Метрическая задача коммивояжёра - 1

Михайлов Никита
mikhaylovnikitka@phystech.edu
https://github.com/nikitamikhaylov

19 ноября 2018 г.

Коммивояжёр (фр. commis voyageur) — бродячий торговец. Проблема коммивояжёра - одна из самых известных задач комбинаторной оптимизации, с которой ежедневно сталкиваются курьеры, почтальоны, путешественники. Их цель - найти наиболее выгодный маршрут, проходящий через заранее известные места, расстояния между которыми тоже известны. В данной работе рассмотрен метрический случай данной задачи и алгоритмы нахождения её приближенного решения.

I. Поставленные задачи и вопросы

(а) Несуществование полиномиального алгоритма для стандартной задачи коммивояжера, дающего константное приближение, в предположении $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$.

(б) Построение алгоритма, дающего 2-приближение для метрической задачи коммивояжёра на основе остовного дерева.

(в) Построение алгоритма, дающего 1.5-приближение для метрической задачи коммивояжёра на основе остовного дерева и паросочетания.

(г) Реализация алгоритма, дающего 1.5-приближение для метрической задачи коммивояжёра.

II. Точный алгоритм для стандартной задачи коммивояжера

Описание алгоритма.

- Для каждого непустого подмножества

  $S \subseteq \{2, ..., n\}$ и для каждой вершины $i \in S$ через $Opt[S, i]$ будем обозначать длину кратчайшего маршрута, начнинающегося в вершине 1, проходящему через все вершины $S - \{i\}$ и заканчивающегося в вершине i

- Последовательно заполнить матрицу

  $Opt[S, i] = minOpt[S - i, j] + d(i, j) : j \in S - i$

- Вернуть оптимальную стоимость маршрута:

  $minOpt[2, ..., n, j] + d(j, 1) : 2 \leq j \leq n$

Лемма 1 *(Без доказательства.) Сложность алгоритма по времени и по памяти есть $poly(n)2^n$.*

Факт 1 *Данный теоретический алгоритм был представлен в 1962-м году и до сих пор является самым быстрым из известных.*

III. Несуществование алгоритма, дающего константное приближение для стандартной задачи коммивояжёра

Теорема 1 *Пусть $\boldsymbol{P} \neq \boldsymbol{NP}$ и $c \in \mathbb{N}$. для стандартной задачи коммивояжера не существует алгоритма, дающего константное приближение и работающего за полиномиальное время.*

Доказательство:

$\triangleright$ Предположим, что такой алгоритм существует (назовем его A) и дает c-приближение. Построим с помощью него полиномиальный алгоритм, который определяет принадлежность графа G к языку HAMCYCLE.

Рассмотрим произвольный граф $G = (V, E)$. Достроим его до полного взвешенного графа Q. Ребрам, которые входили в G, сопоставим вес 1, а всем остальным дадим вес $|V|c + 1$. Применим A к новому графу Q. Результат - гамильтонов цикл H веса $w(H)$.

Пусть $w(H) \leq |V|c$. В таком случае кратчайший гамильтонов цикл имеет вес $w_{opt} \leq w(H)$, а значит в нем нет новых ребер (так как вес каждого из них превосходит $w(H)$), тогда H присутствовал и в графе G.

Пусть $w(H) > |V|c$, тогда наименьший гамильтонов цикл имеет вес $w_{opt} \geq \frac{w(H)}{c} > |V|$, значит он содержит хотя бы одно новое ребро, но тогда в исходном графе гамильтонова цикла не было (его вес равен $|V|$).

Таким образом, предъявлен способ решения **NP**-полной задачи с помощью полиномиального алгоритма, а значит $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, что противоречит предположению $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$. ◂

IV. Источники

1. William J. Cook: In Pursuit of the Traveling Salesman, 2014.