University. Probability Theory. Tasks and solutions.

Nikita Sattarov

Updated: 25 февраля 2023 г.

Комбинаторика

(1) Колода в 52 карты раскладывается в 2 ряда, лежащие друг под другом. Найти вероятность того, что:

- все красные карты — друг под другом (A_1);
- все пики во 2-ом ряду лежат под королями (A_2).

Решение:

Количество всех возможных перестановок из 52 карт: $card(\Omega) = 52!$.

Первая подзадача:

Выбираем 13 красных карт, которые будут лежать сверху. Выбираем места для этих 13 карт. Переставляем красные карты сверху. Переставляем красные карты снизу. Переставляем все оставшиеся карты. Получаем количество всех возможных удовлетворяющих перестановок: $card(A_1) = C_{26}^{13} \cdot C_{26}^{13} \cdot 13! \cdot 13! \cdot 26! = \left(C_{26}^{13}\right)^2 \cdot (13!)^2 \cdot 26!$.

Таким образом: $P(A_1) = \dfrac{card(A_1)}{card(\Omega)} = \dfrac{\left(C_{26}^{13}\right)^2 \cdot (13!)^2 \cdot 26!}{52!}$.

Вторая подзадача:

Рассмотрим три случая (три суммы):

1. Король Пик оказывается в нижнем ряду.

   Тогда мы выбираем i пиковых карт, выбираем для всех нижних пиковых карт (включая короля) $(i+1)$ место. Переставляем карты. Далее выбираем $(i+1)$ из оставшихся трёх королей. Переставляем их по закрепленным местам. Далее выбираем места для оставшихся пик сверху. Переставляем оставшиеся пики. далее переставляем все оставшиеся карты. Просуммируем по i от 0 до 2.

   Получаем количество всех возможных удовлетворяющих перестановок в первом случае:

   $card(A_2^1) = \sum\limits_{k=0}^{2} C_{12}^{k} \cdot C_{26}^{k+1} \cdot (k+1)! \cdot C_3^{k+1} \cdot (k+1)! \cdot C_{25-k}^{12-k} \cdot (12-k)! \cdot (38-k)!$.

2. Король Пик оказывается в верхнем ряду и под ним лежит не пик.

   Тогда выбираем i пиковых карт, выбираем места под них. Переставляем. Выбираем из трёх оставшихся i королей. Переставляем по фиксированным местам. Далее выбираем места для оставшихся пик сверху. Переставляем оставшиеся пики. Далее переставляем все оставшиеся карты. Просуммируем по i от 0 до 3.

   Получаем количество всех возможных удовлетворяющих перестановок во втором случае:

   $card(A_2^2) = \sum\limits_{k=0}^{3} C_{12}^{k} \cdot C_{26}^{k} \cdot k! \cdot C_3^{k} \cdot k! \cdot C_{26-k}^{12-k} \cdot (12-k)! \cdot (39-k)!$.

3. Король Пик оказывается в верхнем ряду и под ним лежит пик.

   Тогда выбираем i пиковых карт (включая ту, которая лежит под Королем Пик). Выбираем места под них. Переставляем. Выбираем $(i1)$ из 3 оставшихся королей (потому что один Король — это Король Пик). Переставляем i королей (уже включая Короля Пик). Далее выбираем места для оставшихся пик сверху. Переставляем оставшиеся пики. Переставляем оставшиеся карты. Просуммируем по i от 1 до 4.

   Получаем количество всех возможных удовлетворяющих перестановок в третьем случае:

   $card(A_2^3) = \sum\limits_{k=1}^{4} C_{12}^{k} \cdot C_{26}^{k} \cdot k! \cdot C_3^{k-1} \cdot k! \cdot C_{26-k}^{12-k} \cdot (12-k)! \cdot (40-k)!$.

   Таким образом:

   $P(A_2) = \dfrac{card(A_2)}{card(\Omega)}$.

Суммируем количество всех возможных удовлетворяющих перестановок в трех случаях:

$card(A_2) = \sum\limits_{k=0}^{2} C_{12}^k \cdot C_{26}^{k+1} \cdot (k+1)! \cdot C_3^{k+1} \cdot (k+1)! \cdot C_{25-k}^{12-k} \cdot (12-k)! \cdot (38-k)! +$
$+ \sum\limits_{k=0}^{3} C_{12}^k \cdot C_{26}^k \cdot k! \cdot C_3^k \cdot k! \cdot C_{26-k}^{12-k} \cdot (12-k)! \cdot (39-k)! +$
$+ \sum\limits_{k=1}^{4} C_{12}^k \cdot C_{26}^k \cdot k! \cdot C_3^{k-1} \cdot k! \cdot C_{26-k}^{12-k} \cdot (12-k)! \cdot (40-k)!.$

Ответ:

- $\dfrac{\left(C_{26}^{13}\right)^2 \cdot (13!)^2 \cdot 26!}{52!}$
- $\Bigg(\sum\limits_{k=0}^{2} C_{12}^k \cdot C_{26}^{k+1} \cdot (k+1)! \cdot C_3^{k+1} \cdot (k+1)! \cdot C_{25-k}^{12-k} \cdot (12-k)! \cdot (38-k)! +$
  $+\sum\limits_{k=0}^{3} C_{12}^k \cdot C_{26}^k \cdot k! \cdot C_3^k \cdot k! \cdot C_{26-k}^{12-k} \cdot (12-k)! \cdot (39-k)! \ +$
  $+\sum\limits_{k=1}^{4} C_{12}^k \cdot C_{26}^k \cdot k! \cdot C_3^{k-1} \cdot k! \cdot C_{26-k}^{12-k} \cdot (12-k)! \cdot (40-k)!\Bigg) \ / \ 52!.$

2 Из колоды 52 карты достают 5, а потом из оставшихся карт — еще 5. Найти вероятность того, что:

- число пик и треф во второй кучке совпадает (A_1);
- в первой кучке есть пики, а во второй — нет (A_2);
- число треф в первой кучке такое же, как число пик во второй кучке (A_3).

