Введём обозначения:  
FFT (Fast Fourier Transform) – Быстрое преобразование Фурье  
DFT (Discrete Fourier Transform) – Дискретное преобразование Фурье  
FT (Fourier Transform) – Преобразование Фурье

1. Реализовал преобразование через встроенную в Octave функцию FFT: fft(x). Исходный код преобразования представлен в Приложении А в функции FFT.

2. График Гауссова пучка представлен на рисунке 1.

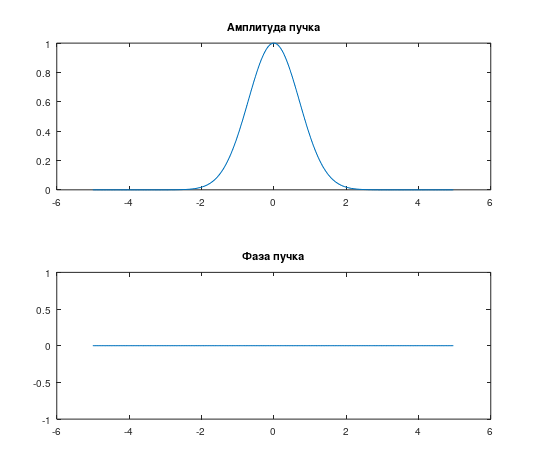


Рисунок 1 – Гауссов пучок

3. Убедился, что если найти FFT от Гауссова пучка , то получится он же, ведь Гауссов пучок является собственной функцией преобразования Фурье. График результата преобразования Гауссова пучка при представлен на рисунке 2.

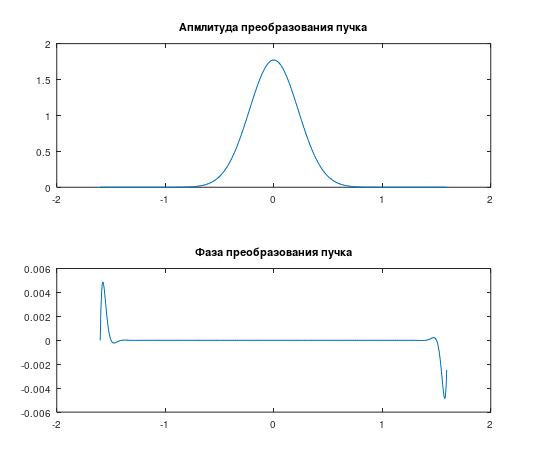


Рисунок 2 – Результат FFT от Гауссова пучка

4. Реализацию дискретного FT можно посмотреть в приложении А.

5. Сравнение результатов алгоритмов на основе FFT и DFT показано на рисунке 3. На вход подавался Гауссов пучок.

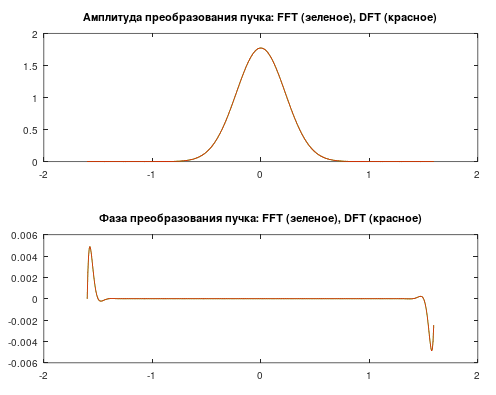


Рисунок 3 – Графики преобразований от Гауссова пучка (зеленый – через FFT, красный – через DFT)

6. Исходный график и результат FFT от светового поля на рисунке 4.

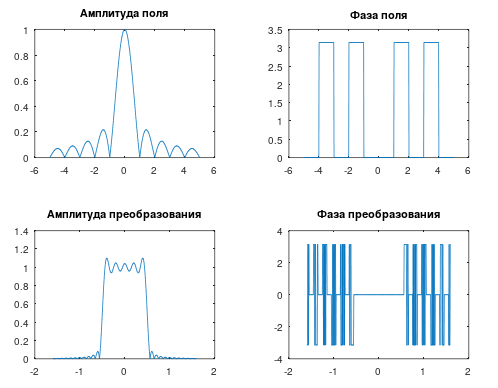


Рисунок 4 – Световое поле и FFT от светового поля

7. Аналитический расчет FT от заданного светового поля (одномерный случай):

По <https://en.wikipedia.org/wiki/Sinc_function> . На рисунке 5 изображено свойство, которое я применил.

