Марковские Цепи

Саттаров Никита, 322 гр.

October 2020

Цепь Маркова — последовательность случайных событий с конечным или счётным числом исходов, где вероятность наступления каждого события зависит от состояния, достигнутого в предыдущем событии. Характеризуется тем свойством, что, говоря нестрого, при фиксированном настоящем будущее независимо от прошлого. Названа в честь А. А. Маркова (старшего), который впервые ввёл это понятие в работе 1906 года.
$\sum\limits_{0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} v$

Содержание

1 Цепь Маркова с дискретным временем

1.1 Определение

Последовательность дискретных случайных величин $\{X_n\}_{n\geq 0}$ называется простой цепью Маркова (с дискретным временем), если

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n).$$

Таким образом, в простейшем случае условное распределение последующего состояния цепи Маркова зависит только от текущего состояния и не зависит от всех предыдущих состояний (в отличие от цепей Маркова высших порядков).
Область значений случайных величин $\{X_n\}$ называется **пространством состояний** цепи, а номер n — номером шага.

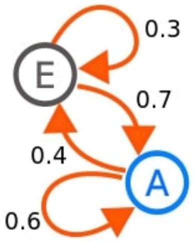

Рис. 1: Пример цепи с двумя состояниями

1.2 Переходная матрица и однородные цепи

Матрица $P(n)$, где

$$P_{ij}(n) \equiv \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

называется **матрицей переходных вероятностей** на n-м шаге, а вектор $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots)^\top$, где

$$p_i \equiv \mathbb{P}(X_0 = i)$$

— **начальным распределением** цепи Маркова.
Очевидно, матрица переходных вероятностей является стохастической, то есть

$$\sum_j P_{ij}(n) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Цепь Маркова называется **однородной**, если матрица переходных вероятностей не зависит от номера шага, то есть

$$P_{ij}(n) = P_{ij}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

В противном случае цепь Маркова называется неоднородной. В дальнейшем будем предполагать, что имеем дело с однородными цепями Маркова.

1.3 Конечномерные распределения и матрица перехода за n шагов

Из свойств условной вероятности и определения однородной цепи Маркова получаем:

$$\mathbb{P}(X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0) = P_{i_{n-1}, i_n} \cdots P_{i_0, i_1} P_{i_0},$$

откуда вытекает специальный случай уравнения Колмогорова — Чепмена:

$$\mathbb{P}(X_n = i_n \mid X_0 = i_0) = (P^n)_{i_0, i_n},$$

то есть матрица переходных вероятностей за n шагов однородной цепи Маркова есть n-я степень матрицы переходных вероятностей за 1 шаг. Наконец,

$$\mathbb{P}(X_n = i_n) = \left((P^T)^n \mathbf{p}\right)_{i_n}.$$

1.4 Типы состояний

- Возвратное состояние.
- Возвратная цепь Маркова.
- Достижимое состояние.
- Неразложимая цепь Маркова.
- Периодическое состояние.
- Периодическая цепь Маркова.
- Поглощающее состояние. Состояние i называется поглощающим если $P_{i,i} = 1$.
- Эргодическое состояние.

1.5 Примеры

- Ветвящийся процесс;
- Случайное блуждание;

2 Цепь Маркова с непрерывным временем

2.1 Определение

Семейство дискретных случайных величин $\{X_t\}_{t \geq 0}$ называется цепью Маркова (с непрерывным временем), если

$$\mathbb{P}(X_{t+h} = x_{t+h} \mid X_s = x_s,\ 0 < s \leq t) = \mathbb{P}(X_{t+h} = x_{t+h} \mid X_t = x_t).$$

Цепь Маркова с непрерывным временем называется однородной, если

$$\mathbb{P}(X_{t+h} = x_{t+h} \mid X_t = x_t) = \mathbb{P}(X_h = x_h \mid X_0 = x_0).$$

2.2 Матрица переходных функций и уравнение Колмогорова—Чепмена

Аналогично случаю дискретного времени, конечномерные распределения однородной цепи Маркова с непрерывным временем полностью определены начальным распределением

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots)^\top,\ p_i = \mathbb{P}(X_0 = i), \quad i = 1, 2, \dots$$

