ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В КОНЕЧНЫХ ПРЕДЕЛАХ

Методические указания

к лабораторным работам по курсу

«Оптическая информатика»

Кириленко М.С.

Самара 2022

Содержание

Введение

Данная лабораторная предназначена для студентов четвёртого курса специальности «Прикладная математика и информатика». Работа предполагает наличие знаний, полученных на предыдущих курсах специальности, однако многие вещи разъясняются практически с базового уровня.

В работе рассматриваются интегральные преобразования в конечных пределах. Ядро интегрального преобразования может быть как действительным, так и комплексным. Сигнал, над которым осуществляется преобразование, является комплекснозначной функцией действительного аргумента. Это справедливо и для выходного сигнала.

Задания данной работы подготавливают студентов к следующей лабораторной работе, посвящённой важному в дифракционной оптике оператору, известному как преобразование Фурье.

Некоторые варианты включают в себя специальные функции, такие как функции Бесселя, полиномы Эрмита и Лагерра, активно использующиеся в приложениях оптики.

Краткие теоретические сведения

Интегральное преобразование

Пусть имеется некоторая комплексная функция действительного аргумента $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$. Рассмотрим следующий линейный оператор *T*:

$$F(\xi)=T\left[f(x)\right](\xi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(\xi,x)f(x)dx, \tag{1}$$

где $F(\xi)$ – результат, получившийся после действия оператора. Данное преобразование является интегральным. Функция $K(\xi,x)$ называется ядром интегрального преобразования (не следует путать с ядром оператора $\ker T$).

Не всегда преобразования определяются в бесконечных пределах. Некоторые преобразования (например, преобразование Ханкеля) предусматривают интегрирование по полупрямой, а некоторые – только на конечной области. Более того, любую бесконечную область можно ограничить, получив новый интегральный оператор. Будем называть интегральным преобразованием в конечных пределах следующий оператор:

$$F(\xi)=T\left[f(x)\right](\xi)=\int\limits_{a}^{b}K(\xi,x)f(x)dx, \tag{2}$$

где $a<b$.

Численное интегрирование

Рассмотрим, как осуществляется численная реализация интегральных преобразований от простого к сложному.

Предположим, что требуется численно найти значение интеграла:

$$\int\limits_{a}^{b}f(x)dx, \tag{3}$$

где $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – некоторая непрерывная на отрезке $[a,b]$ действительная функция. Тогда её интеграл может быть найден численно. Далее будет рассмотрен наиболее простой метод численного интегрирования – метод левых прямоугольников.

Разобьём (т.е. проведём дискретизацию) отрезок интегрирования на n равных отрезков $(x_k,x_{k+1}), k=\overline{0,n-1}$. Заметим, что $a=x_0$ и $b=x_n$. Обозначим длину каждого такого отрезка через $h_x=x_{k+1}-x_k=(b-a)/n$ (шаг разбиения), тогда $x_k=a+kh_x$. Значения интегрируемой функции в точках разбиения обозначим $f_k=f(x_k)$.

Воспользовавшись свойством аддитивности интеграла, получаем представление для выражения (3):

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx. \qquad (4)$$

Значение интеграла на отрезке (x_k, x_{k+1}) приблизительно равно значению площади прямоугольника $S_k = f_k(x_{k+1} - x_k) = f_k h_x$ (рисунок 1).

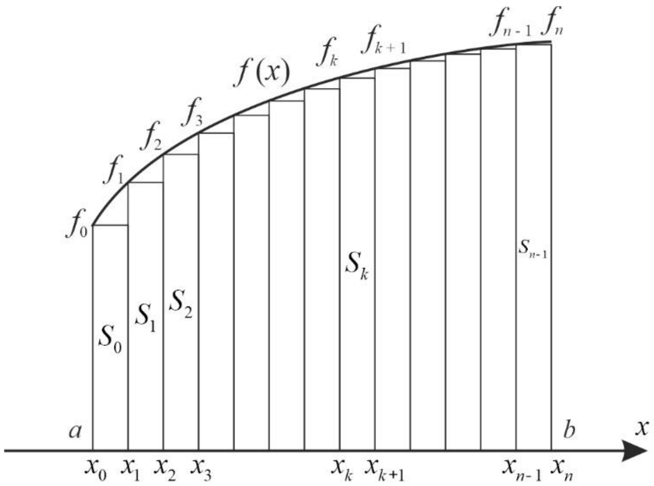

Рисунок 1 – Геометрическая интерпретация численного интегрирования.

