

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος & Εικόνας

Μάθημα 19^ο

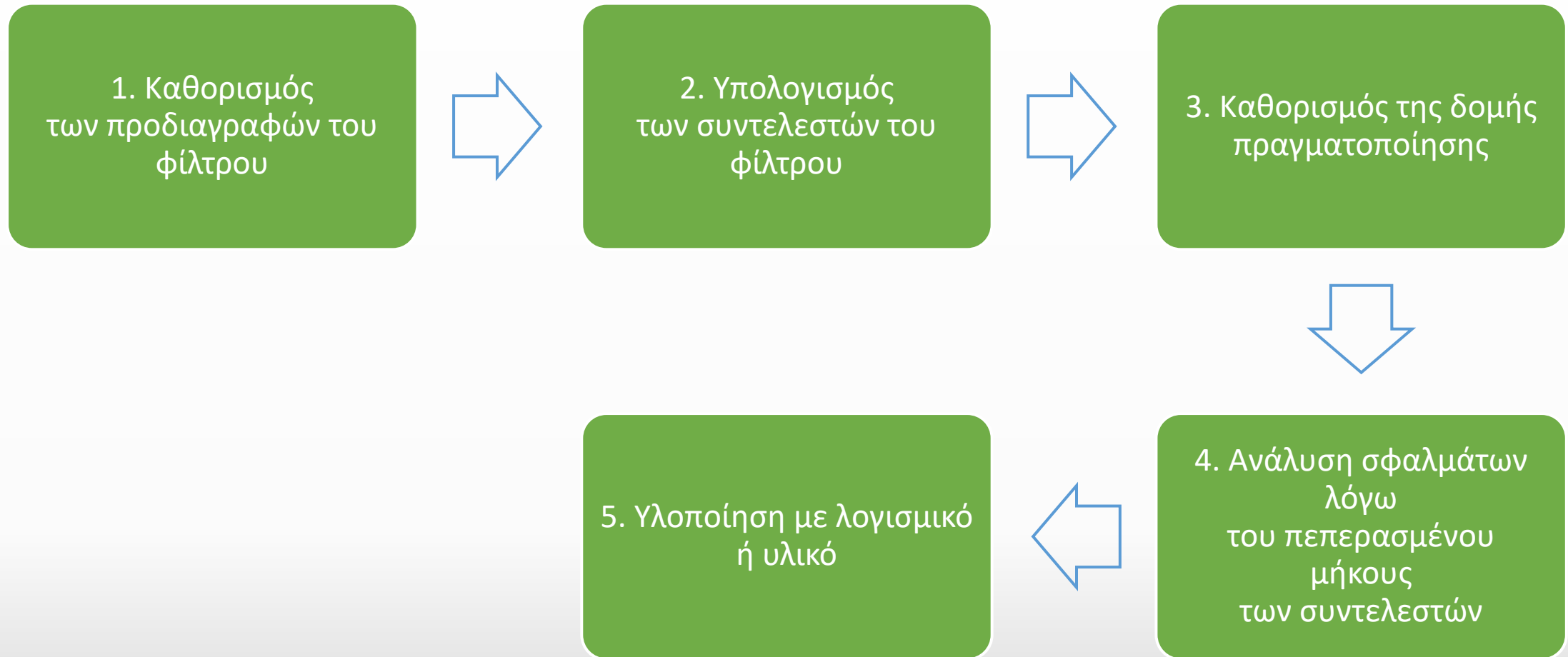
Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών

Ψηφιακά Φίλτρα & Φίλτρα FIR Δομές Πραγματοποίησης FIR Φίλτρων

A. Μπακλέζος

abaklezos@hmu.gr

Υλοποίηση Ψηφιακών Φίλτρων



Finite Impulse Response (FIR) Filters

- Φίλτρα Πεπερασμένης Κρουστικής Απόκρισης (FIR):

Περιγράφονται στο πεδίο του χρόνου από την κρουστική απόκριση:

$$h[n] = \sum_{k=0}^M b_k \delta[n - k]$$

και από τη Γραμμική Εξίσωση Διαφορών με Σταθερούς Συντελεστές:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M h[k]x[n - k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n - k]$$

Η κρουστική απόκριση έχει μήκος $M + 1$ (M η τάξη του φίλτρου)

Το πλήθος των δειγμάτων εισόδου που πρέπει να αποθηκεύονται για τον υπολογισμό ενός δείγματος εξόδου καθορίζει την **τάξη M** του φίλτρου.

Για κάθε ένα δείγμα εξόδου απαιτούνται $M + 1$ πολλαπλασιασμοί και M προσθέσεις.

Finite Impulse Response (FIR) Filters

- Φίλτρα Πεπερασμένης Κρουστικής Απόκρισης (FIR):

$$y[n] = \sum_{k=0}^M h[k]x[n-k]$$

Για $M = 4$ η κρουστική απόκριση έχει μήκος 5 (4 η τάξη του φίλτρου) = $[b_0, b_1, b_2, b_3, b_4]$

$$y[n] = \sum_{k=0}^4 b_k x[n-k] = b_0 x[n-0] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + b_3 x[n-3] + b_4 x[n-4]$$

Για κάθε ένα δείγμα εξόδου απαιτούνται 5 ($M + 1$) πολλαπλασιασμοί και 4 (M) προσθέσεις.

Finite Impulse Response (FIR) Filters

FIR στο πεδίο της συχνότητας περιγράφονται από :

Συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(z) = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m}$$

Απόκριση συχνότητας:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^M h[k] e^{-j\omega k}$$

Πλεονεκτήματα FIR φίλτρων:

Πάντα ευσταθή, ακόμα και μετά την αποκοπή δεκαδικών ψηφίων των συντελεστών τους.

Πάντα γραμμικής φάσης (για τις συμμετρικές περιπτώσεις που μελετάμε)

Απλά στη σχεδίαση, υλοποιούνται με απλούς υπολογισμούς.

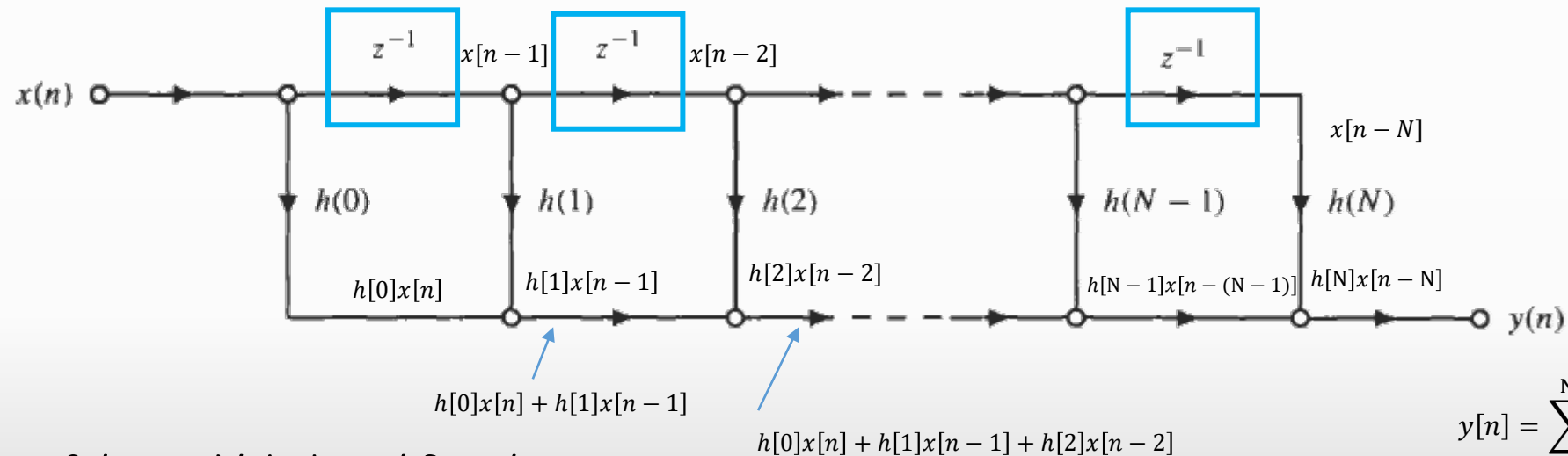
Βρίσκουν πολλές πρακτικές εφαρμογές

Μειονεκτήματα των FIR φίλτρων :

Υλοποιούνται με περισσότερους υπολογισμούς, επομένως χρειάζονται περισσότερους υπολογιστικούς πόρους.

FIR φίλτρο ως «γραμμή καθυστέρησης»

- Μπορούμε να θεωρήσουμε ένα FIR φίλτρο ως μία **γραμμή καθυστέρησης** (delay line), στην οποία ολισθαίνουν τα δείγματα του σήματος εισόδου $x[n]$ και από τους συντελεστές $h[n]$ που πολλαπλασιάζονται με τις καθυστερήσεις $x[n - m]$ των δειγμάτων.
- Τα αποτελέσματα των πολλαπλασιασμών προστίθενται για να δώσουν την τελική έξοδο του φίλτρου $y[n]$.
- Π.χ. φίλτρο (N) **8^{ης}** τάξης θα αποθηκεύσει τα **8** προηγούμενα εισερχόμενα δείγματα $\{x[n - 1], \dots, x[n - 8]\}$ που προηγούνται του τρέχοντος δείγματος $x[n]$.
- Και τα (N+1) **9** δείγματα θα επηρεάσουν το δείγμα εξόδου $y[n]$ του FIR φίλτρου.



$$y[n] = \sum_{k=0}^N h[k]x[n - k]$$

- Direct Form - Ευθεία Μορφή ψηφιακού δικτυώματος
- N + 1** (**9**) πολλαπλασιασμοί, **N** (**8**) προσθέσεις, **N** (**8**) καθυστερήσεις (δηλαδή θέσεις μνήμης)

Φίλτρα Γραμμικής Φάσης (Τύποι FIR)

Τα ψηφιακά φίλτρα έχουν **γραμμική φάση**, όταν η απόκριση συχνότητας μπορεί να γραφεί ως:

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}) e^{-ja\omega}, \quad a \in \mathbb{R}$$

όπου $A(e^{j\omega})$ είναι μία πραγματική συνάρτηση της συχνότητας ω .

Για τη φάση της απόκρισης συχνότητας $H(e^{j\omega})$ ισχύει:

$$\varphi_h(\omega) = \begin{cases} -a\omega & \text{όταν } A(e^{j\omega}) \geq 0 \\ -a\omega + \pi & \text{όταν } A(e^{j\omega}) < 0 \end{cases}$$

- ❖ Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για την επίτευξη **γραμμικής φάσης** είναι η **συμμετρία** των συντελεστών της κρουστικής απόκρισης.
- ❖ Στα φίλτρα γραμμικής φάσης η καθυστέρηση ομάδας είναι **σταθερή**:

$$\tau_h = -\frac{d\varphi_h(\omega)}{d\omega} = -a$$

- ❖ Άρα όλες οι συχνότητες του σήματος εισόδου υφίστανται την ίδια καθυστέρηση κατά τη διέλευσή τους από το ψηφιακό φίλτρο και έτσι δεν αλλοιώνεται η δομή του σήματος.

Φίλτρα Γραμμικής Φάσης (Τύποι FIR)

Τα FIR φίλτρα (με κρουστική απόκριση $h[n]$) έχουν γραμμική φάση (αν υπάρχει συμμετρία των συντελεστών της κρουστικής απόκρισης)

Ο τύπος της γραμμικής φάσης εξαρτάται από

- αν ο αριθμός N είναι άρτιος ή περιττός και
- αν η κρουστική συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή

Τύπος Ι: Ο αριθμός N άρτιος και η $h[n]$ άρτια (με τον άξονα συμμετρίας να διέρχεται από) ως προς το σημείο $n = N/2$.