Решение:

Количество всех возможных выборов 5 карта их кучки, а затем ещё 5 карт из кучки: $card(\Omega) = C_{52}^5 \cdot C_{47}^5$.

Первая подзадача:

Нам нет разницы, в какой кучке будет равное количество пик и треф. Поэтому поменяем кучки местами в условии задачи. Выберем k пик и k треф в первую кучку. Доберём карты других мастей в первую кучку. И выберем любые 5 карт во вторую кучку. Просуммируем по k от 0 до 2, так как больше пик и треф не влезет.

Получаем количество всех возможных удовлетворяющих перестановок: $card(A_1) = \sum\limits_{k=0}^{2} (C_{13}^k)^2 \cdot C_{26}^{5-2k} \cdot C_{47}^5$.

Таким образом: $P(A_1) = \dfrac{card(A_1)}{card(\Omega)} = \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{2} (C_{13}^k)^2 \cdot C_{26}^{5-2k} \cdot C_{47}^5}{C_{52}^5 \cdot C_{47}^5}$.

Вторая подзадача:

Выберем k пиковых карт для первой кучки. Доберём оставшиеся карты для первой кучки. Доберём непиковых карт для второй кучки. Просуммируем по k от 1 до 5. Получаем количество всех возможных удовлетворяющих перестановок: $card(A_2) = \sum\limits_{k=1}^{5} C_{13}^k \cdot C_{39}^{5-k} \cdot C_{34+k}^5$.

Таким образом: $P(A_2) = \dfrac{card(A_2)}{card(\Omega)} = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{5} C_{13}^k \cdot C_{39}^{5-k} \cdot C_{34+k}^5}{C_{52}^5 \cdot C_{47}^5}$.

Третья подзадача:

Пусть k — количество выпавших треф в первой кучке, m — количество выпавших пик в первой кучке. Тогда мы сначала выбираем пики и трефы в первую кучку. Добираем оставшиеся карты в первую кучку. Далее выбираем пики во вторую кучку. Добираем оставшиеся карты во вторую кучку $(5213k(5km))$. Суммируем по m от 0 до $(5k)$, так как пик и треф в сумме не может быть больше 5. И далее суммируем по k от 0 до 5. Получаем количество всех возможных удовлетворяющих перестановок:

$card(A_3) = \sum\limits_{k=0}^{5} \sum\limits_{m=0}^{5-k} C_{13}^k \cdot C_{13}^m \cdot C_{26}^{5-k-m} \cdot C_{13-m}^k \cdot C_{34+m}^{5-k}$.

Таким образом: $P(A_3) = \dfrac{card(A_3)}{card(\Omega)} = \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{5} \sum\limits_{m=0}^{5-k} C_{13}^k \cdot C_{13}^m \cdot C_{26}^{5-k-m} \cdot C_{13-m}^k \cdot C_{34+m}^{5-k}}{C_{52}^5 \cdot C_{47}^5}$.

Ответ:

- $\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{2} (C_{13}^k)^2 \cdot C_{26}^{5-2k} \cdot C_{47}^5}{C_{52}^5 \cdot C_{47}^5}$
- $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{5} C_{13}^k \cdot C_{39}^{5-k} \cdot C_{34+k}^5}{C_{52}^5 \cdot C_{47}^5}$
- $\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{5} \sum\limits_{m=0}^{5-k} C_{13}^k \cdot C_{13}^m \cdot C_{26}^{5-k-m} \cdot C_{13-m}^k \cdot C_{34+m}^{5-k}}{C_{52}^5 \cdot C_{47}^5}$.

(3) n раз бросают игральную кость. Найдите вероятности следующих событий:

- самое маленькое из выпавших чисел равно 3 (A_1);
- двойка выпадет три раза, а тройка — два раза (A_2);
- появится k_1 единиц, k_2 двоек, ..., k_6 шестерок ($k1 + k2 + \ldots + k6 = n$) ($A_3$);
- первая двойка появится раньше, чем первая шестерка (A_4).

Решение:

Всего вариантов выпавших кубиков среди n бросков равно: $card(\Omega) = 6^n$.

Первая подзадача:

Расписываем вероятность через вероятность минимумов: $P(A_1) = P(min < 3) - P(min < 4) = (1 - P(min \geq 3)) - (1 - P(min \geq 4)) = P(min \geq 4) - P(min \geq 3) = \left(\frac{4}{6}\right)^n - \left(\frac{3}{6}\right)^n$.

Вторая подзадача:

Выбираем 3 места для двойки, затем 2 места для тройки. Затем доставляем оставшиеся карты: $card(A_2) = C_n^3 \cdot C_{n-3}^2 \cdot 4^{n-5}$.

Таким образом: $P(A_2) = \dfrac{card(A_2)}{card(\Omega)} = \dfrac{C_n^3 \cdot C_{n-3}^2 \cdot 4^{n-5}}{6^n}$.

Третья подзадача:

Выбираем k_1 мест для единицы, k_2 мест для двойки и так далее:
$card(A_3) = C_n k_1 \cdot C_{n-k_1}^{k_2} \cdot C_{n-k_1-k_2}^{k_3} \cdot C_{n-k_1-k_2-k_3}^{k_4} \cdot C_{k_5+k_6}^{k_5} \cdot C_{k_6}^{k_6}$.

