3. СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД

Регулярным симплексом в n-мерном пространстве называется правильный многогранник с n+1 вершиной. При n = 2 симплексом является правильный треугольник, при n = 3 – тетраэдр и т.д.

В симплексе решение задачи начинается с рассмотрений одной из вершин многогранника условий. Если исследуемая вершина не соответствует максимуму (минимуму), то переходят к соседней, увеличивая значение функции цели при решении задачи на максимум и уменьшая при решении задачи на минимум. Таким образом, переход от одной вершины к другой улучшает значение функции цели. Так как число вершин многогранника ограничено, то за конечное число шагов гарантируется нахождение оптимального значения или установление того факта, что задача неразрешима.

Таким образом, симплексный метод - это метод целенаправленного перебора опорных решений ЗЛП.

3.1. Каноническая форма задачи линейного программирования

Симплексный метод применяется для ЗЛП заданной в канонической форме. Предположим, что система ограничении (3.1) содержит m единичных векторов. Тогда задачу можно сформулировать следующим образом.

Требуется найти максимальное значение целевой функции [3]

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_n + \cdots + x_n$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_{m,} \end{cases} \tag{3.1}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, m.$$

Предполагается, что $b_i \geq 0, i = 1, m.$

Более кратко ЗЛП в канонической форме можно представить в следующем виде:

целевая функция

$$f(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

ограничения

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1, m}$$

при условии неотрицательности

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}$$

Любую ЗЛП можно привести к канонической форме используя следующее правило:

Правило перехода от ограничений – неравенствам к равенствам. Для этого нужно ввести дополнительную переменную $x_{n+1} \geq 0$

a) $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n \leq b_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n + x_{n+1} \leq b_1$

b) $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n \geq b_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n - x_{n+1} \leq b_2$

Рассмотрим пример перевода к каноническому виду следующей задачи.

$$f(x) = -x_1 - 2x_2 + x_3 \to min$$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Чтобы привести задачу к каноническому виду (3.1) используем правила преобразования задач (см. раздел 2.2). Перейдем к задаче на максимум

$$f(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 \to max$$

Введем дополнительные неотрицательные переменные x_4 и x_5 в левые части первого и второго неравенства.

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, 5}$$

3.2. Сущность симплексного метода

Запишем систему (3.1) в векторной форме

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_mX_m + A_{m+1}x_{m+1} + \cdots + A_nx_n = A_{0,} \qquad (3.2)$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots A_m = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}, A_{m+1} = \begin{pmatrix}a_{1,m+1}\\a_{2,m+1}\\\vdots\\a_{m,m+1}\end{pmatrix},$$

$$\ldots A_n = \begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

Векторы A_1, A_2, $\cdots$, A_m являются линейно независимыми единичными векторами m-мерного пространства и образуют базис этого пространства. Соответствующие этим векторам переменные x_1, x_2, $\cdots$, x_m принимаем за базисные переменные. Остальные переменные x_{m+1}, x_{m+2}, $\cdots$, x_n считаются свободными или небазисными. Базисные переменные входят в целевую функцию с нулевыми коэффициентами. Процесс оптимизации начнем с некоторого опорного решения. Положим все небазисные переменные равными нулю: $x_{m+1} = x_{m+2}=\ldots= x_n = 0$. В результате получаем первоначальный опорный план

$$x^0 = (x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_n) = \left(b_{1,} b_2, \cdots, b_m, 0, \cdots, 0\right).$$

Определение 3.1. Неотрицательное базисное решение системы ограничений ЗЛП называется опорным решением (опорным планом) ЗЛП.

Из определения следует, что:

1) если , $b_1 \geq 0, \ldots, b_m \geq 0$ то соответствующее базисное решение является опорным решением ЗЛП;

2) число положительных координат опорного плана не может превышать m.

Определение 3.2. Опорный план называется невырожденным, если число его положительных компонентов равно m, и вырожденным в противном случае [4].

Теорема 3.1. Вектор X является опорным планом ЗЛП тогда и только тогда, когда X – вершина многогранника допустимых планов [4].

Итак, для нахождения оптимального решения ЗЛП достаточно исследовать вершины выпуклого многогранника допустимых решений. Допустимое базисное решение соответствует одной из угловых точек области допустимых решений (вершин). В этом и состоит основная идея симплекс-метода решения ЗЛП.

