Экзамен. Моделирование

Лысцев Никита ИУ7-63Б

22 июня 2024 г.

Список вопросов для консы

1. Что подразумевается под оценкой точности в методах PKN, N = 2, 4? Нужно ли писать что то про погрешность методов РК? Нужно ли в вопросе про РК4 добавлять обобщение на систему их 2-х уравнений?

2. Не понял в методе адамса про переход и точки n в точку $n+1$ за 1 шаг

3. Как правильно выглядит постановка задачи Коши?

Понятие модели и моделирования. Общая классификация моделей. Требования к моделям. Примеры из конкретных предметных областей.

Моделирование – вид человеческой деятельности, при кот. изучение объекта заменяется изучением его модели. Работа с объектом заменяется работой с его моделью. **Объект** – процесс, система, явление, событие.

Модель – некоторый образ этого объекта, ему *не тождественный*.

Модель – мысленно представляемая или материально реализованная система, кот. отображая и воспроизводя изучаемый объект, замещает его так, что ее изучение позволяет получить новую информацию об объекте.

Модель – это представление объекта в виде, отличном от формы и способа его реального существования.

Классификация моделей (разделяют на 3 больших класса):

– *материальные* (натурные);

– *модели суждения:* не будем касаться (вера, религия, философия);

– *нематериальные* (абстрактные, идеальные).

Материальные модели:

– *Физические* – материальная модель, кот. воспроизводит объект в каком то урезанном виде;

  Пример: макет самолета продувают в аэродинамическую трубу. Весь функционал воспроизводится в точности.

  Пример: оптические печи. Исследование воздействия радиационного излучения.

– *Геометрические* – воспроизводят форму объекта, с кот. мы работаем;

  Пример: макеты архитектурных сооружений, макеты технических устройств, муляжи, манекены, глобусы.

– *Аналоговые*

  Бывает так, что одни и те же явления имеют подобия. Это подобие не обнаруживается, если смотреть внешне. Но, описывая эти явления или процессы, можно обнаружить, что уравнения, кот. их описывают, похожие.

  Пример: хочу определить температурное поле в какой то сложной пластине с какими то сложными краевыми условиями. Чтобы определить температурное поле в этой ситуации, можно построить эл. цепь по определенным правилам, в кот. будут сопротивления, конденсаторы, катушки и т. д. Измеряя сопротивление отдельных участков этой цепи, напряжение опред-х участков, токи, кот. текут, можно сопоставить этим электрическим полям температурное поле, тепловые потоки, кот. распр-ся в этой пластине, или, например, концентрацию частиц (опис-ся теми же самыми ур-ми), диффузию.

  На это принципе построены аналоговые ЭВМ.

Нематериальные модели:

Классификация м.б. проведена по разным признакам (перечень признаков неполный):

Одни и те же модели м.б. отнесены к разным классам.

– *по форме выражения* – механические, логические, математические;

– *по предмету исследования* – физические, химические, технические, медицинские, физиологические и т. д.;

– *по природе явления* – социальные, экономические, биологические, психологические, молекулярные, квантовые;

– *по степени точности* – приближенные, точные, достоверные и т. д.;

– *по задачам исследования* – эвристические, прогностические;

– *по способы выражения* – графические, текстовые, символьные;

– *по свойствам отражения* – функциональные, информационные, системные.

Требования к математическим моделям:

– *адекватность* – соответствие модели задачам, кот. стоят перед моделью (в какой степени она удовлетворяет требованиям модели);

– *точность*;

– *универсальность* – модель описывает не одно явление, а целый класс явлений;

В физике одни и те же уравнения описывают распр-е тепла, диффузию частиц и др. процессы.

– *Экономичность*.

Схема вычислительного эксперимента.

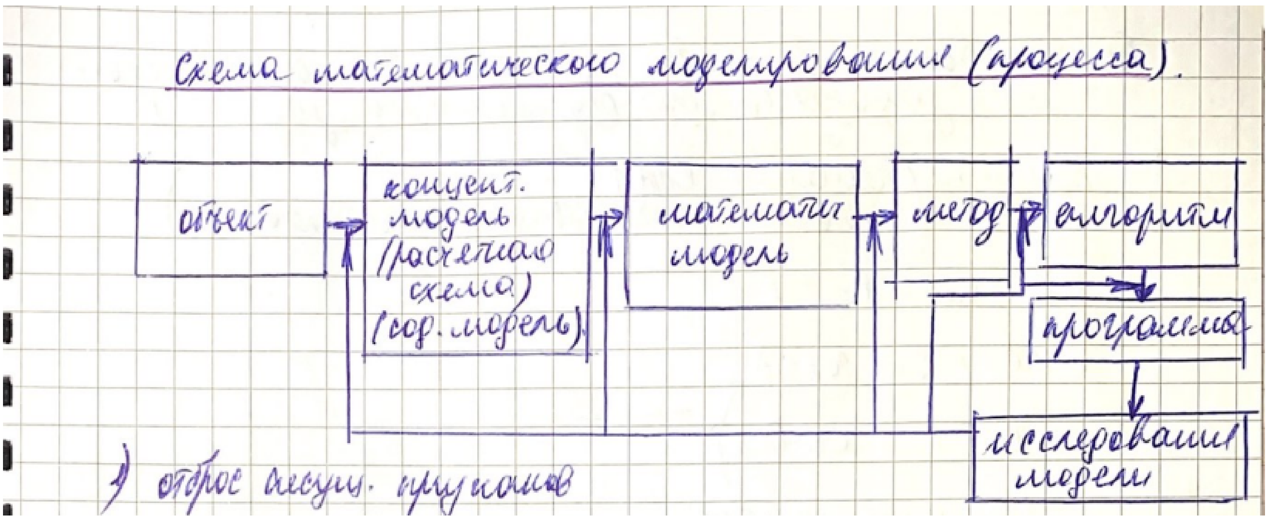


Рисунок 1 – Схема математического моделирования

Ошибка в модели – самое неприятное.

Программа – экспериментальная установка.

Процедура проведения численных расчетов с помощью программы называется **вычислительным экспериментом**. Он не уступает в точности натурному эксперименту. Он может заменить натурный эксперимент.

Понятие математической модели. Функции моделей. Источники погрешностей при построении модели, алгоритмизации и программировании.

Математическая модель – представление объекта в виде мат. объектов (формул, уравнений разного типа, логических соотношений), т.е. с использованием математического аппарата.

Математическое моделирование – замена реального объекта его мат. моделью и изучение в дальнейшем построенной модели вместо изучаемого объекта.

Результаты распр-ся на тот объект, который мы изучаем.

Классификация мат. моделей:

- *регулярные (функциональные)* – позволяют описать функционирование того объекта, с кот. мы работаем;
- *модели идентификации* – модели черного ящика – строятся по принципу «вход выход»;

  Есть некий (м.б. материальный объект). Задаем на вход какие то хар-ки и наблюдаем за выходом. Устанавливаем связь между входом и выходом. Как работает объект не знаем.

  Если моделируем систему, то сначала строим модели отдельных элементов и объединяем в систему. Элементы между собой обмениваются какой то информацией. Удобно построить модель идентификации, т.е. она м.б. построена не только когда есть реальный объект.

  Модель идентификации, по сути, формула, вход-выход.

  С другой стороны, выходом м.б. вектор, входом тоже м.б. вектор. Связь устанавливается эмпирически. Но связь можно устанавливать, строя регулярные модели, проводя численные эксперименты уже над моделями, и строить модель идентификации. Тогда она в себе будет суммировать результаты применения этих регулярных моделей.

  Когда строим модель системы, то, построив модель идентификации отдельных элементов (а это формулы). С пом. этих формул мы обеспечиваем взаимодействие этих элементов и функционирование системы в целом.

Сами по себе применяются сотни лет. Это наиболее простой и понятный способ, когда мы не знаем, как это все работает, но мы знаем, как откликается тот или иной объект на воздействие на него.

Имеют важное значение при исследование систем.

- *имитационные*;

  Работают с вероятностями.

  Пример: теория массового обслуживания, теория очередей.

  Применяются и в физических задачах (многие имеют случайный характер).

- *феноменологические* – позволяют описать внешнюю сторону;

  Пример: термодинамика – она не устанавливает причины тех или иных явлений. Она говорит, что если сжал газ, то давление и температура будет повышаться. А почему так, она не дает ответа. Эта наука строит феноменологические модели.

Важные функции математических моделей:

- *средство познания действительности.*

  Уже на этапе создания модели выясняются нелогичности и пробелы в наших знаниях, формулируются направления необходимых исследований, конкретизируются соответствующие задачи. Вся научная деятельность состоит в построении и исследовании моделей.

- *средство накопления и передачи информации и общения, благодаря компактности, точности и объективности модели.*

- *средство обучения и тренажа, способствующее приобретению профессиональных навыков без риска для жизни и здоровья.*

- *средство прогнозирования поведения объекта.*

  Математическое моделирование позволяет еще до возникновения реальной ситуации оценить условия ее возникновения и способы управления развитием событий, выбрать оптимальные параметры и режимы работы системы до ее реального создания. Появляется возможность исследовать последствия катастроф, наступление которых невозможно допустить (взрыв ядерной установки, космические катастрофы, отравление океана, глобальные изменения климата и т.д.).

При моделировании возникает 4 вида погрешности:

– *погрешность исходных данных* – неустранимая, принимается как данность;

– *погрешность модели* – делается с нек-м приближением. Зависит от того, насколько вы специалист в той предметной области, кот. изучаем;

– *погрешность метода* – метода реализации модели. Заботиться о том, чтобы метод обеспечивал нужную для задачи точность;

– *погрешность округления* – погрешность, вносимая компьютерными вычислениями (представление чисел, погрешность, связанная с операциями);

  Нарастает как квадратный корень из количества операций. Погрешность метода д.б. раз в 5 меньше, чем погрешность округления.

Понятие корректности постановки задач. Привести примеры некорректно поставленных и слабо обусловленных задач и неустойчивых алгоритмов.

Задача считается корректно поставленной, если ее решение существует, единственно и устойчиво ко входным данным.

Устойчивость означает, что малое изменение входных данных должно приводить к малому изменению выходных данных, т.е. должно иметь место непрерывная зависимость выходных параметров от входных данных.

Если задача неустойчива, то решать ее обычными способами сложно. На любом этапе могут появиться погрешности. Это означает, что малейшие погрешности приведут к тому, что ошибка в ходе вычислений будет нарастать.

