Метрическая задача коммивояжёра - 1

Михайлов Никита
mikhaylovnikitka@phystech.edu
https://github.com/nikitamikhaylov

25 декабря 2018 г.

Коммивояжёр (фр. commis voyageur) — бродячий торговец. Проблема коммивояжёра - одна из самых известных задач комбинаторной оптимизации, с которой ежедневно сталкиваются курьеры, почтальоны, путешественники. Их цель - найти наиболее выгодный маршрут, проходящий через заранее известные места, расстояния между которыми тоже известны. В данной работе рассмотрен метрический случай данной задачи и алгоритмы нахождения её приближенного решения.

I. Поставленные задачи и вопросы

(а) Несуществование полиномиального алгоритма для стандартной задачи коммивояжера, дающего константное приближение, в предположении $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$.

(б) Построение алгоритма, дающего 2-приближение для метрической задачи коммивояжёра на основе остовного дерева.

(в) Построение алгоритма, дающего 1.5-приближение для метрической задачи коммивояжёра на основе остовного дерева и паросочетания.

(г) Реализация алгоритма, дающего 1.5-приближение для метрической задачи коммивояжёра.

II. Точный алгоритм для стандартной задачи коммивояжера

Описание алгоритма.

- Для каждого непустого подмножества

  $S \subseteq \{2, ..., n\}$ и для каждой вершины $i \in S$ через $Opt[S, i]$ будем обозначать длину кратчайшего маршрута, начнинающегося в вершине 1, проходящему через все вершины $S - \{i\}$ и заканчивающегося в вершине i

- Последовательно заполнить матрицу

  $Opt[S, i] = min\{Opt[S - \{i\}, j] + d(i, j) : j \in S - \{i\}\}$

- Вернуть оптимальную стоимость маршрута:

  $min\{Opt[\{2, ..., n\}, j] + d(j, 1) : 2 \leq j \leq n\}$

Лемма 1 *(Без доказательства.) Сложность алгоритма по времени и по памяти есть* $poly(n)2^n$.

Факт 1 *Данный теоретический алгоритм был представлен в 1962-м году и до сих пор является самым быстрым из известных.*

III. Несуществование алгоритма, дающего константное приближение для стандартной задачи коммивояжёра

Теорема 1 *Пусть* $\boldsymbol{P} \neq \boldsymbol{NP}$ *и* $c \in \mathbb{N}$. *для стандартной задачи коммивояжера не существует алгоритма, дающего константное приближение и работающего за полиномиальное время.*

Доказательство:
▷ Предположим, что такой алгоритм существует (назовем его A) и дает c-приближение. Построим с помощью него полиномиальный алгоритм, который определяет принадлежность графа G к языку HAMCYCLE.

Рассмотрим произвольный граф $G = (V, E)$. Достроим его до полного взвешенного графа Q. Ребрам, которые входили в G, сопоставим вес 1, а всем остальным дадим вес $|V|c + 1$. Применим A к новому графу Q. Результат - гамильтонов цикл H веса $w(H)$.

Пусть $w(H) \leq |V|c$. В таком случае кратчайший гамильтонов цикл имеет вес $w_{opt} \leq w(H)$, а значит в нем нет новых ребер (так как вес каждого из них превосходит $w(H)$), тогда H присутствовал и в графе G.

Пусть $w(H) > |V|c$, тогда наименьший гамильтонов цикл имеет вес $w_{opt} \geq \frac{w(H)}{c} > |V|$, значит он содержит хотя бы одно новое ребро, но тогда в исходном графе гамильтонова цикла не было (его вес равен $|V|$).

Таким образом, предъявлен способ решения **NP**-полной задачи с помощью полиномиального алгоритма, а значит $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, что противоречит предположению $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$. ◂

IV. Алгоритм, дающий 2-приближение для метрической задачи

Для метрической (в отличие от стандартной) задачи коммивояжёра существуют алгоритмы, дающие константное приближение. Для начала рассмотрим алгоритм, дающий 2-приближение, а затем обратимся к алгоритму Кристофидеса [2] и реализуем его.

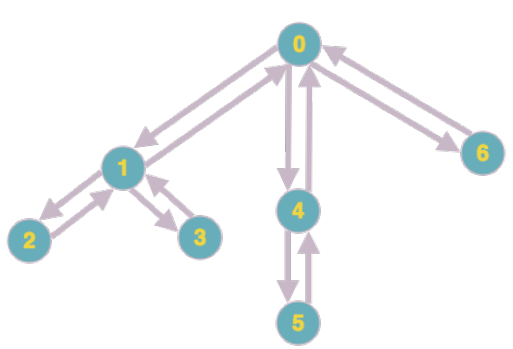
Теорема 2 *Пусть дан произвольный полный взвешенный метрический граф $G = (V, E)$ и цикл C, проходящий по всем его вершинам (возможно, не раз). Тогда граф G содержит гамильтонов цикл веса $w_{Ham} \leq w(C)$.*

Доказательство:
▹ Пусть $C = \{v_0, \ldots, v_k\}$. Оставим в C вершины лишь в позициях их первого вхождения. Тогда получим какой-то гамильтонов цикл H в графе G. Оценим $w(H)$. При выкидывании вершин между l-ой и r-ой получили замену рёбер $(v_l, v_{l+1}), (v_{l+1}, v_{l+2}), \ldots, (v_{r-1}, v_r)$ на ребро (v_l, v_r). По неравенству треугольника имеем: $w(v_l, v_r) \leq w(v_l, v_{l+1}) + w(v_{l+1}, v_r) \leq \cdots \leq w(v_l, v_{l+1}) + w(v_{l+1}, v_{l+2}) + \cdots + w(v_{r-1}, v_r)$. Отсюда следует, что $w(H) \leq w(C)$. ◂

Обратимся теперь к самому алгоритму:

1. В данном графе $G = (V, E)$ найдем остовное дерево минимального веса T (это делается за полином с помощью алгоритма Краскала или алгоритма Прима).