Для исследования плана на оптимальность построим начальную симплекс-таблицу (таблица 3.1)

Таблица 3.1. Начальная симплекс-таблица

	c_j	c_{m+1}	c_{m+2}		c_n	
$\overline{C_B}$		x_{m+1}	x_{m+2}	$\cdots$	x_n	$\overline{A_0}$
C_{B1}	x_1	$a_{1,m+1}$	$a_{1,m+2}$	$\cdots$	a_{1n}	b_1
C_{B1}	x_2	$a_{2,m+1}$	$a_{2,m+2}$	$\cdots$	a_{2n}	b_2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
C_{Bm}	x_m	$a_{m,m+1}$	$a_{m,m+2}$	$\cdots$	a_{mn}	b_m
	$\boldsymbol{f}$	Δ_{m+1}	Δ_{m+2}	$\cdots$	Δ_n	Q

Рассмотрим заполнение таблицы. В первом столбце таблицы записываются базисные переменные x_i, $\left(i = \overline{1,m}\right)$ и передними коэффициенты целевой функции C_{Bi} при текущих базисных переменных, записанных в том же порядке. В верхней части таблицы располагаются небазисные переменные x_j, $\left(j = \overline{m+1,n}\right)$ и коэффициенты целевой функции c_j, с которыми эти переменные входят в целевую функцию. В столбце x_j, $\left(j = \overline{m+1,n}\right)$ записываются коэффициенты разложения вектора $\overline{A_J}$ по базису (3.2). Крайний справа столбец заполняется элементами столбца $\overline{A_0}$ в разложении (3.2), в нем же в результате вычислений получаем оптимальный план [7].

Заполнение f-строки. В f-строке записываются относительные оценки Δ_j $\left(j = \overline{m+1,n}\right)$, характеризующие прирост целевой функции при включении в базис небазисной переменной x_j и Q – значение целевой функции, для текущих базисных переменных.

$$\Delta_j = \left(\overline{C_B}, \overline{A_j}\right) - c_j, \qquad j = \overline{m+1, n},$$

$$Q = (\overline{C_B}, \overline{A_0}).$$

Здесь $\left(\overline{C_B}, \overline{A_j}\right)$ – скалярное произведение соответствующих векторов.

Для оптимальности опорного решения в задаче на максимум требуется выполнение неотрицательности всех относительных оценок $\Delta_j \geq 0$. Если всё оценки положительны, то расчет закончен и в последнем столбце таблицы $\overline{A_0}$ находятся оптимальные значения базисных переменных. Если хотя бы одна оценка отрицательна, то можно улучшить полученное решение.

3.3. Алгоритм симплексного метода

Алгоритм симплекс метода заключается в составлении новых таблиц с помощью процедуры повторяющихся расчетов итераций до тех пор, пока не будет получено оптимальное решение задачи, либо сделан вывод о неразрешимости поставленной задачи. Итерационный процесс состоит из трех шагов.

Первый шаг. Найти переменную для включения в базис.

Выберем наибольшую по модулю отрицательную оценку Δ_n. Соответствующая переменная x_n включается в базис. Все элементы над выбранной оценкой образуют разрешающий столбец.

Второй шаг. Найти переменную для исключения из базиса.

Для этого составим отношение свободных членов к соответствующим положительным элементам разрешающего столбца. В той строке, где достигается минимум, соответствующая переменная x_r исключается из базиса. Эта строка называется ***разрешающей строкой***.

Таким образом, для выбора разрешающей строки составляем неотрицательные отношения и выбираем среди них наименьшее.

$$b_i / a_{ij} \geq 0 \ (i = \overline{1, m}) \tag{3.3}$$

Замечание. Если min достигается для нескольких строках, то за разрешающую строку можно принять любую из них, при этом в новом опорном плане значения некоторых базисных переменных станут равны нулю, т.е. получаем вырожденный опорный план.

Число a_{rs}, находящееся на пересечений разрешающей строки r и разрешающего столбца s, называется ***разрешающим элементом***.

Третий шаг. Построить новую симплекс-таблицу.

Построение новой симплекс таблицы состоит из следующих шагов [7]:

- Переменные x_r и x_n меняются местами;
- Разрешающий элемент a_{rn} заменяется на обратный $a_{rn} = \frac{1}{a_{rn}}$;
- Элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент;
- Элементы разрешающего столбца делятся на разрешающий элемент и меняют знак;
- Остальные элементы пересчитываются по «правилу прямоугольника». Находится разность произведений элементов, стоящих в противоположных вершинах прямоугольника (рис. 3.1), деленная на разрешающий элемент.