Пример: обратные задачи. Прямая задача: задан поток и прочее – определить температурное поле. Обратная задача: по температурному полю найти

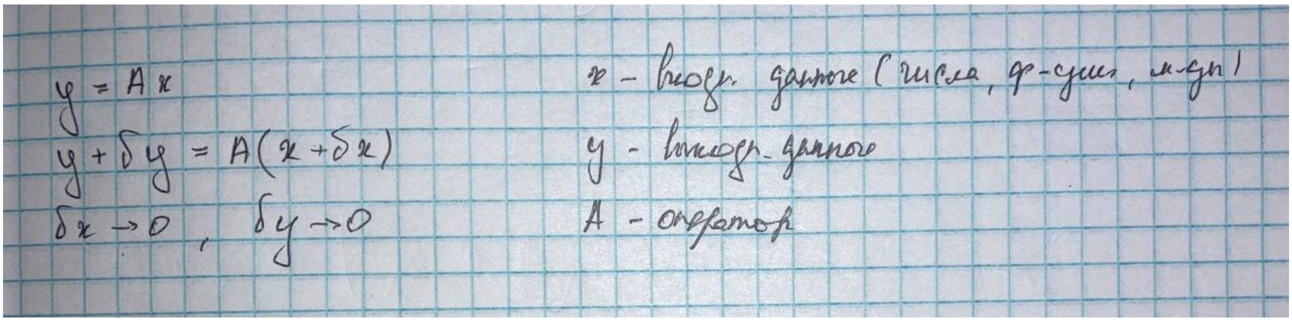


Рисунок 2 – Устойчивость решения задачи

заданный поток. Обращая время вспять и зная текущее состояние поля найти начальное поле, от которого стартовал. **Это некорректные задачи.**

Для таких задач придуманы свои методы решения – **регуляризация**. Идея: превращаем задачу в корректную, введя некий параметр и решаем по опр. алгоритмам, а потом, устремляя параметр к нулю, переходим к решению некорректной задачи.

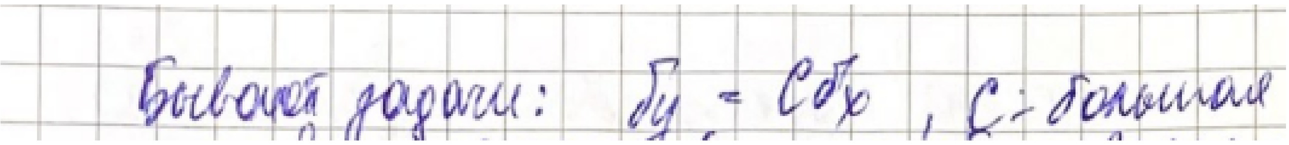


Рисунок 3 – Слабоустойчивая задача

Такие задачи называются слабоустойчивыми (плохо обусловленными).

Пример: задачи линейной алгебры, в частности, решение СЛАУ

помимо неустойчивых задач, неустойчивым м.б. алгоритм, выбранный для решения.

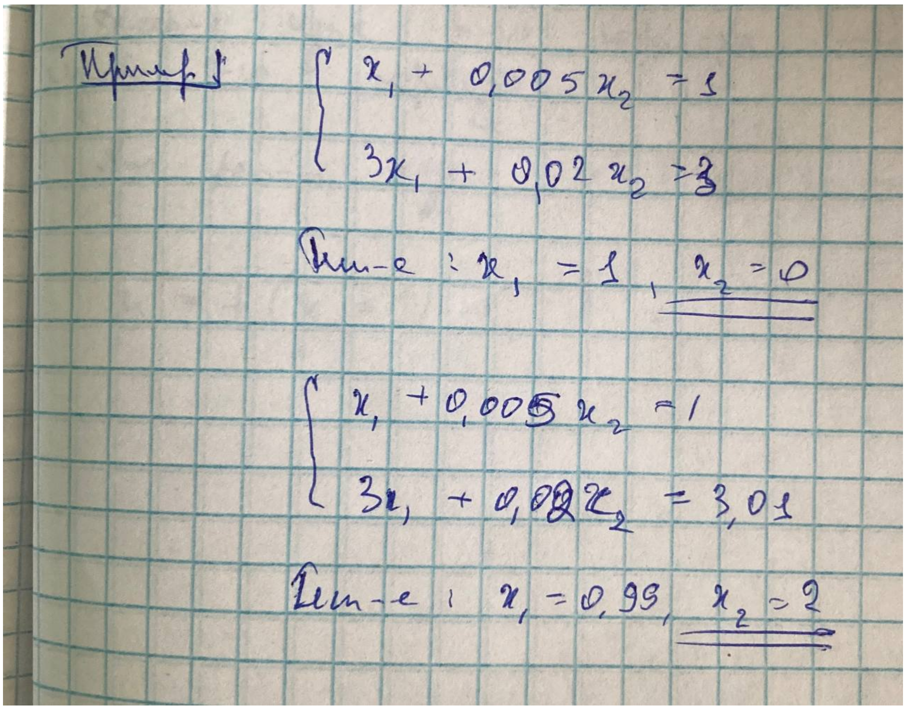


Рисунок 4 – Пример слабоустойчивой задачи

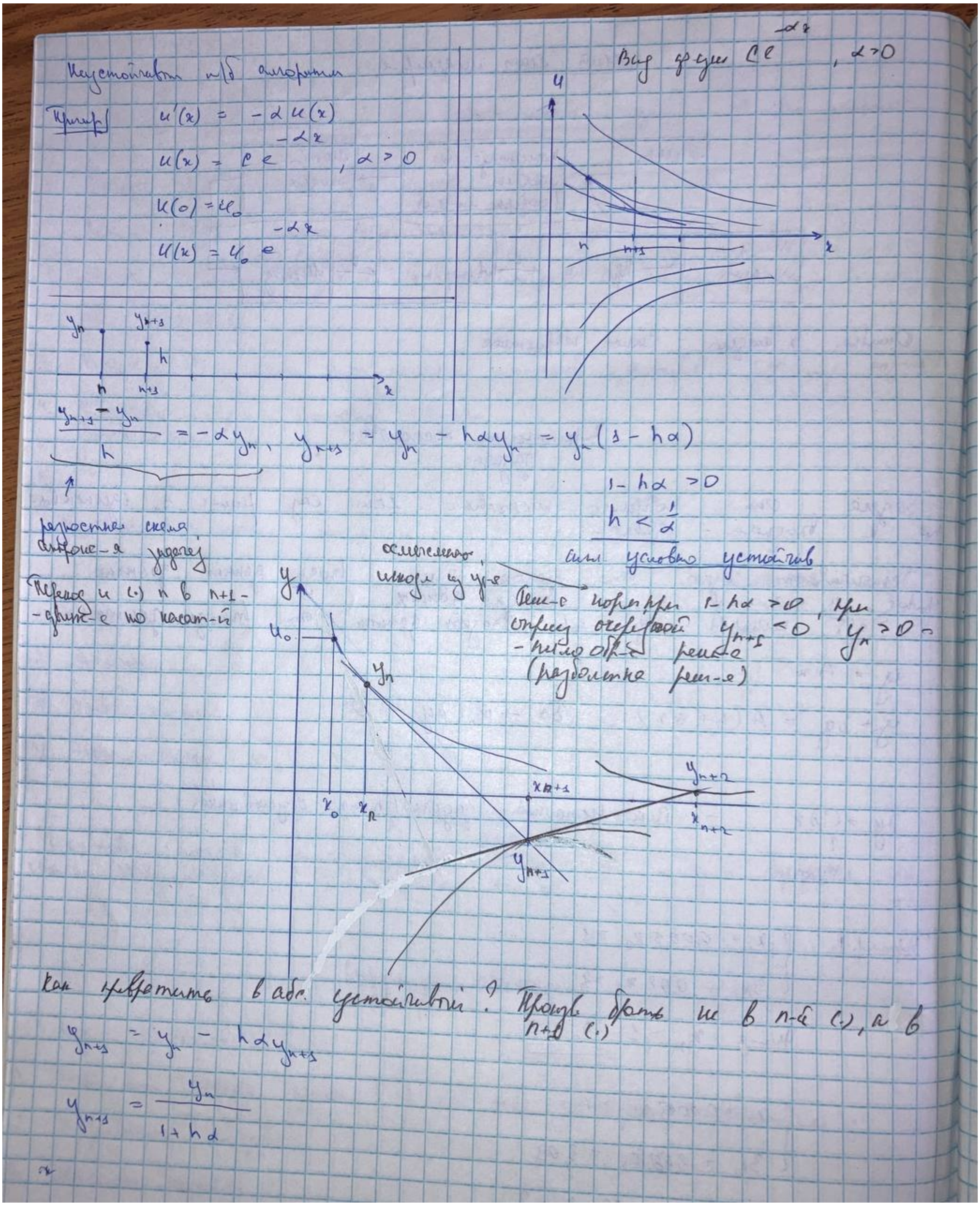


Рисунок 5 – Пример слабоустойчивого алгоритма (задача устойчива)

Общая классификация методов построения математических моделей.

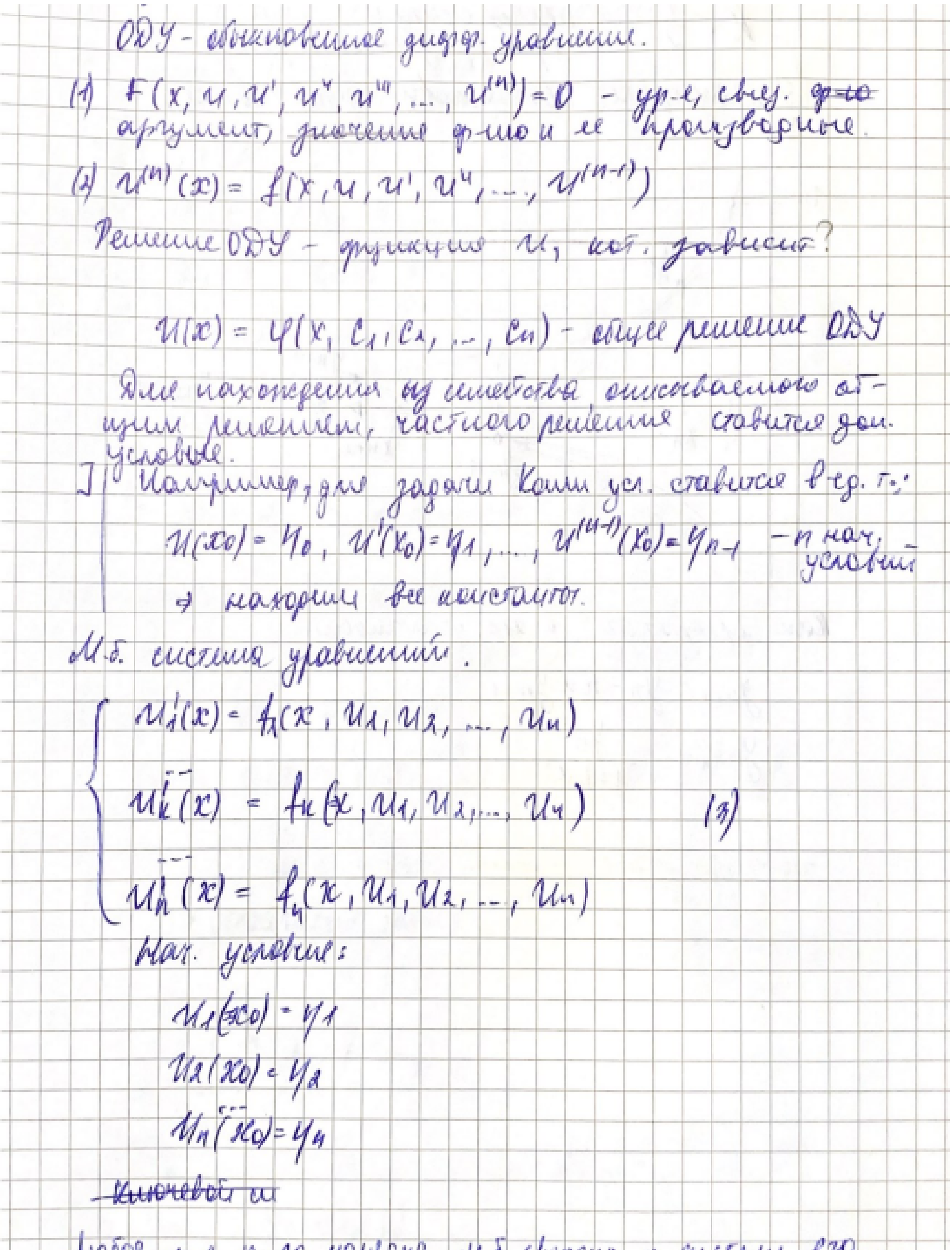
Построение математических моделей на основе законов природы. Привести примеры.