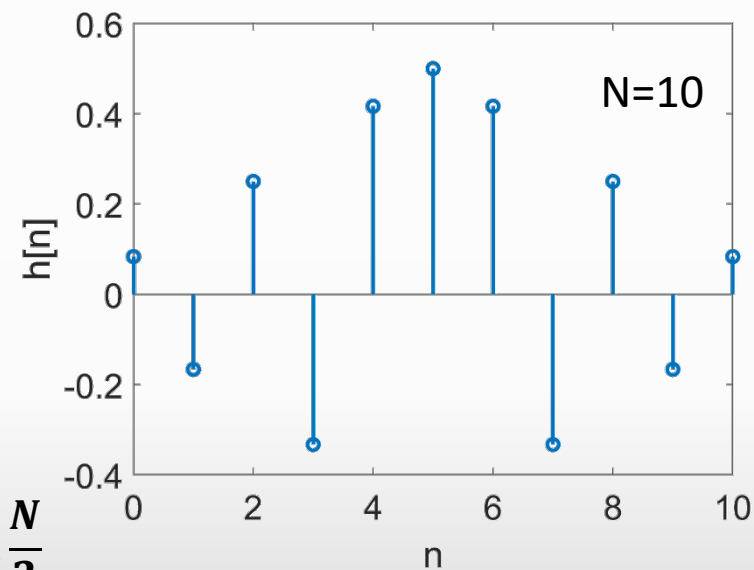
$$h[n] = h[N - n], n \in [0, N]$$

Η απόκριση συχνότητας είναι

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{N\omega}{2}} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}} \alpha_k \cos(\omega k)$$

Με

$$\alpha_0 = h\left[\frac{N}{2}\right] \text{ και } \alpha_k = 2h\left[\frac{N}{2} - k\right], k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$



Φίλτρα Γραμμικής Φάσης (Τύποι FIR)

Τα FIR φίλτρα (με κρουστική απόκριση $h[n]$) έχουν γραμμική φάση.

Ο τύπος της γραμμικής φάσης εξαρτάται από

- αν ο αριθμός N είναι άρτιος ή περιττός και
- αν η κρουστική συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή

Τύπος II: Ο αριθμός N περιττός και η $h[n]$ άρτια (με τον άξονα συμμετρίας να διέρχεται από) ως προς το σημείο $n = N/2$ (δεν υπάρχει στην $h[n]$)

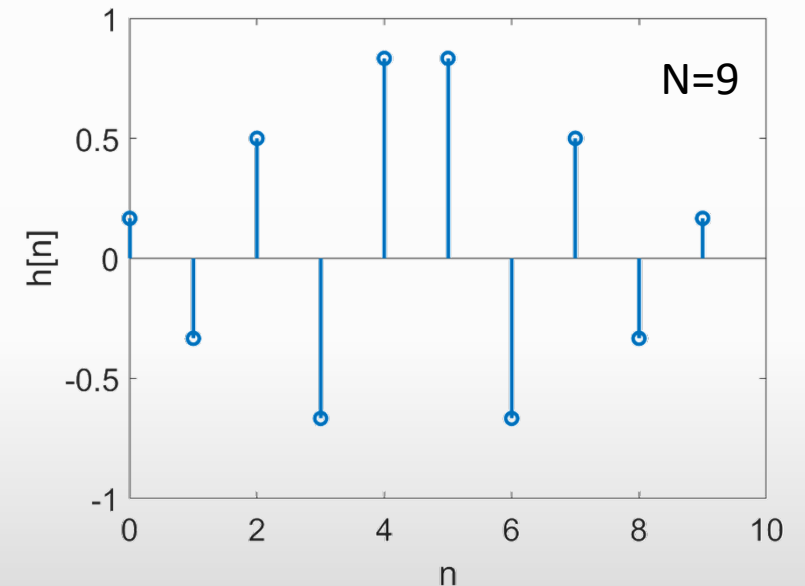
$$h[n] = h[N - n], n \in [0, N]$$

Η απόκριση συχνότητας είναι

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{N\omega}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{N+1}{2}} b_k \cos\left(\omega\left(k - \frac{1}{2}\right)\right)$$

Με

$$b_k = 2h\left[\frac{N+1}{2} - k\right], k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$



Φίλτρα Γραμμικής Φάσης (Τύποι FIR)

Τα FIR φίλτρα (με κρουστική απόκριση $h[n]$) έχουν γραμμική φάση.

Ο τύπος της γραμμικής φάσης εξαρτάται από

- αν ο αριθμός N είναι άρτιος ή περιττός και
- αν η κρουστική συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή

Τύπος III: Ο αριθμός N άρτιος και η $h[n]$ περιττή (με κέντρο συμμετρίας) ως προς το σημείο $\left(\frac{N}{2}, 0\right)$

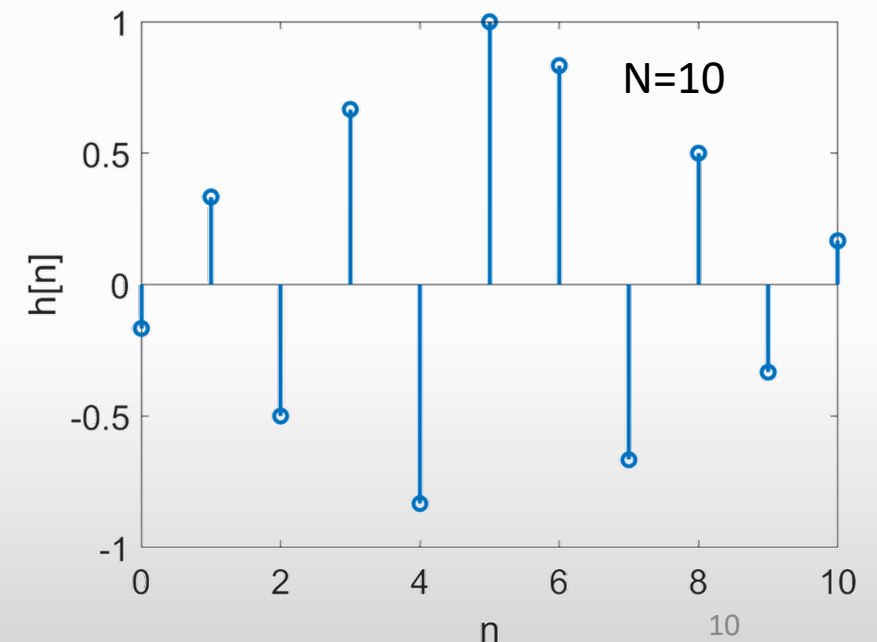
$$h[n] = -h[N - n], n \in [0, N]$$

Η απόκριση συχνότητας είναι

$$H(e^{j\omega}) = je^{-j\frac{N\omega}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} c_k \sin(\omega k)$$

Με

$$c_k = 2h\left[\frac{N}{2} - k\right], k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$



Φίλτρα Γραμμικής Φάσης (Τύποι FIR)

Τα FIR φίλτρα (με κρουστική απόκριση $h[n]$) έχουν γραμμική φάση.

Ο τύπος της γραμμικής φάσης εξαρτάται από

- αν ο αριθμός N είναι άρτιος ή περιττός και
- αν η κρουστική συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή

Τύπος IV: Ο αριθμός N περιττός και η $h[n]$ περιττή (με κέντρο συμμετρίας) ως προς το σημείο $\left(\frac{N}{2}, 0\right)$ (δεν υπάρχει στην $h[n]$)

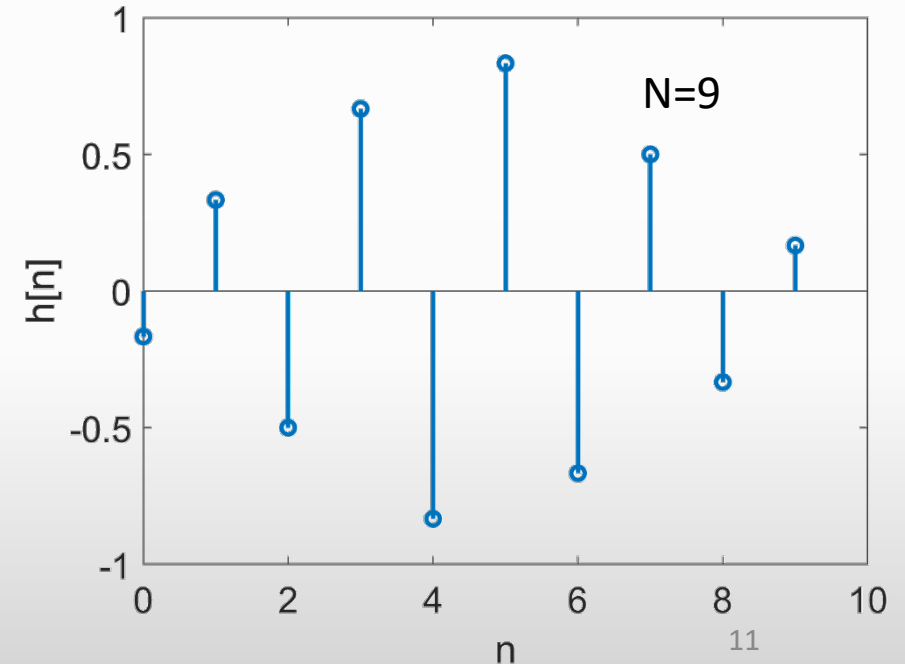
$$h[n] = -h[N - n], n \in [0, N]$$

Η απόκριση συχνότητας είναι

$$H(e^{j\omega}) = je^{-j\frac{N\omega}{2}} \sum_{k=1}^{\frac{N+1}{2}} d_k \sin\left(\omega\left(k - \frac{1}{2}\right)\right)$$

Με

$$d_k = 2h\left[\frac{N+1}{2} - k\right], k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$

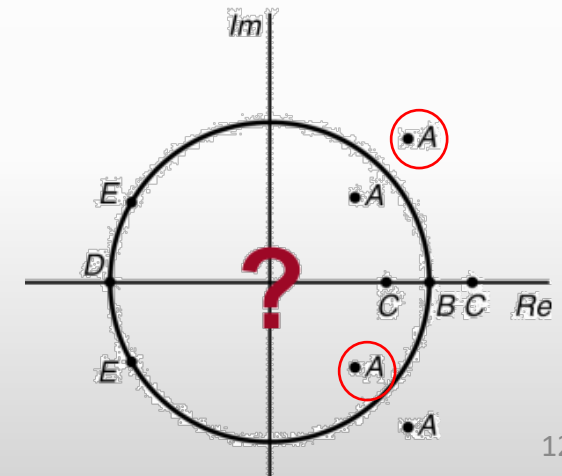


Φίλτρα Γραμμικής Φάσης (Τύποι FIR)

Για τα φίλτρα FIR γραμμικής φάσης :

- Αν το z_0 είναι μηδενικό τότε και το z_0^{-1} είναι μηδενικό $H(z_0) = 0 \rightarrow H(z_0^{-1}) = H\left(\frac{1}{z_0}\right) = 0$
- Μηδενικά που είναι πραγματικοί αριθμοί και δεν είναι πάνω στο μοναδιαίο κύκλο εμφανίζονται σε ζεύγη α και $1/\alpha$
- Αν ένα μιγαδικό z_0 είναι μηδενικό τότε το συζυγές του z_0^* είναι μηδενικό επίσης. Όμως και τα z_0^{-1} , $(z_0^*)^{-1}$ θα είναι μηδενικά άρα τα μιγαδικά μηδενικά \rightarrow μηδενικά σε τετράδες.
- Αν το φίλτρο είναι τάξης N , με N περιττό και το φίλτρο συμμετρικό (άρτιο) τότε η $H(z)$ θα έχει μηδενικό στο $z=-1$
- Αν το φίλτρο είναι αντισυμμετρικό (περιττό) τότε η $H(z)$ θα έχει μηδενικό στο $z=+1$ για άρτια και περιττά N

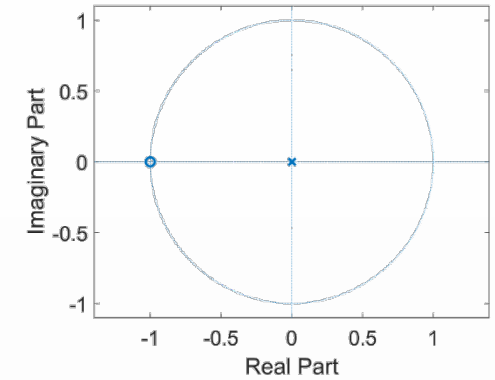
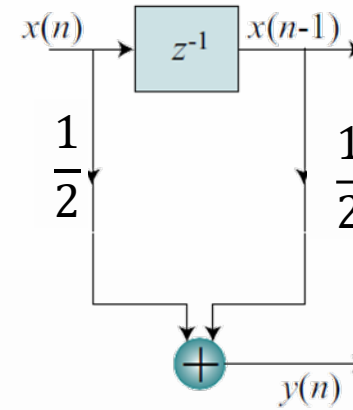
$$z\bar{z} = |z|^2 \rightarrow z = \frac{|z|^2}{\bar{z}} \rightarrow z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$



Φίλτρα FIR

- Παράδειγμα : Η εξίσωση διαφορών ενός απλού συστήματος μέσης τιμής

$$y[n] = \frac{1}{2} (x[n] + x[n-1])$$



Η συνάρτηση μεταφοράς είναι

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1} = \frac{1}{2} (1 + z^{-1})$$

