



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

ОТЧЕТ

по лабораторной работа №2
по курсу «Математическая статистика»
на тему: «Интервальные оценки»

Студент ИУ7-63Б
(Группа)

(Подпись, дата)

Лысцев Н. Д.
(И. О. Фамилия)

Преподаватель

(Подпись, дата)

Власов П. А.
(И. О. Фамилия)

2024 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1	Задание	3
2	Теоретические сведения	4
2.1	Определение γ -доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины	4
2.2	Формулы для вычисления границ γ -доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайно величины	4
3	Текст программы	6
4	Результаты расчетов для выборки из индивидуального варианта	9

1 Задание

Цель работы: построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

Содержание работы

1. Для выборки объема n из генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ
 - а) вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{x}_n)$ и $S^2(\vec{x}_n)$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;
 - б) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{x}_n)$, $\bar{\mu}(\vec{x}_n)$ для γ -доверительного интервала для математического ожидания MX ;
 - в) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$, $\bar{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ для γ -доверительного интервала для дисперсии DX .
2. вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;
3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N — объема выборки индивидуального варианта:
 - а) на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \bar{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N .
 - б) на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x}_N)$, также графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $z = \bar{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N .

2 Теоретические сведения

2.1 Определение γ -доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины

Пусть X — случайная величина, закон распределения которой известен с точностью до неизвестного параметра θ .

Опр. Интервальной оценкой с уровнем доверия $\gamma \in (0, 1)$ параметра θ называется пара статистик $\underline{\theta}(\vec{X})$ и $\bar{\theta}(\vec{X})$ таких, что выполняется равенство:

$$P\{\underline{\theta}(\vec{X}) < \theta < \bar{\theta}(\vec{X})\} = \gamma. \quad (2.1)$$

Опр. Доверительным интервалом с уровнем доверия γ для параметра θ называется интервал $(\underline{\theta}(\vec{x}), \bar{\theta}(\vec{x}))$, отвечающий выборочным значениям статистики $\underline{\theta}$, $\bar{\theta}$, задающих оценку уровня γ для θ .

2.2 Формулы для вычисления границ γ -доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины

Пусть $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, где μ и σ^2 — неизвестны.

Тогда для построения γ -доверительного интервала для μ используется центральная статистика

$$T(\vec{X}, \mu) = \frac{\mu - \bar{X}}{S(\vec{X})} \sqrt{n} \sim St(n-1), \quad (2.2)$$

и границы γ -доверительного интервала для μ вычисляются по формулам:

$$\underline{\mu}(\vec{X}) = \bar{X} - \frac{S(\vec{X}) t_{\frac{1+\gamma}{2}}^{(n-1)}}{\sqrt{n}}, \quad (2.3)$$

$$\bar{\mu}(\vec{X}) = \bar{X} + \frac{S(\vec{X}) t_{\frac{1+\gamma}{2}}^{(n-1)}}{\sqrt{n}}, \quad (2.4)$$

где $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $S(\vec{X}) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$,

$t_{\frac{1+\gamma}{2}}^{(n-1)}$ — квантиль уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ распределения Стьюдента с $n - 1$ степенями свободы,

n — объем выборки.

Для построения γ -доверительного интервала для σ^2 используется центральная статистика

$$T(\vec{X}, \sigma^2) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1), \quad (2.5)$$

и границы γ -доверительного интервала для σ^2 вычисляются по формулам:

$$\underline{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}^{(n-1)}}, \quad (2.6)$$

$$\bar{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}^{(n-1)}}, \quad (2.7)$$

где n — объем выборки,

$$S^2(\vec{X}) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

$h_{\frac{1+\gamma}{2}}^{(n-1)}$ и $h_{\frac{1-\gamma}{2}}^{(n-1)}$ — квантили уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ и $\frac{1-\gamma}{2}$ соответственно распределения хи-квадрат с $n - 1$ степенями свободы.