Построение математических моделей на основе вариационных принципов. Привести примеры.

Построение математических моделей выстраиванием иерархии сверху - вниз и снизу - вверх. Привести примеры.

Построение математических моделей методом аналогий. Привести примеры.

Понятие ОДУ. Сведение ОДУ произвольного порядка к системе ОДУ первого порядка. Привести примеры.



ОДУ - обыкновенное дифф. уравнение.

(1) $F(x, u, u', u'', u''', \dots, u^{(n)}) = 0$ - ур-е, связ. ~~ф-ю~~ аргумент, значение ф-ии и ее производные.

(2) $u^{(n)}(x) = f(x, u, u', u'', \dots, u^{(n-1)})$

Решение ОДУ - функция u, кот. зависит?

$u(x) = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ - общее решение ОДУ

Для нахождения из множества описываемого общим решением частного решения ставится доп. условие.

Например, для задачи Коши усл. ставится в ед. т.:

$u(x_0) = y_0,\ u'(x_0) = y_1, \dots, u^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ - n нач. условий

⇒ находим все константы.

М.б. система уравнений.

$$\begin{cases} u_1'(x) = f_1(x, u_1, u_2, \dots, u_n) \\ \dots \\ u_k'(x) = f_k(x, u_1, u_2, \dots, u_n) \\ \dots \\ u_n'(x) = f_n(x, u_1, u_2, \dots, u_n) \end{cases} \qquad (3)$$

Нач. условие:

$u_1(x_0) = y_1$

$u_2(x_0) = y_2$

$\dots$

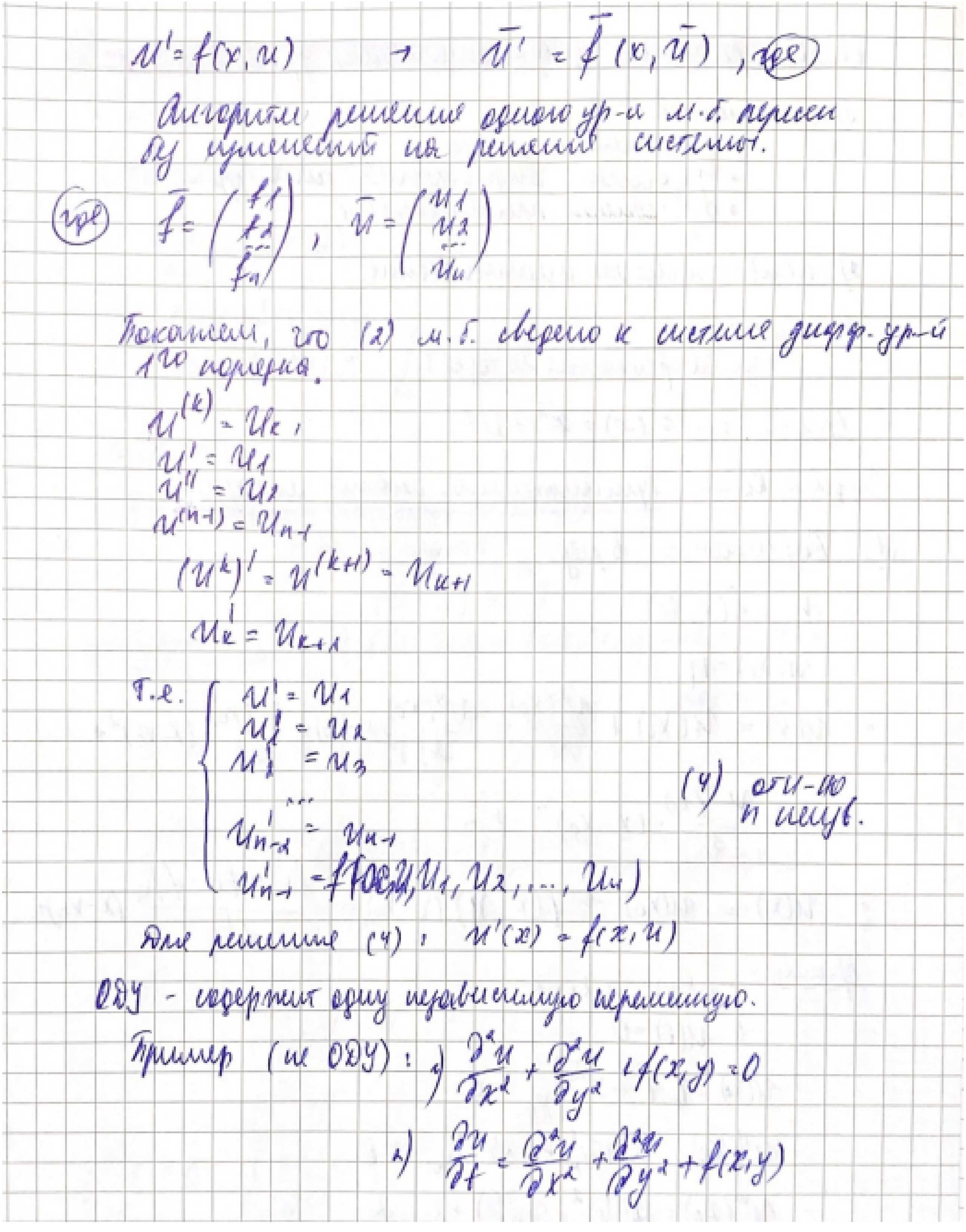
$u_n(x_0) = y_n$

~~ключевой~~

Любое ур-е n-го порядка м.б. сведено к системе 1го порядка заменой переменных

⇒ любые системы (расш.) приводятся к виду (3)

Рисунок 6 – ОДУ



$u' = f(x,u) \rightarrow \bar{u}' = \bar{f}(x,\bar{u})$, где

Алгоритм решения одного ур-я м.б. перенесен без изменений на решение системы.

где $\bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}$, $\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$

Покажем, что (2) м.б. сведено к системе дифф. ур-й 1го порядка.

$u^{(k)} = u_k$,

$u' = u_1$

$u'' = u_2$

$u^{(n-1)} = u_{n-1}$

$(u^k)' = u^{(k+1)} = u_{k+1}$

$u_k' = u_{k+1}$

Т.е. $\begin{cases} u' = u_1 \\ u_1' = u_2 \\ u_2' = u_3 \\ \dots \\ u_{n-2}' = u_{n-1} \\ u_{n-1}' = f(x, u, u_1, u_2, \dots, u_n) \end{cases}$ (4) отн-но n неизв.

Для решения (4): $u'(x) = f(x,u)$

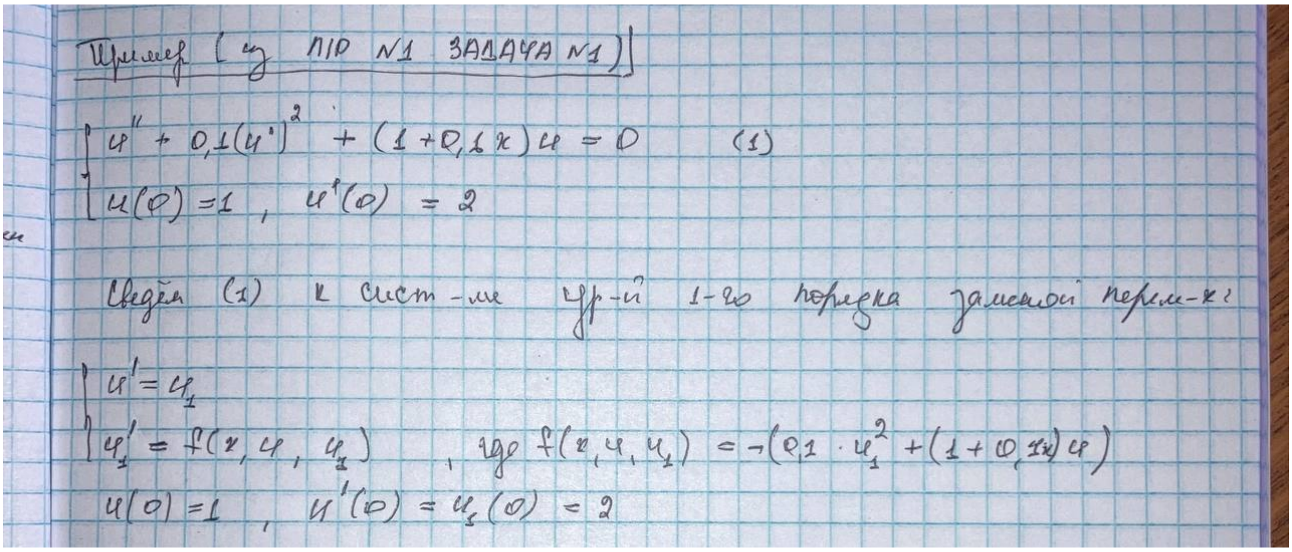
ОДУ - содержит одну независимую переменную.

Пример (не ОДУ): 1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x,y) = 0$

2) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x,y)$

Рисунок 7 – ОДУ2

Уравнение в частных производных содержит минимум 2 независимых переменных.



