Ответы по матлогике

github.com

5 января 2025 г.

[subsection] [subsection]

Содержание

1 Булевы функции

1.1 Булевы функции. Способы задания, основные свойства.

Булева (или логическая) **функция** $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ от n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ — такая функция, что и аргументы и функция могут принимать только значения 0 (истина) либо 1 (ложь).

Способы задания

1. Таблицей истинности
2. Вектором значений
3. Номером
4. Формулами

Пример

Приоритет выполнения операций

1.2 Булевы функции одной и двух переменных

Одной переменной

Функция	$x = 0$	$x = 1$	Словесное описание
$f_0 \equiv 0$	0	0	Константный ноль (противоречие)
$f_1 = x$	0	1	Повторение аргумента (тождественная функция)
$f_2 = \overline{x}$	1	0	Инверсия (отрицание) аргумента
$f_3 \equiv 1$	1	1	Константная единица (тавтология)

Двух переменных Обратите внимание на порядок следования переменных в таблице!

x_1	0	0	1	1	Описание
x_2	0	1	0	1	
f_0	0	0	0	0	Противоречие
f_1	0	0	0	1	Конъюнкция $f = x_1 \wedge x_2$
f_2	0	0	1	0	$f = \overline{x_1 \to x_2}$
f_3	0	0	1	1	$f = x_1$
f_4	0	1	0	0	$f = \overline{x_2 \to x_1}$
f_5	0	1	0	1	$f = x_2$
f_6	0	1	1	0	XOR (исключающее или) $f = x_1 \oplus x_2$
f_7	0	1	1	1	Дизъюнкция $f = x_1 \vee x_2$
f_8	1	0	0	0	Стрелка Пирса (отр. дизъюнкции) $f = x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2}$
f_9	1	0	0	1	Эквиваленция $f = (x_1 \leftrightarrow x_2) = (x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_1)$
f_{10}	1	0	1	0	$f = \overline{x}_2$
f_{11}	1	0	1	1	Импликация $f = x_2 \to x_1$
f_{12}	1	1	0	0	$f = \overline{x}_1$
f_{13}	1	1	0	1	Импликация $f = x_1 \to x_2$
f_{14}	1	1	1	0	Штрих Шеффера (отр. конъюнкции) $f = x_1 \mid x_2 = \overline{x_1 \wedge x_2}$
f_{15}	1	1	1	1	Тавтология

Функции без названий либо имеют очевидные названия, либо ущербны по своей природе и не заслуживают его.

1.3 Основные законы алгебры логики

Основные законы алгебры логики касаются конъюнкции и дизъюнкции. Вощможно, на экзамене их потребуется доказать. Делать это лучше всего с помощью таблцы истинности, поскольку на этом этапе все законы как бы не доказаны и опираться на них нельзя.

1. Идемпотентность: $x \wedge x = x$ $\qquad$ $x \vee x = x$
2. Коммутативность: $x \wedge y = x \wedge y$ $\qquad$ $x \vee y = y \vee x$
3. Ассоциативность: $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ $\qquad$ $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
4. Поглощение
5. Дистрибутивность
6. Правила де Моргана
7. Свойства констант
8. Закон исключения третьего и закон противоречия
9. Снятие двойного отрицания $\overline{\overline{x}} = x$
10. Склеивание
11. Связь импликации с конъюнкцией, дизъюнкцией, отрицанием
12. Выражение эквивалентности

Из правил де Моргана следует, что если все операции в тождестве — это конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, то при взаимной замене конъюнкций на дизъюнкции получится верное тождество.