Таким образом: $P(A_3) = \dfrac{card(A_3)}{card(\Omega)} = \dfrac{C_n k_1 \cdot C_{n-k_1}^{k_2} \cdot C_{n-k_1-k_2}^{k_3} \cdot C_{n-k_1-k_2-k_3}^{k_4} \cdot C_{k_5+k_6}^{k_5}}{6^n}$.

Четвертая подзадача:

Вероятность того, что двойка выпадет до шестёрки, равна вероятности того, что шестёрка выпадет до двойки. Для добора до полной вероятности не хватает случая, когда двойка и шестёрка вообще не выпали. Полная вероятность равна 1. Вычитаем вероятность, когда двойка и шестёрка не выпали, и делим пополам: $P(A_4) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \left(\dfrac{4}{6}\right)^n\right)$.

Ответ:

- $\left(\dfrac{4}{6}\right)^n - \left(\dfrac{3}{6}\right)^n$
- $\dfrac{C_n^3 \cdot C_{n-3}^2 \cdot 4^{n-5}}{6^n}$
- $\dfrac{C_n k_1 \cdot C_{n-k_1}^{k_2} \cdot C_{n-k_1-k_2}^{k_3} \cdot C_{n-k_1-k_2-k_3}^{k_4} \cdot C_{k_5+k_6}^{k_5}}{6^n}$
- $.\dfrac{1}{2}\left(1 - \left(\dfrac{4}{6}\right)^n\right)$.

(4) Путь начинается из точки $(0, 0)$. За каждый шаг человек продвигается с вероятностью $\frac{1}{2}$ направо и с вероятностью $\frac{1}{2}$ вверх на расстояние 1. Чему равна вероятность того, что:

- он пройдет через точку с координатами (m, n) (A_1);
- он пройдет через точку с координатами (m, n), при этом побывав в точке с координатами (k, l) ($1 \leq k < m, 1 \leq l < n$) ($A_2$).

Решение:

Общее количество путей из точки $(0,0)$ в точку (m,n) равно: $card(\Omega) = 2^{m+n}$.

Первая подзадача:

Представляем шаги в виде последовательностей 0 (шаг вправо) и 1 (шаг наверх). В этой последовательности должно быть $(m=n)$ значений. При этом ровно m нулей и n единиц. Применяем формулу перестановок с повторениями: $P(A_1) = \left(\dfrac{(m+n)!}{m!\cdot n!}\right) / \left(2^{m+n}\right)$.

Вторая подзадача:

То же самое. Только две последовательности. Сначала k нулей и l единиц. Затем $(m-k)$ нулей и $(n-l)$ единиц: $P(A_2) = \left(\dfrac{(k+l)!}{k!\cdot l!}\cdot\dfrac{((m+n)-(k+l))!}{(m-k)!\cdot(n-l)!}\right) / \left(2^{m+n}\right)$.

Ответ:

- $\left(\dfrac{(m+n)!}{m!\cdot n!}\right) / \left(2^{m+n}\right)$
- $\left(\dfrac{(k+l)!}{k!\cdot l!}\cdot\dfrac{((m+n)-(k+l))!}{(m-k)!\cdot(n-l)!}\right) / \left(2^{m+n}\right)$.

5. Из колоды в 52 карты вынимают последовательно три карты. Найти вероятность того, что вторая из них меньше по достоинству, чем первая, а третья имеет тоже достоинство, что и вторая (A).

Решение:

Количество вариантов вынуть последовательно три карты: $card(\Omega) = C_{52}^1\cdot C_{51}^1\cdot C_{50}^1$.

Выбираем масть у первой карты. Далее выбираем достоинство для второй карты из тех достоинств, что меньше первого достоинства. Далее выбираем масть второй карты. Далее выбираем масть третьей карты, равной по достоинству второй карте: $card(A) = \sum\limits_{i=2}^{13} C_4^1\cdot C_{i-1}^1\cdot C_4^1\cdot C_3^1$.

Таким образом: $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{\sum\limits_{i=2}^{13}(C_4^1)^2\cdot C_{i-1}^1\cdot C_3^1}{C_{52}^1\cdot C_{51}^1\cdot C_{50}^1}$.

Ответ: $\dfrac{\sum\limits_{i=2}^{13}(C_4^1)^2\cdot C_{i-1}^1\cdot C_3^1}{C_{52}^1\cdot C_{51}^1\cdot C_{50}^1}$.

6. Колода в 52 карты раскладывается в круг. Найти вероятность того, что:

- напротив тузов лежат дамы, причем в паре туз–дама карты имеют разную масть (A_1);
- красные карты расположены против черных (A_2);
- против любой дамы — черва (A_3).

Решение:

Количество всех возможных разложений 52 карт в круг: $card(\Omega) = 51!$.

Первая подзадача:

Зафиксируем Туза Черви. Далее у нас есть три варианта Дам для этого туза. Для следующего Туза остаётся 50 мест и три варианта Дам напротив. Для следующего Туза 48 мест и одна Дама. Для следующего 46 мест и одна Дама. Дальше переставляем оставшиеся карты: $card(A_1) = 3*50*3*48*46*44!$.

Таким образом: $P(A_1) = \dfrac{card(A_1)}{card(\Omega)} = \dfrac{3\cdot 50\cdot 3\cdot 48\cdot 46\cdot 44!}{51!}$.

Вторая подзадача:

Зафиксируем Туза Черви. Далее для следующих 25 ячеек мы имеем два варианта их цвета: красный или чёрный (остальные ячейки определятся автоматически). Определим цвета ячеек. Далее переставим все красные карты (кроме Туза Черви), и все чёрные карты по своим ячейкам: $card(A_2) = 2^{25}\cdot 25!\cdot 26!$.

Таким образом: $P(A_2) = \dfrac{card(A_2)}{card(\Omega)} = \dfrac{2^{25}\cdot 25!\cdot 26!}{51!}$.