Пример (из ЛР №1 ЗАДАЧА №1)

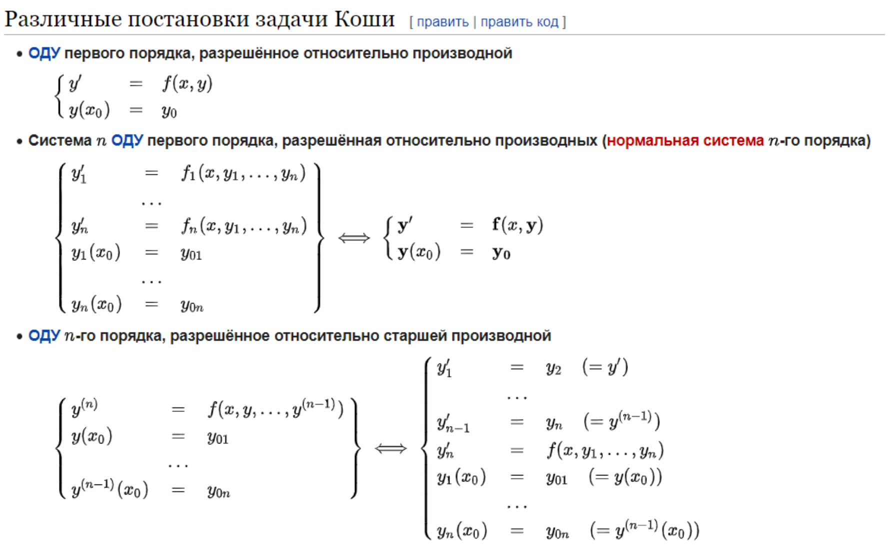
$$\begin{cases} u'' + 0{,}1(u')^2 + (1+0{,}1x)u = 0 & (1) \\ u(0) = 1, \quad u'(0) = 2 \end{cases}$$

Сведём (1) к сист-ме ур-й 1-го порядка заменой перем-х:

$$\begin{cases} u' = u_1 \\ u_1' = f(x, u, u_1), \quad \text{где } f(x,u,u_1) = -(0{,}1 \cdot u_1^2 + (1+0{,}1x)u) \\ u(0) = 1, \quad u'(0) = u_1(0) = 2 \end{cases}$$

Рисунок 8 – Пример сведения ОДУ 2-го порядка к системе уравнеиний 1-го порядка

Постановки задачи Коши и краевой задачи для ОДУ.



Различные постановки задачи Коши [править | править код]

- ОДУ первого порядка, разрешённое относительно производной

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

- Система n ОДУ первого порядка, разрешённая относительно производных (нормальная система n-го порядка)

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1' & = & f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ & \ldots & \\ y_n' & = & f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \\ y_1(x_0) & = & y_{01} \\ & \ldots & \\ y_n(x_0) & = & y_{0n} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y_0} \end{cases}$$

- ОДУ n-го порядка, разрешённое относительно старшей производной

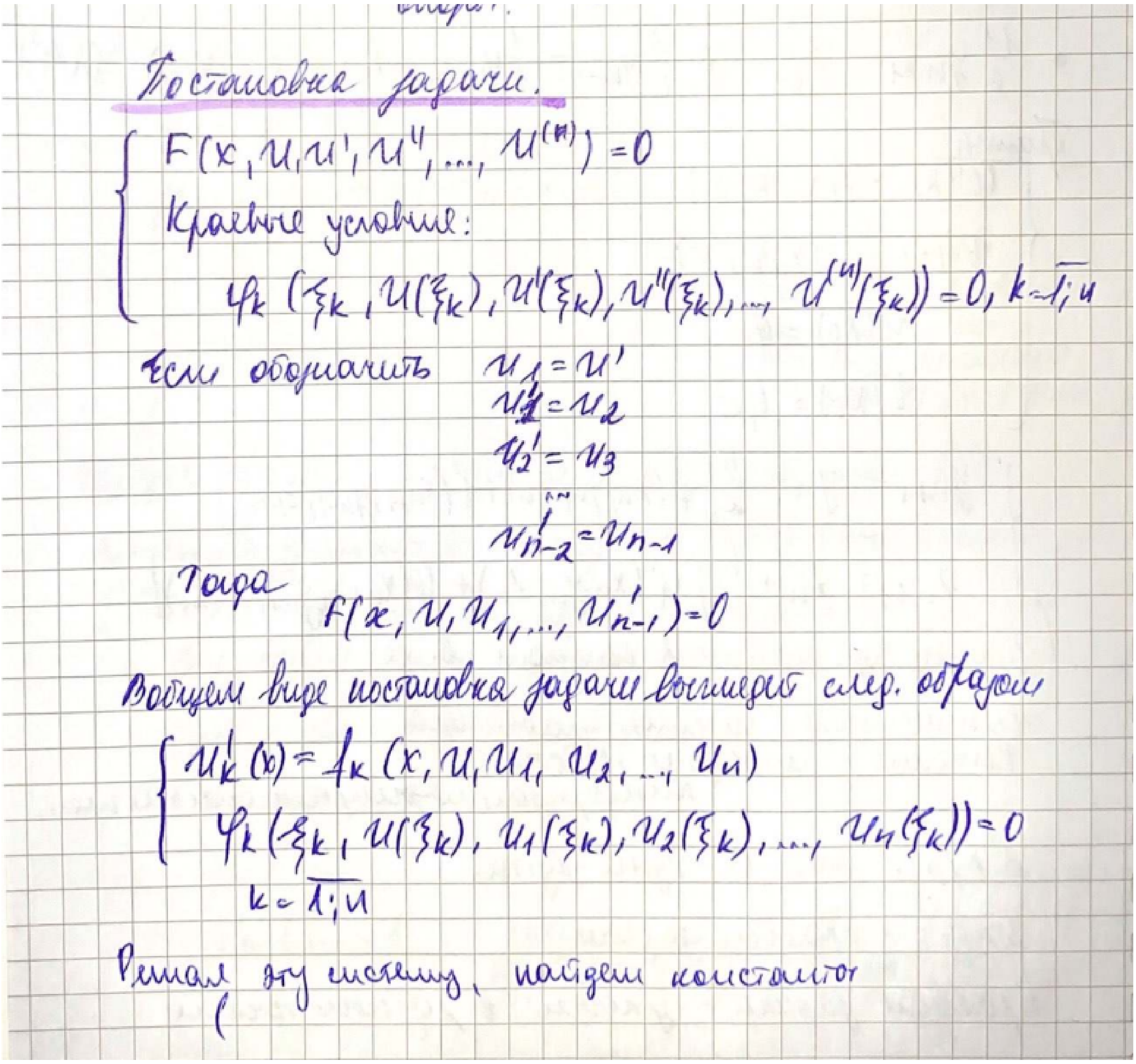
$$\left\{\begin{array}{lcl} y^{(n)} & = & f(x, y, \ldots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) & = & y_{01} \\ & \ldots & \\ y^{(n-1)}(x_0) & = & y_{0n} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} y_1' & = & y_2 \quad (= y') \\ & \ldots & \\ y_{n-1}' & = & y_n \quad (= y^{(n-1)}) \\ y_n' & = & f(x, y_1, \ldots, y_n) \\ y_1(x_0) & = & y_{01} \quad (= y(x_0)) \\ & \ldots & \\ y_n(x_0) & = & y_{0n} \quad (= y^{(n-1)}(x_0)) \end{array}\right.$$

Рисунок 9 – Постановка задачи Коши

$a \leq x \leq b$

Про краевую задачу:

В отличие от задачи Коши, где условие ставится на одном крае, здесь м.б. поставлено в нескольких точках, по крайней мере в двух. два условия позволят найти 2 константы => уравнение д.б. минимум 2-го порядка или 2 уравнения 1-го порядка. Дифф. ур-е 4-го порядка потребует 4 условия.



Постановка задачи.

$$\begin{cases} F(x, u, u', u'', \dots, u^{(n)}) = 0 \\ \text{Краевые условие:} \\ \varphi_k(\xi_k, u(\xi_k), u'(\xi_k), u''(\xi_k), \dots, u^{(n)}(\xi_k)) = 0, \ k = \overline{1;n} \end{cases}$$

Если обозначить $u_1 = u'$

$u_1' = u_2$

$u_2' = u_3$

$\dots$

$u_{n-2}' = u_{n-1}$

Тогда

$$F(x, u, u_1, \dots, u_{n-1}') = 0$$

Вобщем виде постановка задачи выглядит след. образом

$$\begin{cases} u_k'(x) = f_k(x, u, u_1, u_2, \dots, u_n) \\ \varphi_k(\xi_k, u(\xi_k), u_1(\xi_k), u_2(\xi_k), \dots, u_n(\xi_k)) = 0 \end{cases}$$

$k = \overline{1;n}$

Решая эту систему, найдем константы

Рисунок 10 – Постановка краевой задачи

$a \leq x \leq b$

$a \leq \xi_k \leq b$

Метод Пикара в задаче Коши для ОДУ. Привести пример.

Если правую часть рассматривать как функцию от 2-х переменных, то это целая плоскость. Давайте правую часть рассматривать на решении этого уравнения. Тогда правая часть зависит только от x

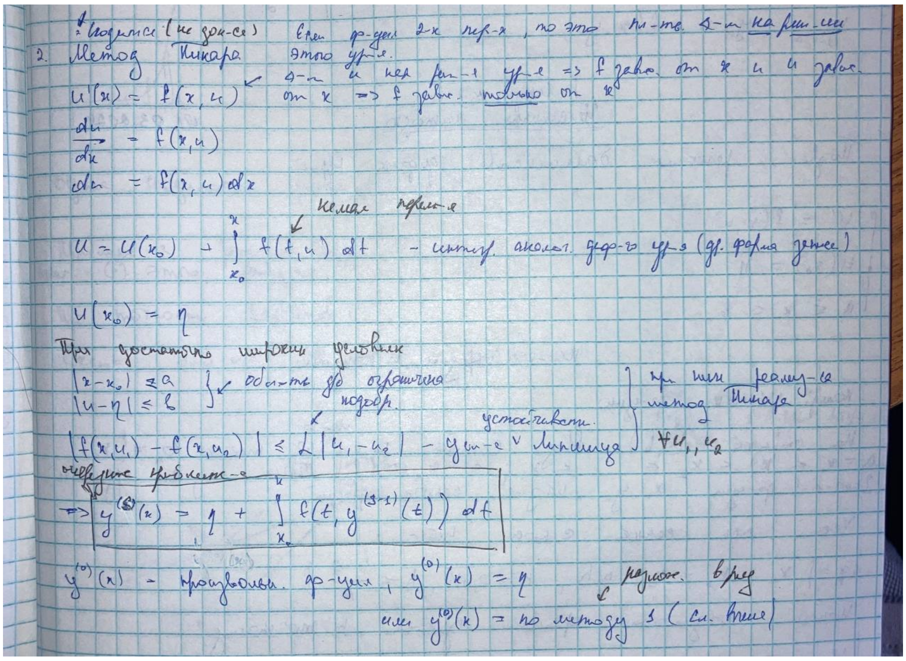


Рисунок 11 – Метод Пикара

Простой пример:

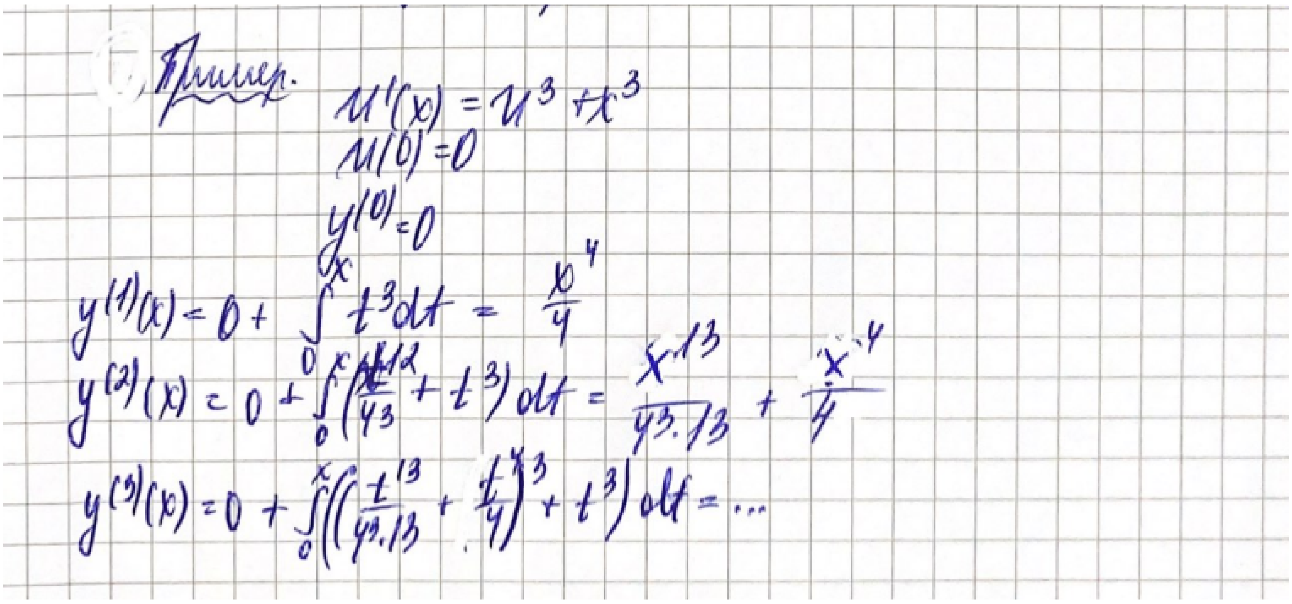
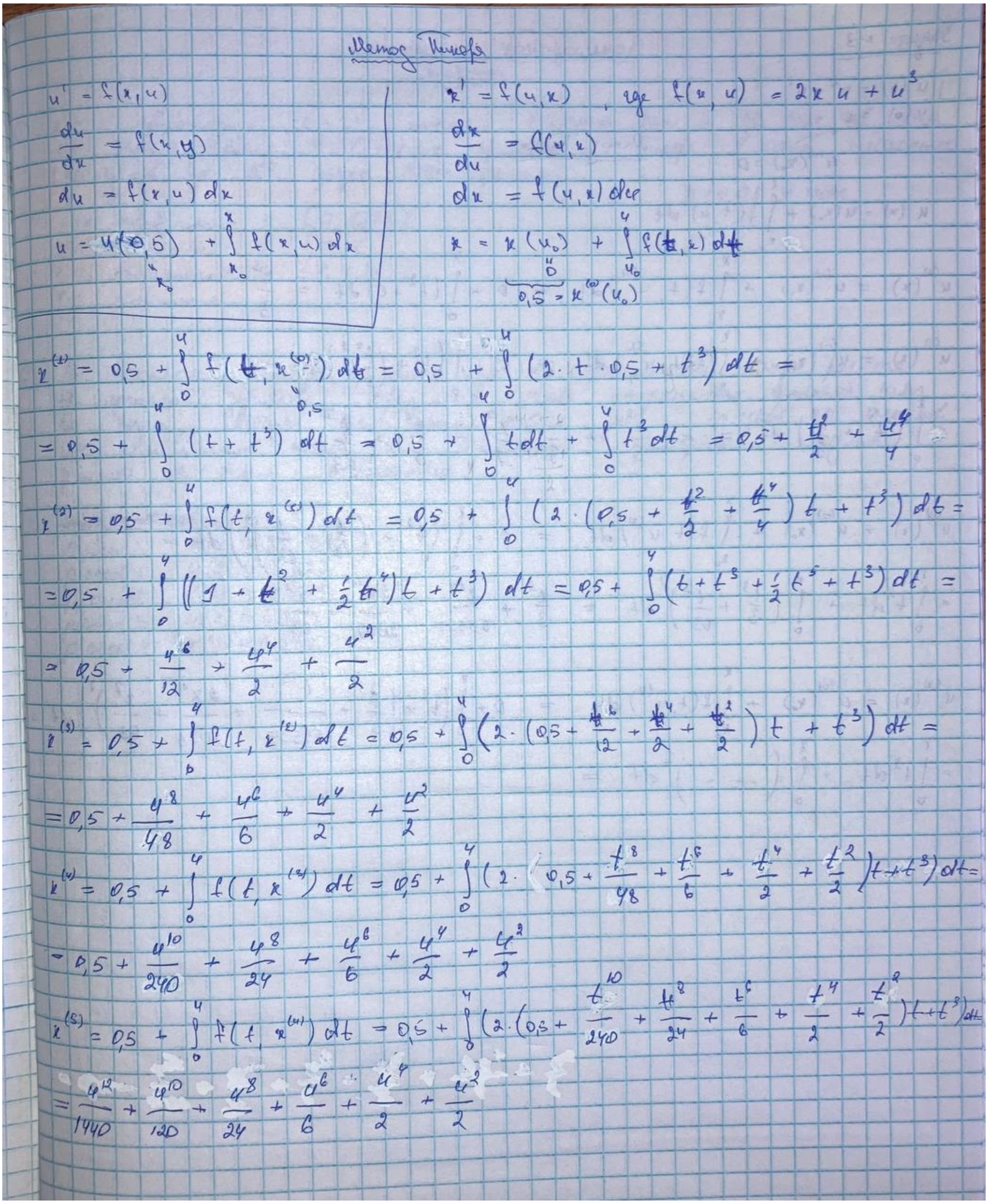


Рисунок 12 – Простой пример применения метода Пикара

Сложный пример:



Метод Пикара

$u' = f(x,u)$

$\frac{du}{dx} = f(x,y)$

$du = f(x,u)\,dx$

$u = u(0,5) + \int_{x_0}^{x} f(x,u)\,dx$

$x' = f(u,x)$, где $f(x,u) = 2xu + u^3$

$\frac{dx}{du} = f(u,x)$

$dx = f(u,x)\,du$

$x = \underbrace{x(u_0)}_{0,5 = x^{(0)}(u_0)} + \int_{u_0}^{u} f(t,x)\,dt$

$x^{(1)} = 0,5 + \int_0^u f(t, x^{(0)})\,dt = 0,5 + \int_0^u (2\cdot t\cdot 0,5 + t^3)\,dt =$

$= 0,5 + \int_0^u (t + t^3)\,dt = 0,5 + \int_0^u t\,dt + \int_0^u t^3\,dt = 0,5 + \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{4}$

$x^{(2)} = 0,5 + \int_0^u f(t, x^{(1)})\,dt = 0,5 + \int_0^u \left(2\cdot\left(0,5 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}\right)t + t^3\right)dt =$

$= 0,5 + \int_0^u \left(\left(1 + t^2 + \frac{1}{2}t^4\right)t + t^3\right)dt = 0,5 + \int_0^u \left(t + t^3 + \frac{1}{2}t^5 + t^3\right)dt =$

$= 0,5 + \frac{u^6}{12} + \frac{u^4}{2} + \frac{u^2}{2}$

$x^{(3)} = 0,5 + \int_0^u f(t, x^{(2)})\,dt = 0,5 + \int_0^u \left(2\cdot\left(0,5 + \frac{t^6}{12} + \frac{t^4}{2} + \frac{t^2}{2}\right)t + t^3\right)dt =$

$= 0,5 + \frac{u^8}{48} + \frac{u^6}{6} + \frac{u^4}{2} + \frac{u^2}{2}$

$x^{(4)} = 0,5 + \int_0^u f(t, x^{(3)})\,dt = 0,5 + \int_0^u \left(2\cdot\left(0,5 + \frac{t^8}{48} + \frac{t^6}{6} + \frac{t^4}{2} + \frac{t^2}{2}\right)t + t^3\right)dt =$

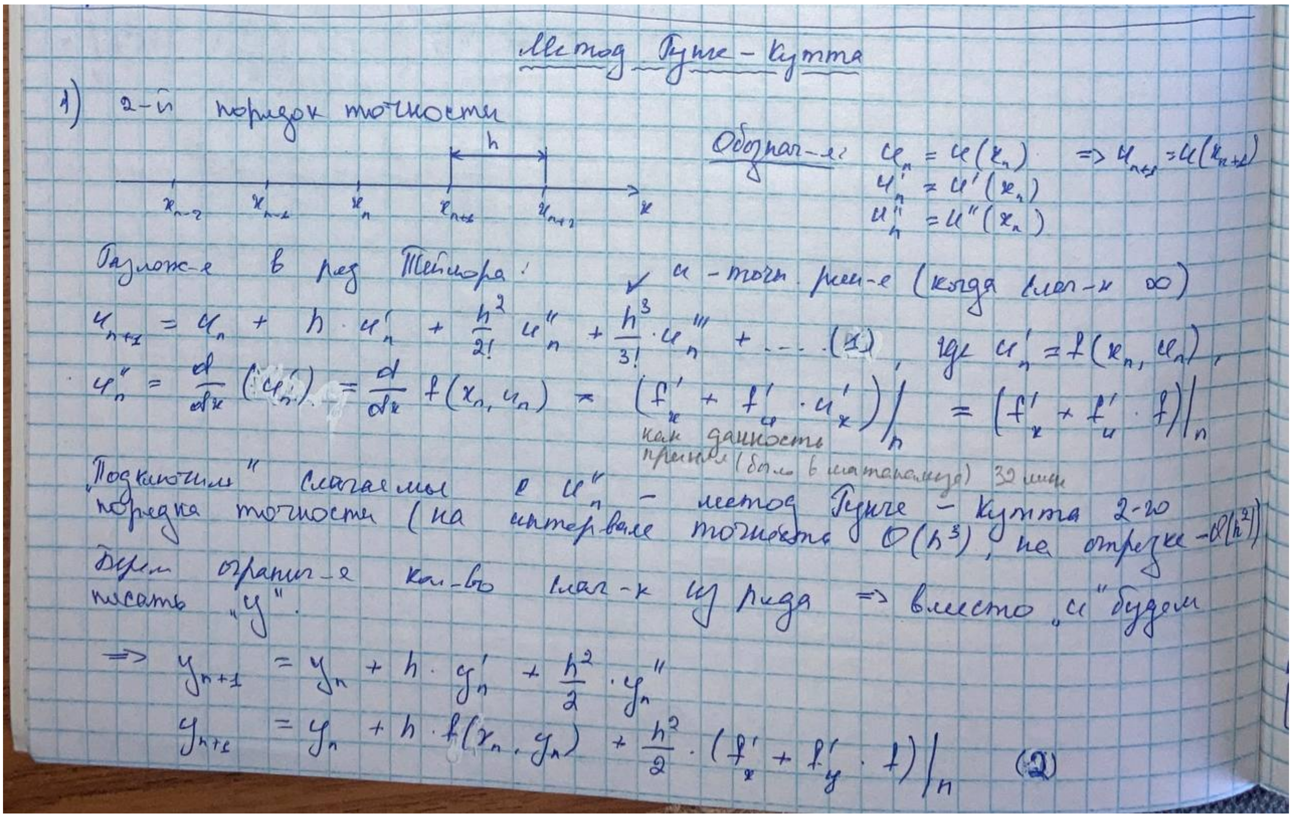
$= 0,5 + \frac{u^{10}}{240} + \frac{u^8}{24} + \frac{u^6}{6} + \frac{u^4}{2} + \frac{u^2}{2}$

$x^{(5)} = 0,5 + \int_0^u f(t, x^{(4)})\,dt = 0,5 + \int_0^u \left(2\cdot\left(0,5 + \frac{t^{10}}{240} + \frac{t^8}{24} + \frac{t^6}{6} + \frac{t^4}{2} + \frac{t^2}{2}\right)t + t^3\right)dt =$

$= \frac{u^{12}}{1440} + \frac{u^{10}}{120} + \frac{u^8}{24} + \frac{u^6}{6} + \frac{u^4}{2} + \frac{u^2}{2}$

Рисунок 13 – Сложный пример применения метода Пикара

Метод Рунге - Кутта 2-го порядка точности в задаче Коши для ОДУ. Оценка точности.