3 Текст программы

Листинг 3.1 – Текст программы (начало)

```
function lab_02()

x = load("sel.txt");

N = length(x);

fprintf("\n1.a) вычисление оценок  $\mu$  и  $S_{quad}$  " + ...
        "математического ожидания  $MX$  и дисперсии  $DX$ 
        соответственно\n");

mu = sum(x) / N;
S_quad = sum((x - mu) .^2) / (N - 1);

fprintf("\n $\mu$  = %.4f\n", mu);
fprintf("\n $S_{quad}$  = %.4f\n", S_quad);

gamma = 0.9;

fprintf("\n1.б) вычисление нижней и верхней границ для " + ...
        "gamma-доверительного интервала для математического ожидания
         $MX$ \n");

quant_St = tinv((1 + gamma) / 2, N - 1);

mu_lower = mu - (sqrt(S_quad) * quant_St / sqrt(N));
mu_upper = mu + (sqrt(S_quad) * quant_St / sqrt(N));

fprintf("\nНижняя граница gamma-доверительного " + ...
        "интервала для  $\mu$  = %.4f\n", mu_lower);
fprintf("Верхняя граница gamma-доверительного " + ...
        "интервала для  $\mu$  = %.4f\n", mu_upper);
fprintf("\ngamma-доверительный интервал для  $\mu$ : " + ...
        "(%.4f, %.4f)\n", mu_lower, mu_upper);

fprintf("\n1.в) вычисление нижней и верхней границ для " + ...
        "gamma-доверительного интервала для дисперсии  $DX$ \n");

quant_chi1 = chi2inv((1 - gamma) / 2, N - 1);
```

Листинг 3.2 – Текст программы (продолжение)

```
quant_chi2 = chi2inv((1 + gamma) / 2, N - 1);

sigma_lower = S_quad * (N - 1) / quant_chi2;
sigma_upper = S_quad * (N - 1) / quant_chi1;

fprintf("\nНижняя граница гамма-доверительного интервала " + ...
        "для sigma = %.4f\n", sigma_lower);
fprintf("Верхняя граница гамма-доверительного интервала " + ...
        "для sigma = %.4f\n", sigma_upper);

fprintf("\ngamma-доверительный интервал для " + ...
        "sigma: (%.4f, %.4f)\n", sigma_lower, sigma_upper);

mu_N = zeros(N, 1) + mu;
mu_n = zeros(N, 1);
mu_lower_n = zeros(N, 1);
mu_upper_n = zeros(N, 1);

S_quad_N = zeros(N, 1) + S_quad;
S_quad_n = zeros(N, 1);
S_quad_lower_n = zeros(N, 1);
S_quad_upper_n = zeros(N, 1);

for i = 1 : N
    mu_n(i) = sum(x(1 : i)) / i;
    S_quad_n(i) = sum((x(1 : i) - mu_n(i)).^2) / (i - 1);

    quant_st_i = tinv((1 + gamma) / 2, i - 1);

    mu_lower_n(i) = mu_n(i) - (quant_st_i * sqrt(S_quad_n(i)) /
        sqrt(i));
    mu_upper_n(i) = mu_n(i) + (quant_st_i * sqrt(S_quad_n(i)) /
        sqrt(i));

    quant_chi1_i = chi2inv((1 - gamma) / 2, i - 1);
    quant_chi2_i = chi2inv((1 + gamma) / 2, i - 1);

    S_quad_lower_n(i) = S_quad_n(i) * (i - 1) / quant_chi2_i;
    S_quad_upper_n(i) = S_quad_n(i) * (i - 1) / quant_chi1_i;
end
```

Листинг 3.3 – Текст программы (конец)

```
fprintf('\nЗадание 3.а)\n');
fprintf('График в отдельном окне\n');

plot((1 : N), mu_N, 'r', 'LineWidth', 1);
hold on;
plot((1 : N), mu_n, 'g', 'LineWidth', 1);
hold on;
plot((1 : N), mu_lower_n, 'b', 'LineWidth', 1);
hold on;
plot((1 : N), mu_upper_n, 'k', 'LineWidth', 1);
hold on;
grid on;
xlabel("n");
ylabel('\mu');
legend('\mu^{(x_N)}', '\mu^{(x_n)}', '\mu^{-}(x_n)',
      '\mu_{-}(x_n)');

fprintf('\nЗадание 3.б)\n');
fprintf('График в отдельном окне\n');

figure()

plot((1 : N), S_quad_N, 'r', 'LineWidth', 1);
hold on;
plot((1 : N), S_quad_n, 'g', 'LineWidth', 1);
hold on;
plot((1 : N), S_quad_lower_n, 'b', 'LineWidth', 1);
hold on;
plot((1 : N), S_quad_upper_n, 'k', 'LineWidth', 1);
hold on;
grid on;
xlabel("n");
ylabel('\sigma');
legend('S^2(x_N)', 'S^2(x_n)', '\sigma^{2-}(x_n)',
      '\sigma^2_{-}(x_n)');

end
```