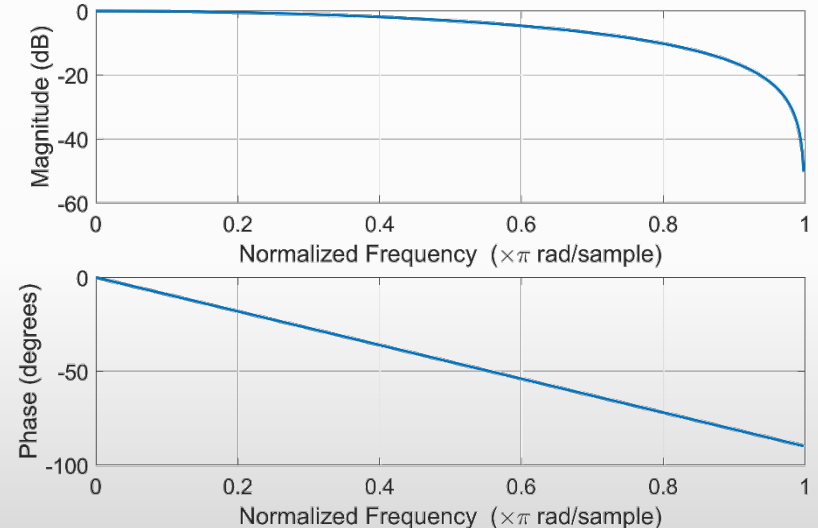
$$H(z) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z} + \frac{1}{z} \right) = \frac{z + 1}{2z}$$

ένας πόλος στο $z = 0$, ένα μηδενικό στο $z = -1$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega} + 1}{2e^{j\omega}} = \frac{e^{j\frac{\omega}{2}}(e^{j\frac{\omega}{2}} + e^{-j\frac{\omega}{2}})}{2e^{j\omega}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2e^{j\frac{\omega}{2}}} \left(\left(\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \right) + \left(\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) - j\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \right) \right)$$

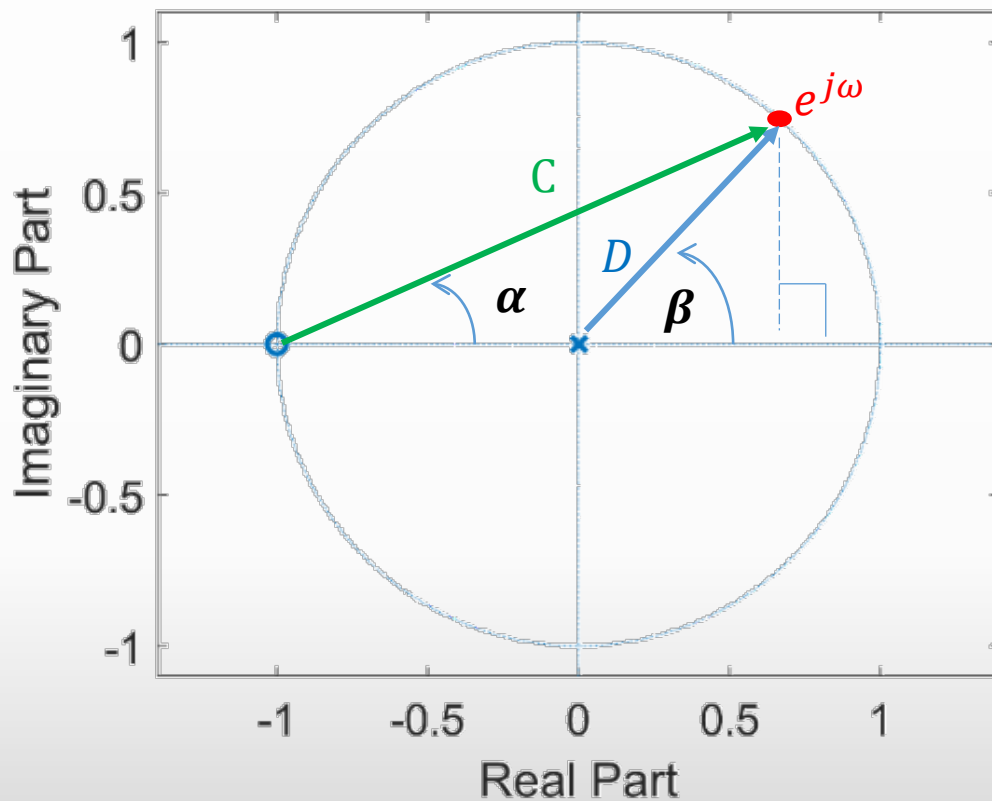
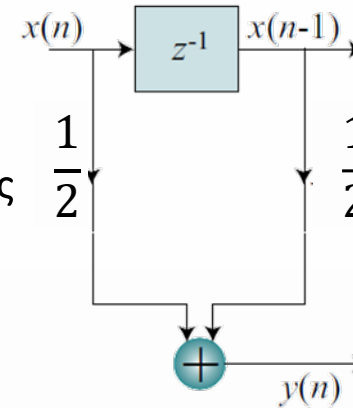
$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{\omega}{2}} \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \rightarrow |H(e^{j\omega})| = \cos\left(\frac{\omega}{2}\right), \varphi(\omega) = -\frac{\omega}{2}$$



Φίλτρα FIR

- Παράδειγμα (συνέχεια): Η εξίσωση διαφορών ενός απλού συστήματος μέσης τιμής

$$y[n] = \frac{1}{2} (x[n] + x[n-1])$$



$$H(e^{j\omega}) = \frac{(Ce^{j\alpha})}{(De^{j\beta})} = Ve^{j\Theta} \text{ με } |H(e^{j\omega})| = V = \frac{C}{D} \text{ και } \Theta = \alpha - \beta$$

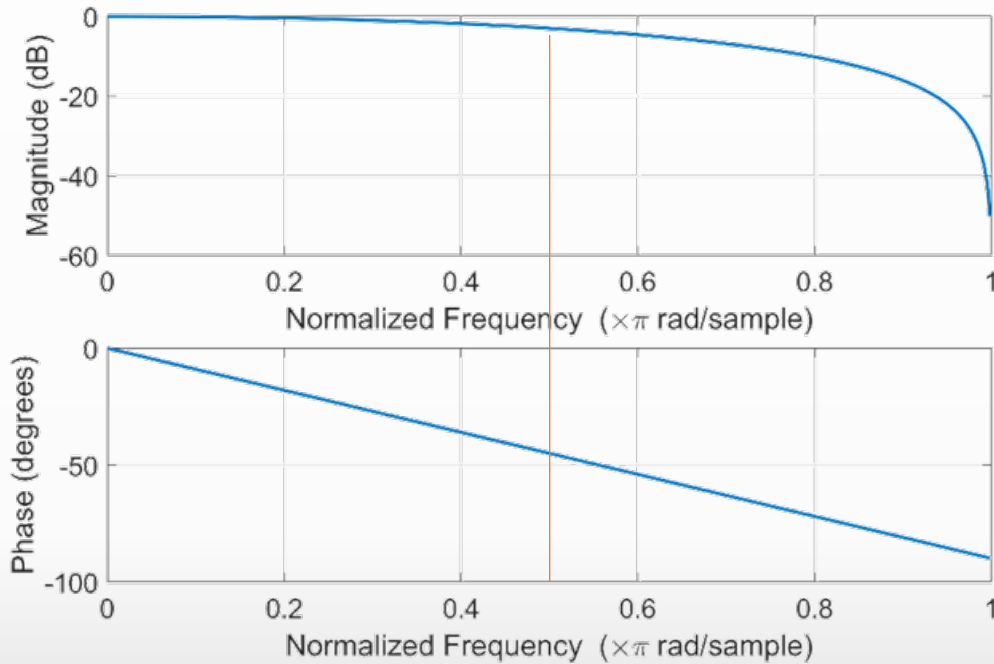
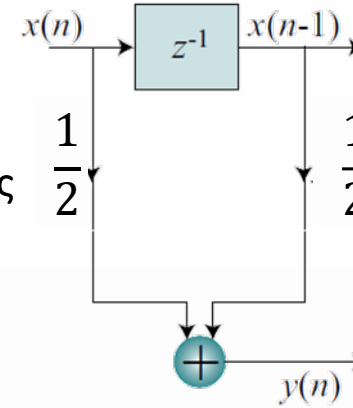
- $\omega = 0$: $V = \frac{C}{D} = \frac{2}{1} = 2$ και $\Theta = \alpha - \beta = 0 - 0 = 0$
- $\omega = \frac{\pi}{2}$: $V = \frac{C}{D} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$ και $\Theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$
- $\omega = \pi$: $V = \frac{C}{D} = \frac{0}{1} = 0$ και $\Theta = 0 - \pi = -\pi$

Για πληρέστερα αποτελέσματα θα έπρεπε να πάρουμε τουλάχιστον και τα $\omega = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

Φίλτρα FIR

- Παράδειγμα (συνέχεια): Η εξίσωση διαφορών ενός απλού συστήματος μέσης τιμής

$$y[n] = \frac{1}{2} (x[n] + x[n-1])$$



$$H(e^{j\omega}) = \frac{(Ce^{j\alpha})}{(De^{j\beta})} = Ve^{j\Theta} \text{ με } |H(e^{j\omega})| = V = \frac{C}{D} \text{ και } \Theta = \alpha - \beta$$

- $\omega = 0 : V = \frac{C}{D} = \frac{2}{1} = 2 \text{ και } \Theta = \alpha - \beta = 0 - 0 = 0$
- $\omega = \frac{\pi}{2} : V = \frac{C}{D} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \text{ και } \Theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$
- $\omega = \pi : V = \frac{C}{D} = \frac{0}{1} = 0 \text{ και } \Theta = 0 - \pi = -\pi$

Φίλτρα FIR

- Παράδειγμα (συνέχεια): Η εξίσωση διαφορών ενός απλού συστήματος μέσης τιμής

$$y[n] = \frac{1}{2} (x[n] + x[n-1])$$

Η απόκρισης συχνότητας είναι

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{\omega}{2}} \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \rightarrow |H(e^{j\omega})| = \cos\left(\frac{\omega}{2}\right), \varphi(\omega) = -\frac{\omega}{2}$$

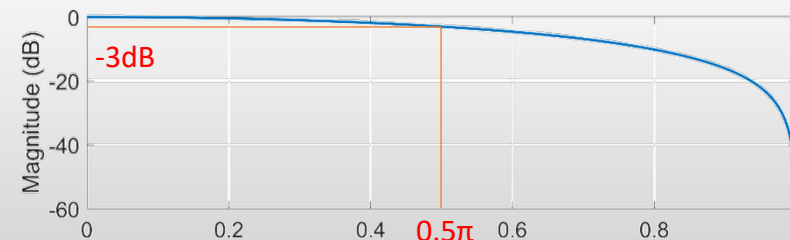
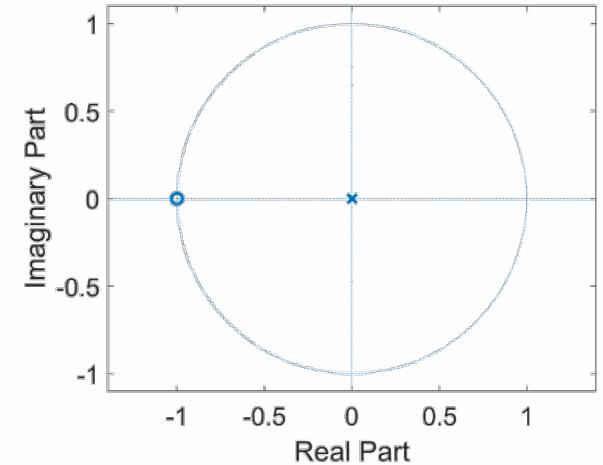
Το κέρδος του συστήματος στη συχνότητα ω είναι

$$G(\omega) = 20 \log_{10} |H(e^{j\omega})|$$

Για το χαμηλοπερατό φίλτρο στη συχνότητα αποκοπής ω_c :

$$G(\omega) = 20 \log_{10} |H(e^{j\omega})| \Big|_{\omega=\omega_c} = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |H(e^{j\omega})| \Big|_{\omega=0} \right) = 20 \log_{10} \left(|H(e^{j\omega})| \Big|_{\omega=0} \right) - 20 \log_{10}(\sqrt{2}) = 0 - 3.0103 \cong -3dB$$

$$|H(e^{j\omega})| \Big|_{\omega=\omega_c} = 0.707 \cdot |H(e^{j\omega})| \Big|_{\omega=0}$$



