

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ОПТИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ НА ОСНОВЕ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Методические указания
к лабораторным работам по курсу
«Оптическая информатика»

Кириленко М.С.

Самара 2023

Содержание

Содержание	2
Введение	3
Краткие теоретические сведения	4
Задание.....	7

Введение

Данная лабораторная работа содержит сведения о применении быстрого преобразования Фурье (БПФ) и его адаптации для оптических систем.

Необходимо реализовать оптическое преобразование Фурье, используя алгоритм БПФ и стандартные методы численного интегрирования, сравнить результаты и убедиться, что они совпадают.

Также необходимо изучить некоторые свойства преобразования Фурье с помощью аналитических выводов и численного моделирования.

Краткие теоретические сведения

Рассматривается оптическая система, изображённая на рисунке 1.

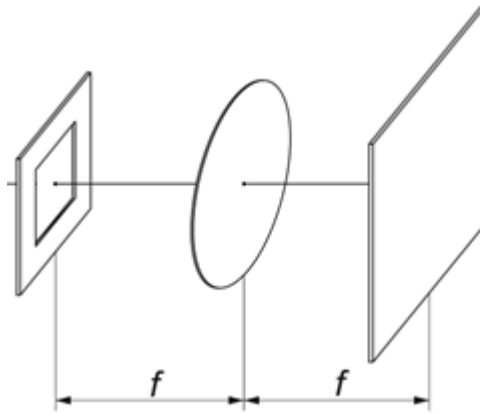


Рисунок 1 – Схема оптической системы

Будем считать, что на вход системе падает плоская волна, тождественно равная единице. Квадратная апертура ограничивает входной пучок, так что мы считаем его равным нулю за пределами апертуры. В отверстии апертуры находится дифракционный оптический элемент (ДОЭ). Линза расположена между апертурой и экраном на фокусном расстоянии от них.

Для упрощения будем рассматривать только те случаи, когда $\lambda f = 1$, где λ – длина волны, f – фокусное расстояние линзы. Тогда оператор распространения запишется в виде преобразования Фурье в конечных пределах (или финитного преобразования Фурье):

$$F_a(u, v) = \mathcal{F}_a[f(x, y)](u, v) = \iint_{[-a; a]^2} f(x, y) e^{-2\pi i(ux + vy)} dx dy, \quad (1)$$

где $f(x, y)$ – финитная функция ($\text{supp } f \subseteq [-a; a]^2$), задающая вид оптического распределения после прохождения ДОЭ, $[-a; a]^2$ – квадратная область внутри апертуры, $F_a(u, v)$ – спектр, \mathcal{F}_a – оператор преобразования Фурье в конечных пределах.

Обычное преобразование Фурье отличается от финитного лишь тем, что интегрирование в последнем случае осуществляется по конечной области.

Так как входное распределение перед апертурой равно единице, а при прохождении через ДОЭ эффекты дифракции упрощаются до обыкновенного умножения, то входное распределение $f(x, y)$ будет совпадать с функцией пропускания ДОЭ.

Важно: мы считаем толщину апертуры и ДОЭ в приближении бесконечно малой величиной.

Прежде чем приступать к двумерной задаче (т.к. функции зависят от двух переменных), рассмотрим более простую – одномерную:

$$F_a(u) = \mathcal{F}_a[f(x)](u) = \int_{-a}^a f(x) e^{-2\pi i u x} dx. \quad (2)$$

Для расчёта такого преобразования можно воспользоваться алгоритмом быстрого преобразования Фурье (БПФ). Он не рассматривается в данном пособии, поэтому можно

использовать готовую реализацию. Однако, при реализации финитного преобразования Фурье по формуле (2) через БПФ следует учитывать нижеописанные замечания.

Предположим, что после дискретизации функции $f(x)$ получается вектор \mathbf{f} размерности N :

$$\mathbf{f} = (f_0 \quad f_1 \quad \dots \quad f_{N-1})^T \quad (3)$$

где T – символ транспонирования. Здесь и далее подразумевается, что количество отсчётов чётно.

Классически дискретное преобразование Фурье записывается для периодических функций в виде:

$$\mathbf{F} = \left(\sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} \right)_{k=0,1,\dots,N-1}, \quad (4)$$

где \mathbf{F} – спектр дискретного преобразования Фурье. Формула (4) аппроксимирует следующий интеграл:

$$\int_0^{2a} f(x) e^{-2\pi i u x} dx. \quad (5)$$

Иными словами, классическое преобразование Фурье подразумевает, что пределы интегрирования начинаются с нуля, в то время как наше преобразование Фурье центрировано.

Если продолжить функцию $f(x)$ с периодом $2a$ на всю числовую прямую, то для того чтобы дискретное преобразование (4) аппроксимировало интеграл (2), а не (5), необходимо поменять местами первую и вторую половины компонентов вектора (3).