Метод Рунге – Кутта

1) 2-й порядок точности

Обознач-е: $u_n = u(x_n)$ $\Rightarrow$ $u_{n+1} = u(x_{n+1})$

$u'_n = u'(x_n)$

$u''_n = u''(x_n)$

h

x_{n-2} x_{n-1} x_n x_{n+1} x_{n+2} x

Разлож-е в ряд Тейлора: u – точн. реш-е (когда слаг-х ∞)

$u_{n+1} = u_n + h \cdot u'_n + \frac{h^2}{2!} u''_n + \frac{h^3}{3!} \cdot u'''_n + \ldots$ (1), где $u'_n = f(x_n, u_n)$,

$u''_n = \frac{d}{dx}(u'_n) = \frac{d}{dx} f(x_n, u_n) = (f'_x + f'_u \cdot u'_x)\big|_n = (f'_x + f'_u \cdot f)\big|_n$

как данность принять (было в матанализе) 3й сем

„Подкосим" слагаемые в u''_n – метод Рунге – Кутта 2-го порядка точности (на интервале точность $O(h^3)$, на отрезке – $O(h^2)$)

Будем ограничивать кол-во слаг-х из ряда $\Rightarrow$ вместо „u" будем писать „y".

$\Rightarrow y_{n+1} = y_n + h \cdot y'_n + \frac{h^2}{2} \cdot y''_n$

$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} \cdot (f'_x + f'_y \cdot f)\big|_n$ (2)

Рисунок 14 – РК2 (часть 1)

Метод Рунге - Кутта 4-го порядка точности в задаче Коши для ОДУ. Оценка точности.

Метод Адамса в задаче Коши для ОДУ.

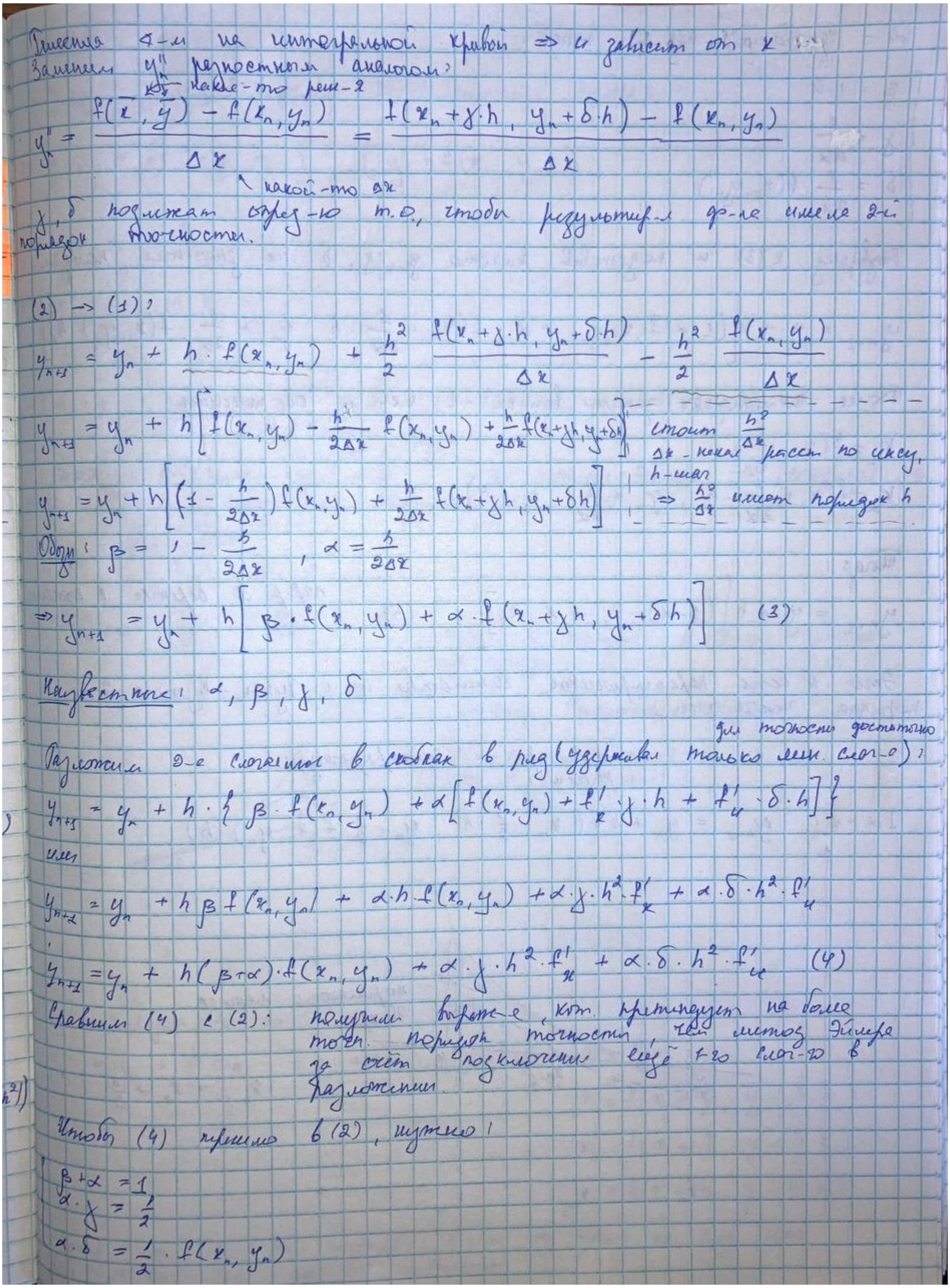
Очень популярный; много модификаций. Применялся для расчетов баллистических снарядов.

Это представитель класса многошаговых методов.

Получено решение в трех точках. В четвертой используется решение в этих трех точках, а не одно предыдущее.

Если правую часть рассматривать на интегральной кривой, то это будет функция от x.

Неявные численные методы (Эйлера, трапеций, Гира) в задаче Коши для ОДУ.


Тангенс α-и на интегральной кривой ⇒ и зависит от x

Заменим y''_n разностным аналогом:

$\bar{x}, \bar{y}$ какие-то реш-я

$$y''_n = \frac{f(\bar{x}, \bar{y}) - f(x_n, y_n)}{\Delta x} = \frac{f(x_n + \gamma \cdot h, y_n + \delta \cdot h) - f(x_n, y_n)}{\Delta x}$$

какой-то Δx

γ, δ подлежат опред-ю т.о., чтобы результир-я ф-ла имела 2-й порядок точности.

(2) → (1):

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} \frac{f(x_n + \gamma \cdot h, y_n + \delta h)}{\Delta x} - \frac{h^2}{2} \frac{f(x_n, y_n)}{\Delta x}$$

$$y_{n+1} = y_n + h\left[f(x_n, y_n) - \frac{h}{2\Delta x} f(x_n, y_n) + \frac{h}{2\Delta x} f(x_n + \gamma h, y_n + \delta h)\right]$$

стоит $\frac{h^2}{\Delta x}$

Δx - некое расст по иксу,

h - шаг

$$y_{n+1} = y_n + h\left[\left(1 - \frac{h}{2\Delta x}\right) f(x_n, y_n) + \frac{h}{2\Delta x} f(x_n + \gamma h, y_n + \delta h)\right]$$

⇒ $\frac{h^2}{\Delta x}$ имеет порядок h

Обозн: $\beta = 1 - \frac{h}{2\Delta x}$, $\alpha = \frac{h}{2\Delta x}$

$$\Rightarrow y_{n+1} = y_n + h\left[\beta \cdot f(x_n, y_n) + \alpha \cdot f(x_n + \gamma h, y_n + \delta h)\right] \quad (3)$$

Неизвестные: α, β, γ, δ

для точности достаточно

Разложим 2-е слагаемое в скобках в ряд (удерживая только лин. слаг-е):

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \{\beta \cdot f(x_n, y_n) + \alpha[f(x_n, y_n) + f'_x \cdot \gamma \cdot h + f'_y \cdot \delta \cdot h]\}$$

или

$$y_{n+1} = y_n + h\beta f(x_n, y_n) + \alpha \cdot h \cdot f(x_n, y_n) + \alpha \cdot \gamma \cdot h^2 \cdot f'_x + \alpha \cdot \delta \cdot h^2 \cdot f'_y$$

