Парадокс Эренфестов.

8 мая 2020 г.

1 Постановка задачи

Две собаки сидят бок о бок, страдая от $N \gg 1$ блох. Каждая блоха в промежутке времени $[t, t+h)$ с вероятностью $\lambda h + o(h)$, независимо от остальных, перескакивает на соседнюю собаку. Пусть в начальный момент все блохи находятся на собаке с номером 1.

1. Показать, что для всех $t \geqslant cN$ ($c \backsim 10$)

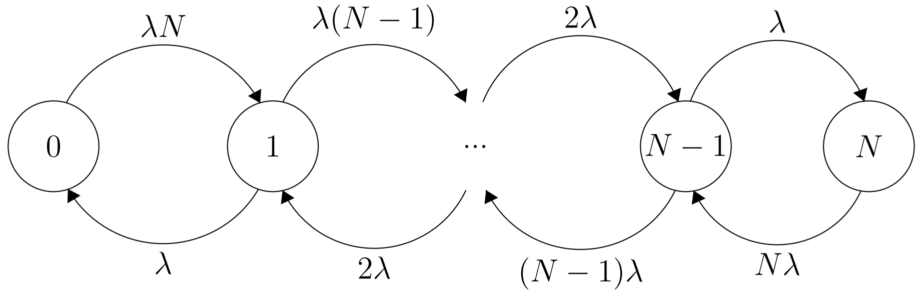
$$\mathbb{P}\left(\frac{|n_1(t) - n_2(t)|}{N} \leq \frac{5}{\sqrt{N}}\right) \geq 0.99$$

2. Показать, что математическое ожидание первого возвращения в начальное состояние равно 2^N.

2 Теоретическая часть

2.1 Вероятность относительной разности

В нашем случае имеется непрерывная цепь Эренфестов:



Эренфестова цепь принадлежит классу цепей процессов гибели и рождения. Воспользуемся формулой для вычисления стационарного распределения таких процессов:

$$\pi_0 = \left(1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2} + ... + \frac{\lambda_1..\lambda_N}{\mu_1..\mu_N}\right)^{-1}$$

$$\pi_k = \frac{\lambda_k}{\mu_k}\pi_{k-1}$$

В нашем же случае:

$$\frac{\lambda_1..\lambda_N}{\mu_1..\mu_N} = \frac{N(N_1)..(N-l+1)}{k!} = C_N^k$$

Тогда:

$$\pi_0 = (1 + C_N^1 + .. + C_N^N)^{-1} = 2^{-N}$$

$$\pi_k = 2^{-N}C_N^k$$

И так:

$$\pi_k = C_N^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{N-k}, k = 0, ..., N$$

Это биномиальное распределение с параметрами N и $p = 1/2$: $\pi_k \in Bi(N, 1/2)$. Из курса теоретической вероятности известно, что при достаточно больших $N \hookrightarrow Bi(N, 1/2) \sim N(N/2, N/4)$. Тогда:

$$\lim_{N\to\inf}\lim_{t\to\inf}\mathbb{P}\left(\frac{|\xi(t) - N/2|}{\sqrt{N}} \leq N_{\frac{1+\gamma}{2}}(0,1)\right) = \gamma$$

где $N_{\frac{1+\gamma}{2}}(0,1)$ - это $(1+\gamma)/2$ -квантиль распределения $N(0,1)$. При $\gamma = 0.99$ получаем $N_{\frac{1+\gamma}{2}} = 2.576$. Получили:

$$\mathbb{P}\left(\frac{|n_1(t) - n_2(t)|}{N} \leq \frac{5.2}{\sqrt{N}}\right) \geq 0.99$$

2.2 Математическое ожидание первого возвращения

Так как Эренфестова цепь является неразложимой и конечной, то она эргодическая и в частности $p_{0,0} \to \pi_0 > 0$. Из критерия Эргодичности следует, что такое (и любое другое) состояние этой цепи является возвратным.

Инфинитная матрица Λ в нашем случае будет равна:

$$\begin{bmatrix} -\lambda N & \lambda(N-0) & 0 & & \\ \lambda & -\lambda N & \lambda(N-1) & & \\ 0 & \lambda 2 & -\lambda N & & \\ & & & \dots & \\ & & & & -\lambda N \end{bmatrix}$$

Момент времени выхода из состояния 0:

$$\tau_0(\omega) = inf\{t : t > 0, \xi(\omega, t) \neq 0\}$$

Время первого возвращения в состояние 0:

$$\alpha_{00}(\omega) = inf\{t : t > \tau_0(\omega), \xi(\omega, t) = 0\}$$

Начальное состояние:

$$\Omega_0 = \{\omega : \xi(\omega, 0) = 0\}$$

Тогда (178 стр пособий лектора) в силу того, что 0 - возвратное состояние, а цепь неразложима и конечна:

$$\mathbb{E}(\alpha_{00}|\Omega_0) = \frac{1}{\Lambda_0 \pi_0} = \frac{2^N}{\lambda N}$$

3 Практическая часть

В ходе выполнения работы было смоделировано две различные модели, которые, естественно, пришли к одному и тому же результату.

3.1 Моделирование поведения индивидуальной блохи

Каждая блоха сама решает, что ей делать. Ее переход на соседнюю собаку - случайная величина $\xi \in Be(\lambda \cdot \Delta t)$, где Δt - время обновление одной итерации. Рассмотрим итерацию обновления одной блохи:

1) Блоха попала на i ячейку
2) Генерируем $q \in [0, 1]$.
3) Если $q < \lambda \cdot \Delta t$ - перескакиваем.