и **матрицей переходных функций** (*переходных вероятностей*)

$$\mathbf{P}(h) = (P_{ij}(h)) = \mathbb{P}(X_h = j \mid X_0 = i).$$

Матрица переходных вероятностей удовлетворяет уравнению Колмогорова — Чепмена: $ds\mathbf{P}(t+s) = \mathbf{P}(t)\mathbf{P}(s)$ или

$$P_{ij}(t+s) = \sum_k P_{ik}(t) P_{kj}(s).$$

2.3 Матрица интенсивностей и дифференциальные уравнения Колмогорова

По определению, матрица интенсивностей $\mathbf{Q} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\mathbf{P}(h) - \mathbf{I}}{h}$ или, что эквивалентно,

$$\mathbf{Q} = (q_{ij}) = \left(\frac{dP_{ij}(h)}{dh} \right)_{h=0}.$$

Из уравнения Колмогорова — Чепмена следуют два уравнения:

- Прямое уравнение Колмогорова

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q},$$

- Обратное уравнение Колмогорова

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t).$$

Для обоих уравнений начальным условием выбирается $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$. Соответствующее решение $\mathbf{P}(t) = \exp(\mathbf{Q}t)$..

2.4 Свойства матриц P и Q

Для любого $t > 0$ матрица $\mathbf{P}(t)$ обладает следующими свойствами:

1. Матричные элементы $\mathbf{P}(t)$ неотрицательны: $P_{ij}(t) \geq 0$ (неотрицательность вероятностей).
2. Сумма элементов в каждой строке $\mathbf{P}(t)$ равна 1: $\sum\limits_j P_{ij}(t) = 1$ (полная вероятность), то есть матрица $\mathbf{P}(t)$ является стохастической справа (или по строкам).
3. Все собственные числа λ матрицы $\mathbf{P}(t)$ не превосходят 1 по абсолютной величине: $|\lambda| \leq 1$. Если $|\lambda| = 1$S, то $\lambda = 1$.
4. Собственному числу $\lambda = 1$ матрицы $\mathbf{P}(t)$ соответствует, как минимум, один неотрицательный левый собственный вектор-строка (равновесие): $(p_1^*, p_2^*, ...); p_i^* \geq 0; \sum\limits_i p_i^* = 1; \sum\limits_i p_i^* P_{ij}(t) = p_j^*$.
5. Для собственного числа $\lambda = 1$ матрицы $\mathbf{P}(t)$ все корневые векторы являются собственными, то есть соответствующие жордановы клетки тривиальны.

Матрица $\mathbf{Q}$ обладает следующими свойствами:

1. Внедиагональные матричные элементы $\mathbf{Q}$ неотрицательны: $q_{ij} \geq 0\ i \neq j$.
2. Диагональные матричные элементы $\mathbf{Q}$ неположительны: $q_{ii} \leq 0$.
3. Сумма элементов в каждой строке $\mathbf{Q}$ равна 0: $\sum\limits_j q_{ij} = 0$.
4. Действительная часть всех собственных чисел μ матрицы $\mathbf{Q}$ неположительна: $Re(\mu) \leq 0$. Если $Re(\mu) = 0$, то $\mu = 0$.

5. Собственному числу $\mu = 0$ матрицы $\mathbf{Q}$ соответствует, как минимум, один неотрицательный левый собственный вектор-строка (равновесие): $(p_1^*, p_2^*, ...); p_i^* \geq 0; \sum_i p_i^* = 1; \sum_i p_i^* q_{ij} = 0$.

6. Для собственного числа $\mu = 0$ матрицы $\mathbf{Q}$ все корневые векторы являются собственными, то есть соответствующие жордановы клетки тривиальны.

2.5 Граф переходов, связность и эргодические цепи Маркова

Для цепи Маркова с непрерывным временем строится ориентированный граф переходов (кратко — граф переходов) по следующим правилам:

- Множество вершин графа совпадает со множеством состояний цепи.
- Вершины $i, j\,(i \neq j)$ соединяются ориентированным ребром $i \to j$, если $q_{ij} > 0$ (то есть интенсивность потока из i-го состояния в j-е положительна.

Топологические свойства графа переходов связаны со спектральными свойствами матрицы $\mathbf{Q}$. В частности, для конечных цепей Маркова верны следующие теоремы:

