left[P(A_1 B) + \ldots + P(A_n B) + \ldots \right] = \left\{ \begin{array}{l} \text{св-во умнож-я} \\ \text{сход-ти ряда} \\ \text{на постоянную} \end{array} \right\} =$

$= P(A_1|B) + \ldots + P(A_n|B) + \ldots$ ■

(22) ДОКАЗАТЬ ТЕОРЕМЫ О ФОРМУЛАХ УМНОЖЕНИЯ ДЛЯ 2-Х СОБЫТИЙ И ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧИСЛА СОБЫТИЙ

Th Ф-ла умножения вероятностей для 2-х событий

] 1) A, B – события;
2) $P(A) > 0$.

Тогда $P(AB) = P(A) P(B|A)$

Док-во:

Т.к. $P(A) > 0$, то определена усл. вер-ть

$$P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)}$$

Из чего следует $P(AB) = P(A) P(B|A)$ ■

Th Формула умнож-я вер-тей для n событий

] 1) $A_1, \ldots, A_n$ – события;
2) $P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}) > 0$.

Тогда $P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n | A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1})$

Док-во:

Рисунок 10 – Вопросы 21-22

(24) СФОРМУЛИРОВАТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОПАРНО НЕЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ И СОБЫТИЙ, НЕЗАВИСИМЫХ В СОВОКУПНОСТИ. ПОКАЗАТЬ НА ПРИМЕРЕ, ЧТО ИЗ ПЕРВОГО НЕ СЛЕДУЕТ ВТОРОЕ.

Опред-е попарно незав. соб. и соб, незав. в совокуп.: см ВОПРОС 9

Пример: (Бернштейна)

4 правильных тетраэдра, на одной грани кот. "написано" 1, на второй – 2, на 3-й – 3, на 4-й – 1, 2, 3.

Этот тетраэдр один раз подбрасывают.

Соб-е A_1 зан. в том, что на нижней грани "написано" 1, также введем A_2 для 2, A_3 для 3. Покажем, что события A_1, A_2, A_3 попарно независимы, но не зав. независимы в совок-ти.

1. Док-м, что они независимы попарно. Т.к. $P(A_i) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $i = 1, 2, 3$, то

$$P(A_1 A_2) = P(A_1) P(A_2) = \frac{1}{4}$$

Событие $A_1 A_2$ одно, что на нижней грани присутствуют и 1 и 2

Все аналогично для $P(A_1 A_3) = P(A_1) P(A_3)$ и $P(A_2 A_3) = P(A_2) P(A_3)$

2. Проверим рав-во $P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P(A_2) P(A_3)$, кот, очевидно, должно равняться $\frac{1}{8}$. Но произведение событий $A_1 A_2 A_3$ одно, что на нижней грани присутствуют и 1, и 2, и 3, вер-ть кот равна $\frac{1}{4}$

И выходит, что $\frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}$

$\Rightarrow$ события A_1, A_2 и A_3 не зав. незав. в совокупности.

(25) ДОКАЗАТЬ ТЕОРЕМУ О ФОРМУЛЕ ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Th. Формула полной вероятности

Д 1) $H_1, \dots, H_n$ – ПГС;
2) $A \in \mathcal{B}$ – исх-е событие;

Тогда (это вытек-е наук-ся ф-лой полн. вер-ти):

$$P(A) = P(A|H_1) H_1 + \dots + P(A|H_n) P(H_n)$$

Док-во:

1) $P(A) = P(A\Omega) \overset{\Omega = H_1 + \dots + H_n}{=} P(A \cdot (H_1 + \dots + H_n)) = P(AH_1 + \dots + AH_n) =$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{очевидно, что } AH_i \subseteq H_i,\ i = \overline{1,n} \\ \Rightarrow (AH_i)(AH_j) = \Phi \text{ при } i \neq j \end{array} \right\} = \left\{ \text{аксиома счет-ой аддитивности вер-тей} \right\} =$$

$$= P(AH_1) + \dots + P(AH_n) = \left\{ \begin{array}{l} P(H_i) > 0 \Rightarrow \text{Th умнож-я} \\ \Rightarrow P(AH_i) = P(A|H_i) P(H_i) \end{array} \right\} =$$

