Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

ОТЧЕТ

по лабораторной работе № 3
по курсу «Анализ Алгоритмов»
на тему: «Трудоемкость сортировок»

Студент	ИУ7-53Б (Группа)	(Подпись, дата)	Лысцев Н. Д. (И. О. Фамилия)
Преподаватель		(Подпись, дата)	Волкова Л. Л. (И. О. Фамилия)

2023 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Сортировка – процесс перегруппировки последовательности объектов в некотором порядке. Это одна из фундаментальных операций в алгоритмике и компьютерных науках, играющая ключевую роль в эффективной обработке данных.

Целью данной лабораторной работы является исследование трех алгоритмов сортировки: блочной сортировки, сортировки слиянием и поразрядной сортировки.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1) Изучить и описать три алгоритма сортировки: блочной, слиянием и поразрядной.
2) Создать программное обеспечение, реализующее следующие алгоритмы:
   - алгоритм блочной сортировки;
   - алгоритм сортировки слиянием;
   - алгоритм поразрядной сортировки.
3) Провести анализ эффективности реализаций алгоритмов по памяти и по времени.
4) Провести оценку трудоемкости алгоритмов сортировки.
5) Обосновать полученные результаты в отчете к выполненной лабораторной работе.

1 Аналитический раздел

В данном разделе будут рассмотрены понятия матрицы, умножения двух матриц, классический алгоритм умножения матриц и умножение матриц с помощью алгоритма Винограда.

1.1 Матрица

Матрица – математический объект, записываемый в виде прямоугольной таблицы элементов кольца или поля (например, целых или комплексных чисел), которая представляет собой совокупность строк и столбцов, на пересечении которых находятся её элементы. Количество строк и столбцов матрицы задают размер матрицы [1].

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Для матрицы определены следующие алгебраические операции:

1) Сложение матриц, имеющих один и тот же размер.

2) Умножение матрицы на число.

3) Умножение матриц подходящего размера.

Умножение двух матриц (обозначается: AB, реже $A \times B$) определяется следующим образом: каждый элемент результирующей матрицы – это сумма произведений элементов соответствующих строк первой матрицы и столбца второй матрицы. При этом количество столбцов в первой матрице должно совпадать с количеством строк во второй матрице. Операция умножения матриц в общем случае не коммутативна, то есть $AB \neq BA$.

1.2 Классический алгоритм умножения двух матриц

Классический алгоритм умножение двух матриц вытекает из определения умножения двух матриц и реализует формулу 1.1.

Пусть даны две прямоугольные матрицы A и B размерности $m \times n$ и $n \times q$ соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{lm} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица C размерностью $m \times q$:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mq} \end{pmatrix}$$

где элемент результирующей матрицы c_{ij} определяется так:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj} \tag{1.1}$$

1.3 Алгоритм Винограда для умножения двух матриц

Алгоритм Винограда [2] – алгоритм умножения квадратных матриц. Анализируя классический алгоритм умножения двух матриц, можно увидеть, что каждый элемент результирующей матрицы представляет собой скалярное произведение соответствующей строки и соответствующего столбца исходной матрицы.

Рассмотрим 2 вектора: $V = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ и $W = (w_1, w_2, w_3, w_4)$.

Их скалярное произведение равно:

$$V \cdot W = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3 + v_3 \cdot w_3 \tag{1.2}$$

Это равенство можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} V \cdot W = (v_1 + w_2) \cdot (v_2 + w_1) + (v_3 + w_4) \cdot (v_4 + w_3) \\ -v_1 \cdot v_2 - v_3 \cdot v_4 - w_1 \cdot w_2 - w_3 \cdot w_4 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Несмотря на то, что второе выражение требует вычисления большего количества операций, чем стандартный алгоритм: вместо четырех умножений - шесть, а вместо трех сложений - десять, последние слагаемые в формуле 1.3 допускают предварительную обработку: его части можно вычислить заранее и запомнить для каждой строки первой матрицы и для каждого столбца второй матрицы, что позволит для каждого элемента выполнять лишь два умножения и пять сложений, складывая затем только лишь с 2 предварительно посчитанными суммами соседних элементов текущих строк и столбцов. Из-за того, что операция сложения быстрее операции умножения в ЭВМ, на практике алгоритм должен работать быстрее стандартного.

В случае нечетного значений размера изначальной матрицы следует произвести еще одну операцию - добавление произведения последних элементов соответствующих строк и столбцов.

1.4 Оптимизированный алгоритм Винограда для умножения двух матриц

При программной реализации алгоритма Винограда предлагается выполнить следующие оптимизации:

1) Заменить умножение на 2 на побитовый сдвиг влево.

2) Заменить выражение вида $x = x + k$ на выражение вида $x += k$.

3) Значение $\frac{Q}{2}$, используемое в циклах расчета предварительных данных, вычислить заранее.

Вывод

В данном разделе были рассмотрены понятия матрицы и операции умножения, классического алгоритма умножения матриц и алгоритма умножения матриц с помощью алгоритма Винограда, а также были приведены варинты оптимизаций алгоритма Винограда.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Матрица, её история и применение [Электронный ресурс]. — Режим доступа: https://urok.1sept.ru/articles/637896 (дата обращения: 11.10.2022).
2. Реализация алгоритма умножения матриц по винограду на языке Haskell [Электронный ресурс]. — Режим доступа: https://cyberleninka.ru/article/n/realizatsiya-algoritma-umnozheniya-matrits-po-vinogradu-na-yazyke-haskell (дата обращения: 11.10.2022).
3. Справочник по языку C++ [Электронный ресурс]. — Режим доступа: https://learn.microsoft.com/ru-ru/cpp/cpp/cpp-language-reference?view=msvc-170 (дата обращения: 28.09.2022).
4. clock_getres [Электронный ресурс]. — Режим доступа: https://pubs.opengroup.org/onlinepubs/9699919799/functions/clock_getres.html (дата обращения: 28.09.2022).
5. Ubuntu 22.04.3 LTS (Jammy Jellyfish) [Электронный ресурс]. — Режим доступа: https://releases.ubuntu.com/22.04/ (дата обращения: 28.09.2022).