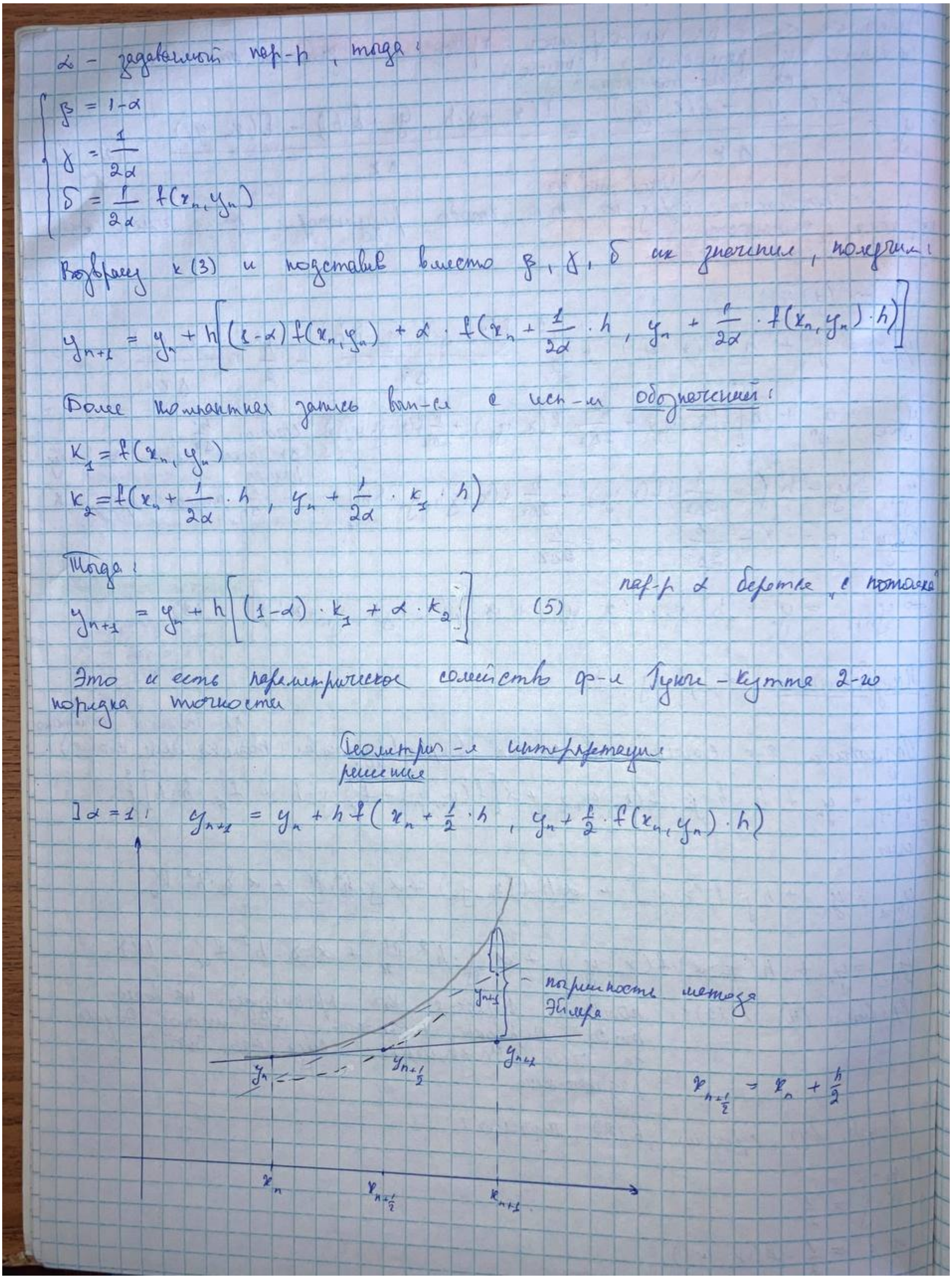
$$y_{n+1} = y_n + h(\beta + \alpha) \cdot f(x_n, y_n) + \alpha \cdot \gamma \cdot h^2 \cdot f'_x + \alpha \cdot \delta \cdot h^2 \cdot f'_y \quad (4)$$

Сравним (4) с (2): получили выраж-е, кот. претендует на более точн. порядок точности, чем метод Эйлера за счёт подключения ещё 1-го слаг-го в разложении

Чтобы (4) перешло в (2), нужно:

$$\begin{cases} \beta + \alpha = 1 \\ \alpha \cdot \gamma = \frac{1}{2} \\ \alpha \cdot \delta = \frac{1}{2} \cdot f(x_n, y_n) \end{cases}$$

Рисунок 15 – РК2 (часть 2)



α – задаваемый пар-р, тогда:

$$\begin{cases} \beta = 1-\alpha \\ \gamma = \frac{1}{2\alpha} \\ \delta = \frac{1}{2\alpha} f(x_n, y_n) \end{cases}$$

Возвращаясь к (3) и подставив вместо β, γ, δ их значения, получим:

$$y_{n+1} = y_n + h\left[(1-\alpha) f(x_n, y_n) + \alpha \cdot f\left(x_n + \frac{1}{2\alpha}\cdot h,\ y_n + \frac{1}{2\alpha}\cdot f(x_n, y_n)\cdot h\right)\right]$$

Более компактная запись вып-ся с исп-м обозначений:

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{1}{2\alpha}\cdot h,\ y_n + \frac{1}{2\alpha}\cdot k_1 \cdot h\right)$$

Тогда:

$$y_{n+1} = y_n + h\left[(1-\alpha)\cdot k_1 + \alpha \cdot k_2\right] \quad (5)$$

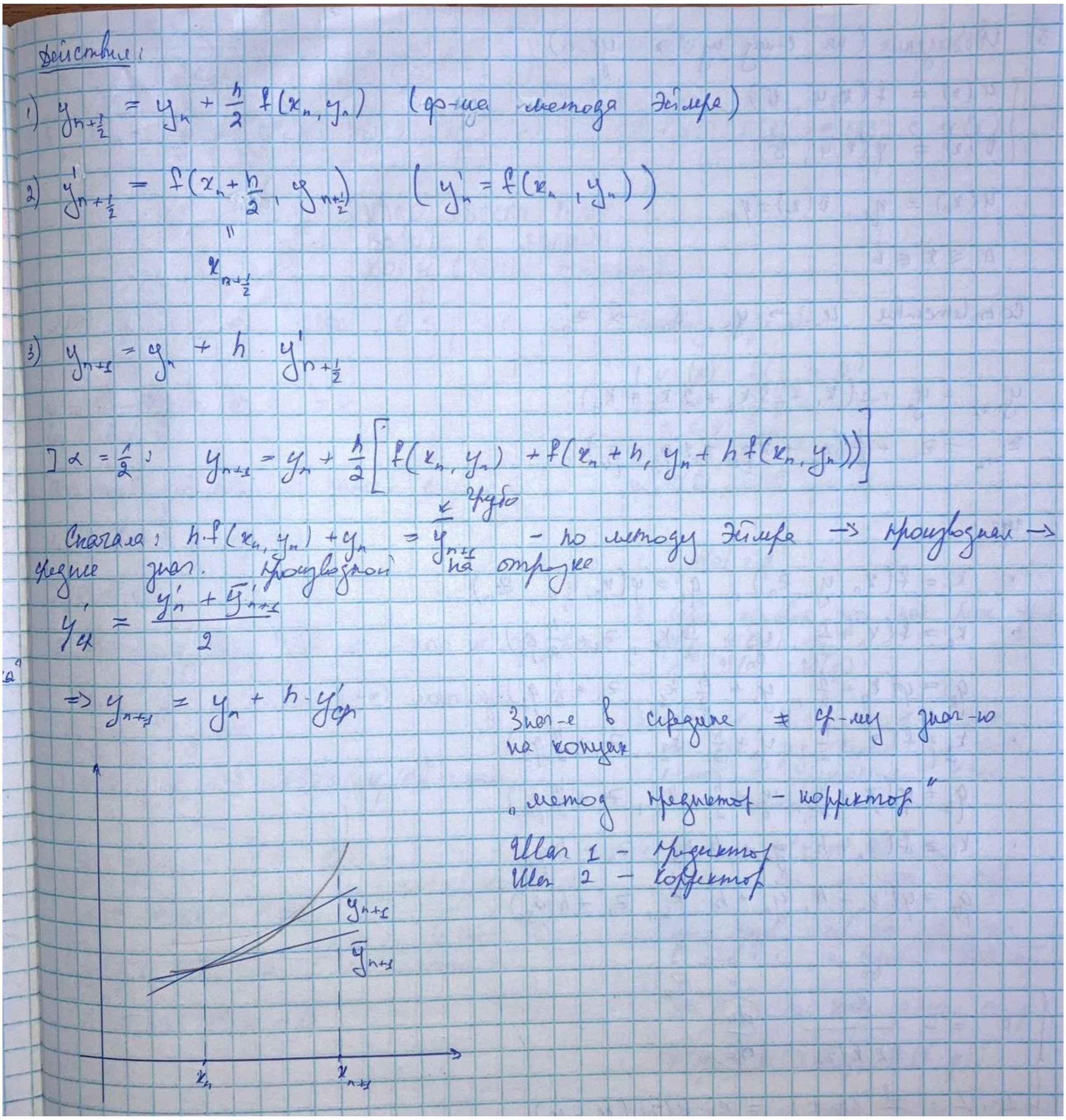
пар-р α берется „с потолка"

Это и есть параметрическое семейство ф-л Рунге-Кутта 2-го порядка точности

Геометрич-я интерпретация решения

Пусть α = 1: $y_{n+1} = y_n + h f\left(x_n + \frac{1}{2}\cdot h,\ y_n + \frac{1}{2}\cdot f(x_n, y_n)\cdot h\right)$

Рисунок 16 – РК2 (часть 3)



Действия:

1) $y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)$ (ф-ла метода Эйлера)

2) $y'_{n+\frac{1}{2}} = f(\underbrace{x_n + \frac{h}{2}}_{= x_{n+\frac{1}{2}}}, y_{n+\frac{1}{2}})$ $\quad (y'_n = f(x_n, y_n))$

3) $y_{n+1} = y_n + h \, y'_{n+\frac{1}{2}}$

Пусть $\alpha = \frac{1}{2}$: $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + h f(x_n, y_n)) \right]$

грубо

Сначала: $h \cdot f(x_n, y_n) + y_n = \bar{y}_{n+1}$ – по методу Эйлера → производная → среднее знач. производной на отрезке

$$y'_{ср} = \frac{y'_n + \bar{y}'_{n+1}}{2}$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = y_n + h \cdot y'_{ср}$$

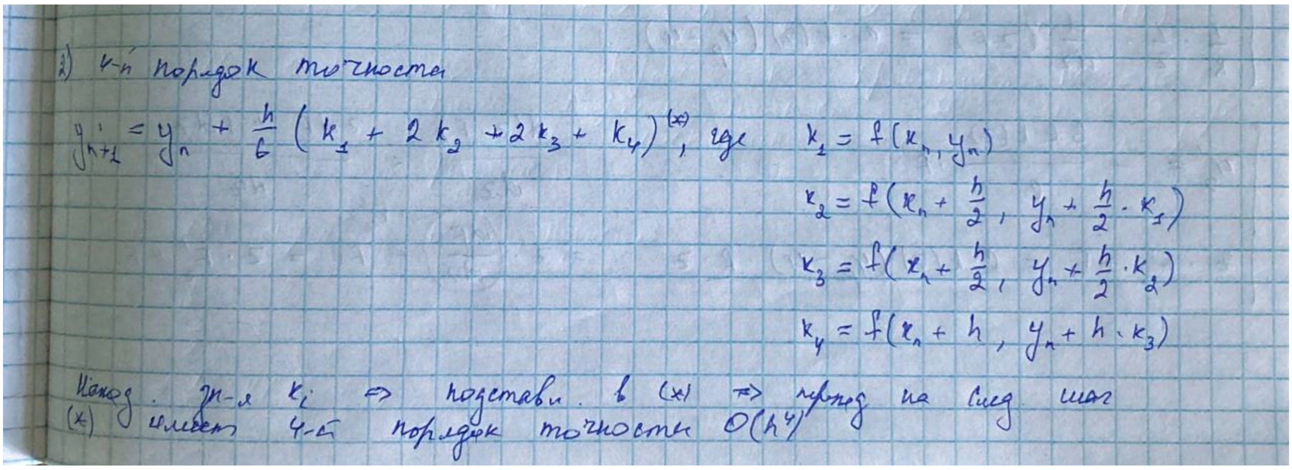
Знач-е в середине ≠ ср-му знач-ю на концах

„метод предиктор – корректор"

Шаг 1 – предиктор

Шаг 2 – корректор

Рисунок 17 – РК2 (часть 4)



2) 4-й порядок точности

$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)^{(*)}$, где $k_1 = f(x_n, y_n)$