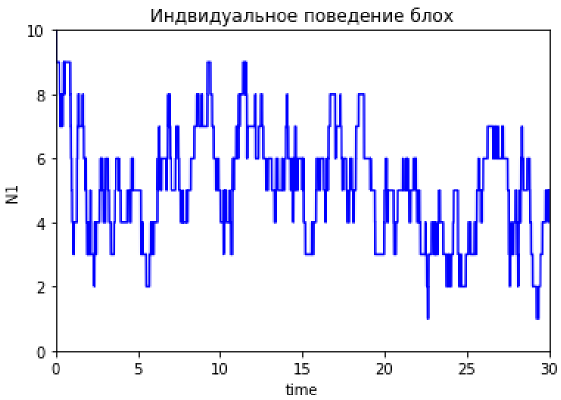


Рис. 1: $N = 10, \lambda = 1, \Delta T = 0,001$

Как видим, при достаточно малых N даже достигается начальная точка.

Рис. 2: $N = 50, \lambda = 1, \Delta T = 0,001$

Рис. 3: $N = 1000\lambda = 0.1, \Delta T = 0,001$

Заметим, что совершаются колебания числа блох на собаке в районе $1/2 \cdot N$ как и предполагалось.

3.2 Моделирование поведения самой схемы

Теперь же блохи действуют как единный организм. Если на первой собаке в какой-то момент времени N_1 блох, то:

1) N_1 увеличится с распределением Бернулли с коэффициентом $\lambda \cdot (N - N_1) \cdot \Delta t$

2) N_1 уменьшается с распределением Бернулли с коэффициентом $\lambda \cdot N_1 \cdot \Delta t$

Если в процессе программы она совершает оба действия одновременно, то N_1 остается прежним.

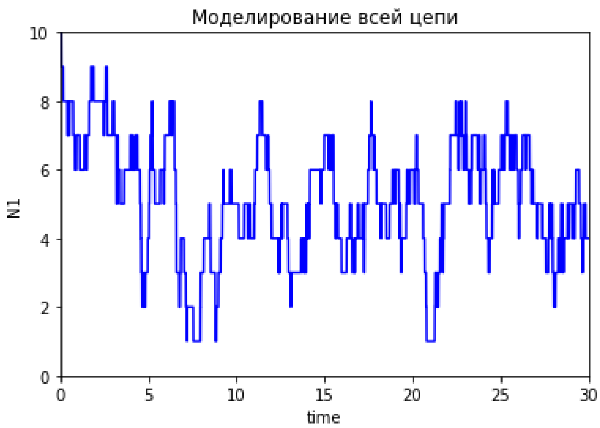


Рис. 4: $N = 10, \lambda = 1, \Delta T = 0,001$

Рис. 5: $N = 1000\lambda = 0.1, \Delta T = 0,001$

3.3 Мини-выводы.

Получили те же графики. Это логично, ведь с $\mathbb{E}\sum\xi = \sum\mathbb{E}\xi$. То есть в среднем модели должны показывать один и тот же результат.

4 Сравнение с другими моделями, рассчитывающими диффузию

Диффузия в системе, состоящей из двух компонент a и b (бинарная смесь), подчиняется закону Фика: плонтности потока компонентов $j_{a,b}$ (количество частиц, пересающих единичную площадку в единицу времени) пропорциональны градиентам их концентраций $\nabla n_{a,b}$:

$$j_a = -D\frac{\delta n_a}{\delta x}$$

$$j_b = -D\frac{\delta n_b}{\delta x}$$

где D - коэффициент взаимной диффузии компонентов.

Производя различные арифметические выкладки и физические допущения, мы получаем выражение для диффузии:

$$\Delta N = N_0 \exp^{-t/\tau}$$

или

$$n_1(t) - n_2(t) = N \exp^{-t/\tau}$$

Получаем:

$$n_1(t) = \frac{1}{2}N\left(1 + exp^{-t/\tau}\right)$$

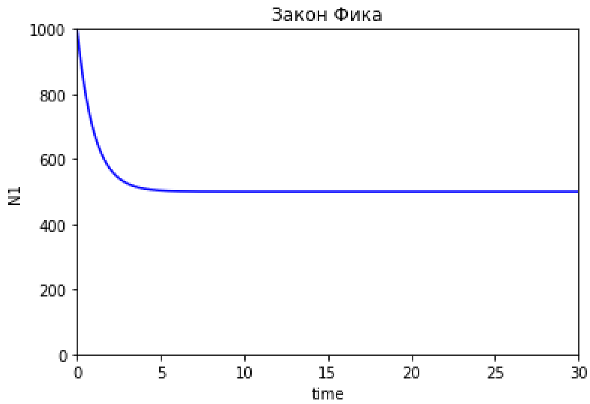


Рис. 6: Закон Фика $N = 1000\tau = 1\Delta T = 0.001$

Заметим, что при правильном подборе коэффициентов графики при наложении совпадают.

Рис. 7: Наложение графиков двух различных моделей.

5 Заключение

В ходе выполнения проекта было сделано:

- Решена задача распределения блох на двух собаках. В том числе было получено:

  - Относительная разность числа блох на собаках имеет порядок малости $O(N^{-1/2})$ при достаточно больших T.
  - Математическое ожидание времени первого возвращения в начальное состояние равное 2^N

- Было численно смоделировано движение блох на двух разных интерпретациях модели Эренфестов.
- Рассмотрена модель Фика диффузии газов. Экспериментально было проверено, что методы имеют похожие выводы.