4 Результаты расчетов для выборки из индивидуального варианта

Листинг 4.1 – Результаты расчетов для выборки из индивидуального варианта

```
1.а) вычисление оценок  $\mu$  и  $S_{quad}$  математического ожидания  $MX$  и
      дисперсии  $DX$  соответственно

 $\mu = -3.6762$ 

 $S_{quad} = 0.8664$ 

1.б) вычисление нижней и верхней границ для гамма-доверительного
      интервала для математического ожидания  $MX$ 

Нижняя граница гамма-доверительного интервала для  $\mu = -3.8170$ 
Верхняя граница гамма-доверительного интервала для  $\mu = -3.5353$ 

гамма-доверительный интервал для  $\mu$ :  $(-3.8170, -3.5353)$ 

1.в) вычисление нижней и верхней границ для гамма-доверительного
      интервала для дисперсии  $DX$ 

Нижняя граница гамма-доверительного интервала для  $\sigma = 0.7088$ 
Верхняя граница гамма-доверительного интервала для  $\sigma = 1.0875$ 

гамма-доверительный интервал для  $\sigma$ :  $(0.7088, 1.0875)$ 

Задание 3.а)
График в отдельном окне

Задание 3.б)
График в отдельном окне
```

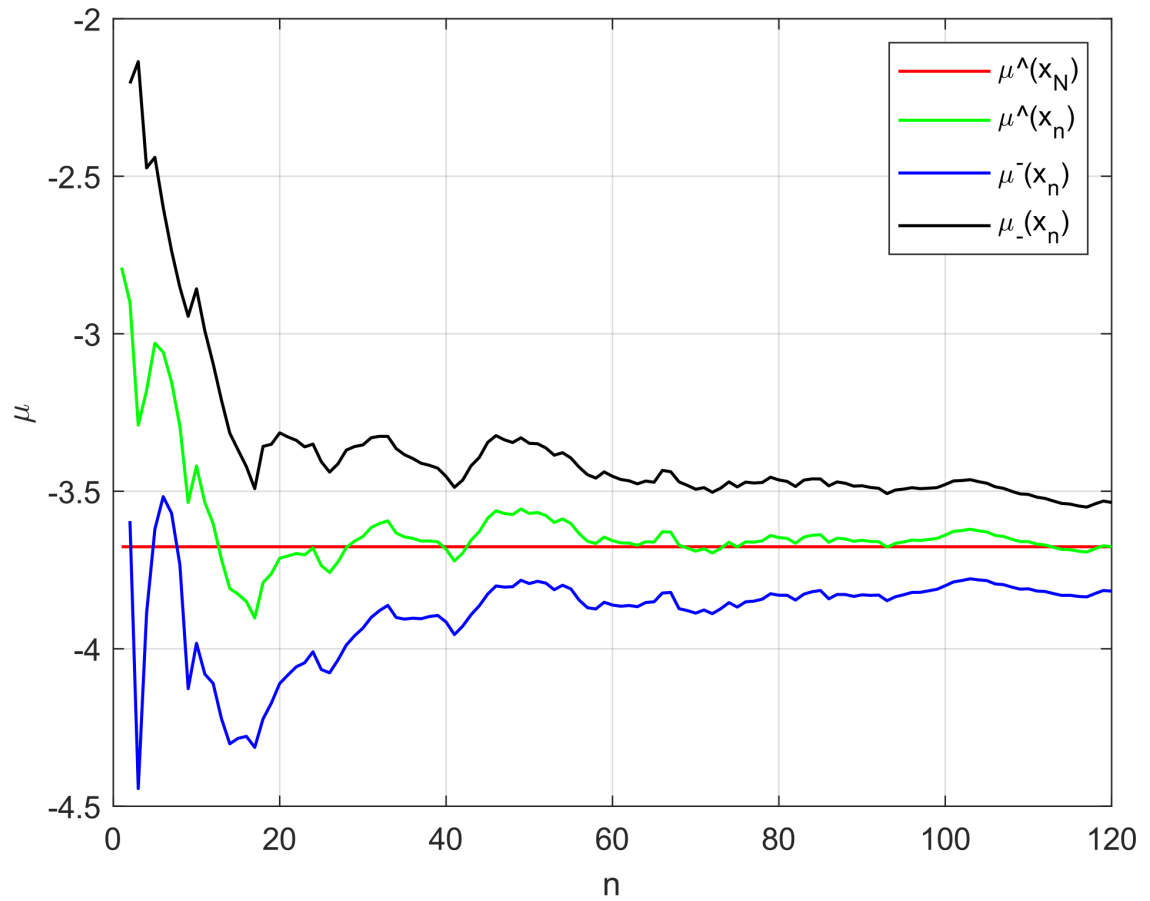


Рисунок 4.1 – Прямая $y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$ и графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \bar{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N

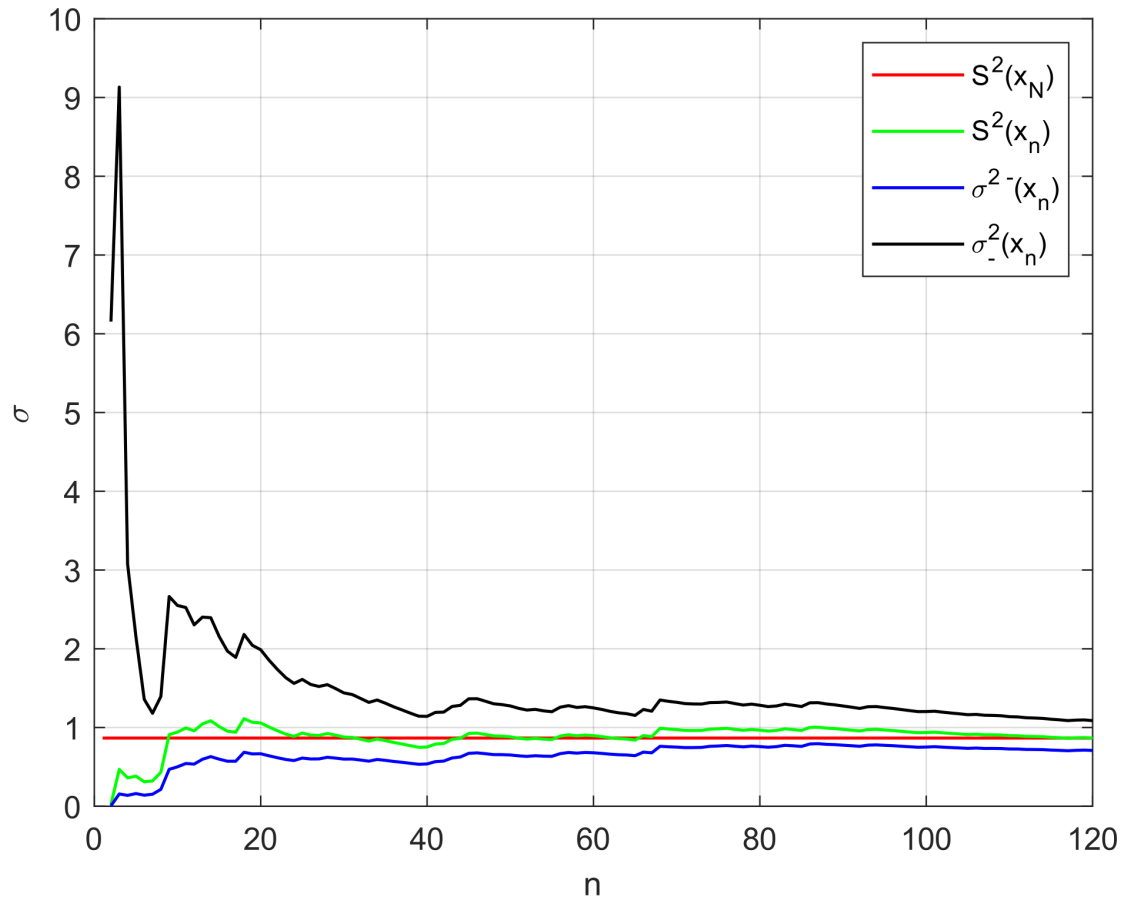


Рисунок 4.2 – Прямая $z = S^2(\vec{x}_N)$ и графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N