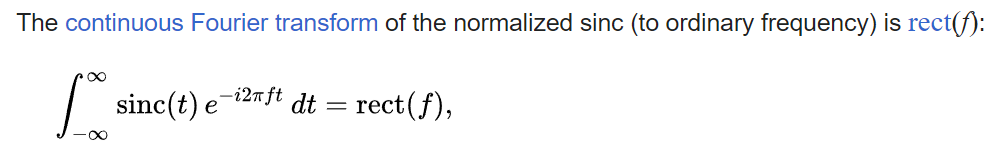


Рисунок 5 – Свойство FT от нормированной функции sinc

Получаем

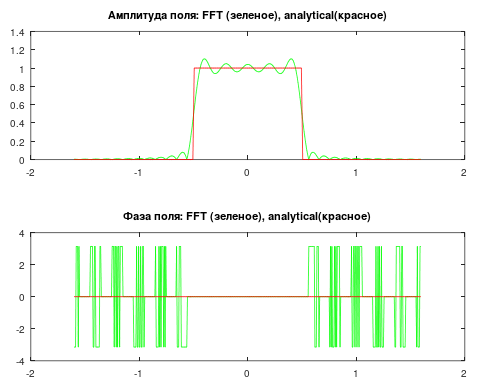


Рисунок 6 – Наложение графиков поля через FFT (зеленый) и аналитический расчет FT (красный)

8. Зафиксируем относительно и будем варьировать , учитывая

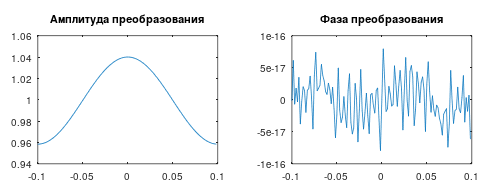


Рисунок 7 – График преобразования при

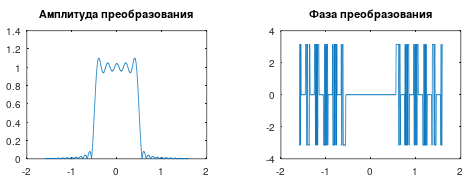


Рисунок 8 – График преобразования при

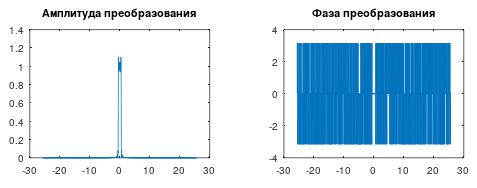


Рисунок 9 – График преобразования при

Зафиксируем относительно и будем варьировать , учитывая :

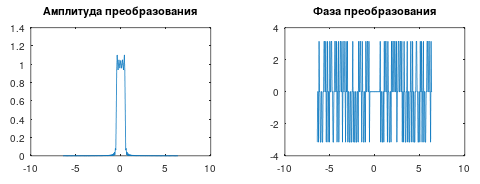


Рисунок 10 – График преобразования при

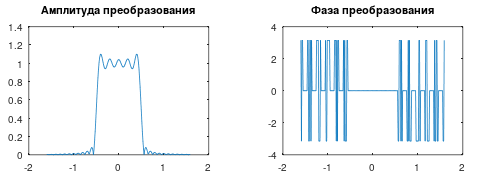


Рисунок 11 – График преобразования при

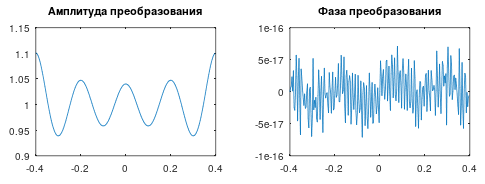


Рисунок 12 – График преобразования при

Проведём эксперименты для :

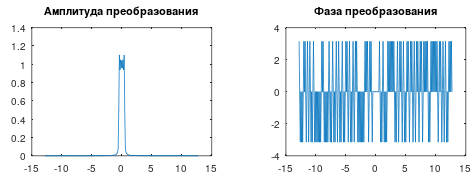


Рисунок 13 – График преобразования при

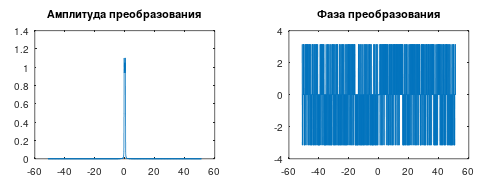


Рисунок 14 – График преобразования при

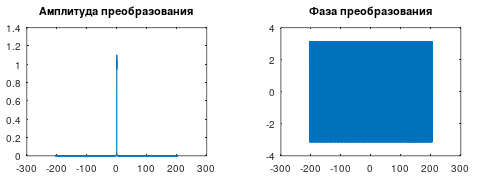


Рисунок 15 – График преобразования при

Таблица 1 – Влияние параметров на график преобразования

|  |  |
| --- | --- |
| *N* | С уменьшением / увеличением параметра N уменьшается / увеличивается выходная область преобразования, добавляются новые максимумы и минимумы |
| *M* | При росте параметра M наблюдается уменьшение выходной области преобразования, становятся видны мелкие детали графика |

9. Шаги для двумерного варианта (1-3 и 6):

9.1. Двумерное FT на основе FFT реализовано функцией FFT\_2d. Реализацию можно увидеть в приложении А.