Φίλτρα FIR

- Παράδειγμα : Η εξίσωση διαφορών ενός απλού ψηφιακού διαφοριστή είναι

$$y[n] = x[n] - x[n - 1]$$

Η συνάρτηση μεταφοράς είναι

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{1} = 1 - z^{-1}$$

$$H(z) = 1 - \frac{1}{z} = \frac{z}{z} - \frac{1}{z} = \frac{z - 1}{z}$$

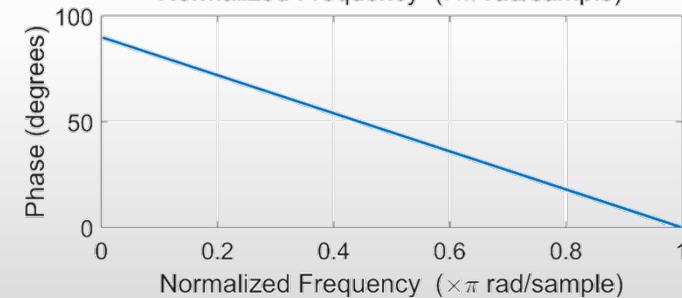
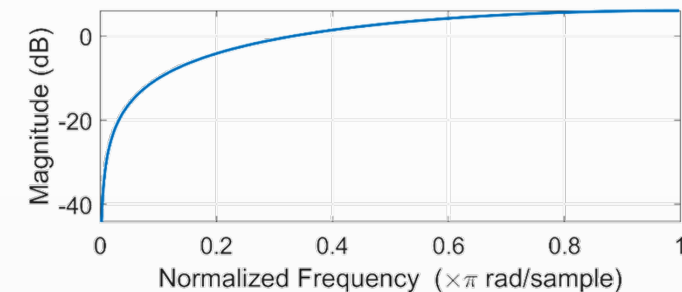
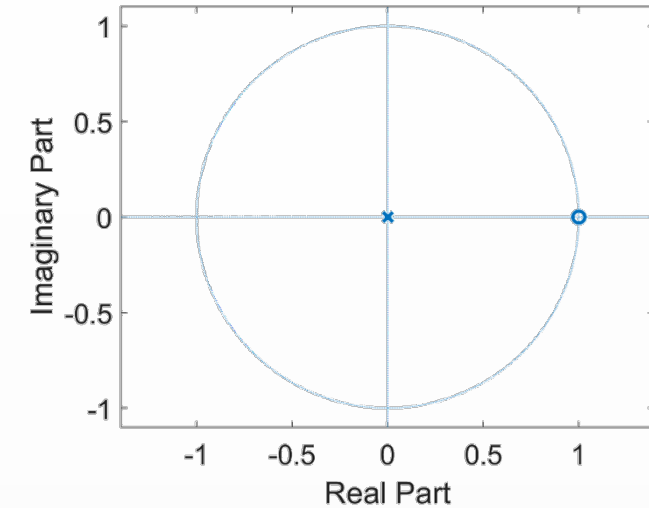
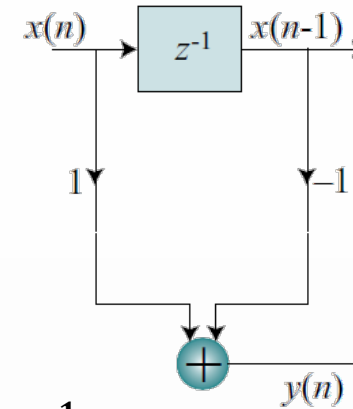
ένας πόλος στο $z = 0$, ένα μηδενικό στο $z = 1$

$$H(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j\omega} = 1 - (e^{-j\frac{\omega}{2}})^2 = e^{-j\frac{\omega}{2}}(e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}) =$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{\omega}{2}} \left(\left(\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \right) - \left(\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) - j\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \right) \right) = 2je^{-j\frac{\omega}{2}} \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$j = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$\rightarrow |H(e^{j\omega})| = 2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right), \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}$$



Φίλτρα FIR

- Παράδειγμα : Η εξίσωση διαφορών ενός συστήματος μέσης τιμής του σήματος

$$y[n] = \frac{1}{3} (x[n] + x[n-1] + x[n-2])$$

Η συνάρτηση μεταφοράς είναι

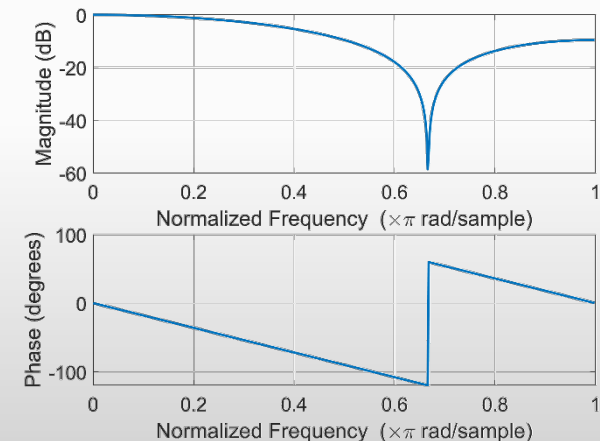
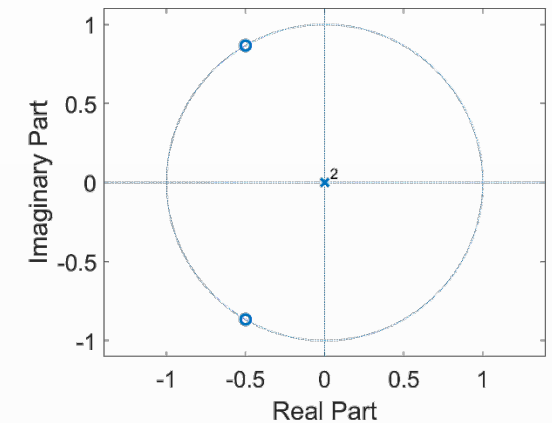
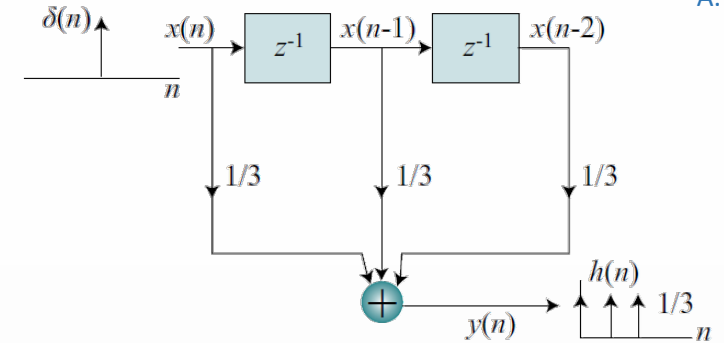
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{3} \frac{1 + z^{-1} + z^{-2}}{1} = \frac{1}{3} (1 + z^{-1} + z^{-2})$$

$$H(z) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{z^2}{z^2} + \frac{z}{z^2} + \frac{1}{z^2} \right) = \frac{z^2 + z + 1}{3z^2}$$

ένας πόλος στο $z = 0$, δύο μηδενικά στα $z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{3} (1 + e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}) = \frac{1}{3} e^{-j\omega} (e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega}) = \frac{1}{3} e^{-j\omega} ((e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + 1)$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{3} e^{-j\omega} (2\cos(\omega) + 1) \rightarrow |H(e^{j\omega})| = \frac{1}{3} (2\cos(\omega) + 1), \varphi(\omega) = -\omega$$



Μέθοδοι Σχεδίασης FIR Φίλτρων

Σχεδιασμός φίλτρου = υπολογισμός των συντελεστών $h[n]$ ώστε το φίλτρο να πληροί τις επιθυμητές προδιαγραφές μέτρου και φάσης.

Μέθοδοι σχεδιασμού FIR φίλτρων (μεταξύ άλλων):

- ❖ **Μέθοδος παραθύρου** (window method) - Λόγω της απλότητας και της αποτελεσματικότητάς της, είναι η πιο συχνά χρησιμοποιούμενη. (**Matlab fir1**)
- ❖ **Μέθοδος δειγματοληψίας στη συχνότητα** (frequency sampling method) - Εύκολη στην κατανόηση και στη χρήση, αλλά παράγει φίλτρα με χαμηλή εξασθένιση στη ζώνη αποκοπής. (**Matlab fir2**)
- ❖ **Μέθοδος βέλτιστης σχεδίασης** (optimal method) - Δίνει την καλύτερη δυνατή απόκριση συχνότητας για συγκεκριμένο πλήθος συντελεστών. (**Matlab firpm**)

Όλες οι μέθοδοι μπορούν να παράξουν FIR φίλτρα γραμμικής φάσης.

Ο υπολογισμός της **τάξης του φίλτρου** προκύπτει από επαναληπτική διαδικασία.

Αν η ζώνη μετάβασης του σχεδιασμένου φίλτρου είναι:

- ❖ ευρύτερη από ότι χρειάζεται, τότε **αυξάνεται** η τάξη του φίλτρου.
- ❖ στενότερη από την απαιτούμενη, τότε **μειώνεται** η τάξη του φίλτρου ώστε να εξοικονομηθούν πόροι υλικού ή/και λογισμικού

Μέθοδος Παραθύρου

Έστω ο σχεδιασμός ενός ιδανικού **βαθυπερατού** FIR φίλτρου με απόκριση συχνότητας:

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\alpha\omega}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

Η κρουστική απόκριση $h_d[n]$ του ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου είναι:

$$h_{lp}[n] = IDTFT\{H_{lp}(e^{j\omega})\} = \dots = \frac{\sin[\omega_c(n-a)]}{\pi(n-a)}$$

Περιορίζουμε την γενικά άπειρου μήκους απόκριση $h_{LP}[n]$ με ένα παράθυρο $w[n]$:

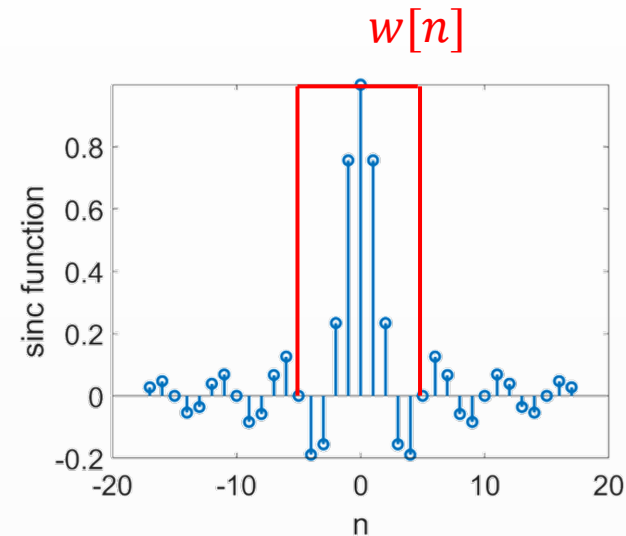
$$h[n] = h_{lp}[n] w[n]$$

Το παράθυρο πρέπει να είναι συμμετρικό (δηλ. $w[n] = w[N-n]$), για να έχουμε γραμμική φάση.

Μετατοπίζουμε χρονικά την $h[n]$ κατά $n_0 = (N-1)/2$ δείγματα, ώστε το φίλτρο να γίνει αιτιατό.

Η απόκριση συχνότητας του φίλτρου είναι:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} H_{lp}(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{lp}(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

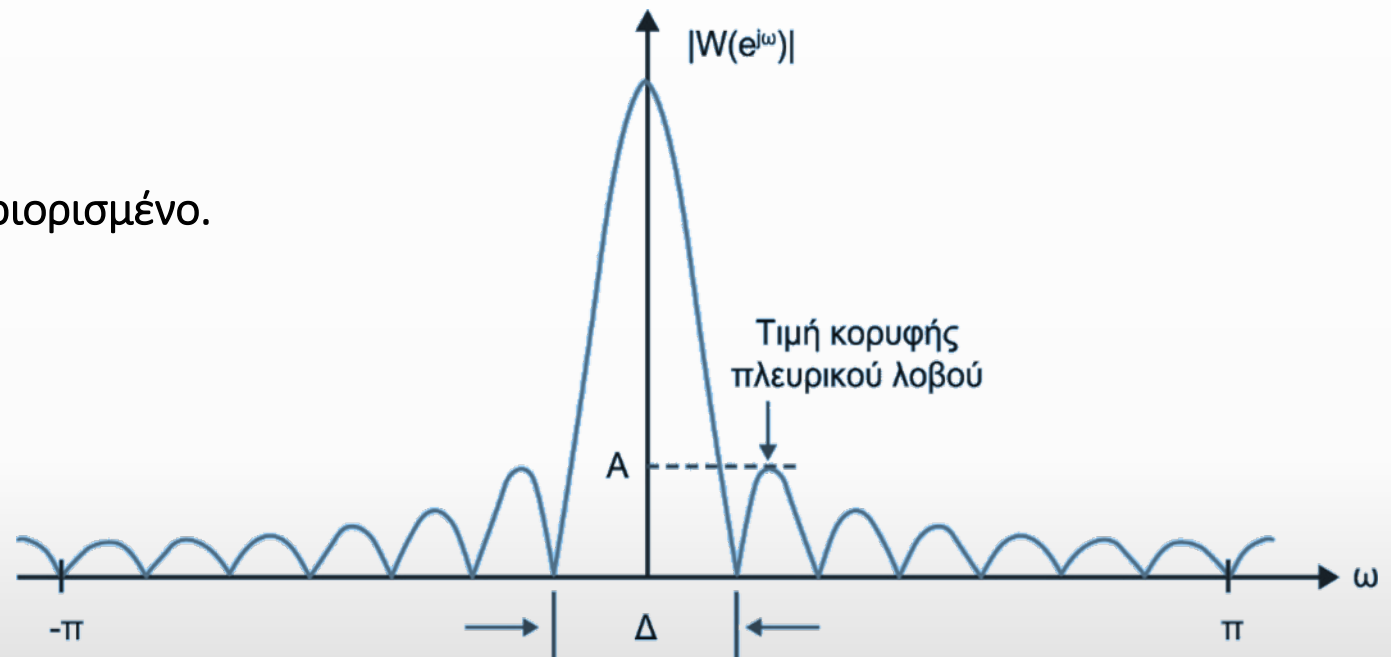


Επιπτώσεις του παραθύρου στα χαρακτηριστικά του φίλτρου

- Το εύρος (Δ) κύριου λοβού της $W(e^{j\omega})$ καθορίζει το εύρος της ζώνης μετάβασης (επιλεκτικότητα φίλτρου, selectivity) στην απόκριση συχνότητας $H_{lp}(e^{j\omega})$.
- Το πλάτος κορυφής (A) του πλευρικού λοβού της $W(e^{j\omega})$ καθορίζει την κυμάτωση (ripple) στην απόκριση συχνότητας $H_{lp}(e^{j\omega})$.