Третья подзадача:

Зафиксируем Даму Черви. Для неё есть 12 вариантов расположения Червовой карты напротив. Для следующей Дамы есть 50 мест и 11 вариантов расположения Червовой карты напротив, и тд. Далее переставляем оставшиеся карты: $card(A_3) = 12\cdot 50\cdot 11\cdot 48\cdot 10\cdot 46\cdot 9\cdot 44!$

Таким образом: $P(A_3) = \dfrac{card(A_3)}{card(\Omega)} = \dfrac{12 \cdot 50 \cdot 11 \cdot 48 \cdot 10 \cdot 46 \cdot 9 \cdot 44!}{51!}$.

Ответ:

- $\dfrac{3 \cdot 50 \cdot 3 \cdot 48 \cdot 46 \cdot 44!}{51!}$
- $\dfrac{2^{25} \cdot 25! \cdot 26!}{51!}$
- $\dfrac{12 \cdot 50 \cdot 11 \cdot 48 \cdot 10 \cdot 46 \cdot 9 \cdot 44!}{51!}$.

7 Задача про фигуры в покере без джокеров. Из колоды в 52 карты достают 5 карт. Найти вероятность следующих фигур из покера. А именно, найти вероятность того. что среди этих пяти карт есть:

- 3 карты одинакового достоинства плюс 2 одинакового (но другого) достоинства (A_1);
- 3 одинакового достоинства и две карты, у которых достоинства отличаются друг от друга и от достоинства 3-х карт (A_2);
- 2 одинакового достоинства и 2 одинакового (но другого) достоинства. Достоинство 5-й карты отличается от достоинств 4-х карт (A_3).

Решение:

Всего вариантов разложить фигуры в покере: $card(\Omega) = C_{52}^4$.

Первая подзадача:

Выберем первое достоинство. Выберем 3 карты для него. Выберем второе достоинство. Выберем 2 карты для него: $card(A_1) = 13 \cdot C_4^3 \cdot 12 \cdot C_4^2$.

Таким образом: $P(A_1) = \dfrac{card(A_1)}{card(\Omega)} = \dfrac{13 \cdot C_4^3 \cdot 12 \cdot C_4^2}{C_{52}^4}$.

Втоорая подзадача:

Выберем первое достоинство. Выберем 3 карты для него. Выберем 2 следующих достоинства. И по одной картей среди каждого из них: $card(A_2) = 13 \cdot C_4^3 \cdot C_4^2 \cdot (C_4^1)^2$.

Таким образом: $P(A_2) = \dfrac{card(A_2)}{card(\Omega)} = \dfrac{13 \cdot C_4^3 \cdot C_4^2 \cdot (C_4^1)^2}{C_{52}^4}$.

Третья подзадача:

Выберем два достоинства без учёта порядка (тк в обоих достоинствах выбираем по две карты). Далее выберем по две карты для каждого достоинства и доберём оставшуюся карту: $card(A_3) = C_{13}^2 \cdot (C_4^2)^2 \cdot 44$.

Таким образом: $P(A_3) = \dfrac{card(A_3)}{card(\Omega)} = \dfrac{C_{13}^2 \cdot (C_4^2)^2 \cdot 44}{C_{52}^4}$.

Ответ:

- $\dfrac{13 \cdot C_4^3 \cdot 12 \cdot C_4^2}{C_{52}^4}$
- $\dfrac{13 \cdot C_4^3 \cdot C_4^2 \cdot (C_4^1)^2}{C_{52}^4}$
- $\dfrac{C_{13}^2 \cdot (C_4^2)^2 \cdot 44}{C_{52}^4}$.

8 Колода 52 карты раскладывается на 2 не обязательно равные части. Найти вероятность того, что все черви попали в одну из кучек (A).

Решение:

Количество вариантов разложить колоду из 52 карт на две не обязательно равные кучки: $card(\Omega) = 2^{52}$.

Расписываем вариант, когда все черви попадут в первую кучку. Далее умножаем на 2, так как кучки две: $card(A) = 2 \cdot \sum\limits_{i=13}^{52} C_{39}^{i-13}$.

Таким образом: $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{2 \cdot \sum\limits_{i=13}^{52} C_{39}^{i-13}}{2^{52}}$.

Ответ: $\dfrac{2 \cdot \sum\limits_{i=13}^{52} C_{39}^{i-13}}{2^{52}}$.

(9) Колода 52 карты раскладывается в 4 ряда по 13 карт в каждом. Найти вероятности следующих событий:

- Все черви — ровно в 2-х рядах (A_1);
- В каждом ряду есть черви (A_2).

Решение:

Всего вариантов разложить 52 карты в 4 ряда: $card(\Omega) = 52!$.

Первая подзадача:

Выберем два ряда для всех Червовых карт. Расставим места для Червовых карт в двух рядах. Далее исключим 4 варианта, когда все Червовые карты будут распологаться только в одном из рядов. Переставим Червовые карты. Переставим оставшиеся карты: $card(A_1) = (C_4^2 \cdot C_{26}^{13} - 4) \cdot 13! \cdot 39!$.

Таким образом: $P(A_1) = \dfrac{card(A_1)}{card(\Omega)} = \dfrac{(C_4^2 \cdot C_{26}^{13} - 4) \cdot 13! \cdot 39!}{52!}$.

Вторая подзадача:

Посчитаем варианты разложить все Червовые карты как угодно и отнимем количество вариантов, когда все Червовые карты лежат в 3-х, 2-х или 1-ом рядах: $card(A_2) = (C_{52}^{13} - C_4^3 \cdot C_{39}^{13}) \cdot 13! \cdot 39!$.

