

РЕАЛИЗАЦИЯ ОПТИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХАНКЕЛЯ ДЛЯ РАДИАЛЬНО-ВИХРЕВЫХ ПУЧКОВ

Методические указания
к лабораторным работам по курсу
«Оптическая информатика»

Кириленко М.С.

Самара 2023

Содержание

Введение.....	3
Краткие теоретические сведения	4
Задание.....	8
Варианты	9

Введение

Данная лабораторная работа содержит сведения о применении преобразования Ханкеля к радиально-вихревым оптическим пучкам.

Необходимо реализовать оптическое преобразование Ханкеля стандартным методом численного интегрирования. На вход преобразования подаётся радиально-вихревой оптический пучок. На выходе должен получиться другой радиально-вихревой пучок с таким же порядком оптического вихря.

Также необходимо сравнить работу преобразования Ханкеля и быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Краткие теоретические сведения

В данной лабораторной работе изучается преобразование Ханкеля. Во время выполнения необходимо будет построить изображения результата преобразования: для этого нужно будет перевести одномерный вектор в двумерное радиально-вихревое изображение. Для начала рассмотрим радиально-симметричные функции.

Двумерная функция называется радиально-симметричной, если в полярных координатах она имеет вид $f(r, \varphi) = f(r)$, т.е. не зависит от полярного угла. При этом она может принимать комплексные значения.

Показательная форма записи комплексного числа z имеет вид:

$$z = \gamma e^{i\phi}, \quad (1)$$

где γ – модуль (соответствует амплитуде) комплексного числа, ϕ – аргумент (соответствует фазе) комплексного числа. Для функции в полярных координатах:

$$f(r, \varphi) = \gamma(r, \varphi) e^{i\phi(r, \varphi)}, \quad (2)$$

Важно не путать аргумент комплексного числа с полярным углом.

Пусть радиально-симметричная функция имеет представление в декартовых координатах: $f(r) = f(\sqrt{x^2 + y^2}) = \tilde{f}(x, y)$, причём $f(r) = 0$, если $r \geq R > 0$. Требуется изобразить данную функцию в декартовых координатах. Заметим, что поскольку функция комплекснозначная, потребуется два изображения: либо действительная и мнимая части данной функции, либо её модуль и аргумент. Остановимся на втором варианте.

На рисунке 1 изображено радиальное сечение вещественнозначной функции $f(r)$. При этом если $r > 1$, то $f(r) = 0$.

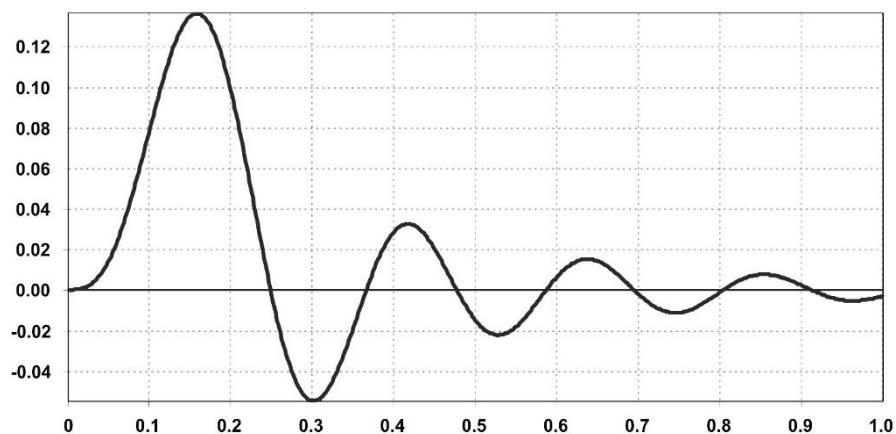


Рисунок 1 – Вещественная радиально-симметричная функция.

Все рассуждения для комплекснозначной функции будут аналогичными.

Для того чтобы восстановить двумерный вид функции, потребуется «раскрутить» сечение вокруг вертикальной оси. Изобразим «вид сверху» (рисунок 2).

