Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

ОТЧЕТ

по лабораторной работа №2
по курсу «Математическая статистика»
на тему: «Интервальные оценки»

Студент ИУ7-63Б (Группа) ______ (Подпись, дата) Лысцев Н. Д. (И. О. Фамилия)

Преподаватель ______ (Подпись, дата) Власов П. А. (И. О. Фамилия)

2024 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1 Задание

Цель работы: построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

Содержание работы

1. Для выборки объема n из генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ
   а) вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{x}_n)$ и $S^2(\vec{x}_n)$ математического ожидания $\mathrm{M}X$ и дисперсии $\mathrm{D}X$ соответственно;
   б) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{x}_n)$, $\overline{\mu}(\vec{x}_n)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания $\mathrm{M}X$;
   в) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$, $\overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ для γ-доверительного интервала для дисперсии $\mathrm{D}X$.
2. вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;
3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N — объема выборки индивидуального варианта:
   а) на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.
   б) на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x}_N)$, также графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

2 Теоретические сведения

2.1 Определение γ-доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины

Пусть X — случайная величина, закон распределения которой известен с точностью до неизвестного параметра θ.

Опр. Интервальной оценкой с уровнем доверия $\gamma \in (0, 1)$ параметра θ называется пара статистик $\underline{\theta}(\vec{X})$ и $\overline{\theta}(\vec{X})$ таких, что выполняется равенство:

$$P\{\underline{\theta}(\vec{X}) < \theta < \overline{\theta}(\vec{X})\} = \gamma.$$

Опр. Доверительным интервалом с уровнем доверия γ для параметра θ называется интервал $(\underline{\theta}(\vec{x}), \overline{\theta}(\vec{x}))$, отвечающий выборочным значениям статистики $\underline{\theta}$, $\overline{\theta}$, задающих оценку уровня γ для θ.

2.2 Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайно величины

Пусть $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, где μ и σ^2 — неизвестны.

Тогда для построения γ-доверительного интервала для μ используется центральная статистика

$$T(\vec{X}, \mu) = \frac{\mu - \overline{X}}{S(\vec{X})}\sqrt{n} \sim St(n-1),$$

и границы γ-доверительного интервала для μ вычисляются по формулам:

$$\underline{\mu}(\vec{X}) = \overline{X} - \frac{S(\vec{X}) t^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}},$$

$$\overline{\mu}(\vec{X}) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X}) t^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}},$$

где $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, $S(\vec{X}) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$, $t_{\frac{1+\gamma}{2}}^{(n-1)}$ — квантиль уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы, n — объем выборки.

Для построения γ-доверительного интервала для σ^2 используется центральная статистика

$$T(\vec{X}, \sigma^2) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$

и границы γ-доверительного интервала для σ^2 вычисляются по формулам:

$$\underline{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}^{(n-1)}},$$

$$\overline{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}^{(n-1)}},$$

где n — объем выборки, $S^2(\vec{X}) = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$, $h_{\frac{1+\gamma}{2}}^{(n-1)}$ и $h_{\frac{1-\gamma}{2}}^{(n-1)}$ — квантили уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ и $\frac{1-\gamma}{2}$ соответственно распределения хи-квадрат с $n-1$ степенями свободы.

3 Текст программы

Листинг 3.1 – Текст программы (начало)

```
function lab_02()

x = load("sel.txt");

N = length(x);

fprintf("\n1.a) вычисление оценок mu и S_quad " + ...
    "математического ожидания MX и дисперсии DX
       соответственно\n");

mu = sum(x) / N;
S_quad = sum((x - mu) .^2) / (N - 1);

fprintf("\nmu = %.4f\n", mu);
fprintf("\nS_quad = %.4f\n", S_quad);

gamma = 0.9;

fprintf("\n1.б) вычисление нижней и верхней границдля " + ...
    "gamma-доверительного интервала для математического ожидания
       MX\n");

quant_St = tinv((1 + gamma) / 2, N - 1);

mu_lower = mu - (sqrt(S_quad) * quant_St / sqrt(N));
mu_upper = mu + (sqrt(S_quad) * quant_St / sqrt(N));

fprintf("\nНижняя граница gamma-доверительного " + ...
    "интервала для mu = %.4f\n", mu_lower);
fprintf("Верхняя граница gamma-доверительного " + ...
    "интервала для mu = %.4f\n", mu_upper);
fprintf("\ngamma-доверительный интервал для mu: " + ...
    "(%.4f, %.4f)\n", mu_lower, mu_upper);

fprintf("\n1.в) вычисление нижней и верхней границ для " + ...
    "gamma-доверительного интервала для дисперсии DX\n");

quant_chi1 = chi2inv((1 - gamma) / 2, N - 1);
```