$$= P(A|H_1) P(H_1) + \dots + P(A|H_n) P(H_n) \bullet$$

Рисунок 11 – Вопросы 24-25

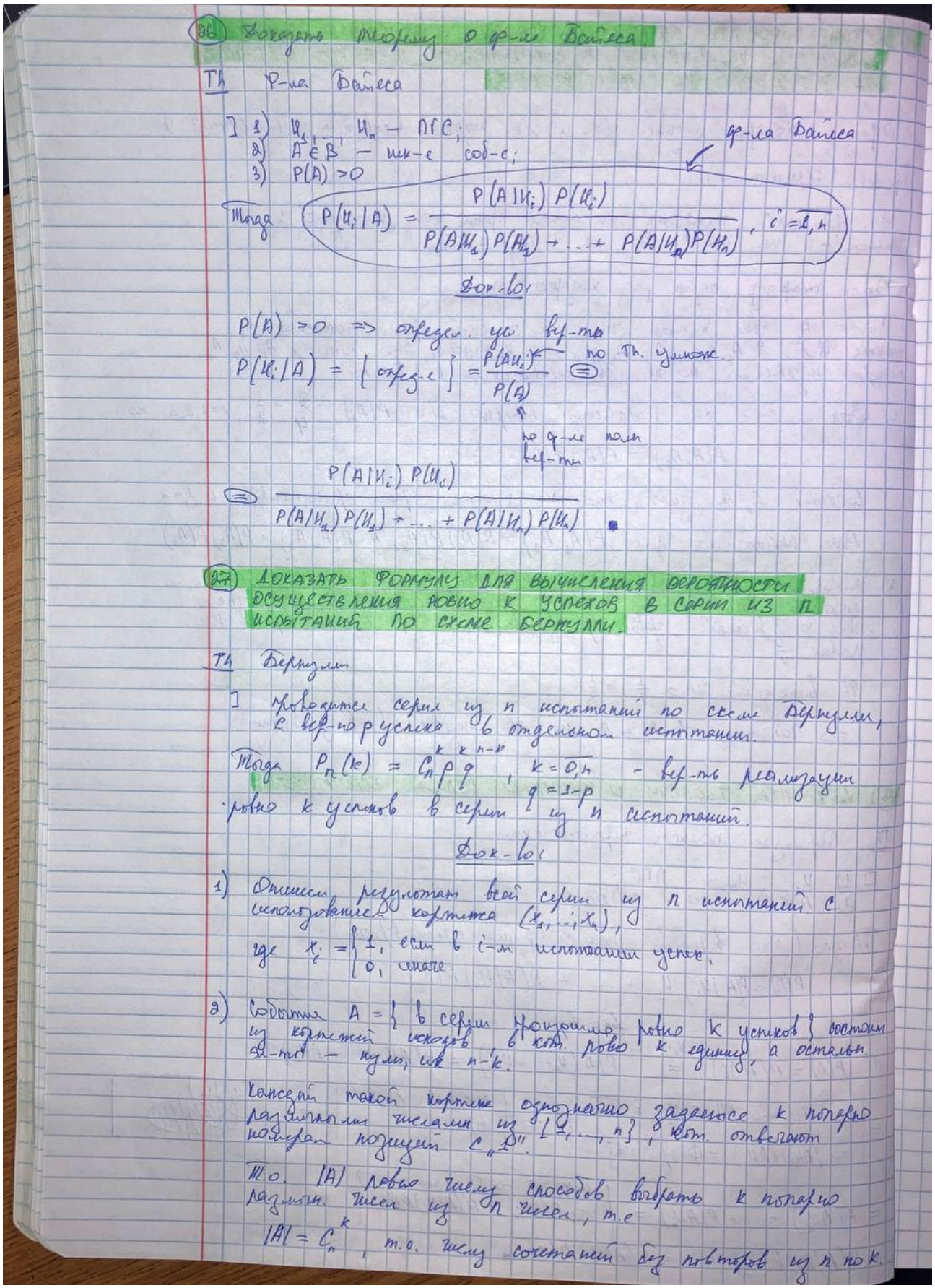


Рисунок 12 – Вопросы 26-27

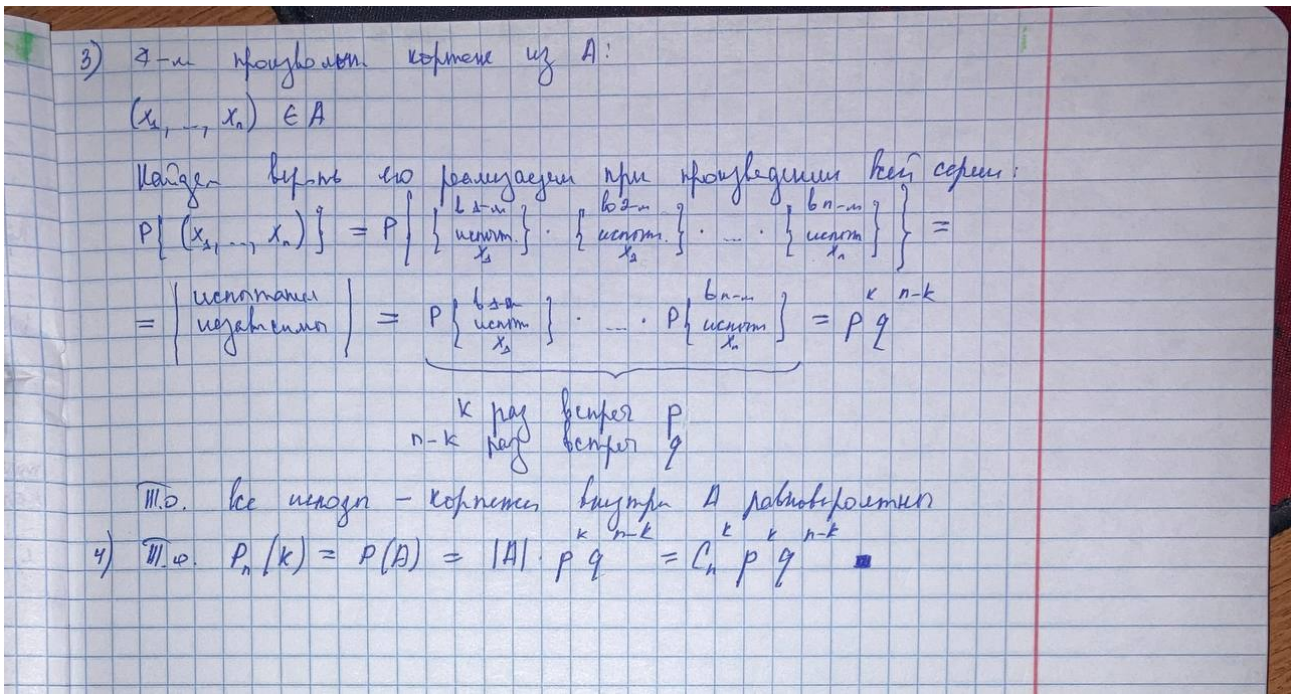


Рисунок 13 – Вопросы 27