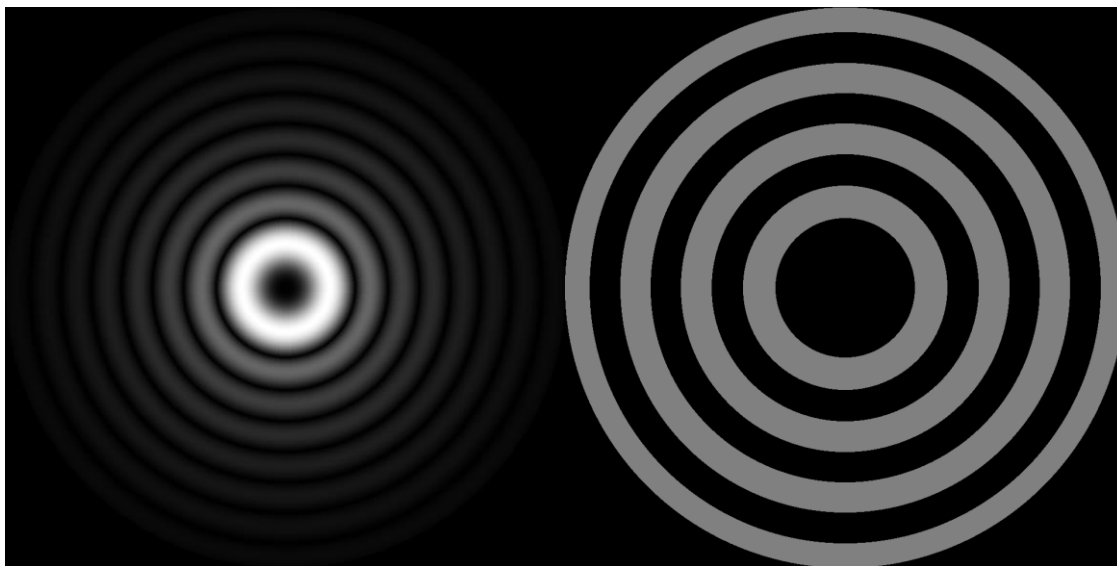


Рисунок 2 – Двумерное представление радиально-симметричной функции. Слева изображён модуль (амплитуда), справа – аргумент (фаза).

Проанализируем полученные изображения. Из рисунка 2 видно, что функция стартует из нуля и монотонно возрастает до достижения пикового значения при $r \approx 0,15$. На рисунке 3 слева видно, что в центре чёрное пятно (значение функции близко к нулю), а вокруг пятна – самое светлое белое кольцо, которое как раз и было образовано «раскруткой» пика. Затем (на рисунке 2) функция устремляется к нулю, пересекая его и образуя новые пики. При этом каждый следующий пик по модулю меньше предыдущего. Таким образом, функция образует 8 пиков, а изображение её модуля на рисунке 3 содержит 8 колец, каждое из которых соответствует определённому пику. Видно, что амплитуда каждого следующего кольца уменьшается.

Посмотрим теперь на изображение аргумента функции. Поскольку функция является действительной, её аргумент может принимать всего лишь два значения: 0, если функция принимает неотрицательные значения, и π – если отрицательные. Легко сопоставить теперь правое изображение на рисунке 2 и рисунок 1. Там, где функция проходит через ноль, изображение меняет цвет с чёрного на серый или наоборот, в зависимости от знака функции.

Рассмотрим алгоритм формирования изображений, таких, как на рисунке 2.

Мы имеем отрезок $[0, R)$ и функцию $f(r)$, заданную на нём. Произведём равномерное разбиение отрезка на n малых отрезков: $h_r = R/n$, $r_l = lh_r$, $r_0 = 0$, $r_n = R$, $l = \overline{0, n}$. Таким образом, мы получаем одномерный массив (вектор):

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(r_0) \\ f(r_1) \\ \dots \\ f(r_n) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Для создания двумерного изображения понадобится двумерный массив, размеры которого требуется найти. Очевидно, что центральный элемент массива должно занять значение $f(r_1) = f(0)$. Все остальные элементы должны расположиться вокруг него. Сверху, снизу, справа и слева от центра потребуется дополнительно по n элементов массива (рисунок 3). Таким образом, мы получаем, что двумерный массив должен иметь следующие размеры: $(2n + 1) \times (2n + 1)$. Обозначим его как $\mathbf{a}[j][k]$, $j, k = \overline{0, 2n}$.