$k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} \cdot k_1)$

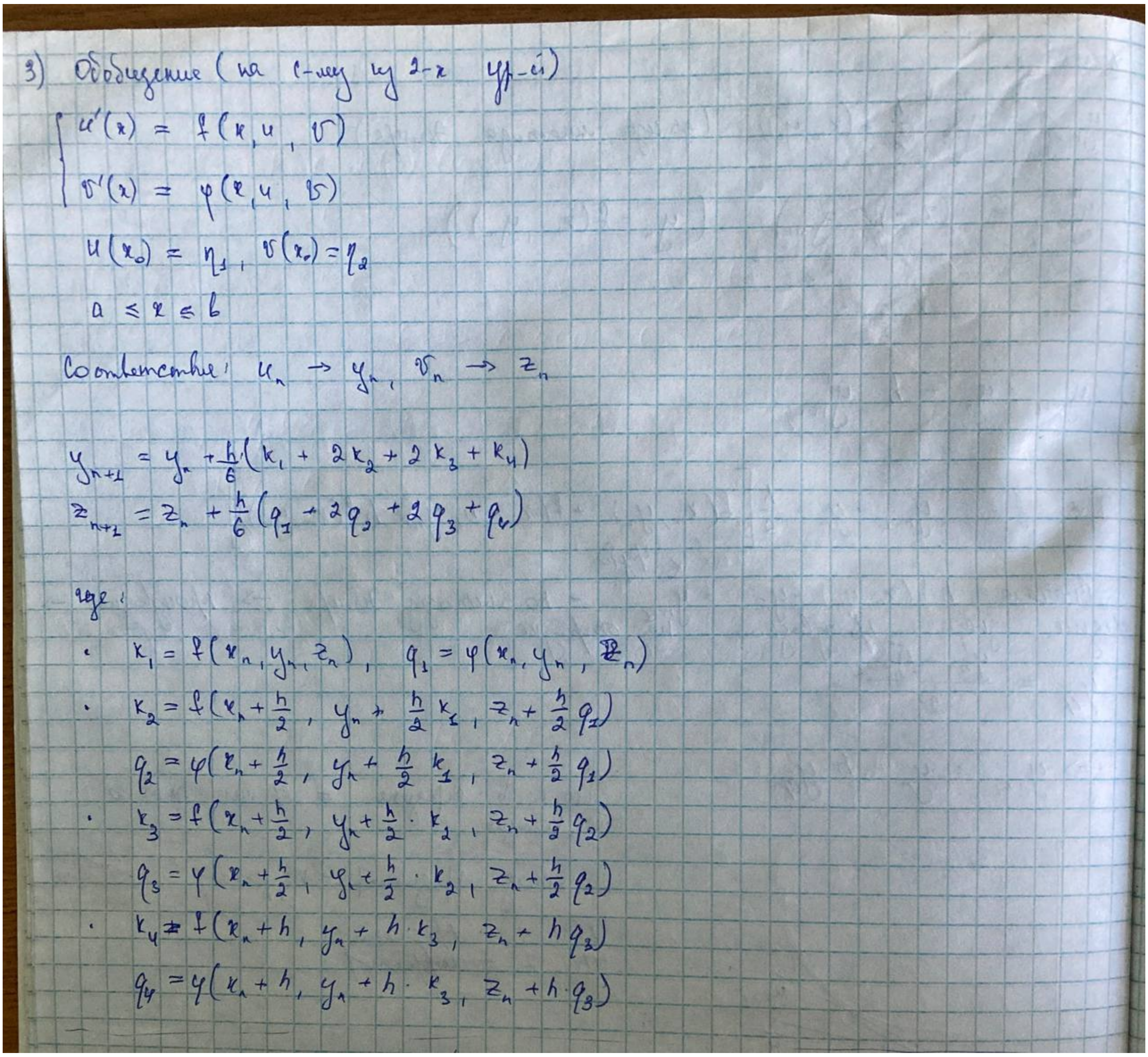
$k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} \cdot k_2)$

$k_4 = f(x_n + h, y_n + h \cdot k_3)$

Находим 4-е k_i $\Rightarrow$ подставим в $(*)$ $\Rightarrow$ переход на след шаг

$(*)$ имеет 4-й порядок точности $O(h^4)$

Рисунок 18 – РК4 (часть 1)



3) Обобщение (на с-му из 2-х ур-ий)

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u, v) \\ v'(x) = \varphi(x, u, v) \end{cases}$$

$u(x_0) = \eta_1$, $v(x_0) = \eta_2$

$a \le x \le b$

Соответствие: $u_n \to y_n$, $v_n \to z_n$

$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{6}(q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4)$

где:

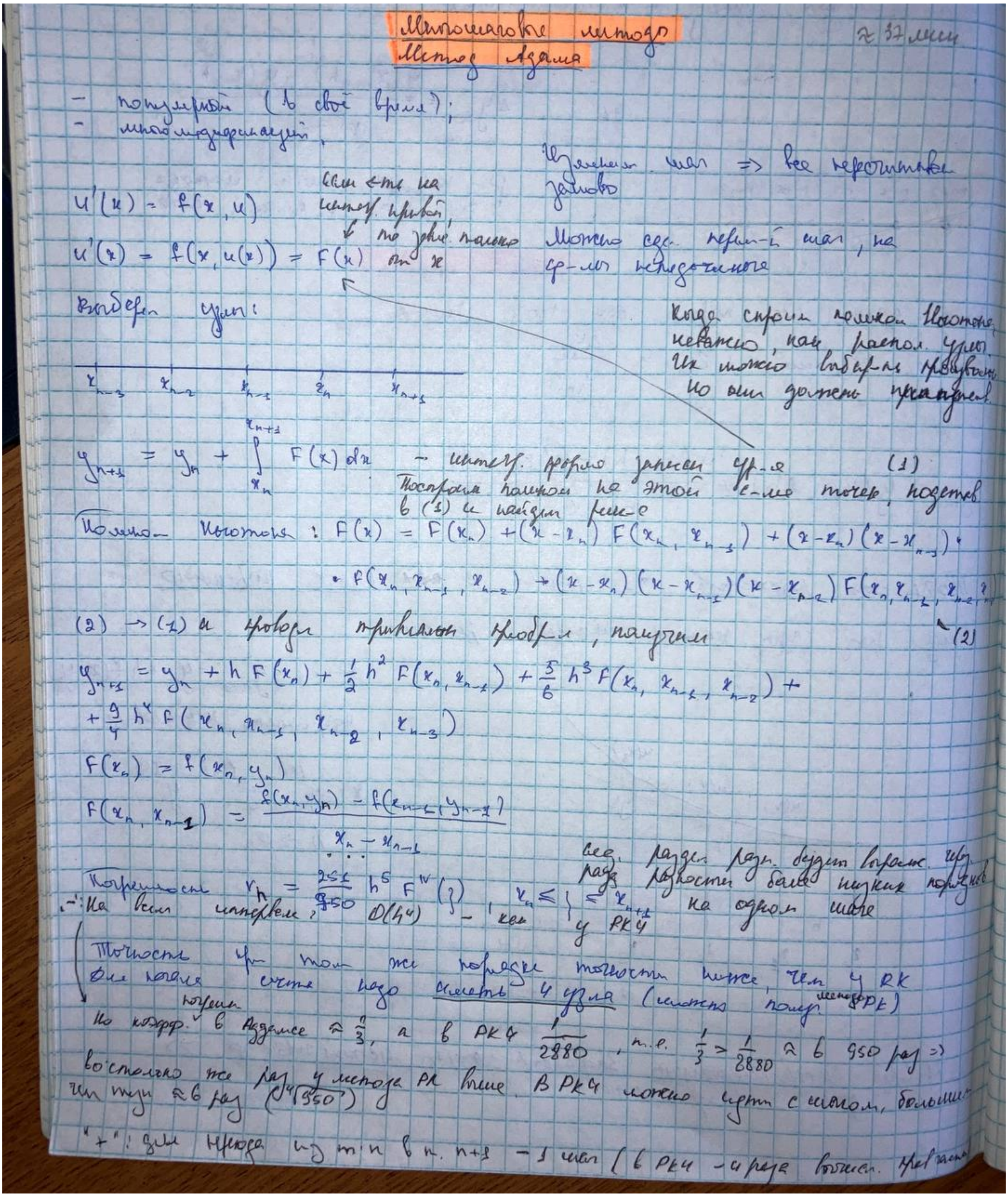
- $k_1 = f(x_n, y_n, z_n)$, $q_1 = \varphi(x_n, y_n, z_n)$
- $k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1, z_n + \frac{h}{2} q_1)$

  $q_2 = \varphi(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1, z_n + \frac{h}{2} q_1)$
- $k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} \cdot k_2, z_n + \frac{h}{2} q_2)$

  $q_3 = \varphi(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} \cdot k_2, z_n + \frac{h}{2} q_2)$
- $k_4 = f(x_n + h, y_n + h \cdot k_3, z_n + h q_3)$

  $q_4 = \varphi(x_n + h, y_n + h \cdot k_3, z_n + h \cdot q_3)$

Рисунок 19 – РК4 (часть 2)


Многошаговые методы

Метод Адамса

≈ 37 мин

- популярный (в своё время);
- много модификаций.

$u'(x) = f(x, u)$ — если есть на интерв. правой по дист. только от x

$u'(x) = f(x, u(x)) = F(x)$

Изменили шаг => все пересчитывать заново

Можно сд. переменный шаг, но ф-лы непредсказуемые

Выберем узлы:

Когда строим полином Ньютона, неважно, как распол. узлы. Их можно выбирать произвольно, но они должны предшествовать.

x_{n-3} x_{n-2} x_{n-1} x_n x_{n+1}

$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} F(x)\,dx$ — интегр. форма записи ур-я (1)

Построим полином на этой с-ме точек, подставим в (1) и найдём реш-е

Полином Ньютона: $F(x) = F(x_n) + (x - x_n)F(x_n, x_{n-1}) + (x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdot F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) + (x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3})$ (2)

(2) → (1) и проводя тривиальн. преобр-я, получим

$y_{n+1} = y_n + hF(x_n) + \frac{1}{2}h^2 F(x_n, x_{n-1}) + \frac{5}{6}h^3 F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) + \frac{9}{4}h^4 F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3})$

$F(x_n) = f(x_n, y_n)$

$F(x_n, x_{n-1}) = \frac{f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$

...

Погрешность $r_n = \frac{251}{720} h^5 F^{IV}(\xi)$, $x_n \le \xi \le x_{n+1}$ на одном шаге

На всем интервале? $O(h^4)$ — как у РК4

Все раздел. разн. будут выраж. через разд. разности более низких порядков

Точность при том же порядке точности ниже, чем у RK. Для начала счета надо иметь 4 узла (можно получ. методом РК)

по погреш. коэфф. в Адамсе ≈ $\frac{1}{3}$, а в РК4 $\frac{1}{2880}$, т.е. $\frac{1}{3} > \frac{1}{2880}$ ≈ в 950 раз => во столько же раз у метода РК выше. В РК4 можно идти с шагом, большим чем тут ≈ 6 раз ($\sqrt[4]{950}$)

"+": для перехода из т. n в т. n+1 — 1 шаг (в РК4 — 4 раза вычисл. правой ча…

Рисунок 20 – Метод Адамса