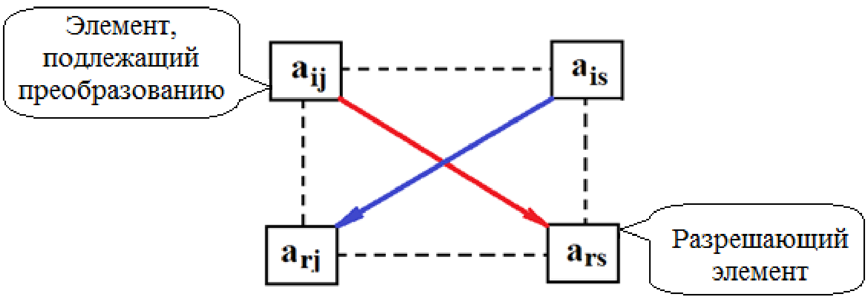

Рис. 3.1. Правило прямоугольника

Формальный вид «правила прямоугольника»:

$$a_{ij} = \frac{a_{ij}a_{rs} - a_{is}a_{rj}}{a_{rs}},$$

где a_{ij} – рассчитываемый элемент новой симплекс таблицы.

3.4. Решение задач симплексным методом

Рассмотрим алгоритм симплексного метода для решения задачи о максимальном доходе. Напомним ее условие:

Целевая функция.

$$\mathrm{f(x)} = 3\mathrm{x}_1 + 2\mathrm{x}_2 \rightarrow \max \ [\text{тыс. руб./сутки}]$$

Ограничения.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \; [\text{т. ингр. A/сутки}] \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \; [\text{т. ингр. B/сутки}] \\ -x_1 + x_2 \le 1 \; [\text{т. краски/сутки}] \\ x_2 \le 2 \quad [\text{т. краски/сутки}] \\ x_1 \ge 0 \quad [\text{т. краски/сутки}] \\ x_2 \ge 0 \quad [\text{т. краски/сутки}] \end{cases}$$

Приведем задачу к канонической форме. Для этого в левые части ограничений вводим дополнительные переменные $x_3 \ge 0$, $x_4 \ge 0$, $x_5 \ge 0$, $x_6 \ge 0$. Эти переменные выбираются так, чтобы они обращали неравенства в равенства.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 8 \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 1 \\ 0x_1 + x_2 + x_6 = 2 \\ x_j \ge 0, \; j = \overline{1,6} \end{cases} \tag{3.4}$$

$$f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 0x_{3+}0x_4 + 0x_5 + 0x_6. \tag{3.5}$$

Физически x_j, $j = \overline{1,6}$ означают остатки неиспользованных ресурсов.

Теперь построим начальную симплекс-таблицу. Запишем систему (3.4) в векторной форме:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 + A_5x_5 + A_6x_6 = A_0, \tag{3.6}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A_0 \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Векторы A_3, A_4, A_5, A_6 являются линейно независимыми единичными векторами 4х-мерного пространства и образуют базис этого пространства. Поэтому в разложении (3.6) за базисные переменные выбираем переменные x_3, x_4, x_5, x_6. Небазисными переменными являются x_1, x_2.

Разложение (3.6) позволяет найти первое базисное допустимое решение. Для этого свободные переменные x_1, x_2 приравниваем нулю. В результате получим разложение

$$A_3 x_3 + A_4 x_4 + A_5 x_5 + A_6 x_6 = A_0,$$

которому соответствует первоначальный опорный план

$$x^{(0)} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 6, 8, 1, 2),$$

$$f\left(x^{(0)}\right) = 0.$$

Для проверки плана $x^{(0)}$ на оптимальность построим первую симплекс-таблицу. Введем в рассмотрение вектор коэффициентов целевой функции при базисных переменных

$$\overline{C_B} = (c_3,\ c_4,\ c_5,\ c_6)^T = (0, 0, 0, 0)^T.$$

В левый столбец таблицы 3.2 запишем переменные x_3, x_4, x_5, x_6 образующие базис, в верхней строке – небазисные переменные x_1, x_2. В строке c_j запишем коэффициенты целевой функции соответствующие небазисным переменным $c_1 = 3$, $c_2 = 2$. В столбце $\overline{C_B}$ запишем коэффициенты целевой функции, соответствующие базисным переменным Столбец, определяемый переменной x_1, состоит из коэффициентов вектора $\overline{A_1}$. Аналогично, столбец, определяемый переменной x_2, состоит из коэффициентов вектора $\overline{A_2}$. Крайний правый столбец заполняется элементами столбца $\overline{A_0}$, в нем же в результате вычислений получаем оптимальный план.