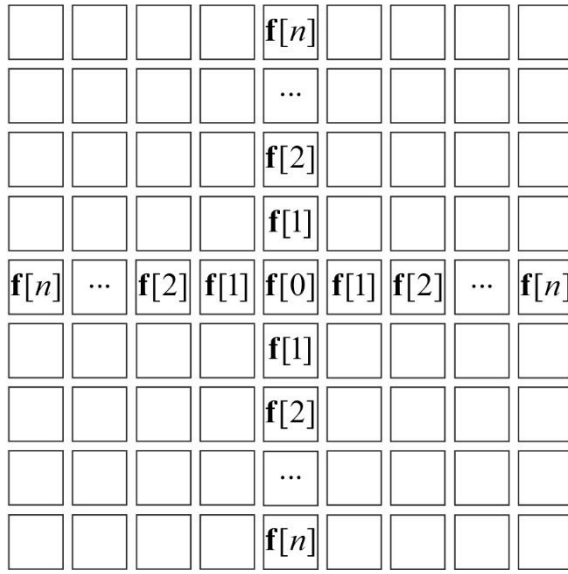


Рисунок 3 – Определение размерности двумерного массива

Определим теперь, какими значениями теперь заполнить оставшиеся ячейки массива. Пусть у нас есть координаты ячейки, заданные в индексах $[j][k]$. По этим индексам можно узнать, каким декартовым координатам они соответствуют, а именно:

$$\begin{aligned} x_j &= -R + jh_r, \\ y_k &= -R + kh_r. \end{aligned} \quad (4)$$

Заметим, что шаг дискретизации остался неизменным. В полярных координатах этим значениям соответствует:

$$r_\alpha = \sqrt{x_j^2 + y_k^2} = \sqrt{(-R + jh_r)^2 + (-R + kh_r)^2}. \quad (5)$$

Вынесем $h_r = R/n$:

$$r_\alpha = \sqrt{(j - n)^2 + (k - n)^2} \cdot h_r. \quad (6)$$

Для целых α получаем $r_\alpha = \alpha h_r$, как было определено ранее. Поэтому для нецелых α можно было бы задать индекс $\alpha = \sqrt{(j-n)^2 + (k-n)^2}$, но массивы, как правило, не поддерживают нецелые индексы, поэтому его необходимо округлить до ближайшего целого числа. Более того, если индекс получился больше, чем n , то это соответствует значению функции при $r \geq R$, т.е. нулю.

Таким образом, для нахождения двумерного массива значений функции можно сформировать такой алгоритм:

- 1) Для каждой ячейки $[j][k]$ определяем индекс α :

$$\alpha = \text{округление}(\sqrt{(j-n)^2 + (k-n)^2}).$$

- 2) Если $\alpha > n$, задаём $\mathbf{a}[j][k] = 0$.

- 3) В противном случае $\mathbf{a}[j][k] = f_\alpha = f(r_\alpha)$.

Теперь рассмотрим радиально-вихревые функции, т.е. функции вида $f(r, \varphi) = f(r)e^{im\varphi}$, где m – целое число, порядок оптического вихря. Если мы знаем число m и функцию $f(r)$, заданную в виде вектора, то получить изображение $f(r, \varphi)$ можно, воспользовавшись описанным алгоритмом, но с одним изменением: каждой ячейке нужно будет дополнительно добавить фазовый набег $m\varphi$, т.е. умножить её значение на величину $\exp(im \cdot \text{atan2}(k-n, j-n))$.

Осталось рассмотреть преобразование Ханкеля в конечных пределах, описывающее прохождение радиально-вихревого оптического пучка через линзовую систему:

$$f(r) \exp(im\varphi) \xrightarrow{\mathcal{H}} F(\rho) \exp(im\theta), \quad (7)$$

$$F(\rho) = \frac{2\pi}{im} \int_0^R f(r) J_m(2\pi r \rho) r dr, \quad (8)$$

где J_m – функция Бесселя первого рода порядка m . Стоит заметить, что преобразование применяется лишь к радиальным составляющим функции и не затрагивает вихревую.

Примечание: приведённый алгоритм рассчитан на языки программирования, у которых индексация массивов начинается с нуля. Если индексация начинается с единицы, некоторые формулы меняются: $l = \overline{1, n}$, размер матрицы становится $(2n-1) \times (2n-1)$, $j, k = \overline{1, 2n-1}$, $\alpha = \text{округление}(\sqrt{(j-n)^2 + (k-n)^2}) + 1$.