Ιδανικό παράθυρο είναι αυτό που εξασφαλίζει:

- Εύρος κύριου λοβού, όσο το δυνατό **πιο στενό**.
- Πλάτος πλευρικών λοβών όσο το δυνατό **πιο περιορισμένο**.



DTFT τυπικής συνάρτησης παραθύρου

Επιπτώσεις του παραθύρου στα χαρακτηριστικά του φίλτρου

Φασματική Διάχυση(Spectral Leakage): Η «παραθύρωση» του σήματος προκαλεί τη **διεύρυνση** του φάσματος του αρχικού σήματος κατά το ενεργό εύρος ζώνης του φάσματος της ακολουθίας παραθύρου.

Οι πλευρικοί λοβοί προκαλούν κυματώσεις στο φάσμα του παραθύρου, δηλαδή **διαρροή ενέργειας** (energy leakage) από τον κεντρικό στους πλευρικούς λοβούς.

Αυτό προκαλεί την εμφάνιση συχνοτήτων που δεν υπήρχαν στο αρχικό σήμα (αλλοίωση).

Η διαρροή εξαρτάται από τη σχέση πλάτους μεταξύ του κεντρικού και των πλευρικών λοβών. Όσο μεγαλύτερη είναι αυτή η σχέση, τόσο μικρότερη είναι η διαρροή ενέργειας

- Όσο μεγαλύτερο είναι το μήκος της ακολουθίας παραθύρου, τόσο μικρότερο είναι το ενεργό εύρος ζώνης του και επομένως τόσο μικρότερη είναι και η φασματική διάχυση.
- Άρα για τη **μείωση της φασματικής διάχυσης** απαιτείται η **αύξηση του μήκους της ακολουθίας παραθύρου**.
- Όταν η διάρκεια του παραθύρου τείνει στο άπειρο, το πλάτος των πλευρικών λοβών τείνει στο μηδέν και το φάσμα του παραθύρου τείνει στην κρουστική συνάρτηση $\delta[\omega]$. Επομένως, δεν υπάρχει καμία φασματική επίδραση στο σήμα (ιδανικό παράθυρο).
 - Όμως το παράθυρο αυτό δεν έχει καμία πρακτική χρησιμότητα, καθώς δεν τεμαχίζει το σήμα σε τμήματα.

Μέθοδος Παραθύρου – Συνήθεις Συναρτήσεις Παράθυρων

Ορθογώνιο :

$$w[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n < N \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Bartlett (Τριγωνικό) παράθυρο:

$$w[n] = 1 - \frac{2 \left| n - \frac{N-1}{2} \right|}{N-1}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Hamming:

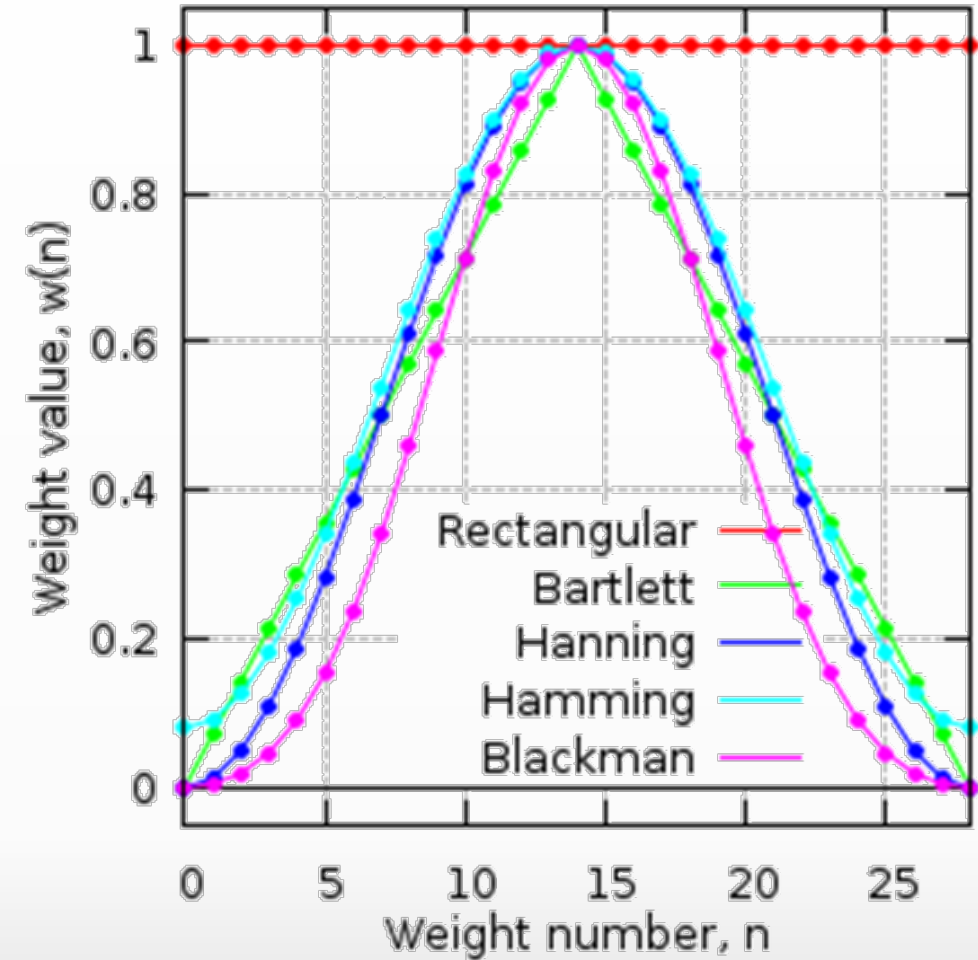
$$w[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right), & 0 \leq n < N \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Hanning:

$$w[n] = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right), & 0 \leq n < N \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Blackman:

$$w[n] = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right), & 0 \leq n < N \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$



Μέθοδος Παραθύρου – Συνήθεις Συναρτήσεις Παράθυρων

Ορθογώνιο παράθυρο (rectangular, boxcar) μήκους N σημείων

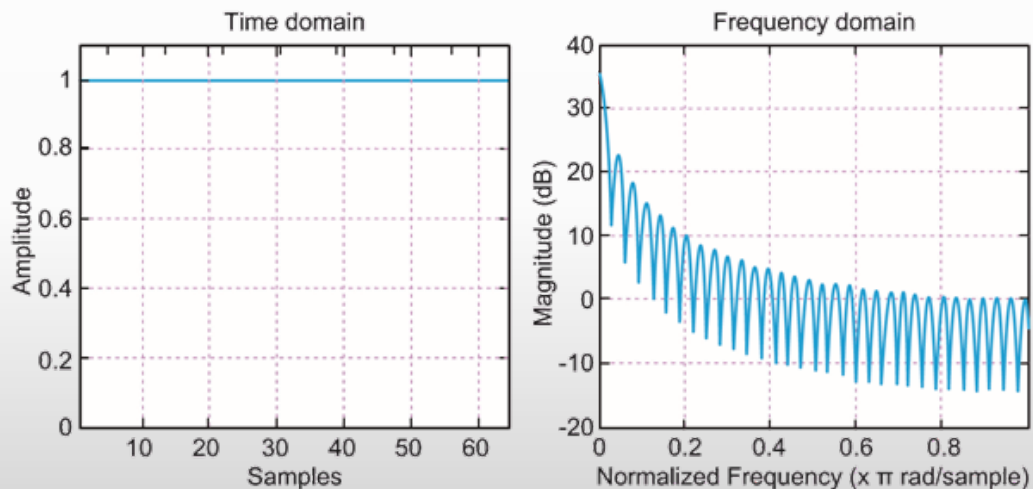
$$w[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

DTFT:

$$W(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} \left[\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} \right]$$

Απόκριση πλάτους:

$$W_r(\omega) = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$$



Ορθογώνιο παράθυρο και
φάσμα πλάτους (απολαβή, dB)

$$(N = 64)$$

Μέθοδος Παραθύρου – Συνήθεις Συναρτήσεις Παράθυρων

Ορθογώνιο παράθυρο (rectangular, boxcar) μήκους N σημείων

$$w[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

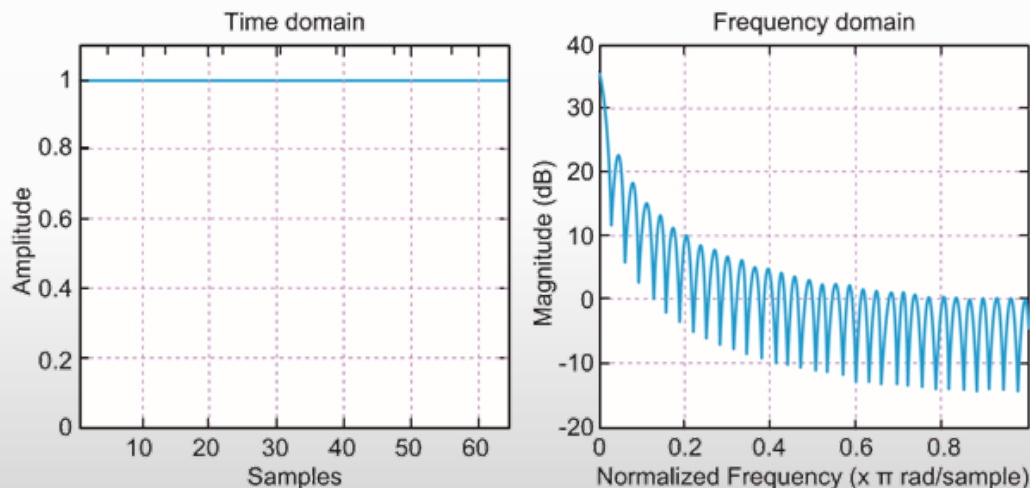
Πλάτος κεντρικού λοβού = N .

Εύρος ζώνης συχνοτήτων κεντρικού λοβού = $4\pi/N$, Το πλάτος του πρώτου πλευρικού λοβού είναι $\sim 2N/3\pi$ (μικρότερο κατά $13,3 \text{ dB}$ από το πλάτος κύριου λοβού).

