

Ответы по матлогике

6 января 2025 г.

Содержание

1	Булевы функции	3
1.1	Булевы функции. Способы задания, основные свойства.	3
1.2	Булевы функции одной и двух переменных	3
1.3	Основные законы алгебры логики	5
1.4	Следствия из законов алгебры логики: операции склеивания, поглощения, правила развертывания логических выражений	6
1.5	Пять классов функций. Теорема о функциональной полноте	6
1.6	Основная функционально полная система логических связей	9
1.7	Теорема Жегалкина. Алгебра Жегалкина. Функции Шеффера и Пирса.	9
1.8	9

1 Булевы функции

1.1 Булевы функции. Способы задания, основные свойства.

Булева (или логическая) **функция** $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от n переменных x_1, x_2, \dots, x_n — такая функция, что и аргументы и функция могут принимать только значения 0 (истина) либо 1 (ложь).

Способы задания

1. Таблицей истинности
2. Вектором значений
3. Номером
4. Формулами

Приоритет выполнения операций

1.2 Булевы функции одной и двух переменных

Одной переменной

Функция	$x = 0$	$x = 1$	Словесное описание
$f_0 \equiv 0$	0	0	Константный ноль (противоречие)
$f_1 = x$	0	1	Повторение аргумента (тождественная функция)
$f_2 = \bar{x}$	1	0	Инверсия (отрицание) аргумента
$f_3 \equiv 1$	1	1	Константная единица (тавтология)

Двух переменных Обратите внимание на порядок следования переменных в таблице!

x_1	0	0	1	1	Описание
x_2	0	1	0	1	
f_0	0	0	0	0	Противоречие
f_1	0	0	0	1	Конъюнкция $f = x_1 \wedge x_2$
f_2	0	0	1	0	$f = \overline{x_1} \rightarrow \overline{x_2}$
f_3	0	0	1	1	$f = x_1$
f_4	0	1	0	0	$f = \overline{x_2} \rightarrow \overline{x_1}$
f_5	0	1	0	1	$f = x_2$
f_6	0	1	1	0	XOR (исключающее или) $f = x_1 \oplus x_2$
f_7	0	1	1	1	Дизъюнкция $f = x_1 \vee x_2$
f_8	1	0	0	0	Стрелка Пирса (отр. дизъюнкции) $f = x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2}$
f_9	1	0	0	1	Эквиваленция $f = (x_1 \leftrightarrow x_2) = (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_1)$
f_{10}	1	0	1	0	$f = \overline{x_2}$
f_{11}	1	0	1	1	Импликация $f = x_2 \rightarrow x_1$
f_{12}	1	1	0	0	$f = \overline{x_1}$
f_{13}	1	1	0	1	Импликация $f = x_1 \rightarrow x_2$
f_{14}	1	1	1	0	Штрих Шеффера (отр. конъюнкции) $f = x_1 x_2 = \overline{x_1 \wedge x_2}$
f_{15}	1	1	1	1	Тавтология

Функции без названий либо имеют очевидные названия, либо ущербны по своей природе и не заслуживают его.

1.3 Основные законы алгебры логики

Основные законы алгебры логики касаются конъюнкции и дизъюнкции. Возможно, на экзамене их потребуется доказать. Делать это лучше всего с помощью таблицы истинности, поскольку на этом этапе все законы как бы не доказаны и опираться на них нельзя.

1. Идемпотентность: $x \wedge x = x$ $x \vee x = x$

2. Коммутативность: $x \wedge y = y \wedge x$ $x \vee y = y \vee x$

3. Ассоциативность:

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$

4. Поглощение: $x \vee (x \wedge y) = x$ $x \wedge (x \vee y) = x$

5. Дистрибутивность

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

6. Правила де Моргана

$$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y} \quad \overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$$

7. Свойства констант

$$1 \wedge x = x \quad 1 \vee x = 1$$

$$0 \wedge x = 0 \quad 0 \vee x = x$$

8. Закон исключения третьего и закон противоречия

$$x \vee \overline{x} = 1 \quad x \wedge \overline{x} = 0$$

9. Снятие двойного отрицания $\overline{\overline{x}} = x$

10. Склеивание

$$(x \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge y) = y$$

$$(x \vee y) \wedge (\overline{x} \vee y) = y$$

11. Связь импликации с конъюнкцией, дизъюнкцией

$$x \rightarrow y = \bar{x} \vee y = \overline{x \wedge \bar{y}}$$

12. Выражение эквивалентности

$$x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$$

Из правил де Моргана следует, что если все операции в тождестве — это конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, то при взаимной замене конъюнкций на дизъюнкции получится верное тождество.