Тогда, в соответствии с (4), значение интеграла (3) приближённо равно:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} f_k \cdot h_x. \qquad (5)$$

Формула (7) остаётся справедливой и для комплекснозначных функций вещественной переменной, т.е. функций вида $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, что позволяет применять метод для расчёта интегральных преобразований в конечных пределах. Перепишем формулу (2) в соответствии с приближением:

$$F(\xi) = \int_a^b K(\xi, x) f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} K(\xi, x_k) f_k \cdot h_x, \qquad (6)$$

где n – количество интервалов разбиения, $h_x = (b-a)/n$, $x_k = a + kh_x$, $f_k = f(x_k)$, $k = \overline{0, n}$. Формула (6) позволяет вычислить приближённое значение $F(\xi)$ интегрального преобразования (2) в каждой выбранной точке ξ. Для того чтобы получить вид функции $F(\xi)$ на некотором отрезке $[p, q]$, необходимо вычислить преобразования для всех точек данного отрезка. Мы можем лишь пробежаться по конечному множеству точек, поэтому определим разбиение и для отрезка $[p, q]$.

Пусть m – количество интервалов разбиения, $h_\xi = (q-p)/m$, $\xi_l = p + lh_\xi$, $l = \overline{0, m}$. Легко убедиться, что $\xi_0 = p$, $\xi_m = q$. Значения преобразования $F(\xi_l)$ в точке ξ_l приближённо равно:

$$F(\xi_l) \approx \sum_{k=0}^{n-1} K(\xi_l, x_k)\, f_k \cdot h_x,\ l = \overline{0, m}. \tag{7}$$

Обозначим через F_l значение выражения справа в (7):

$$F_l = \sum_{k=0}^{n-1} K(\xi_l, x_k)\, f_k \cdot h_x,\ l = \overline{0, m}. \tag{8}$$

Важно помнить, что $F_l \neq F(\xi_l)$. Выражение (8) может быть легко преобразовано в матричную форму. Введём следующие обозначения:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \dots \\ F_m \end{pmatrix},\ \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix},\ \mathbf{A} = \left(K(\xi_l, x_k)\right)_{l=0,k=0}^{m,n}. \tag{9}$$

Тогда формула (8) может быть переписана в виде:

$$\mathbf{F} = \mathbf{Af} \cdot h_x. \tag{10}$$

Примечание: выражение (8) содержит в себе сумму до элемента с номером $n-1$, в то время как формула (10) просуммирует все $n+1$ элементов. Иными словами, мы получим другой результат. При больших n разница будет незначительной.

Требования к выполнению лабораторной работы

- Выбрать в качестве входного сигнала $f(x)=\exp(i\beta x)$, где $\beta=1/10$.
- Построить график исходного оптического сигнала (здесь и далее: подразумевается, что строить нужно амплитуду и фазу на отдельных изображениях). Изменяя параметр β (задавая его как большим, так и близким к нулю, а также рассматривая отрицательные значения), сделать вывод о том, как он влияет на график исходной функции. Привести несколько графиков для подкрепления выводов. После этого вернуть параметр β в начальное значение. Число n можно задать равным 1000.
- В соответствии с вариантом (таблица 1) реализовать численный расчёт интегрального преобразования над одномерным сигналом по формулам (7) или (10), везде α принять равным 1. Число m можно также задать равным 1000.
- Построить график результата преобразования.
- Изменяя параметры выходной области $[p,q],\, p<q$, сделать выводы о том, как они влияют на график результата преобразования. После этого вернуть параметры в начальное значение.
- Варьируя параметр $\alpha>0$ (по аналогии с β, но рассматривая только положительные значения) исследовать, как меняется результат преобразования. После этого вернуть параметр α в начальное значение. Важно: для того, чтобы сделать вывод, может понадобиться изменить размеры выходной области $[p,q]$.
- Варьируя параметр $c>0$ и, следовательно, изменяя область интегрирования, исследовать, как меняются график исходной функции и результат преобразования. После этого вернуть параметр c в начальное значение. Важно: для того, чтобы сделать вывод, может понадобиться изменить размеры выходной области $[p,q]$.
- Собрать все выводы в таблицу 2. Важно: в разных вариантах параметры могут влиять совершенно разным образом на выходную функцию. Выводы должны быть содержательными. Пример: «При увеличении параметра α амплитуда $F(\xi)$ сжимается по оси абсцисс, становится больше локальных максимумов, при этом каждый следующий меньше предыдущего. Фаза преобразования практически не изменяется».
- Прикрепить код программы к отчёту.