Οι υπόλοιποι πλευρικοί λοβοί εξασθενούν με ρυθμό ανάλογο του $1/\omega$ (6 dB/οκτάβα).

$$\# \text{ οκτάβες} = \log_2 \left(\frac{f_2}{f_1} \right)$$

διπλασιασμός συχνότητας = 1 οκτάβα



Ορθογώνιο παράθυρο και
φάσμα πλάτους (απολαβή, dB)

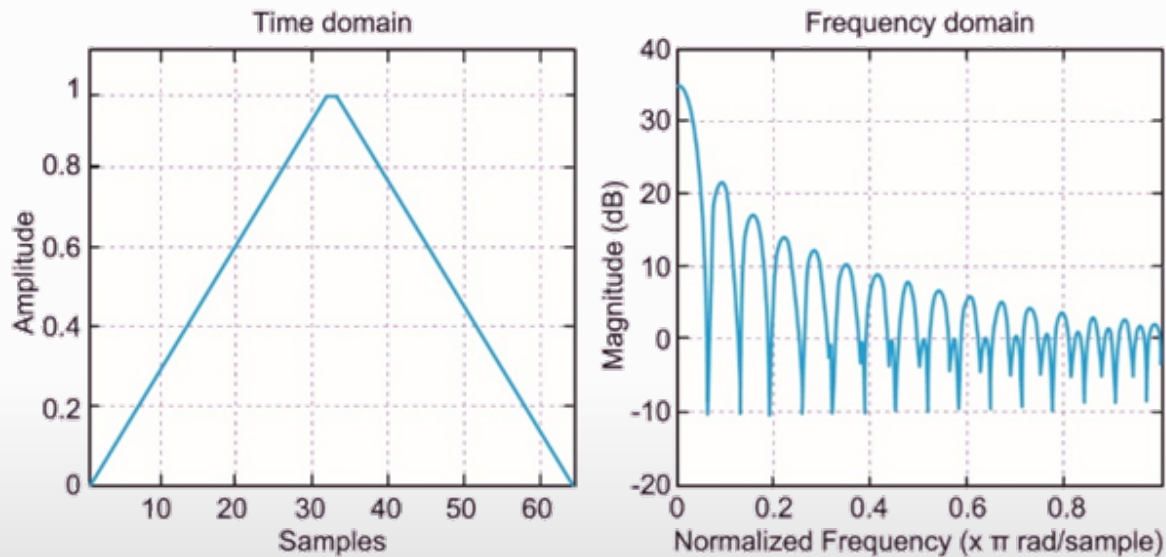
$$(N = 64)$$

Μέθοδος Παραθύρου – Συνήθεις Συναρτήσεις Παράθυρων

Bartlett (Τριγωνικό) παράθυρο:

$$w[n] = 1 - \frac{2 \left| n - \frac{N-1}{2} \right|}{N-1}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Η διαφορά μεταξύ του πλάτους του κεντρικού και του πρώτου πλευρικού λοβού είναι -26.5 dB, το εύρος ζώνης του κεντρικού λοβού είναι $8\pi/N$ και ο ρυθμός εξασθένισης των πλευρικών λοβών είναι 12 dB/octave.



Bartlett παράθυρο και
φάσμα πλάτους (απολαβή, dB)

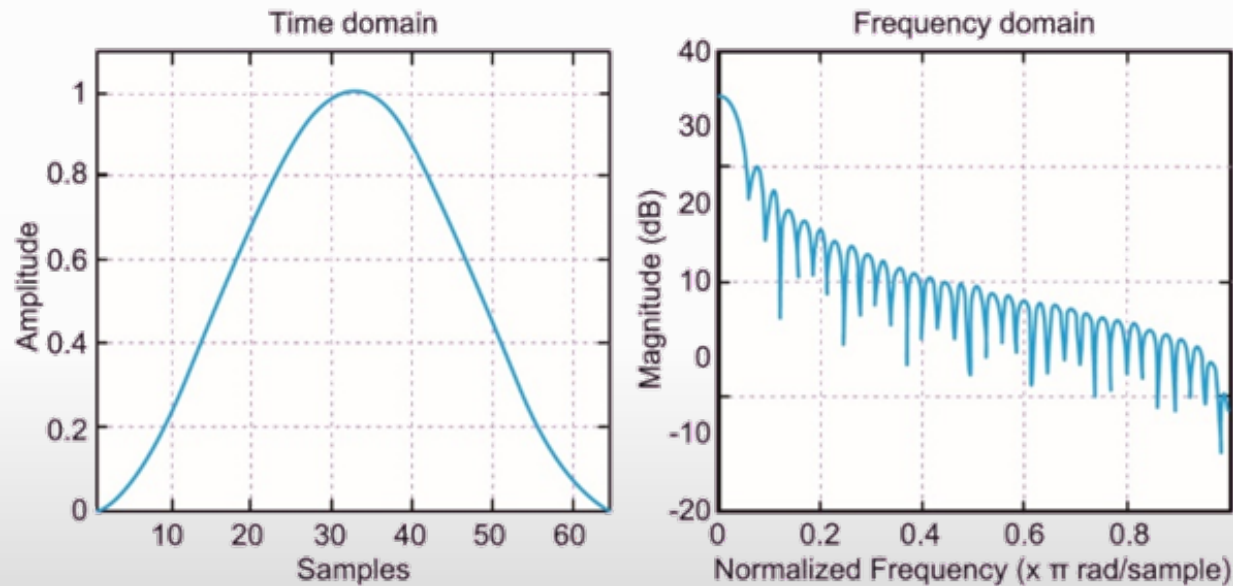
($N = 64$)

Μέθοδος Παραθύρου – Συνήθεις Συναρτήσεις Παράθυρων

Παράθυρο Hanning:

$$w[n] = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \frac{2\pi n}{N-1} \right], \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Η διαφορά μεταξύ του πλάτους του κεντρικού και του πρώτου πλευρικού λοβού είναι -31.5 dB, το εύρος ζώνης του κεντρικού λοβού είναι $8\pi/N$ και ο ρυθμός εξασθένισης των πλευρικών λοβών είναι 18 dB/οκτάβα.



Hanning παράθυρο και
φάσμα πλάτους (απολαβή, dB)

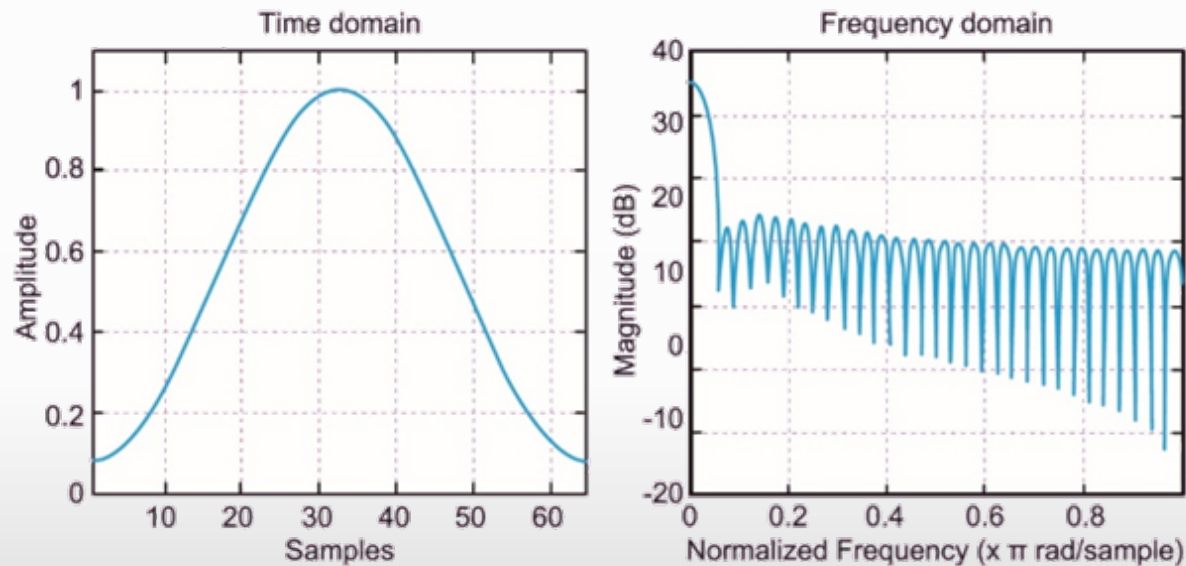
($N = 64$)

Μέθοδος Παραθύρου – Συνήθεις Συναρτήσεις Παράθυρων

Παράθυρο Hamming:

$$w[n] = 0.54 - 0.46 \cos \frac{2\pi n}{N-1}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Η διαφορά μεταξύ του πλάτους του κεντρικού και του πρώτου πλευρικού λοβού είναι -42.7 dB, το εύρος ζώνης του κεντρικού λοβού είναι $8\pi/N$ και ο ρυθμός εξασθένισης των πλευρικών λοβών είναι 6 dB/οκτάβα.



Hamming παράθυρο και
φάσμα πλάτους (απολαβή, dB)

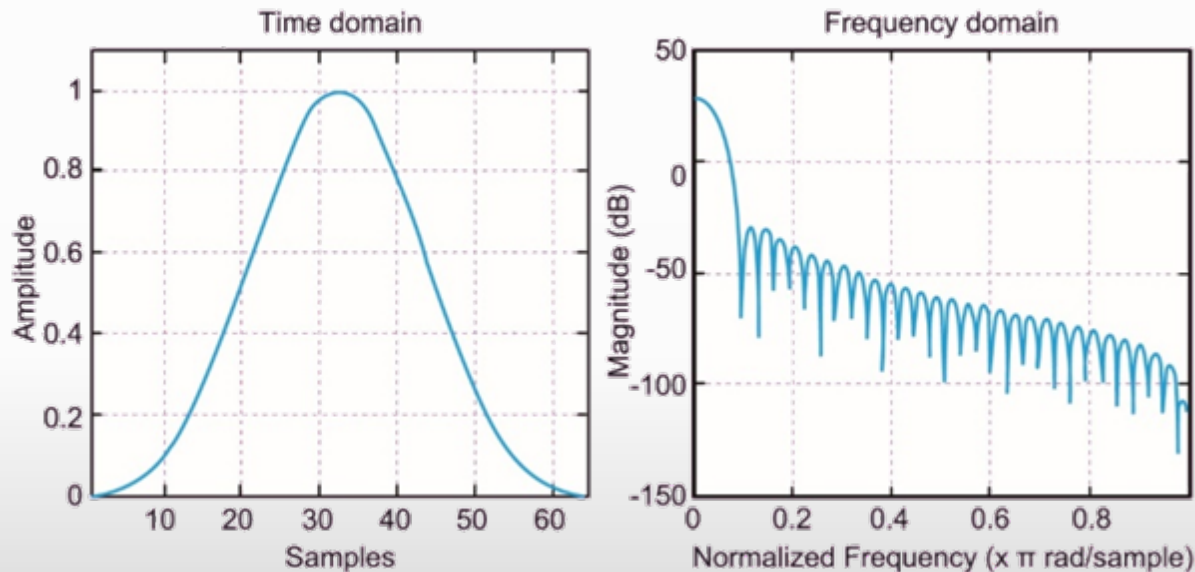
($N = 64$)

Μέθοδος Παραθύρου – Συνήθεις Συναρτήσεις Παράθυρων

Παράθυρο Blackman:

$$w[n] = 0.42 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{N-1} + 0.08 \cos \frac{4\pi n}{N-1}, \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Η διαφορά μεταξύ του πλάτους του κεντρικού και του πρώτου πλευρικού λοβού είναι -58.1 dB, το εύρος ζώνης του κεντρικού λοβού είναι $12\pi/N$ και ο ρυθμός εξασθένισης των πλευρικών λοβών είναι 18 dB/οκτάβα.