9.2. Двумерный график Гауссова пучка на рисунке 16.

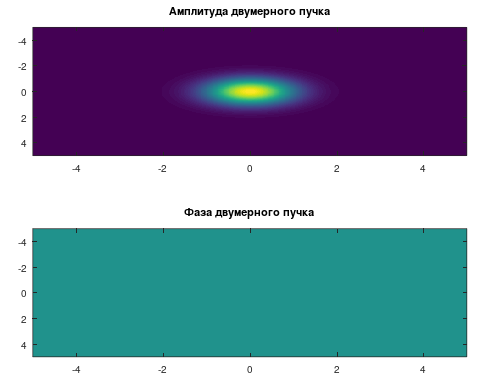


Рисунок 16 – Двумерный Гауссов пучок

9.3. Результат двумерного преобразования на основе FFT для Гауссова пучка на рисунке 17.

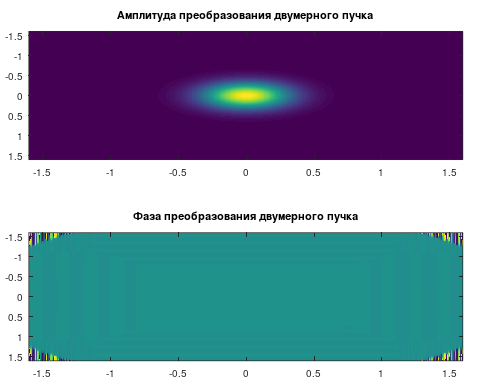


Рисунок 17 – FFT на гауссовом пучке

9.4. Световое поле для двумерного случая:

График результата преобразования представлен на рисунке 18.

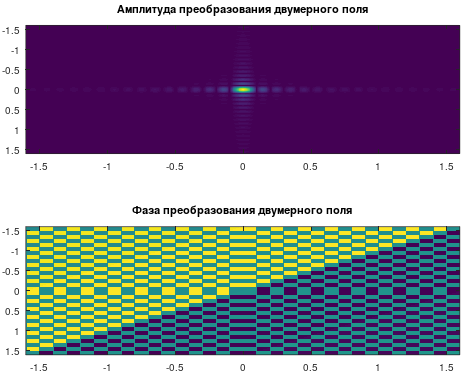


Рисунок 18 – График результата преобразования.

**ПРИЛОЖЕНИЕ А**

**Исходные команды Octave**

clear all

close all

# Одномерное FT

function half\_swaped = vector\_half\_swap(b)

len\_b = length(b); half\_swaped = zeros(size(b));

half\_swaped(1 : len\_b/2) = b(len\_b/2 + 1 : end);

half\_swaped(len\_b/2 + 1 : end) = b(1 : len\_b/2);

endfunction

function F = FFT(f, N, M)

zeros\_v = zeros(1, M/2 - N/2);

\_f = vector\_half\_swap([zeros\_v, f, zeros\_v]);

F = vector\_half\_swap(fft(\_f))(M/2 - N/2 + 1: M/2 + N/2);

endfunction

N = pow2(9); # pow2(9);

M = pow2(13); # pow2(13);

a = 5;

b = N \* N / (4 \* a \* M);

h\_x = (2 \* a) / N;

x = -a:h\_x:(a - h\_x/2);

h\_u = 2 \* b / N;

u = -b:h\_u:(b - h\_u/2);

gaussian\_beam = exp(-x .\* x);

# Строим Гауссовский пучок

figure(1);

subplot(2, 1, 1); plot(x, abs(gaussian\_beam)); title("Амплитуда пучка");

subplot(2, 1, 2); plot(x, arg(gaussian\_beam)); title("Фаза пучка");

# Получаем FFT от Гауссовского пучка

gaussian\_fft = FFT(gaussian\_beam, N, M) \* h\_x;

# Убеждаемся, что gaussian\_fft == gaussian\_beam, так как e^(-x^2) является

# собственной функцией преобразования Фурье

figure(2);

subplot(2, 1, 1); plot(u, abs(gaussian\_fft)); title("Апмлитуда преобразования пучка");

subplot(2, 1, 2); plot(u, arg(gaussian\_fft)); title("Фаза преобразования пучка");