1.4 Следствия из законов алгебры логики: операции склеивания, поглощения, правила развертывания логических выражений

См. выше. В этом вопросе, я полагаю, надо все это добро вывести. Также в списке вопросов дана ссылка на неясный источник

1.5 Пять классов функций. Теорема о функциональной полноте

Существуют следующие классы булевых функций:

- Самодвойственные (S).

Определение. Булева функция f^* называется **двойственной** к булевой функции f , если они обе принимают равное число n аргументов и справедливо равенство:

$$f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)}$$

Примечание. Это равенство можно переписать как $\overline{f^*(x_1, \dots, x_n)} = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$

Определение. Булева функция f называется **самодвойственной**, если она является функцией, двойственной самой себе:

$$f^* = f$$

- **Монотонные (M)** Пусть $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, \dots, b_n)$ — наборы длины n из 0 и 1.

Определение. Если справедливы неравенства¹

$$a_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq b_n,$$

то говорят, что набор a **меньше** набора b и пишут:

$$a \leq b.$$

Определение. Если выполнено хотя бы одно из равенств: $a \leq b$, $b \leq a$, то наборы a и b **сравнимы**.

Определение. Булева функция f называется **монотонной**, если для любых наборов a и b условие $a \leq b$ влечет выполнение $f(a) \leq f(b)$.

- **Линейные (L)**

Определение. **Полиномами Жегалкина** называются формулы над множеством функций $F_J = \{0, 1, \wedge, \oplus\}$:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 \tag{1}$$

$$\oplus a_1 X_1 \oplus a_2 X_2 \oplus a_n X_n \tag{2}$$

$$\oplus a_{12} X_{12} \oplus a_{13} X_1 X_3 \oplus \dots \oplus a_{1\dots n} X_1 \dots X_n, \tag{3}$$

где $a_{i_1\dots i_n}$ — постоянные члены, равные 0 или 1.

Всякую булеву функцию можно представить единственным полиномом Жегалкина.

¹ Договоримся, что $0 \leq 0$, $1 \leq 1$, $0 \leq 1$.

Алгоритм построения полинома Жегалкина по СДНФ.

² Пусть задана совершенная ДНФ функции $f(x_1, \dots, x_n)$.

1. Заменяем каждый символ дизъюнкции \vee на символ дизъюнкции с исключением \oplus .
2. Заменяем каждую переменную с инверсией (\bar{x}) равносильной формулой $x \oplus 1$.
3. Раскрываем скобки³.
4. Вычеркиваем из формулы пары одинаковых слагаемых⁴.

Получен полином Жегалкина функции $f(x_1, \dots, x_n)$.

Определение. Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ *линейная*, если ее многочлен Жегалкина является линейным относительно всех переменных, то есть имеет следующий вид:

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_{n+1}$$

- Сохраняющие 0 (T_0)

Определение. Говорят, что булева функция *сохраняет 0*, если выполнено равенство:

$$f(0, 0, \dots, 0) = 0$$

- Сохраняющие 1 (T_1)

Определение. Говорят, что булева функция *сохраняет 1*, если выполнено равенство:

$$f(1, 1, \dots, 1) = 1$$

²Не уверен, что это по смыслу это относится сюда, но в презентации оно дано

³Так, как если бы вместо конъюнкции было обычное умножение, а вместо хог'ов — обычное сложение

⁴Если в формуле четное число однородных слагаемых, то все уходят. Если нечетное — отсается одно

Хотя означенные множества и называются классами, принадлежность функции к одному из них не исключает принадлежности и к другим классам.

Теорема. *(Поста, о функциональной полноте) Система булевых функций F является полной тогда и только тогда, когда она целиком не принадлежит ни одному из замкнутых классов S , M , L , T_0 , T_1 .*

1.6 Основная функционально полная система логических связей

Понятия не имею, чего она хочет в этом вопросе.

1.7 Теорема Жегалкина. Алгебра Жегалкина. Функции Шеффера и Пирса.

Про алгебру Жегалкина см. выше (вопрос 1.5)

1.8