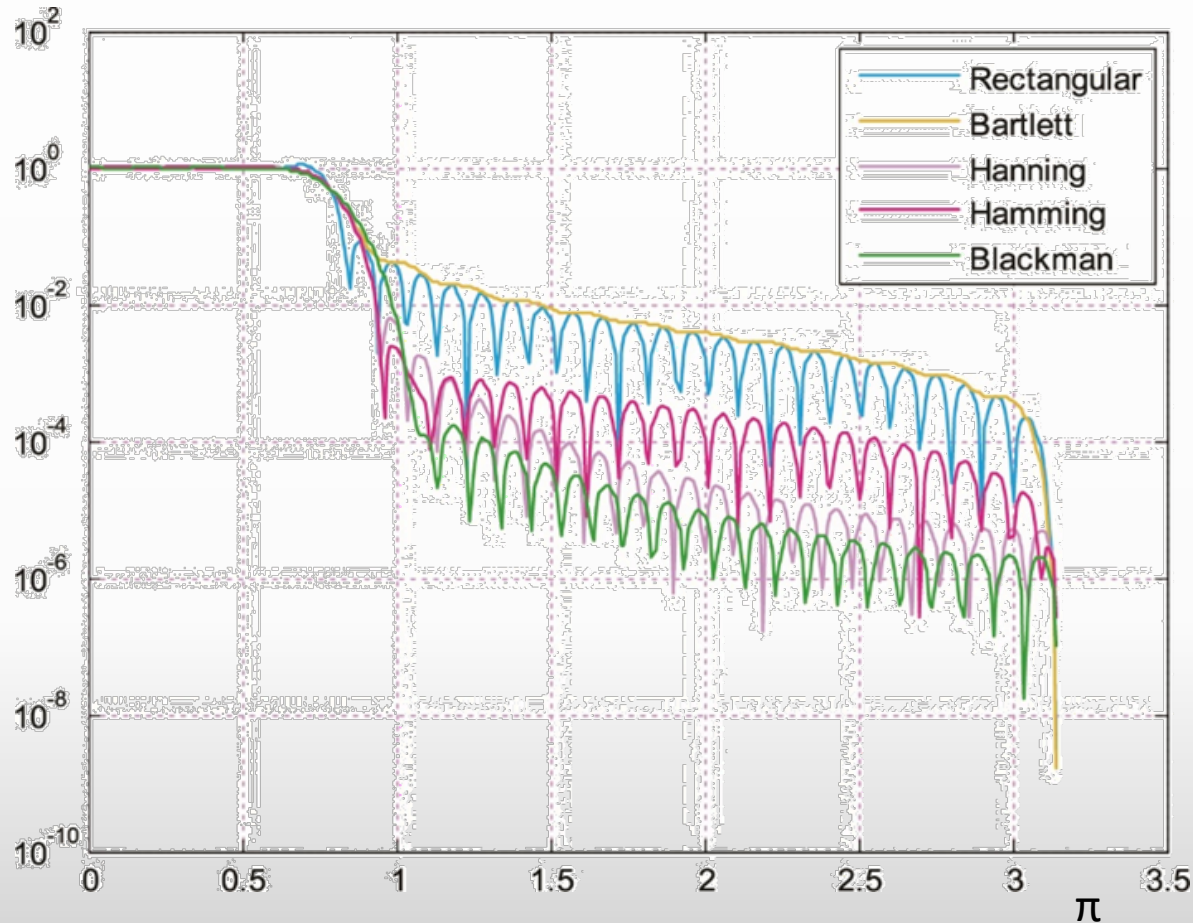


Blackman παράθυρο και
φάσμα πλάτους (απολαβή, dB)

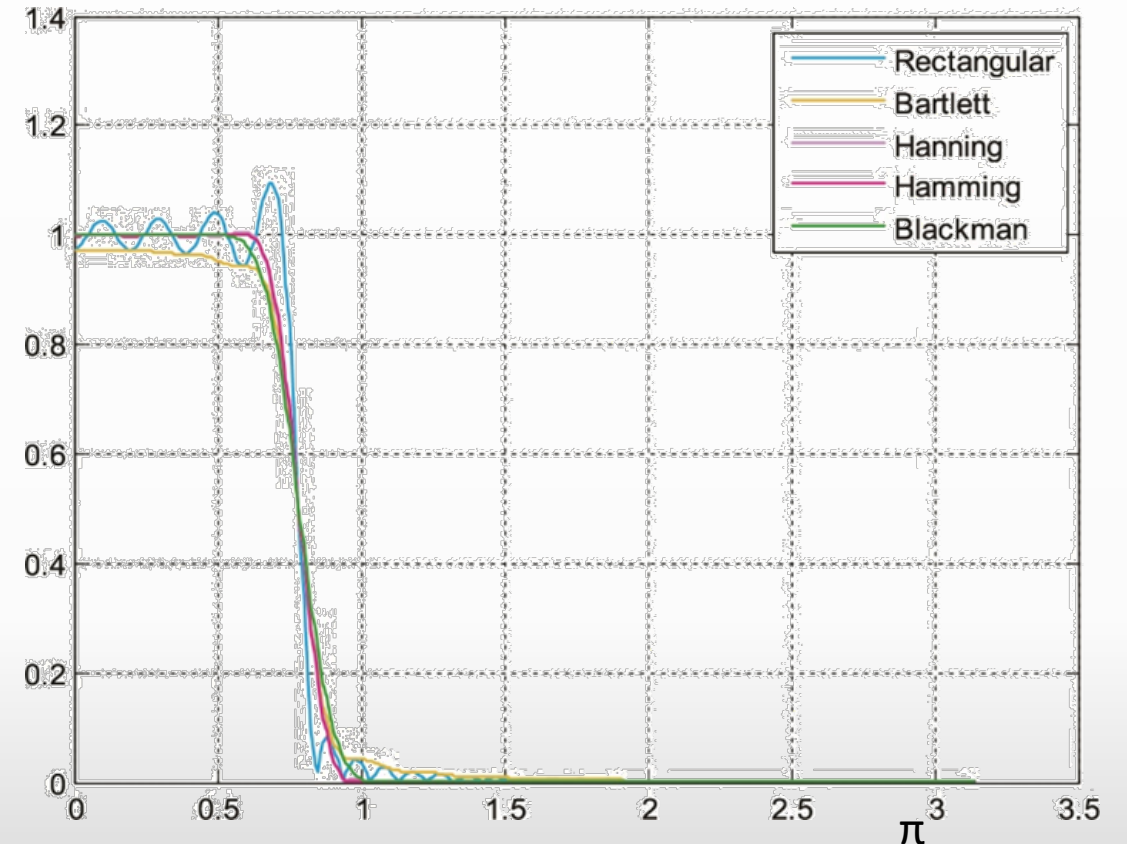
($N = 64$)

Απόκριση συχνότητας Συνήθων Συναρτήσεων Παράθυρων

Απόκριση συχνότητας παραθύρων:
σε ημιλογαριθμική κλίμακα (κανονικοποιημένη)



σε γραμμική κλίμακα



Σύγκριση χαρακτηριστικών παραθύρων

Τύπος Παραθύρου	Εύρος κύριου λοβού	Κανονικοποιημένο εύρος κύριου λοβού Δ (N=20)	Ζώνη Μετάβασης (N=20)	Πλάτος μέγιστου πλευρικού λοβού (dB)	Ρυθμός εξασθένισης πλευρικών λοβών (dB)	Ελάχιστη εξασθένιση ζώνης αποκοπής φίλτρου
Ορθογώνιο	$4\pi/N$	0.1π	0.041π	-13.3	-6	-21 dB
Bartlett	$8\pi/N$	0.2π	0.11π	-26.5	-12	-26 dB
Hanning	$8\pi/N$	0.21π	0.12π	-31.5	-18	-44 dB
Hamming	$8\pi/N$	0.23π	0.14π	-42.7	-6	-53 dB
Blackman	$12\pi/N$	0.32π	0.2π	-58.1	-18	-75 dB

Σύγκριση χαρακτηριστικών παραθύρων

- **Ορθογώνιο παράθυρο:** πολύ χαμηλή εξασθένιση στη ζώνη αποκοπής (13 dB). Δεν προτιμάται για τη σχεδίαση FIR φίλτρων.
- Ομοίως και το **Bartlett**. Ωστόσο, όταν δεν απαιτούνται υψηλές εξασθενήσεις μπορεί να χρησιμοποιηθεί, διότι παρέχει έναν εύκολο τρόπο υπολογισμού των συντελεστών του.
- **Hanning:** έχει εντονότερη εξασθένιση από το **Bartlett**, ενώ για τις ίδιες απαιτήσεις εξασθένισης έχει στενότερη περιοχή μετάβασης, το οποίο θεωρείται πλεονέκτημά του.
- **Hamming:** εξασφαλίζει ελάχιστη εξασθένιση στη ζώνη αποκοπής 53 dB, η οποία είναι επαρκής για τις περισσότερες εφαρμογές. Η ζώνη μετάβασης είναι κάπως μεγαλύτερη από του Hanning. Πολύ δημοφιλές.
- **Blackman:** μαζί με τα παράθυρα Kaiser και Hamming είναι τα πιο δημοφιλή παράθυρα. Η υψηλή εξασθένιση του σχεδιαζόμενου φίλτρου (~75 dB), κάνει αυτό το παράθυρο κατάλληλο για σχεδόν όλες τις εφαρμογές.

Σε όλες τις περιπτώσεις η αύξηση της τάξης του φίλτρου μειώνει το εύρος της ζώνης μετάβασης, αλλά δεν επηρεάζει την εξασθένιση στη ζώνη αποκοπής.

Μέθοδος Δειγματοληψίας στη Συχνότητα

Η επιθυμητή απόκριση συχνότητας $H_d(e^{j\omega})$ του ιδανικού φίλτρου υπόκειται σε δειγματοληψία σε N ισαπέχουσες συχνότητες στην περιοχή συχνοτήτων $[0, 2\pi)$, δηλαδή:

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N}k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

και παράγεται η ακολουθία $H[k]$:

$$H[k] = H_d(e^{j2\pi k/N}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Η ακολουθία $H[k]$ συνιστά έναν μετασχηματισμό DFT N -σημείων, από την οποία μπορεί να προκύψει η κρουστική απόκριση του προσεγγιστικού φίλτρου.

Η απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$ του προσεγγιστικού φίλτρου προκύπτει με παρεμβολή στα δείγματα της ακολουθίας $H[k]$ και δίνεται από τη σχέση:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H[k]}{1 - e^{-j\omega} e^{j2\pi k/N}}$$

Αντίστοιχα, η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου είναι:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] z^{-n} = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H[k]}{1 - z^{-1} e^{j2\pi k/N}}$$

Μέθοδος Δειγματοληψίας στη Συχνότητα

Αν είναι επιθυμητό το φίλτρο να διαθέτει γραμμική φάση, τότε η ακολουθία $H[k]$ πρέπει να έχει συζυγή συμμετρία:

N: περιττό:
$$H[k] = H^*[N - k], \quad k = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$$

N: άρτιο:
$$H[k] = H^*[N - k], \quad H\left[\frac{N}{2}\right] = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

Η προσεγγιστική κρουστική απόκριση $h[n]$ του FIR φίλτρου τάξης $N - 1$ προκύπτει με αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier:

$$h[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k] e^{j2\pi nk/N}, \quad 0 \leq n < N - 1$$

Η κρουστική απόκριση $h[n]$ για N άρτιο, (για $n = 0, 1, \dots, N - 1$) δίνεται από:

$$h[n] = \frac{H[0]}{N} + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N/2-1} 2 (-1)^k H[k] \cos\left[\frac{\pi k(1 + 2n)}{N}\right]$$

Για N περιττό

$$h[n] = \frac{H[0]}{N} + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{(N-1)/2} 2 (-1)^k H[k] \cos\left[\frac{\pi k(1 + 2n)}{N}\right]$$

Η προσεγγιστική κρουστική απόκριση $h[n]$ συνδέεται με την ιδανική κρουστική απόκριση $h_d[n]$:

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_d[n + kN], \quad 0 \leq n < N - 1$$

Μέθοδος Δειγματοληψίας στη Συχνότητα

Η παραπάνω διαδικασία έχει τα ακόλουθα αποτελέσματα:

- Στις συχνότητες για τις οποίες λαμβάνονται τα δείγματα της $H_d(e^{j\omega})$, η διαφορά μεταξύ των $H_d(e^{j\omega})$ και $H(e^{j\omega})$ είναι **μηδενική**, επομένως στις συγκεκριμένες συχνότητες το σφάλμα προσέγγισης της μεθόδου είναι **μηδενικό**.
 - Στις υπόλοιπες συχνότητες το **σφάλμα προσέγγισης** εξαρτάται από το **σχήμα** της $H_d(e^{j\omega})$ και γίνεται μεγαλύτερο όταν η $H_d(e^{j\omega})$ έχει έντονες μεταβολές.
 - Το σφάλμα προσέγγισης είναι μεγαλύτερο στα **όρια** μεταξύ των ζωνών διέλευσης και αποκοπής του φίλτρου.
-
- Η μέθοδος δειγματοληψίας στη συχνότητα δεν διαθέτει μηχανισμό ελέγχου σφάλματος στις συχνότητες που παρεμβάλλονται μεταξύ των δειγμάτων.
 - Έλεγχος του σφάλματος μπορεί να επιτευχθεί με την προσθήκη ενός ή περισσότερων δειγμάτων στις περιοχές μετάβασης και στην εφαρμογή ενός επαναληπτικού αλγορίθμου που μεγιστοποιεί την εξασθένιση στη ζώνη αποκοπής ή ελαχιστοποιεί την κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης.

Μέθοδος Δειγματοληψίας στη Συχνότητα

Παράδειγμα : Να σχεδιαστεί ένα βαθυπερατό φίλτρο (LPF) με γραμμική φάση, συχνότητα αποκοπής $\omega_c = 0.4\pi$ και μήκος $N = 10$ συντελεστές.

- Διαιρούμε την περιοχή συχνοτήτων $[0, 2\pi)$ σε $N = 10$ ισομεγέθη τμήματα με βάση τη σχέση $\omega_k = (2\pi/10)k = 0.2\pi k$, $k = 0, 1, \dots, 9$.