# Получаем DFT от Гауссова пучка

[X, U] = meshgrid(x, u);

gaussian\_dft = exp(-2 \* pi \* 1i \* X .\* U) \* gaussian\_beam.' \* h\_x;

figure(3);

subplot(2, 1, 1); plot(u, abs(gaussian\_fft), "g", u, abs(gaussian\_dft), "r");

title("Амплитуда преобразования пучка: FFT (зеленое), DFT (красное)");

subplot(2, 1, 2); plot(u, arg(gaussian\_fft), "g", u, arg(gaussian\_dft), "r");

title("Фаза преобразования пучка: FFT (зеленое), DFT (красное)");

f = sinc(x)

F = FFT(f, N, M) \* h\_x;

figure(4);

subplot(2, 2, 1); plot(x, abs(f)); title("Амплитуда поля");

subplot(2, 2, 2); plot(x, arg(f)); title("Фаза поля");

subplot(2, 2, 3); plot(u, abs(F)); title("Амплитуда преобразования");

subplot(2, 2, 4); plot(u, arg(F)); title("Фаза преобразования");

# F\_analytical = ((1 + 16 \* pi \* pi \* u .\* u) / 4) .^ (-1);

function y = rect(x)

y = (abs(x) < 0.5) + (abs(x) == 0.5) \* 0.5;

end

# F\_analytical = rect(x \* pi) / pi

F\_analytical = rect(u)

figure(5);

subplot(2, 1, 1); plot(u, abs(F), "g", u, abs(F\_analytical), "r");

title("Амплитуда поля: FFT (зеленое), analytical(красное)");

subplot(2, 1, 2); plot(u, arg(F), "g", u, arg(F\_analytical), "r");

title("Фаза поля: FFT (зеленое), analytical(красное)");

# Двумерное FT

function F = FFT\_2d(f, N, M, h\_u, h\_v)

F = zeros(N, N);

for i = 1:N

F(i, :) = FFT(f(i, :), N, M) \* h\_u;

endfor

F = F.';

for j = 1:N

F(j, :) = FFT(F(j,:), N, M) \* h\_v;

endfor

F = F.';

endfunction

N\_2d = pow2(9);

M\_2d = pow2(13);

a\_2d = 5; b\_2d = N\_2d \* N\_2d / (4 \* a\_2d \* M\_2d);

h\_x\_2d = 2 \* a\_2d / N\_2d; x\_2d = -a\_2d:h\_x\_2d:(a\_2d - h\_x\_2d / 2);

y\_x\_2d = 2 \* a\_2d / N\_2d; y\_2d = -a\_2d:y\_x\_2d:(a\_2d - y\_x\_2d / 2);

[X\_2d, Y\_2d] = meshgrid(x\_2d, y\_2d);

gaussian\_beam\_2d = exp(-X\_2d .\* X\_2d - Y\_2d .\* Y\_2d);

figure(6);

subplot(2, 1, 1); imagesc(x\_2d, y\_2d, abs(gaussian\_beam\_2d)); title("Амплитуда двумерного пучка");

subplot(2, 1, 2); imagesc(x\_2d, y\_2d, arg(gaussian\_beam\_2d)); title("Фаза двумерного пучка");

h\_u\_2d = 2 \* b\_2d / N\_2d; u\_2d = -b\_2d:h\_u\_2d:(b\_2d - h\_u\_2d / 2);

h\_v\_2d = 2 \* b\_2d / N\_2d; v\_2d = -b\_2d:h\_v\_2d:(b\_2d - h\_v\_2d / 2);

gaussian\_fft\_2d = FFT\_2d(gaussian\_beam\_2d, N\_2d, M\_2d, h\_u\_2d, h\_v\_2d);

figure(7);

subplot(2, 1, 1); imagesc(u\_2d, v\_2d, abs(gaussian\_fft\_2d));

title("Амплитуда преобразования двумерного пучка");

subplot(2, 1, 2); imagesc(u\_2d, v\_2d, arg(gaussian\_fft\_2d));

title("Фаза преобразования двумерного пучка");

f\_2d = sinc(X\_2d) \* sinc(Y\_2d);

F\_2d = FFT\_2d(f\_2d, N\_2d, M\_2d, h\_u\_2d, h\_v\_2d);

figure(8);

subplot(2, 1, 1); imagesc(u\_2d, v\_2d, abs(F\_2d));

title("Амплитуда преобразования двумерного поля");

subplot(2, 1, 2); imagesc(u\_2d, v\_2d, arg(F\_2d));

title("Фаза преобразования двумерного поля");