2. Зафиксируем произвольную вершину T, обозначим ее v_0. Подвесим за нее наше дерево и запустим из нее обход в глубину: рекурсивно обходим поддеревься, после чего возвращаемся в предка. Обход работает до тех пор, пока все вершины не будут посещены и обход не вернется в v_0.



Получим цикл K, в котором встречаются все вершины нашего графа, причем $w(K) = 2w(T)$, так как каждое ребро мы посещаем в момент входа в вершину и момент выхода из нее. Таким образом по теореме 2 получаем, что в нашем графе есть гамильтонов цикл H такой, что $w(H) \leq w(K) \leq 2w(T)$. Построить сам цикл H мы можем по доказательству теоремы 2.

Какое приближение у нашего алгоритма? Пусть $\hat{H}$ - гамильтонов цикл минимального веса. $w(\hat{H}) \geq w(T)$, так как если убрать любое ребро из $\hat{H}$, то получим какое-то остовное дерево G, а T - остовное дерево минимального веса. Тогда $w(\hat{H}) \geq w(T) = \frac{w(H)}{2}$. Таким образом, $w(H) \leq 2w(\hat{H})$, значит наш алгоритм дает 2-приближение метрической задачи коммивояжёра.

V. Алгоритм, дающий 1.5-приближение для метрической задачи

Рассмотрим алгоритм Кристофидеса[2]:

1. Находим минимальное остовное дерево T.

2. Выделяем в дереве T подмножество вершин $N(T)$ нечетной степени. В полном графе G среди вершин $N(T)$ ищем совершенное паросочетание M минимального веса. (делается за полиномиальное время с помощью blossom-алгоритма)

3. Построим Эйлеров граф G_E на вершинах $V(G)$ и ребрах $E(T) \cup E(M)$. Он Эйлеров, так как у каждой вершины нечетной степени мы добавили по ребру $\Rightarrow$ степени всех вершин четны $\Rightarrow$ граф эйлеров.

4. Строим Эйлеров цикл K в графе из предыдущего пункта. (ему естественным образом соответствует цикл U, проходящий по всем вершинам)

5. Строим Гамильтонов цикл H из цикла U как описывает это теорема 2.

Теорема 3 *Описанный выше алгоритм Кристофидеса даёт 1.5-приближение для метрической задачи коммивояжёра.*

Доказательство:
▹ Заметим, что справедлива оценка $w(H) \leq w(U) \leq w(T) + w(M)$. Рассмотрим гамильтонов цикл L на вершинах из M. Аналогично теореме 2 $w(L) \leq w(\hat{H})$ (где $\hat{H}$ - гамильтонов цикл в G минимального веса), причем L - объединение двух непересекающихся паросочетаний в графе, индуцированном на вершины M. Вес каждого из них не менее, чем вес минимального паросочетания M, значит $2w(M) \leq w(L) \leq w(\hat{H}) \Rightarrow w(M) \leq \frac{w(\hat{H})}{2}$. Аналогично доказательству приближения прошлого алгоритма, $w(T) \leq w(\hat{H})$, значит

$w(H) \le w(T) + w(M) \le w(\hat{H}) + \frac{w(\hat{H})}{2} = 1.5w(\hat{H})$. Значит, алгоритм Кристофидеса даёт 1.5-приближение. ◂

VI. Реализация алгоритма, дающего 1.5-приближение для метрической задачи

Реализация:

Имплементируем алгоритм на C++. Проект лежит в репозитории github. Алгоритм декомпозирован на три задачи:

1. Минимальное остовное дерево с помощью алгоритма Краскала [3] за время $\mathbb{O}(\mathrm{NlogN})$.

2. Совершенное паросочетание минимального веса в полном взвешенном неориентированном графе. Сам алгоритм описан в статье[4] В. Колмогорова от 2009 года, реализация [5] взята с сайта Institute of Science and Technology, Austria. (время $\mathbb{O}(N^2 logN)$)

3. Эйлеров цикл в неориентированном мультиграфе[6] за время $\mathbb{O}(N^2)$.

Итоговая асимптотика алгоритма - $\mathbb{O}(N^2 logN)$.

Тестирование:

В ходе тестирования было сгенерировано 10 тестов с графами различного размера по общему принципу: в случайном порядке соединяются (ребрами веса 1) в гамильтонов цикл вершины. Затем, всем остальным ребрам присваивается случайный вес 1 или 2 (для сохранения неравенства треугольника). Данные по тестам приведены в таблице:

№	|V|	Точное решение	Кристофидес	Ошибка
1	10	10	11	10%
2	120	120	151	26%
3	230	230	294	28%
4	340	340	425	25%
5	450	450	550	22%
6	560	560	693	24%
7	670	670	832	24%
8	780	780	984	26%
9	890	890	1123	26%
10	1000	1000	1248	25%

Как видно из таблицы, на всех тестах алгоритм уложился в отведенные ему 50% ошибки, а средняя ошибка составила примерно 24%.

VII. Источники

1. William J. Cook: In Pursuit of the Traveling Salesman, 2014.

2. N. Christofides, Worst-case analysis of a new heuristic for the travelling salesman problem, Report 388, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie Mellon University, 1976.

3. Kruskal's algorithm.

4. Vladimir Kolmogorov, Blossom V: a new implementation of a minimum cost perfect matching algorithm, 2009.

5. Blossom5-v2.05

6. E-maxx algo, Нахождение Эйлерова пути/цикла.