Таким образом: $P(A_2) = \dfrac{card(A_2)}{card(\Omega)} = \dfrac{(C_{52}^{13} - C_4^3 \cdot C_{39}^{13}) \cdot 13! \cdot 39!}{52!}$.

Ответ:

- $\dfrac{(C_4^2 \cdot C_{26}^{13} - 4) \cdot 13! \cdot 39!}{52!}$
- $\dfrac{(C_{52}^{13} - C_4^3 \cdot C_{39}^{13}) \cdot 13! \cdot 39!}{52!}$.

(10) Из колоды 52 карты достают 6 карт и раскладывают их в ряд. Событие: среди 6 карт ровно 2 короля и они лежат рядом.

Решение:

Всего вариантов разложить 6 карт в ряд из колоды 52 карт: $card(\Omega) = C_{52}^6 \cdot 6!$.

Выбираем двух королей. Выбираем 4 карты из оставшихся некоролей. Склеиваем двух королей в одну большую карту. Домножаем на количество перестановок из 5 элементов. Учитываем, что порядок королей в одной большой карте важен, поэтому умножаем на 2: $card(A) = C_4^2 \cdot C_{48}^4 \cdot 5! \cdot 2$.

Таким образом: $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{C_4^2 \cdot C_{48}^4 \cdot 5! \cdot 2}{C_{52}^6 \cdot 6!}$.

Ответ: $\dfrac{C_4^2 \cdot C_{48}^4 \cdot 5! \cdot 2}{C_{52}^6 \cdot 6!}$.

(11) n раз бросают игральную кость. Обозначим $X_1, \ldots, X_n$ результаты бросаний, а $minX_i = X_{[1]} \le X_{[2]} \le \ldots \le X_{[n]} = maxX_i$ — результат упорядочивания $X_1, \ldots, X_n$ по возрастанию. Например: для $X_1 = 5, X_2 = 3, X_3 = 2, X_4 = 2 \ \to \ X_{[1]} = X_{[2]} = 2, X_{[3]} = 3, X_{[4]} = 5$. Найти вероятность того, что $X_{[k]} < 4, 1 \le k \le n$.

Решение:

Всего вариантов бросания игральной кости 6 раз: $card(\Omega) = 6^n$.

Выбираем места для карт, которые меньше 4. Далее считаем количество вариантов выкинуть число меньше 3 — i раз, и число больше 3 — (ni) раз. Суммируем по количеству бросков, в которых число оказалось меньше 4: $card(A) = \sum\limits_{i=k}^{n} C_n^i \cdot 3^n$.

Таким образом: $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{\sum\limits_{i=k}^{n} C_n^i \cdot 3^n}{6^n}$.

Ответ: $\dfrac{\sum\limits_{i=k}^{n} C_n^i \cdot 3^n}{6^n}$.

(12) В случайной перестановке чисел $1, 2, \ldots, n$ оказалось, что на k-ом месте стоит число, большее всех предыдущих. Найти вероятность того, что оно равно n $(1 \le k \le n)$.

Решение:

Пусть A — событие, когда на k-ом месте стоит n. А B — событие, когда на k-ом месте стоит число, большее всех предыдущих.

$P(A) = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n-1}$.

$P(B) = \dfrac{\sum\limits_{i=k}^{n} \left(C_{i-1}^{k-1} \cdot (n-k)! \cdot (k-1)!\right)}{n!} = \dfrac{1}{k}$.

Таким образом: $P(A|B) = \dfrac{P(A)}{P(B)} = \dfrac{1}{n-1} : \dfrac{1}{k} = \dfrac{k}{n-1}$.

Ответ: $\dfrac{k}{n-1}$.

(13) Из колоды 52 карты достают 5 карт, а потом ещё 5 карт. Найти вероятность того, что во второй пятерке нет червей.

Решение:

Пусть $\{B_i\}$ — полная группа событий, где B_i — количество червовых карт в первой кучке. Событие A — во второй кучке нет червей. Выберем i червей в первую кучку. Доберём оставшиеся карты. Дальше выберем не черви во вторую кучку. Распишем по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=0}^{5} P(B_i) \cdot P(A|B_i) = \sum_{i=0}^{5} \frac{C_{13}i \cdot C_{39}^{5-i}}{C_{52}^5} \cdot \frac{C_{34+i}^5}{C_{47}^5}.$$

Ответ: $\sum\limits_{i=0}^{5} \dfrac{C_{13}i \cdot C_{39}^{5-i}}{C_{52}^5} \cdot \dfrac{C_{34+i}^5}{C_{47}^5}$.

(14) Из колоды 52 карты достают 5 карт. Обозначим k число тузов среди этих карт. После этого их другой колоды в 52 карт достают $(k+1)$ карту. Найти вероятность того, что среди них:

- нет королей;
- нет пик;

Решение:

Первая подзадача:

Пусть B_i — полная группа событий, где B_i — количество тузов в первой кучке. Событие A — во второй кучке нет королей. Выберем i тузов в первую кучку. Доберём оставшиеся карты. Дальше выберем во вторую кучку $(i+1)$ не королей. Распишем по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=0}^{4} P(B_i) \cdot P(A|B_i) = \sum_{i=0}^{4} \frac{C_4^i \cdot C_{48}^{5-i}}{C_{52}^5} \cdot \frac{C_{48}^{i+1}}{C_{52}^{i+1}}.$$

Вторая подзадача:

Пусть теперь событие A — во второй кучке нет королей. Выберем i тузов в первую кучку. Доберём оставшиеся карты. Дальше выберем во вторую кучку $(i+1)$ не пик. Распишем по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=0}^{4} P(B_i) \cdot P(A|B_i) = \sum_{i=0}^{4} \frac{C_4^i \cdot C_{48}^{5-i}}{C_{52}^5} \cdot \frac{C_{39}^{i+1}}{C_{52}^{i+1}}.$$

Ответ:

- $\sum\limits_{i=0}^{4} \dfrac{C_4^i \cdot C_{48}^{5-i}}{C_{52}^5} \cdot \dfrac{C_{48}^{i+1}}{C_{52}^{i+1}}$.
- $\sum\limits_{i=0}^{4} \dfrac{C_4^i \cdot C_{48}^{5-i}}{C_{52}^5} \cdot \dfrac{C_{39}^{i+1}}{C_{52}^{i+1}}.$.