Задание

1. Выбрать входную функцию $f(r, \varphi) = f(r)e^{im\varphi}$ и число m , исходя из варианта. Построить график $f(r)$. Здесь и далее для каждого графика следует строить отдельно графики/изображения амплитуды и фазы. Входную область ограничить радиусом $R = 5$.
2. Восстановить изображение $f(r)e^{im\varphi}$ в двумерный массив и построить это изображение.
3. Реализовать преобразование Ханкеля методом численного интегрирования (например, методом левых прямоугольников). Размеры входной и выходной областей должны совпадать. Применить преобразование ко входной функции и получить выходную $F(\rho)$. Построить её график, а также восстановить двумерную функцию $F(\rho) \exp(im\theta)$ и построить её изображение.
4. Реализовать двумерное преобразование Фурье через БПФ. Применить его ко входной двумерной функции $f(r)e^{im\varphi}$. Построить изображение выходной функции, сравнить его с результатом, полученным для преобразования Ханкеля. Если изображения амплитуд сильно отличаются, попытаться увеличить число точек дискретизации.
5. Исследовать скорость выполнения двумерного БПФ и преобразования Ханкеля, варьируя число точек дискретизации. Сделать выводы.

Варианты

1	Мода Гаусса-Лагерра	$GL_{1,3}(r, \varphi)$	$m = 3$
2	Мода Бесселя	$B_{2,3}(r, \varphi)$	$m = 3$
3	Полином Цернике	$Z_4^2(r, \varphi)$	$m = 2$
4	Мода Гаусса-Лагерра	$GL_{2,-3}(r, \varphi)$	$m = -3$
5	Мода Гаусса-Лагерра	$GL_{3,-2}(r, \varphi)$	$m = -2$
6	Полином Цернике	$Z_5^{-3}(r, \varphi)$	$m = -3$
7	Кольцо	$\left(\text{circ}\left(\frac{r}{2}\right) - \text{circ}(r)\right) \exp(5i\varphi)$	$m = 5$
8	Мода Бесселя	$B_{1,-5}(r, \varphi)$	$m = -5$
9	Тонкое кольцо	$\left(\text{circ}\left(\frac{r}{2}\right) - \text{circ}\left(0.95\frac{r}{2}\right)\right) \exp(3i\varphi)$	$m = 3$
10	Полином Цернике	$Z_5^{-1}(r, \varphi)$	$m = -1$
11	Мода Гаусса-Лагерра	$ GL_{1,3}(r, \varphi) e^{-3i\varphi}$	$m = -3$
12	Мода Бесселя	$ B_{2,3}(r, \varphi) e^{2i\varphi}$	$m = 2$
13	Полином Цернике	$ Z_4^2(r, \varphi) e^{4i\varphi}$	$m = 4$
14	Мода Гаусса-Лагерра	$ GL_{2,-3}(r, \varphi) e^{2i\varphi}$	$m = 2$
15	Мода Гаусса-Лагерра	$ GL_{3,-2}(r, \varphi) e^{-3i\varphi}$	$m = -3$
16	Полином Цернике	$ Z_5^{-3}(r, \varphi) e^{2i\varphi}$	$m = 2$
17	Кольцо	$\left(\text{circ}\left(\frac{r}{2}\right) - \text{circ}(r)\right) \exp(-2i\varphi)$	$m = -2$
18	Мода Бесселя	$ B_{1,-5}(r, \varphi) e^{-3i\varphi}$	$m = -3$
19	Тонкое кольцо	$\left(\text{circ}\left(\frac{r}{2}\right) - \text{circ}\left(0.95\frac{r}{2}\right)\right) \exp(5i\varphi)$	$m = 5$
20	Полином Цернике	$ Z_5^{-1}(r, \varphi) e^{5i\varphi}$	$m = 5$

Моды Гаусса-Лагерра:

$$GL_{n,p}(r, \varphi) = \exp(-r^2/2) r^{|p|} L_n^{|p|}(r^2) \exp(ip\varphi),$$

$L_n^p(r)$ – обобщенный полином Лагерра:

$$L_n^p(r) = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_{n+p}^{n-j} \frac{r^j}{j!},$$

C_{n+s}^{n-p} – обобщённые биномиальные коэффициенты при нецелом α :

$$C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-k+1)}{k!}.$$

Моды Бесселя:

$$B_{\alpha,p}(r, \varphi) = J_{|p|}(\alpha r) \exp(ip\varphi),$$

$J_p(r)$ – функция Бесселя.

Полиномы Цернике:

$$Z_n^p(r, \varphi) = R_n^{|p|}(r) e^{ip\varphi},$$

$R_n^p(r)$ – радиальные полиномы Цернике:

$$R_n^p(r) = \sum_{k=0}^{(n-p)/2} \frac{(-1)^k (n-k)!}{k! \left(\frac{n+p}{2} - k\right)! \left(\frac{n-p}{2} - k\right)!} r^{n-2k}.$$

В вариантах, где присутствует модуль функции, не следует считать модуль программными средствами – достаточно отбросить вихревую часть $e^{ip\varphi}$.