Таблица 3.2. Начальная симплекс-таблица задачи о максимальном доходе

	c_j	3	2	
$\overline{C_B}$		x_1	x_2	$\overline{A_0}$
0	x_3	1	2	6
0	x_4	2	1	8
0	x_5	-1	1	1
0	x_6	0	1	2
	f			
		Δ_1	Δ_2	Q

Заполнение f-строки (таблица 3.3). Найдем относительные оценки Δ_1, Δ_2 и значение целевой функции Q.

$$\Delta_1 = (\overline{\mathrm{C}_B} * \overline{A_1}) - c_1 = 0 * 1 + 0 * 2 - 0 * 1 + 0 * 0 - 3 = -3;$$

$$\Delta_2 = (\overline{\mathrm{C}_B} * \overline{A_2}) - c_2 = 0 * 2 + 0 * 1 + 0 * 1 + 0 * 1 - 2 = -2;$$

$$Q = (\overline{\mathrm{C}_B} * \overline{A_0}) = 0 * 6 + 0 * 8 + 0 * 1 + 0 * 2 = 0.$$

Таблица 3.3. Заполнение f-строки

	c_j	3	2		
$\overline{C_B}$		x_1	x_2	$\overline{A_0}$	
0	x_3	1	2	6	$6/1 = 6$
0	x_4	2	1	8	$8/2 = 4\,min$
0	x_5	-1	1	1	-1 – отрицательное значение
0	x_6	0	1	2	не имеет смысла
	f	-3	-2	0	
		Δ_1	Δ_2	Q	

Для оптимальности опорного решения в задаче на максимум требуется выполнение неотрицательности всех относительных оценок $\Delta_j \geq 0$. Так как оценки $\Delta_1 = -3$ и $\Delta_2 = -2$ в f-строке отрицательны, то это свидетельствуют о возможности улучшения полученного решения.

Наибольшая по модулю отрицательная оценка $\Delta_1 = -3$. В базис будет включена соответствующая ей небазисная переменная x_1. Составим отношения свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца (3.3). Тогда отношения по строкам x_5 и x_6 отбрасываются. Данные отношения приведены справа от таблицы. Наименьшему частному min (6, 4) =4 соответствует строка с переменной x_4. Эта переменная исключается из базиса. В таблице 3.3 разрешающий столбец и разрешающая строка выделены. Разрешающим элементом является число $a_{21} = 2$.

Далее построим новую симплекс-таблицу. Ниже поэтапно демонстрируется процесс заполнения новой симплекс-таблицы (таблицы 3.4 – 3.7).

Таблица 3.4. Новая симплекс-таблица

	c_j	0	2	
$\overline{C_B}$		x_4	x_2	$\overline{A_0}$
0	x_3			
3	x_1	1/2		
0	x_5			
0	x_6			
	f			
		Δ_1	Δ_2	Q

В таблице 3.4 переменные x_1 и x_4 меняются местами вместе с коэффициентами c_j. Разрешающий элемент заменяется на обратный.

Таблица 3.5. Симплекс преобразования

	c_j	0	2	
$\overline{C_B}$		x_4	x_2	$\overline{A_0}$
0	x_3	$-1/2$		
3	x_1	1/2	1/2	4
0	x_5	1/2		
0	x_6	0		
	f	3/2		
		Δ_1	Δ_2	Q

В таблице 3.5 элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент. Элементы разрешающего столбца делятся на разрешающий элемент и меняют знак.

Таблица 3.6. Итерация 0

	c_j	0	2		
$\overline{C_B}$		x_4	x_2	$\overline{A_0}$	
0	x_3	$-1/2$	$3/2$	2	$4/3\ min$
3	x_1	$1/2$	$1/2$	4	8
0	x_5	$1/2$	$3/2$	5	$10/3$
0	x_6	0	1	2	2
	$\boldsymbol{f}$	$3/2$	$-1/2$	12	
		Δ_1	Δ_2	Q	

Остальные элементы (табл. 3.6) рассчитываются по «правилу прямоугольника».

$$a_{12} = \frac{(2 \times 2) - (1 \times 1)}{2} = \frac{3}{2}; \quad a_{32} = \frac{(2 \times 1) - (-1 \times 1)}{2} = \frac{3}{2};$$

$$a_{42} = \frac{(2 \times 1) - (0 \times 1)}{2} = 1; \quad a_{13} = \frac{(2 \times 6) - (1 \times 8)}{2} = 2;$$

$$a_{33} = \frac{(2 \times 1) - (-1 \times 8)}{2} = 2; \quad a_{24} = \frac{(2 \times 2) - (0 \times 8)}{2} = 2;$$

$$\Delta_2 = \frac{(-2 \times 2) - (-3 \times 1)}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Базисное решение, которое дает последняя таблица

$$x^{(1)} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (4, 0, 2, 0, 5, 2),$$

$$f(x^{(1)}) = (\overline{C_B} * \overline{A_0}) = 0 * 2 + 3 * 4 + 0 * 5 + 0 * 2 = 12.$$

Это решение не является оптимальным, так как в f-строке имеется отрицательная оценка Δ_1. Принимая последнюю таблицу за исходную, повторяем описанный выше процесс и строим новую симплекс-таблицу (таблица 3.7).