- Следующие три свойства $1, 2, 3$ конечной цепи Маркова эквивалентны (обладающие ими цепи иногда называют **слабо эргодическими**):
  1. Для любых двух различных вершин графа переходов $i, j\,(i \neq j)$ найдется такая вершина k графа («общий сток»), что существуют ориентированные пути от вершины i к вершине k и от вершины j к вершине k.
     Замечание: возможен случай $k = i$ или $ek = j$; в этом случае тривиальный (пустой) путь от i к i или от j к j также считается ориентированным путём.
  2. Нулевое собственное число матрицы $\mathbf{Q}$ невырождено.
  3. При $t \to \infty$ матрица $\mathbf{P}(t)$ стремится к матрице, у которой все строки совпадают (и совпадают, очевидно, с равновесным распределением).
- Следующие пять свойств $1, 2, 3, 4, 5$ конечной цепи Маркова эквивалентны (обладающие ими цепи называют **эргодическими**):
  1. Граф переходов цепи ориентированно связен.
  2. Нулевое собственное число матрицы $\mathbf{Q}$ невырождено и ему соответствует строго положительный левый собственный вектор (равновесное распределение).
  3. Для некоторого $t > 0$ матрица $\mathbf{P}(t)$ строго положительна (то есть $P_{ij}(t) > 0$ для всех i, j.
  4. Для всех $t > 0$ матрица $\mathbf{P}(t)$ строго положительна.
  5. При $t \to \infty$ матрица $\mathbf{P}(t)$ стремится к строго положительной матрице, у которой все строки совпадают (и совпадают, очевидно, с равновесным распределением).

2.6 Примеры

Рассмотрим цепи Маркова с тремя состояниями и с непрерывным временем, соответствующие графам переходов, представленным на рис. 2. В случае (a) отличны от нуля только следующие недиагональные элементы матрицы интенсивностей — q_{12}, q_{13}, в случае (b) отличны от нуля только q_{12}, $q_{31}\,q_{32}$, а в случае (c) — q_{12}, $q_{31}\,q_{23}$. Остальные элементы определяются свойствами матрицы $\mathbf{Q}$ (сумма элементов в каждой строке равна 0). В результате для графов (a), (b), (c) матрицы интенсивностей имеют вид: $\mathbf{Q}_a = \begin{pmatrix} -(q_{12}+q_{13}) & q_{12} & q_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{Q}_b = \begin{pmatrix} -q_{12} & q_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ q_{31} & q_{32} & -(q_{31}+q_{32}) \end{pmatrix}$, $\mathbf{Q}_c = \begin{pmatrix} -q_{12} & q_{12} & 0 \\ 0 & -q_{23} & q_{23} \\ q_{31} & 0 & -q_{31} \end{pmatrix}$.

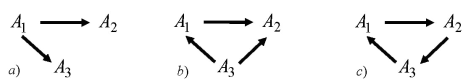

Рис. 2: Примеры графов переходов для цепей Маркова: a) цепь не является слабо эргодической (не существует общего стока для состояний A_2, A_3; b) слабо эргодическая цепь (граф переходов не является ориентированно связным) c) эргодическая цепь (граф переходов ориентированно связан).

3 Основное кинетическое уравнение

Основное кинетическое уравнение описывает эволюцию распределения вероятностей в цепи Маркова с непрерывным временем. «Основное уравнение» здесь — не эпитет, а перевод термина англ. *Master equation.* Для вектора-строки распределения вероятностей π основное кинетическое уравнение имеет вид:

$$\frac{d\pi}{dt} = \pi \mathbf{Q}$$

и совпадает, по существу, с прямым уравнением Колмогорова. В физической литературе чаще используют векторы-столбцы вероятностей и записывают основное кинетическое уравнение в виде, который явно использует закон сохранения полной вероятности:

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_{j,\, j\neq i} (T_{ij}p_j - T_{ji}p_i),$$

где $T_{ij} = q_{ji}$.
Если для основного кинетического уравнения существует положительное равновесие $p_i^* > 0$, то его можно записать в форме:

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_{j,\, j\neq i} T_{ij}p_j^* \left(\frac{p_j}{p_j^*} - \frac{p_i}{p_i^*}\right).$$

3.1 Функции Ляпунова для основного кинетического уравнения

Для основного кинетического уравнения существует богатое семейство выпуклых функций Ляпунова — монотонно меняющихся со временем функций распределения вероятностей. Пусть $h(x)$ $(x > 0)$ — выпуклая функция одного переменного. Для любого положительного распределения вероятностей $(p_i > 0)$ определим *функцию Моримото* $H_h(p)$:

$$H_h(p) = \sum_i p_i^* h\left(\frac{p_i}{p_i^*}\right).$$

Производная $H_h(p)$ по времени, если $p(t)$ удовлетворяет основному кинетическому уравнению, есть

$$\frac{dH_h(p(t))}{dt} = \sum_{i,j\; i\neq j} T_{ij}p_j^* \left[h\left(\frac{p_i}{p_i^*}\right) - h\left(\frac{p_j}{p_j^*}\right) + h'\left(\frac{p_i}{p_i^*}\right)\left(\frac{p_j}{p_j^*} - \frac{p_i}{p_i^*}\right)\right] \leq 0.$$

Последнее неравенство справедливо из-за выпуклости $h(x)$.