1.4 Следствия из законов алгебры логики: операции склеивания, поглощения, правила развертывания логических выражений

См. выше. В этом вопросе, я полагаю, надо все это добро вывести. Также в списке вопросов дана ссылка на неясный источник

1.5 Пять классов функций. Теорема о функциональной полноте

Существуют следующие классы булевых функций:

- **Самодвойственные (S).**

  Определение. *Булева функция f^* называется* ***двойственной*** *к булевой функции f, если они обе принимают равное число n аргументов и справедливо равенство:*

  $$f^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)}$$

  Примечание. Это равенство можно переписать как $\overline{f^*(x_1, ..., x_n)} = f(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n)$

  Определение. *Булева функция f называется* ***самодвойственной****, если она является функцией, двойственной самой себе:*

  $$f^* = f$$

- **Монотонные (M)** *Пусть* $a = (a_1, ..., a_n)$ и $b = (b_1, ..., b_n)$ — наборы длины n из 0 и 1.

  Определение. *Если справедливы неравенства*[1]

  $$a_1 \leq b_1, ..., a_n \leq b_n,$$

  то говорят, что набор a ***меньше*** *набора b и пишут:*

  $$a \leq b.$$

[1]Договоримся, что $0 \leq 0$, $1 \leq 1$, $0 \leq 1$.

Определение. *Если выполнено хотя бы одно из равенств: $a \le b$, $b \le a$, то наборы a и b* ***сравнимы****.*

Определение. *Булева функция f называется монотонной, если для любых наборов a и b условие $a \le b$ влечет выполнение $f(a) \le f(b)$.*

- **Линейные (L)**

Определение. ***Полиномами Жегалкина*** *назваются формулы над множеством функций $F_J = \{0, 1, \wedge, \oplus\}$:*

$$P(x_1, x_2,..., x_n) = a_0 \tag{1}$$

$$\oplus a_1 X_1 \oplus a_2 X_2 \oplus a_n X_n \tag{2}$$

$$\oplus a_{12} X_{12} \oplus a_{13} X_1 X_3 \oplus \cdots \oplus a_{1\ldots n} X_1 \ldots X_n, \tag{3}$$

где $a_{i_1 \ldots i_n}$ — постоянные члены, равные 0 или 1.

Всякую булеву функцию можно представить единственным полиномом Жегалкина.

Алгоритм построения полинома Жегалкина по СДНФ. [2] Пусть задана совершенная ДНФ функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.

1. Заменяем каждый символ дизъюнкции $\vee$ на символ дизюнкции с исключением $\oplus$.
2. Заменяем каждую переменную с инверсией ($\overline{x}$) равносильной формулой $x \oplus 1$.
3. Раскрываем скобки[3].
4. Вычеркиваем из формулы пары одинаковых слагаемых[4].

[2] Не уверен, что это по смыслу это относится сюда, но в презентации оно дано

[3] Так, как если бы вместо конъюнкции было обычное умножение, а вместо xor'ов — обычное сложение

[4] Если в формуле четное число однородных слагаемых, то все уходят. Если нечетное — отсается одно

Получен полином Жегалкина функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Определение. *Функция $f(x_1, ..., x_n)$* ***линейная****, если ее многочлен Жегалкина является линейным относительно всех переменных, то есть имеет следующий вид:*

$$f(x_1, ..., x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_{n+1}$$

- **Сохраняющие 0 (T_0)**

  Определение. *Говорят, что булева функция* ***сохраняет 0****, если выполнено равенство:*

  $$f(0, 0, ..., 0) = 0$$

- **Сохраняющие 1 (T_1)**

  Определение. *Говорят, что булева функция* ***сохраняет 1****, если выполнено равенство:*

  $$f(1, 1, ..., 1) = 1$$

Хотя означенные множества и называются классами, принадлежность функции к одному из них не исключает принадлежности и к другим классам.

Теорема. *(Поста, о функциональной полноте) Система булевых функций F является полной тогда и только тогда, когда она целиком не принадлежит ни одному из замкнутых классов S, M, L, T_0, T_1.*

1.6 Основная функционально полная система логических связей

Понятия не имею, чего она хочет в этом вопросе.

1.7 Теорема Жегалкина. Алгебра Жегалкина. Функции Шеффера и Пирса.

Про алгебру Жегалкина см. выше (вопрос 1.5)

1.8