Замечание: классическое прямое преобразование Фурье (4) не учитывает шаг дискретизации h_x , поэтому после применения операции БПФ необходимо умножить результат на h_x .

Примечание: в языках, где индексирование начинается с единицы, в реализации БПФ, как правило, суммирование тоже начинается с единицы и заканчивается N . Все остальные рассуждения и выводы для них остаются без изменений.

После выполнения БПФ мы получаем вектор значений, но он будет определён для функции, заданной на промежутке $[0; 2b]$, где b предстоит определить. Поскольку нас интересует центрированная система, необходимо снова поменять местами первую и вторую половины компонентов полученного вектора, получив итоговый вектор \mathbf{F} . Тогда область задания функции $F_a(u)$ изменится на $[-b; b]$.

При использовании БПФ будет выполняться соотношение: $h_x h_u = 1/N$, где h_u – шаг дискретизации по оси u . Отсюда видно, что:

$$b = N/4a. \quad (6)$$

Из формулы (6) следует: чем больше точек дискретизации взять, тем больше будет область задания функции $F_a(u)$. При малых N аппроксимация будет плохой, а при больших N

промежуток $[-b; b]$ может быть настолько большим, что важных деталей функции мы просто не увидим.

В этом случае поступают следующим образом: исходный вектор \mathbf{f} и слева, и справа дополняют одинаковым количеством нулей, зачастую много большим, чем N . Будем считать, что после дополнения нулями вектор стал иметь размерность M . После выполнения алгоритма \mathbf{F} будет также иметь размерность M , а функция $F_a(u)$ по-прежнему определена на промежутке $[-b; b]$.

Если же теперь «вырезать» центральную часть вектора \mathbf{F} , оставив N элементов, то область задания функции $F_a(u)$ станет равной $[-\tilde{b}; \tilde{b}]$, где

$$\tilde{b} = N^2/4aM. \quad (7)$$

Таким образом, мы получаем алгоритм реализации оптического преобразования Фурье в конечных пределах через использование БПФ:

1. Провести дискретизацию входной функции $f(x)$ в вектор \mathbf{f} с размерностью N .
2. Дополнить вектор \mathbf{f} и слева, и справа необходимым числом нулей до размерности M .
3. Разбить вектор \mathbf{f} на две половины и поменять их местами.
4. Выполнить БПФ от \mathbf{f} и умножить результат на шаг h_x , получив вектор \mathbf{F} .
5. Разбить вектор \mathbf{F} на две половины и поменять их местами.
6. «Вырезать» центральную часть вектора \mathbf{F} , оставив центральные N элементов.
7. Пересчитать область задания функции $F_a(u)$ по формуле (7).

Если область $[-\tilde{b}; \tilde{b}]$ оказалась слишком большой (полезная часть спектра плохо видна) или слишком маленькой (спектр не уместается), можно соответственно изменить число дополняемых нулей на шаге 2.

Замечание: некоторые реализации БПФ не требуют, чтобы число M было целой степенью двойки, а сами добавляют дополнительные нули, нарушая симметрию. Это может привести к появлению в результатах расчёта неправильного фазового набега. Так что **необходимо удостовериться**, что число M является степенью двойки.

Вернёмся теперь к формуле (1). Поскольку в формуле имеется двумерная входная функция и двумерное преобразование Фурье, то после дискретизации функций мы будем получать матрицу \mathbf{f} . Алгоритм нахождения преобразования Фурье от неё можно свести к одномерному случаю: необходимо применить вышеописанный алгоритм к каждой строке этой матрицы, получив новую матрицу, а затем применить его к каждому столбцу полученной матрицы.

Примечание: седьмой шаг, нахождение области задания $F_a(u, v)$, следует выполнить только один раз.