Листинг 3.2 – Текст программы (продолжение)

```
quant_chi2 = chi2inv((1 + gamma) / 2, N - 1);

sigma_lower = S_quad * (N - 1) / quant_chi2;
sigma_upper = S_quad * (N - 1) / quant_chi1;

fprintf("\nНижняя граница gamma-доверительного интервала " + ...
    "для sigma = %.4f\n", sigma_lower);
fprintf("Верхняя граница gamma-доверительного интервала " + ...
    "для sigma = %.4f\n", sigma_upper);

fprintf("\ngamma-доверительный интервал для " + ...
    "sigma: (%.4f, %.4f)\n", sigma_lower, sigma_upper);

mu_N = zeros(N, 1) + mu;
mu_n = zeros(N, 1);
mu_lower_n = zeros(N, 1);
mu_upper_n = zeros(N, 1);

S_quad_N = zeros(N, 1) + S_quad;
S_quad_n = zeros(N, 1);
S_quad_lower_n = zeros(N, 1);
S_quad_upper_n = zeros(N, 1);

for i = 1 : N
    mu_n(i) = sum(x(1 : i)) / i;
    S_quad_n(i) = sum((x(1 : i) - mu_n(i)) .^2) / (i - 1);

    quant_st_i = tinv((1 + gamma) / 2, i - 1);

    mu_lower_n(i) = mu_n(i) - (quant_st_i * sqrt(S_quad_n(i)) /
       sqrt(i));
    mu_upper_n(i) = mu_n(i) + (quant_st_i * sqrt(S_quad_n(i)) /
       sqrt(i));

    quant_chi1_i = chi2inv((1 - gamma) / 2, i - 1);
    quant_chi2_i = chi2inv((1 + gamma) / 2, i - 1);

    S_quad_lower_n(i) = S_quad_n(i) * (i - 1) / quant_chi2_i;
    S_quad_upper_n(i) = S_quad_n(i) * (i - 1) / quant_chi1_i;
end
```

Листинг 3.3 – Текст программы (конец)

```
fprintf('\nЗадание 3.a)\n');
fprintf('График в отдельном окне\n');

plot((1 : N), mu_N, 'r', LineWidth=1);
hold on;
plot((1 : N), mu_n, 'm--', LineWidth=1);
hold on;
plot((1 : N), mu_lower_n, 'b-o',
   MarkerIndices=1:5:length(mu_lower_n), LineWidth=1);
hold on;
plot((1 : N), mu_upper_n, 'k-*',
   MarkerIndices=1:5:length(mu_lower_n), LineWidth=1);
hold on;
grid on;
xlabel("n");
ylabel('\mu');
legend('\mu\^(x_N)', '\mu\^(x_n)', '\mu_{-}(x_n)',
   '\mu^{-}(x_n)');


fprintf('\nЗадание 3.б)\n');
fprintf('График в отдельном окне\n');

figure()
plot((1 : N), S_quad_N, 'r', LineWidth=1);
hold on;
plot((1 : N), S_quad_n, 'm--', LineWidth=1);
hold on;
plot((1 : N), S_quad_lower_n, 'b-o',
   MarkerIndices=1:5:length(mu_lower_n), LineWidth=1);
hold on;
plot((1 : N), S_quad_upper_n, 'k-*',
   MarkerIndices=1:5:length(mu_lower_n), LineWidth=1);
hold on;
grid on;
xlabel("n");
ylabel('\sigma');
legend('S^2(x_N)', 'S^2(x_n)', '\sigma^2_{-}(x_n)', '\sigma^{2
   -}(x_n)');
end
```