(15) Найти вероятность того, что в случайной перестановке чисел $1, 2, \ldots, n$ все четные числа расположены в порядке возрастания, если известно, что все нечетные расположены в порядке убывания.

Решение:

A — множество нечетных чисел в порядке убывания.

B — множество чётных чисел в порядке возрастания.

Выбрали места для чётных чисел: $P(A \cap B) = \dfrac{C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}}{n!}$.

Выбрали места для чётных чисел и отсортировали их: $P(A) = \dfrac{C_n^{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor !}{n!}$.

Выбрали места для чётных чисел и отсортировали нечётные: $P(B) = \dfrac{C_n^{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor !}{n!}$.

$P(A) \cdot P(B) = \dfrac{C_n^{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor ! \cdot C_n^{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor !}{(n!)^2} = \dfrac{C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}}{n!} = P(A \cap B)$.

$P(A|B) = P(A) = \dfrac{C_n^{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor !}{n!}$.

Ответ: $\dfrac{C_n^{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor !}{n!}$.

16 Каждое воскресенье мальчик играет во дворе в настольный теннис. Ему предлагают сыграть три партии на выбор по одной из трех схем: либо сначала сыграть с чемпионом двора, потом — со своим отцом и третью партию снова с чемпионом, либо в обратном порядке — с отцом, потом — с чемпионом и, наконец, снова с отцом. Какой порядок более выгоден мальчику, если

- ему нужно выиграть хотя бы две партии подряд;
- ему нужно выиграть хотя бы две парти из трёх.

Ни отец мальчика, ни сам мальчик не являются чемпионом двора.

Решение:

Первая подзадача:

Пусть A_1 — выигрыш по первой схеме, A_2 — по второй схеме, B_1 — выигрыш у отца, B_2 — выигрыш у чемпиона.

$P(A_1) = P(B_2) \cdot P(B_1) \cdot (1 - P(B_2)) + P(B_2) \cdot P(B_1) \cdot P(B_2) + (1 - P(B_2)) \cdot P(B_1) \cdot P(B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2) + (1 - P(B_2)) \cdot P(B_1) \cdot P(B_2)$.

$P(A_2) = P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot (1 - P(B_1)) + P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot P(B_1) + (1 - P(B_1)) \cdot P(B_2) \cdot P(B_1) = P(B_1) \cdot P(B_2) + (1 - P(B_1)) \cdot P(B_2) \cdot P(B_1)$.

$P(A_1) - P(A_2) = P(B_1) - P(B_2) > 0 \rightarrow \mathrm{A}_1$ выгоднее.

Вторая подзадача:

$P(A_1) = P(B_2) \cdot P(B_1) \cdot (1 - P(B_2)) + P(B_2) \cdot P(B_1) \cdot P(B_2) + (1 - P(B_2)) \cdot P(B_1) \cdot P(B_2) + P(B_2) \cdot (1 - P(B_1)) \cdot P(B_2)$.

$P(A_2) = P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot (1 - P(B_1)) + P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot P(B_1) + (1 - P(B_1)) \cdot P(B_2) \cdot P(B_1) + P(B_1) \cdot (1 - P(B_2)) \cdot P(B_1)$.

$P(A_1) - P(A_2) = -2 \cdot P(B_1) \cdot P(B_2) + P(B_2) - P(B_1) + 2 \cdot P(B_2) \cdot P(B_1) = (P(B_2) - P(B_1)) \cdot (P(B_1) + P(B_2) - 2P(B_1) \cdot P(B_2)) < 0 \rightarrow \mathrm{A}_2$ выгоднее.

Ответ:

- A_1 выгоднее
- A_2 выгоднее.

17 Двое дуэлянтов стреляются на следуюших условиях: сначала стреляет первый дуэлянт, если он попадает, то дуэль заканчивается в его пользу, если же он промахивается, то стреляет второй. Если он попал, то дуэль кончилась (второй победил), нет — снова стреляет первый и так далее до первого попадания любого из стреляющихся (запасы пороха не ограничены). Пусть первый дуэлянт попадает в цельс вероятностью p_1, а второй — с вероятностью p_2. Чему равна вероятность того, что

- дуэль закончится в пользу первого стрелка?
- в пользу второго стрелка?
- ничья?
- При каком соотношении p_1 и p_2 правила дуэли одинаково справедливы для обоих дуэлянтов?

Решение:

Первая подзадача: $P_1 = p_1 + (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \cdot p_1 + \ldots = \dfrac{p_1}{1 - (1 - p_1) \cdot (1 - p_2)}$ (по формуле геометрической прогрессии).

Вторая подзадача: $P_2 = (1-p_1)\cdot p_2 + (1-p_1)\cdot(1-p_2)\cdot(1-p_1)\cdot p_2 + \ldots = \dfrac{(1-p_1)\cdot p_2}{1-(1-p_1)\cdot(1-p_2)}$ (по формуле геометрической прогрессии).