Задание

1. Реализовать одномерное финитное преобразование Фурье с помощью применения алгоритма БПФ.
2. Построить график гауссова пучка e^{-x^2} . Здесь и далее для каждого графика следует строить отдельно графики амплитуды и фазы.
3. Убедиться в правильности реализации преобразования, подав на вход гауссов пучок e^{-x^2} – собственную функцию преобразования Фурье. На выходе тоже должен получиться гауссов пучок (построить график на правильной области определения $[-\tilde{b}, \tilde{b}]$). Рекомендуемая входная область: $[-a, a] = [-5, 5]$.
4. Реализовать финитное преобразование Фурье стандартным методом численного интегрирования (например, методом прямоугольников). Важно: необходимо вычислить интеграл для каждого дискретного значения u , чтобы получить результат в виде вектора. На вход преобразования вновь следует подавать гауссов пучок.
5. Построить результаты двух разных реализаций преобразования на одном изображении (одно для амплитуды, одно для фазы) и убедиться, что они совпадают.
6. Используя первую реализацию преобразования, подать на вход световое поле, отличное от гауссова пучка, в соответствии со своим вариантом (таблица 1). Построить графики самого пучка и результата преобразования.
7. Рассчитать аналитически результат преобразования своего варианта поля и построить график на одной системе координат с результатом, полученным в предыдущем пункте. Аналитический расчёт должен быть помещён в отчёт. Прикрепление в отчёт фотографии или скана вывода формулы не является допустимым. В некоторых вариантах после преобразования могут появиться особые точки. Значения в них нужно вычислять отдельно, в том числе в коде программы.
8. Исследовать параметры N и M алгоритма БПФ. Для этого сначала необходимо варьировать N , задавая при этом $M = N$. Что происходит при увеличении и уменьшении N ? После этого следует зафиксировать N и изменять $M > N$. Что происходит при увеличении M ? Выводы следует поместить в таблицу 2. Подкрепить выводы графиками. Важно: число M должно оставаться степенью двойки, чтобы график фазы содержал минимальное число ошибок.
9. Выполнить пункты 1-3 и 6 для двумерного случая. Графики изменятся на двумерные изображения, одномерные функции следует заменить на двумерные, равные произведению соответствующих одномерных функций. Например, гауссов пучок поменяется на $e^{-x^2-y^2}$. Изображение следует строить не в виде 3D-графиков, а в виде цветовой схемы (см. примеры двумерных пучков в лекциях). Рассчитать аналитически результат двумерного преобразования и нарисовать изображения его амплитуды и фазы. Двумерное преобразование следует реализовывать по предложенному выше алгоритму, а именно: применить одномерный алгоритм к строкам и столбцам матрицы. Если реализовывать алгоритм через двумерное БПФ, то добавление огромного числа нулей к матрице не будет оптимальным, сведёт на нет все преимущества БПФ, а потому будет поводом для снижения оценки за работу.

Таблица 1. Варианты заданий.

№	Входное поле	Примечание
1	$\text{sinc}(\pi x)$	Для аналитики применить не финитное преобразование. Использовать значения интегрального синуса, либо другие свойства преобразования Фурье. Использовать определение ненормированной sinc-функции.
2	$1/(1 + x^2)$	Для аналитики применить не финитное преобразование. Использовать лемму Жордана и теорему о вычетах.
3	$\exp(2\pi i x) + \exp(-5\pi i x)$	Для аналитики применить финитное преобразование.
4	$\text{rect}(x/4)$	Для аналитики применить не финитное преобразование.
5	$x^3 \exp(-x^2)$	Для аналитики применить не финитное преобразование. Использовать свойства преобразования Фурье.
6	$(4x^2 - 2)\exp(-x^2/2)$	Для аналитики применить не финитное преобразование.
7	x^2	Для аналитики применить финитное преобразование. Использовать свойства преобразования Фурье.
8	$\sin(3\pi x)$	Для аналитики применить финитное преобразование. Использовать свойства преобразования Фурье.
9	$\text{rect}((x - 1)/4)$	Для аналитики применить не финитное преобразование.
10	$\exp(2ix^3)$	Для аналитики применить не финитное преобразование. Использовать понятие функции Эйри или луча Эйри и свойства преобразования Фурье.
11	$\text{tri}(x)$	Для аналитики применить не финитное преобразование. Использовать свойство свёртки. См. треугольную функцию.
12	$\exp(- x)$	Для аналитики применить не финитное преобразование.
13	$\text{sinc}(x)$	Для аналитики применить не финитное преобразование. Использовать значения интегрального синуса, либо другие свойства преобразования Фурье. Использовать определение ненормированной sinc-функции.
14	$1/(4 + x^2)$	Для аналитики применить не финитное преобразование. Использовать лемму Жордана и теорему о вычетах.
15	$\exp(-\pi i x) + \exp(3\pi i x)$	Для аналитики применить финитное преобразование.
16	$2i \cdot \text{rect}(x/3)$	Для аналитики применить не финитное преобразование.

№	Входное поле	Примечание
17	$x^2 \exp(-x^2)$	Для аналитики применить не финитное преобразование. Использовать свойства преобразования Фурье.
18	$2x \cdot \exp(-x^2/2)$	Для аналитики применить не финитное преобразование.
19	x	Для аналитики применить финитное преобразование. Использовать свойства преобразования Фурье.
20	$\sin(4\pi x)$	Для аналитики применить финитное преобразование. Использовать свойства преобразования Фурье.
21	$\text{rect}((x + 2)/2)$	Для аналитики применить не финитное преобразование.
22	$\exp(ix^3)$	Для аналитики применить не финитное преобразование. Использовать понятие функции Эйри или луча Эйри и свойства преобразования Фурье.
23	$\text{tri}(x/2)$	Для аналитики применить не финитное преобразование. Использовать свойство свёртки. См. треугольную функцию.
24	$\exp(- x /2)$	Для аналитики применить не финитное преобразование.

Таблица 2. Влияние параметров на график результата преобразования.

N	
M	