Таблица 1. Варианты выполнения задания.

№	Ядро $K(\xi,x)$	Параметры
1	$\exp\left(-\alpha(x-\xi)^2\right)$	$[a,b]=[-c,c], c=5$ $[p,q]=[-25,25]$
2	$\exp\left(-\alpha\lvert x-\xi\rvert\right)$	$[a,b]=[-c,c], c=5$ $[p,q]=[-10,10]$
3	$\exp\left(-\alpha\lvert x+i\xi\rvert\right)$	$[a,b]=[-c,c], c=5$ $[p,q]=[-5,5]$
4	$\exp(-\alpha\xi x)$	$[a,b]=[0,c], c=5$ $[p,q]=[0,5]$

№	Ядро $K(\xi, x)$	Параметры
5	$x^{\alpha\xi-1}$	$[a,b]=[1,c], c=5$ $[p,q]=[0,3]$
6	$J_0(\alpha\xi x)x$	$[a,b]=[0,c], c=5$ $[p,q]=[0,5]$
7	$J_1(\alpha\xi x)x$	$[a,b]=[0,c], c=5$ $[p,q]=[0,5]$
8	$J_2(\alpha\xi x)x$	$[a,b]=[0,c], c=5$ $[p,q]=[0,5]$
9	$\exp(-\alpha x^2\xi^2)H_4(x\xi)$	$[a,b]=[-c,c], c=3$ $[p,q]=[-3,3]$
10	$\exp(-x^2\xi^2)H_5(\alpha x\xi)$	$[a,b]=[-c,c], c=3$ $[p,q]=[-3,3]$
11	$\exp(-\alpha x\xi)L_3(x\xi)$	$[a,b]=[-c,c], c=3$ $[p,q]=[-3,3]$
12	$i\exp\left(-\alpha(x-\xi)^2\right)$	$[a,b]=[-c,c], c=5$ $[p,q]=[-25,25]$
13	$i\exp\left(-\alpha\lvert x-\xi\rvert\right)$	$[a,b]=[-c,c], c=5$ $[p,q]=[-10,10]$
14	$i\exp\left(-\alpha\lvert x+i\xi\rvert\right)$	$[a,b]=[-c,c], c=5$ $[p,q]=[-5,5]$
15	$i\exp(-\alpha\xi x)$	$[a,b]=[0,c], c=5$ $[p,q]=[0,5]$
16	$ix^{\alpha\xi-1}$	$[a,b]=[1,c], c=5$ $[p,q]=[0,3]$
17	$iJ_0(\alpha\xi x)x$	$[a,b]=[0,c], c=5$ $[p,q]=[0,5]$
18	$iJ_1(\alpha\xi x)x$	$[a,b]=[0,c], c=5$ $[p,q]=[0,5]$
19	$iJ_2(\alpha\xi x)x$	$[a,b]=[0,c], c=5$ $[p,q]=[0,5]$
20	$i\exp(-\alpha x^2\xi^2)H_4(x\xi)$	$[a,b]=[-c,c], c=3$ $[p,q]=[-3,3]$
21	$i\exp(-x^2\xi^2)H_5(\alpha x\xi)$	$[a,b]=[-c,c], c=3$ $[p,q]=[-3,3]$
22	$i\exp(-\alpha x\xi)L_3(x\xi)$	$[a,b]=[-c,c], c=3$ $[p,q]=[-3,3]$

В таблице 1 используются такие специальные функции, как функции Бесселя первого рода $J_v(x)$, полиномы Эрмита $H_v(x)$ и полиномы Лагерра $L_v(x)$.

Таблица 2. Влияние параметров на графики входной функции и результат преобразования.

Параметр β в исходной функции	
Выходная область $[p, q]$	
Параметр α в ядре оператора	
Параметр c во входной области $[a, b]$	

Литература

1. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа, том I. – М.: Наука, 1968. – 440с.
2. Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. – М.: Наука, 1980. – 309с.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
4. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учебное пособие для вузов. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
5. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа: Учебное пособие. – СПб.: Лань, 2009. 272 с.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 2004. – 798 с.
7. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. – М.: Лань, 2010. 368 с.
8. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. – 524 с.