Третья подзадача: $P_3 = \lim\limits_{n\to\infty}(1-p_1)^n\cdot(1-p_2)^n = 0$

Четвертая подзадача: $P_1 = P_2 \Rightarrow \dfrac{p_1}{1-(1-p_1)\cdot(1-p_2)} = \dfrac{(1-p_1)\cdot p_2}{1-(1-p_1)\cdot(1-p_2)} \Rightarrow p_2 = \dfrac{p_1}{1-p_1}$.

Ответ:

- $\dfrac{p_1}{1-(1-p_1)\cdot(1-p_2)}$
- $\dfrac{(1-p_1)\cdot p_2}{1-(1-p_1)\cdot(1-p_2)}$
- 0
- $p_2 = \dfrac{p_1}{1-p_1}$

Прошлые наработки по задачам из СУНЦа, удалить после завершения

$\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\cos 2x\right) = \cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\sin x\right)$

Решение: $\frac{\pi}{2}+\pi k; \pm\arcsin\left(2-\sqrt{3}\right)+\pi n, n\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{Z}$

Ответ:

.

$\sin\left(\pi\sqrt{x}\right) = \cos\left(\pi\sqrt{2-x}\right)$

Решение: $1+\frac{\sqrt{15}}{8}$

Ответ:

.

Системы тригонометрических уравнений

1. $\begin{cases} \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} x = 1 + \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y, \\ \cos 2y + \sqrt{3}\cos 2x = -1 \end{cases}$

   Решение: $\left(\frac{7}{12}\pi+\pi f; \frac{5}{6}\pi+\pi\left(k+f\right)\right)$, $k, f\in\mathbb{Z}$

   Ответ:

   .

2. $\begin{cases} \cos x \geq 0, \\ \cos x\cdot\sin y = \frac{\sqrt{6}}{4}, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{4} \end{cases}$

   Решение: $\begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}, \\ y = (-1)^n\,\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z} \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{4}+2\pi f, f\in\mathbb{Z}, \\ y = (-1)^m\,\frac{\pi}{3}+\pi m, m\in\mathbb{Z} \end{cases}$

   Ответ:

   .enumerate

Равенства с обратными тригонометрическими функциями

(a) $\arcsin\left(\sin 5\right) = x$

Решение: $5-2\pi$

Ответ:

.

(b) $\arccos(\cos 5) = x$

Решение: $2\pi - 5$

Ответ:

.

(c) $2 \operatorname{arctg} \dfrac{1}{3} + \arcsin \dfrac{4}{5} = x$

Решение: $\frac{\pi}{2}$

Ответ:

.

(d) $\arccos x = \operatorname{arctg} x$

Решение: $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

Ответ:

.

(e) $\arcsin \dfrac{x}{2} + 2 \arccos x = \pi$

Решение: 0

Ответ:

.

(f) $\left(13x^2 + 2x - 14\right) \cdot \arccos x = 0$

Решение: $1; \frac{\sqrt{183}-1}{13}$

Ответ:

.

(g) $\cos\left(\dfrac{4+\sqrt{5}}{2}\sin x + 2\cos x\right) = \sin\left(\dfrac{\sqrt{5}-4}{2}\sin x\right)$

Решение: $\arccos\frac{2}{3} + \arccos\frac{\pi}{6}; \arccos\frac{\sqrt{5}}{5} + \pi - \arccos\left(\frac{\pi\sqrt{5}}{20}\right)$

Ответ:

.

(h) $\arcsin\left(\dfrac{3 - 5\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 6\cos 2x}{5}\right) = x - \dfrac{\pi}{3}$

Решение: $\arcsin\frac{3}{4}; \pi - \arcsin\frac{3}{4}; -\arcsin\frac{1}{3}$

Ответ:

.enumerate

Неравенства с обратными тригонометрическими функциями

i. $2\cos(\arcsin x) - \sin\left(\dfrac{\arccos x}{2}\right) \leq 0$

Решение: $x \in \left[-1; -\frac{7}{8}\right] \cup \{1\}$

Ответ:

.enumerate

Логарифмические и показательные равенства

A. $\log_2 3 \cdot \log_{x+5} 4 - \log_4 (x-5)^2 \cdot \log_{x+5} 2 = 1$

Решение: $4; \sqrt{34}$

Ответ:

.

B. $2 \cdot 7^{\log_{2x}\left(x^2-1\right)^2} - 9 \cdot 14^{\log_{2x}\left(x^2-1\right)^2} + 7 \cdot 4^{\log_{2x}\left(x^2-1\right)} = 0$

Решение: $\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}$

Ответ:

.

C. $\log_{x+2}\log_2\log_{x+1}\left(11x^2+12x\right) = 0$

Решение: $\frac{\sqrt{35}-5}{10}$

Ответ:

.

D. $\log_3 x + \log_x\left(\dfrac{1}{2}\right) = \log_5 x$

Решение: $2^{\pm\left(\sqrt{\frac{\log_3 2\cdot\log_2 5}{\log_2 \frac{5}{3}}}\right)}$

Ответ:

.

E. $\log_3^2(2x+1) + \log_{(x+4)}^2 3 = \log_3^2(x+4) + \log_{(2x+1)}^2 3$

Решение: $3; \frac{-9+\sqrt{57}}{4}$

Ответ:

.

F. $2\log_{(x+3)}\left(12+10x+2x^2\right) + \dfrac{1}{2}\log_{(4+2x)}\left(x^2+6x+9\right) = 5$

Решение: $-1; \frac{-15+\sqrt{17}}{8}$

Ответ:

.enumerate

Системы логарифмических и показательных уравнений

G. $\begin{cases} x^{\log_y 3} = 2\sqrt{x} \\ y^{\log_2 x} = 9 \end{cases}$

Решение: $(4;3), (\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{9})$

Ответ:

.