Таблица 3.7. Итерация 1

$\overline{C_B}$	c_j	0	0	
		x_4	x_3	$\overline{A_0}$
2	x_2	$-1/3$	$2/3$	$4/3$
3	x_1	$2/3$	$-1/3$	$10/3$
0	x_5	1	-1	3
0	x_6	$1/3$	$-2/3$	$2/3$
	f	$4/3$	$1/3$	$12\frac{2}{3}$
		Δ_1	Δ_2	Q

В последней таблице f-строка не содержит отрицательных оценок, что свидетельствует об оптимальности полученного решения:

$$x^* = x^{(2)} = (x_1 = 10/3, x_2 = 4/3, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 3, x_6 = 2/3),$$

$$f_{max} = f(x^*) = (\overline{C_B} * \overline{A_0}) = 2 * 4/3 + 3 * 10/3 + 0 * 3 + 0 * 2/3 = 12\frac{2}{3}.$$

Проверим решение по «правилу прямоугольника».

$$f_{max} = Q = \frac{(3/2 \times 12) - (-1/2 \times 1/2)}{3/2} = 12\frac{2}{3}$$

Проверим полученное решение с графическим методом (раздел 2.3).

Таким образом, фабрика должна выпускать в сутки $x_1 = \frac{10}{3}$ т. краски 1-го вида и $x_2 = \frac{4}{3}$ т. краски 2-го вида. Тогда фабрика получит максимальный доход от продажи $12\frac{2}{3}$ [тыс. руб./сутки].

При этом ингредиенты A и B будут использованы полностью. Эти ресурсы – дефицитные, что соответствует рис. 2.7 и рис.2.8. Однако остается спрос на краску второго вида $2/3\ \frac{\text{т.краски}}{\text{сутки}}$, а разница между остатками спроса красок 1-го и 2-го вида будет составлять $3\frac{\text{т.краски}}{\text{сутки}}$.

Замечания.

- Для того, чтобы решить симплекс-методом задачу минимизации, необходимо изменить правило выбора разрешающего столбца (выбирать столбец s, для которого $\Delta_s \geq 0$). Признаком оптимальности допустимого решения являются условия $\Delta_j \leq 0, j = \overline{1,n}$. .

- Если для некоторой симплекс-таблицы все элементы разрешающего столбца отрицательны, то целевая функция неограниченна сверху (при нахождений максимума) или снизу (при нахождении минимума) и поставленная задача решения не имеет. Приведем, пример.

Решить симплекс-методом задачу минимизации целевой функции

$$f(x) = -x_1 + x_2 \rightarrow min,$$

при условии, что на ее переменные наложены ограничения

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 - 2x_2 \leq 4, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Добавив в ограничения дополнительные переменные x_3, x_4, перейдем к канонической форме.

$$f(x) = -x_1 + x_2 + 0 * x_3 + 0 * x_4 \rightarrow min,$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 4, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Запишем систему ограничений и целевую функцию в виде следующей симплекс-таблицы (табл. 3.8).

Таблица 3.8. Начальная симплекс-таблица

	c_j	-1	1	
$\overline{C_B}$		x_1	x_2	$\overline{A_0}$
0	x_3	-1	1	2
3	x_4	1	-2	4
	f	1	-1	0
		Δ_1	Δ_2	Q

Поскольку отыскивается минимум задачи, оптимальный план будет достигнут, когда все относительные оценки $\Delta_j \leq 0$.

Разрешающий столбец (табл. 3.8) — первый ($\Delta_1 \geq 0$) определяется единственным образом. Учитывая, что в разрешающем столбце только один положительный элемент, то разрешающая строка также определяется единственным образом. Переходим к следующей симплекс-таблице (табл. 3.9).

Таблица 3.9. Итерация 0

	c_j	-1	1	
$\overline{C_B}$		x_4	x_2	$\overline{A_0}$
0	x_3	1	-1	6
3	x_1	1	-2	4
	f	-1	1	-4
		Δ_1	Δ_2	Q

В таблице 3.9 f-строка содержит единственную положительную оценку Δ_2. Однако выбрать разрешающую строку не удается, так как в разрешающем столбце нет положительных элементов. Отсюда делаем вывод, что исходная задача не разрешима ввиду неограниченности целевой функции снизу.