4 Результаты расчетов для выборки из индивидуального варианта

Листинг 4.1 – Результаты расчетов для выборки из индивидуального варианта

```
1.а) вычисление оценок mu и S_quad математического ожидания MX и
   дисперсии DX соответственно

mu = -3.6762

S_quad = 0.8664

1.б) вычисление нижней и верхней границдля gamma-доверительного
   интервала для математического ожидания MX

Нижняя граница gamma-доверительного интервала для mu = -3.8170
Верхняя граница gamma-доверительного интервала для mu = -3.5353

gamma-доверительный интервал для mu: (-3.8170, -3.5353)

1.в) вычисление нижней и верхней границ для gamma-доверительного
   интервала для дисперсии DX

Нижняя граница gamma-доверительного интервала для sigma = 0.7088
Верхняя граница gamma-доверительного интервала для sigma = 1.0875

gamma-доверительный интервал для sigma: (0.7088, 1.0875)

Задание 3.а)
График в отдельном окне

Задание 3.б)
График в отдельном окне
```

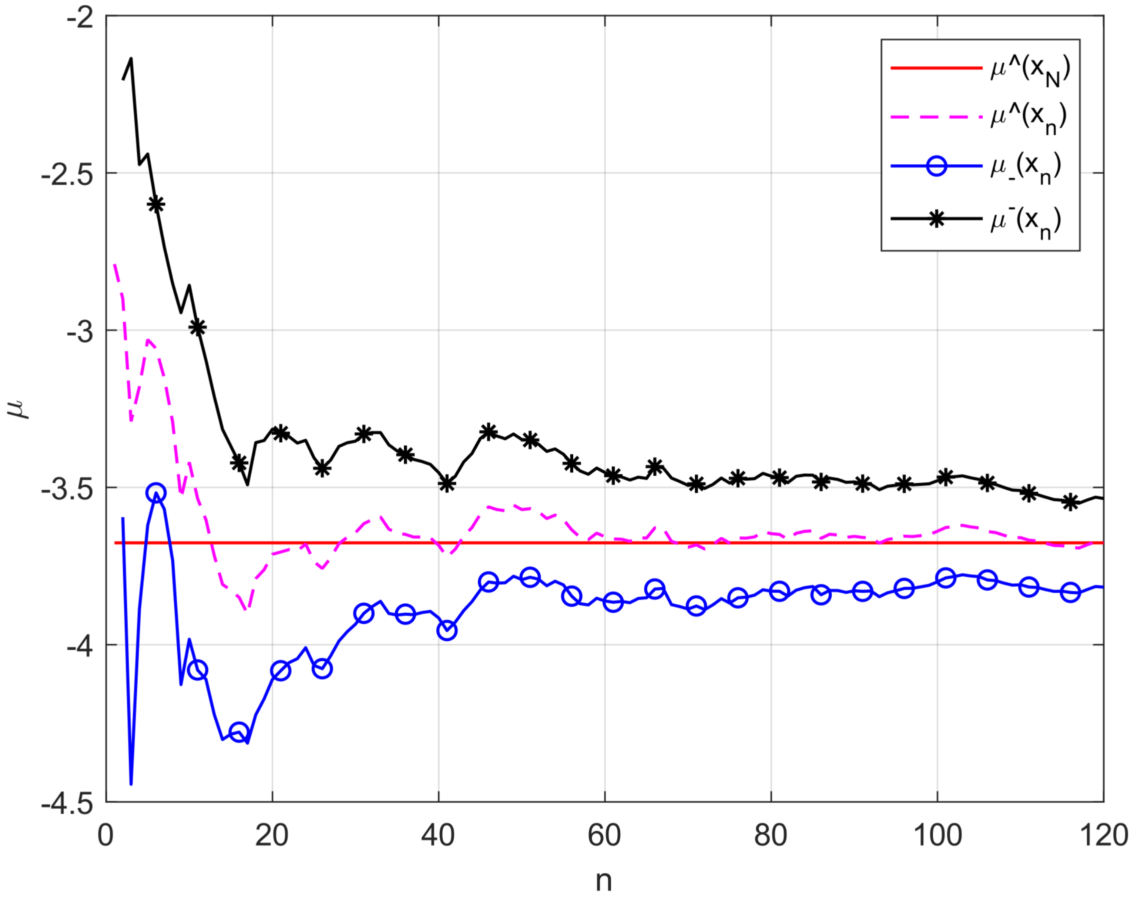

Рисунок 4.1 – Прямая $y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$ и графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N

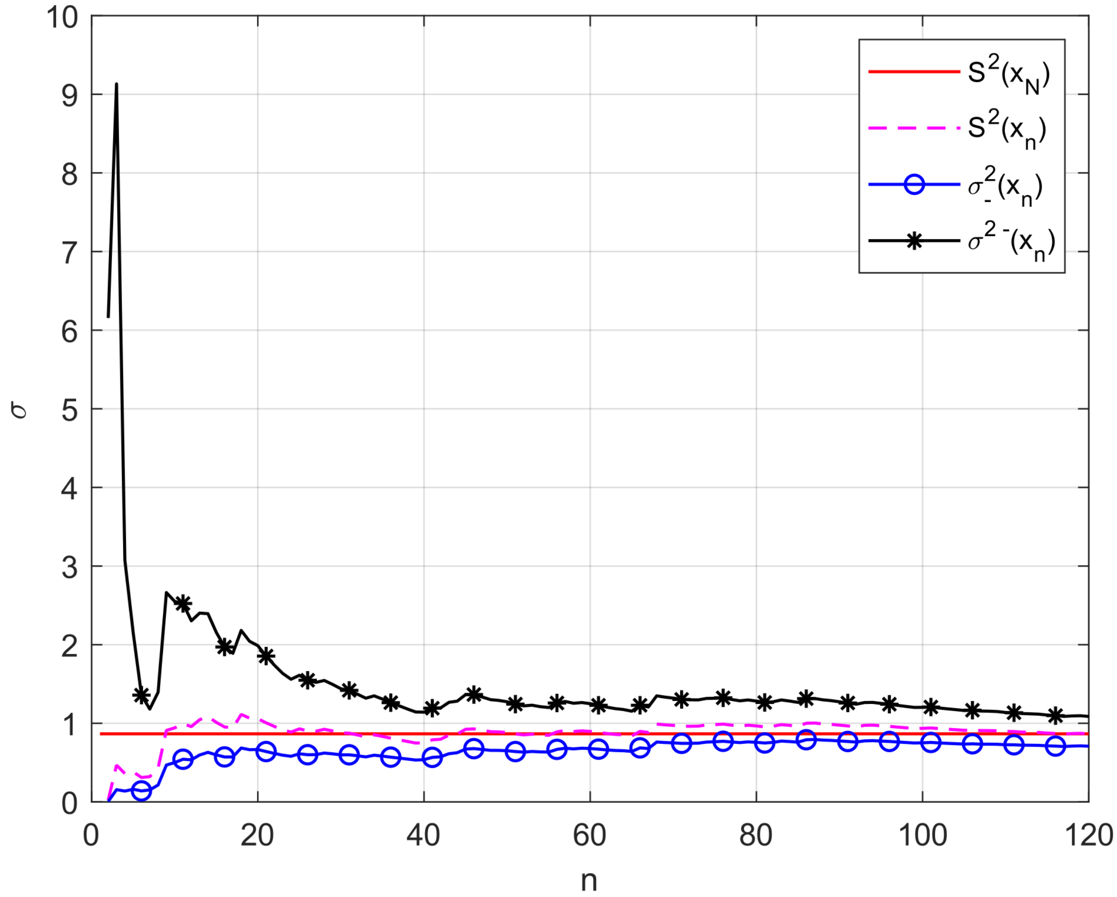

Рисунок 4.2 – Прямая $z = S^2(\vec{x}_N)$ и графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N