3.1.1 Примеры функций Моримото $H_h(p)$

- $h(x) = |x-1|, H_h(p) = \sum_i |p_i - p_i^*|$;

  эта функция — расстояние от текущего распределения вероятностей до равновесного в $l1$-норме. Сдвиг по времени является сжатием пространства вероятностных распределений в этой норме. (О свойствах сжатий см. статью Теорема Банаха о неподвижной точке.)

- $h(x) = x\ln x, H_h(p) = \sum_i p_i \ln\left(\frac{p_i}{p_i^*}\right)$;

  эта функция — (минус) энтропия Кульбака (см. Расстояние Кульбака — Лейблера). В физике она соответствует свободной энергии, деленной на kT (где k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура): если $p_i^* = \exp(\mu_0 - U_i/kT)$ (распределение Больцмана), то

$$H_h(p) = \sum_i p_i \ln p_i + \sum_i p_i U_i/kT - \mu_0 = (\langle U\rangle - TS)/kT.$$

- $h(x) = -\ln x, H_h(p) = -\sum_i p_i^* \ln\left(\frac{p_i}{p_i^*}\right)$;

  эта функция — аналог свободной энергии для энтропии Бурга, широко используемой в обработке сигналов:

$$S_{\mathrm{Burg}} = \sum_i \ln p_i$$

- $h(x) = \dfrac{(x-1)^2}{2}, H_h(p) = \sum_i \dfrac{(p_i - p_i^*)^2}{2p_i^*}$;
  это квадратичное приближение для (минус) энтропии Кульбака вблизи точки равновесия. С точностью до постоянного во времени слагаемого эта функция совпадает с (минус) энтропией Фишера, которую даёт следующий выбор,

- $h(x) = \dfrac{x^2}{2}, H_h(p) = \sum_i \dfrac{p_i^2}{2p_i^*}$;
  это (минус) энтропия Фишера.

- $h(x) = \dfrac{x^q - 1}{q-1}$, $q > 0$, $q \neq 1, H_h(p) = \dfrac{1}{q-1}\left[\sum_i p_i^* \left(\dfrac{p_i}{p_i^*}\right)^q - 1\right]$;
  это один из аналогов свободной энергии для энтропии Тсаллиса.

$$S_{q\mathrm{Tsallis}}(p) = \frac{1}{q-1}\left(1 - \sum_i p_i^q\right).$$

служит основой для статистической физики неэкстенсивных величин. При $q \to 1$ она стремится к классической энтропии Больцмана—Гиббса—Шеннона, а соответствующая функция Моримото — к (минус) энтропии Кульбака.

4 Практическое применение

Одной из первых научных дисциплин, в которой цепи Маркова нашли практическое применение, стала лингвистика (в частности текстология). Сам Марков для иллюстрации своих результатов исследовал зависимость в чередовании гласных и согласных в первых главах «Евгения Онегина» и «Детских годов Багрова-внука».

Список литературы

[1] Кельберт М. Я., Сухов Ю. М. Вероятность и статистика в примерах и задачах. — 2007.

[2] Марков А.А. Распространение закона больших чисел на величины, зависящие друг от друга // Известия Физико-математического общества при Казанском университете. — 1906. — С. 135–156.

[3] А.В. Прохоров. Маркова цепь // Большая российская энциклопедия. — 2004. — С. 35.

[4] Kemeny John G, Snell James Laurie. Finite markov chains, undergraduate texts in mathematics. — 1976.

[5] Чжун К. Однородные цепи Маркова. — Мир, 1964.

[6] Нуммелин Э. Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы: пер. с англ. — Мир, 1989.

[7] Morimoto Tetsuzo. Markov processes and the H-theorem // Journal of the Physical Society of Japan. — 1963. — Vol. 18, no. 3. — P. 328–331.

[8] Яглом А. М., Яглом И. Вероятность и информация. — Рипол Классик, 1960.

[9] Kullback Solomon. Information theory and statistics. — Courier Corporation, 1997.

[10] Burg John Parker. The relationship between maximum entropy spectra and maximum likelihood spectra // Geophysics. — 1972. — Vol. 37, no. 2. — P. 375–376.

[11] Tsallis Constantino. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics // Journal of statistical physics. — 1988. — Vol. 52, no. 1-2. — P. 479–487.

[12] Рудой Ю. Г. Обобщенная информационная энтропия и неканоническое распределение в равновесной статистической механике // Теоретическая и математическая физика. — 2003. — Т. 135, № 1. — С. 3–54.

[13] Gorban Alexander N, Gorban Pavel A, Judge George. Entropy: the Markov ordering approach // Entropy. — 2010. — Vol. 12, no. 5. — P. 1145–1193.