H. $\begin{cases} \log_{(x+1)}(2x+3) + \log_{(x+2)}\left(x^2+2\right) = 1, \\ \log_{(x+2)}\left(x^2+2\right) + \log_{(x+1)}(10x+6) = 2 \end{cases}$

Решение: $-\frac{1}{2}$

Ответ:

.

I. $\begin{cases} \log_y x \cdot \log_x (y-x) - \log_y x = 1 - 2\log_y x \cdot \log_x 6, \\ \log_{y(y-x)} x + \log_{\frac{x}{324}} x = 0 \end{cases}$

Решение: $(9;12)$

Ответ:

.enumerate

Смешанные равенства

J. $|\sin 3x|^{\operatorname{tg} 5x} = 1$

Решение: $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi f}{3}; \frac{\pi k}{5}, f\neq 3r+1, k\neq 5s,\ f,k,s,r\in\mathbb{Z}$

Ответ:
.

K. $\log_{\cos x}\sin x+\log_{\sin x}\cos x=2$

Решение: $\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$

Ответ:
.enumerate

Логарифмические и показательные неравенства

L. $\log_{\left(\sqrt{3}-1\right)}(x+20)^2\leq\log_{\left(\sqrt{3}-1\right)}\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\log_{\left(2-\sqrt{3}\right)}\left(\left(x+20\right)\left(x^2-2x-8\right)\right)$

Решение: $x\in[-4;-2)\cup(4;7]$

Ответ:
.

M. $\log_{3\sqrt{2}}\left(x^2-6x+4\right)+\log_{\frac{\sqrt{2}}{6}}\left(5-4,5x-0,5x^2\right)\geq 0$

Решение: $x\in\left(-10;\frac{3-\sqrt{33}}{6}\right]$

Ответ:
.

N. $\dfrac{1}{x}\cdot\log_{\frac{4}{10}}\left(\dfrac{12-4\cdot 5^{-x}}{5}\right)\leq\log_{\frac{5}{2}}\dfrac{1}{5}$

Решение: $x\in(-\log_5 3;\log_5 2-1]\cup(0;\log_5 2]$

Ответ:
.

O. $\log_4\left(|2x+1|-|x-2|\right)\geq\log_2\sqrt{\dfrac{x-2}{x-3}}$

Решение: $x\in\left(-\infty;\frac{-7-\sqrt{21}}{2}\right]\cup\left(2;+\infty\right)$

Ответ:
.

P. $\log_{\sqrt[3]{x-1}}\left[\dfrac{(x-1)^2}{2\left(x-\frac{5}{3}\right)^2}\right]\geq 6$

Решение: $x\in\left(2;\frac{10+3\sqrt{2}}{6}\right]$

Ответ:
.

Q. $2\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_{\frac{1}{x}}2\right)+5\log_{\sqrt{x}}\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)\leq 0$

Решение: $x\in\left[\frac{1}{32};\frac{1}{2}\right]$

Ответ:
.

R. $2+\log_{(x-1)}\left(\dfrac{10}{6x^2-15}\right)\leq 0$

Решение: $x\in\left(\frac{\sqrt{10}}{2};2\right)\cup\left\{\frac{5}{2}\right\}$

Ответ:
.

S. $4+\log_4\left(x^2+6x+8\right)>\dfrac{1}{\log_{x+2}4}+\dfrac{1}{\log_{x+4}\sqrt{2}}$

Решение: $x\in\left(-2;-1\right)\cup\left(-1;4\cdot\left(2^{\frac{2}{3}}-1\right)\right)$

Ответ:
.

T. $\left(2^{x+1}-3^{x+1}\right)\sqrt{2^{2x}-2^{x+3}\cdot 3^{x}+11\cdot 3^{2x}}\geq 0$

Решение: $x\in\left(-\infty;\log_{\frac{2}{3}}\left(4+\sqrt{5}\right)\right]\cup\left[\log_{\frac{2}{3}}\left(4-\sqrt{5}\right);-1\right]$

Ответ:
.

U. $\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^{3x^2-10x+2}>\frac{2}{2x^2+1}$

Решение: $x\in\left(-\infty;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{3};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(3;+\infty\right)$

Ответ:
.

V. $|x+1|^{2\sqrt{x+3}}<|x+1|^{1-x}$

Решение: $x\in(-3;-2)\cup\left(3-2\sqrt{5};-1\right)(-1;0)$

Ответ:
.

W. $4\sqrt{\frac{2^x-1}{2^x}}+\sqrt{14}\leq 14\sqrt{\frac{2^{x-2}}{2^x-1}}$

Решение: $x\in(0;3]$

Ответ:
.

X. $\log_{\frac{1}{2}}\log_{\frac{137}{20}}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^x+\frac{3}{5}\right)\geq 0$

Решение: $x\in[-2;1)$

Ответ:
.

Y. $(1+\log_3 x)\sqrt{\log_{3x}\left(\sqrt[3]{\frac{x}{3}}\right)}\leq 2$

Решение: $x\in\left(0;\frac{1}{3}\right)\cup\left[3;3^{\sqrt{13}}\right]$

Ответ:
.

Z. $\log_2(5-x)\cdot\log_{(x+1)}\frac{1}{8}\geq -6$

Решение: $x\in(-1;0)\cup[1;5)$

Ответ:
.enumerate

Смешанные неравенства

. $\log_{|\sin x|}\left(x^2-8x+23\right)>\frac{3}{\log_2|\sin x|}$

Решение: $x\in\left(3;\pi\right)\cup\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2};5\right)$

Ответ:
.

. $x^{\lg\sin x}\geq 1$, if $x>0$

Решение: $x\in(0;1]\cup\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi k\right\},k\geq 0,k\in\mathbb{Z}$

Ответ:

.enumerate