$k = 0,$	$\omega_0 = 0,$	$H[0] = 1$	$k = 5,$	$\omega_5 = \pi,$	$H[5] = 0$
$k = 1,$	$\omega_1 = 0.2\pi,$	$H[1] = 1$	$k = 6,$	$\omega_6 = 1.2\pi,$	$H[6] = 0$
$k = 2,$	$\omega_2 = 0.4\pi,$	$H[2] = 1$	$k = 7,$	$\omega_7 = 1.4\pi,$	$H[7] = 0$
$k = 3,$	$\omega_3 = 0.6\pi,$	$H[3] = 0$	$k = 8,$	$\omega_8 = 1.6\pi,$	$H[8] = 1$
$k = 4,$	$\omega_4 = 0.8\pi,$	$H[4] = 0$	$k = 9,$	$\omega_9 = 1.8\pi,$	$H[9] = 1$

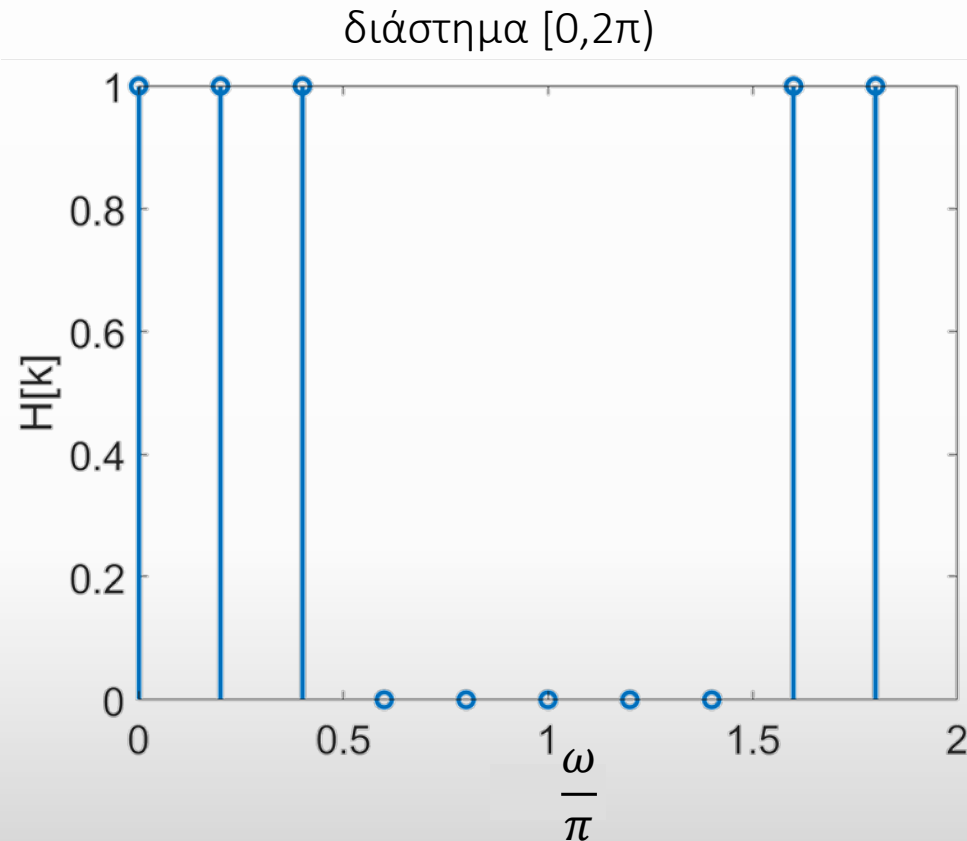
Υπολογίζουμε την κρουστική απόκριση $h[n]$ του προσεγγιστικού φίλτρου, για $0 \leq n \leq 9$:

$$\begin{aligned} h[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H[k] e^{j2\pi nk/N} = \frac{1}{10} \sum_{k=0}^9 H[k] e^{j2\pi nk/10} = \\ &= \frac{1}{10} (1e^0 + 1e^{j2\pi n/10} + 1e^{j4\pi n/10} + 1e^{j16\pi n/10} + 1e^{j18\pi n/10}) \end{aligned}$$

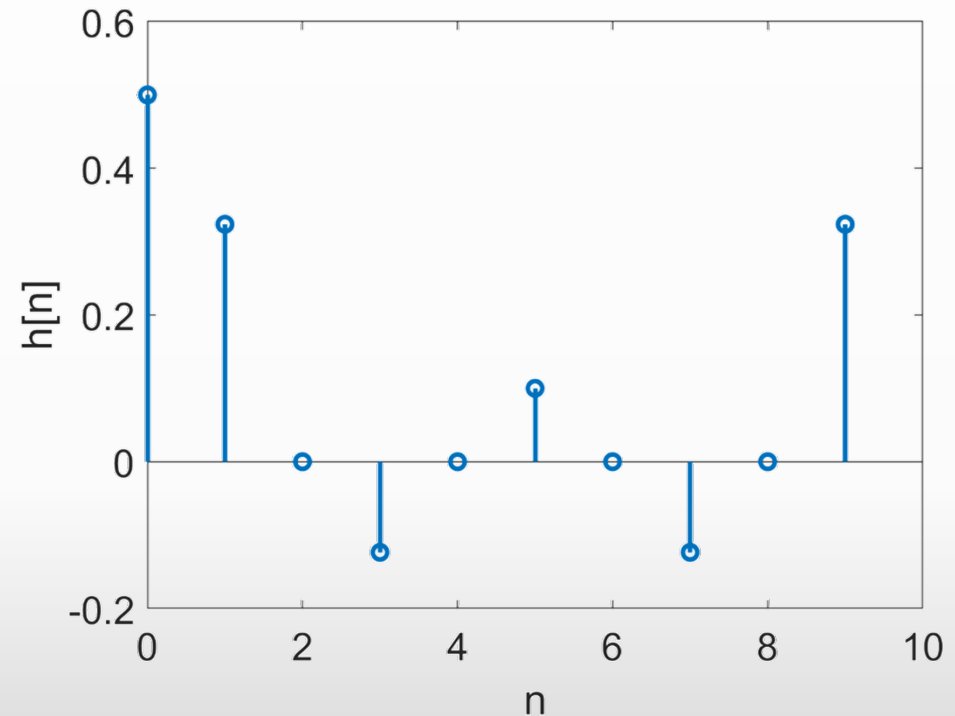
Μέθοδος Δειγματοληψίας στη Συχνότητα

Παράδειγμα (συνέχεια) : Να σχεδιαστεί ένα βαθυπερατό φίλτρο (LPF) με γραμμική φάση, συχνότητα αποκοπής $\omega_c = 0.4\pi$ και μήκος $N = 10$ συντελεστές.

η δειγματοληπτημένη απόκριση συχνότητας και η κρουστική απόκριση του προσεγγιστικού φίλτρου :



IFFT

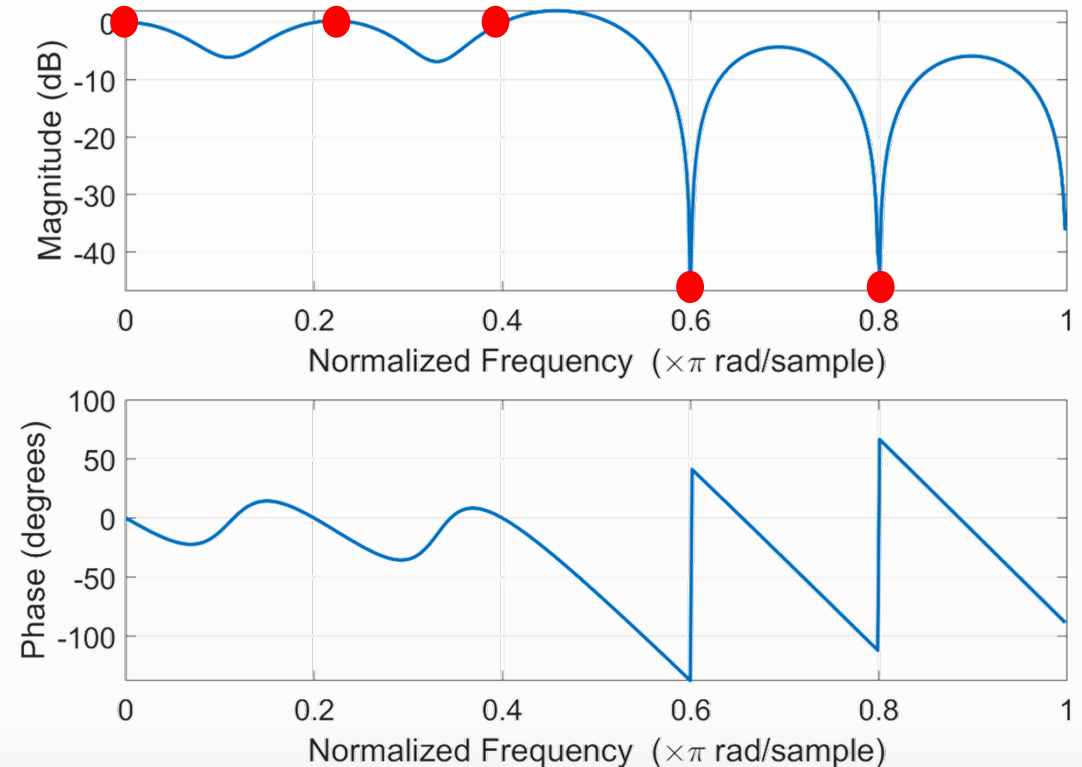


Μέθοδος Δειγματοληψίας στη Συχνότητα

Παράδειγμα (συνέχεια) : Να σχεδιαστεί ένα βαθυπερατό φίλτρο (LPF) με γραμμική φάση, συχνότητα αποκοπής $\omega_c = 0.4\pi$ και μήκος $N = 10$ συντελεστές.

η απόκριση συχνότητας του προσεγγιστικού φίλτρου FIR :

- φτωχή απόδοση σχεδίασης:
 - σημαντική κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης ενώ
 - μικρή εξασθένιση στη ζώνη αποκοπής.



- Βελτιώνουμε την απόδοση της μεθόδου αυξάνοντας την τάξη του φίλτρου. Ωστόσο και για μεγάλες τιμές της τάξης εξακολουθεί να παραμένει κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης και μικρή εξασθένιση στη ζώνη αποκοπής.
- Μια βελτίωση της μεθόδου βασίζεται στην προσθήκη δειγμάτων στη ζώνη μετάβασης.

Βέλτιστη Μέθοδος (equiripple filter)

Οι μέθοδοι παραθύρων και δειγματοληψίας συχνότητας **δεν παράγουν βέλτιστα φίλτρα**, επειδή:

- Δεν προσφέρουν δυνατότητα ελέγχου της κυμάτωσης στη ζώνη διέλευσης και στη ζώνη αποκοπής.
- Παρουσιάζουν ασάφεια στον καθορισμό των συχνοτήτων αποκοπής των ζωνών διέλευσης και αποκοπής.
- Παρουσιάζουν αδυναμία για την ομοιόμορφη κατανομή του σφάλματος μεταξύ της ιδανικής και της προσεγγιστικής απόκρισης συχνότητας σε όλες τις ζώνες συχνοτήτων.

Για να ελεγχθεί η κυμάτωση, υπερκτιμούνται οι προδιαγραφές του φίλτρου, ωστόσο η κυμάτωση εξακολουθεί να είναι **ανομοιόμορφη** στις ζώνες διέλευσης και αποκοπής.

Η απαίτηση για **σταθερή και ελεγχόμενη κυμάτωση** στις ζώνες διέλευσης και αποκοπής οδηγεί στον ορισμό του **ισοκυματικού φίλτρου** (equiripple filter).

Το **ισοκυματικό φίλτρο** θεωρείται το **βέλτιστο FIR φίλτρο**, επειδή επιτυγχάνει τις καλύτερες δυνατές προδιαγραφές στην απόκριση συχνότητας με το μικρότερο πλήθος συντελεστών.

Βέλτιστη Μέθοδος (equiripple filter)

Η απόκριση συχνότητας ενός FIR φίλτρου γραμμικής φάσης γράφεται:

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\alpha\omega}$$

Αν το φίλτρο είναι τύπου 1, η απόκριση πλάτους μπορεί να γραφεί ως πολυώνυμο Chebyshev, τάξης L του $\cos\omega$:

$$A(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^L \alpha(k) \cos(k\omega) = \sum_{k=0}^L \alpha(k) (\cos\omega)^k$$

Αν $A_d(e^{j\omega})$ και $A(e^{j\omega})$ είναι οι αποκρίσεις πλάτους του ιδανικού και του προσεγγιστικού φίλτρου, ορίζουμε το μεταξύ τους σφάλμα:

$$E(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega})[A_d(e^{j\omega}) - A(e^{j\omega})]$$

$W(e^{j\omega})$ μία θετική συνάρτηση στάθμισης, την οποία μπορούμε να ορίσουμε κατάλληλα ώστε να ελέγχουμε την κυμάτωση είτε στη ζώνη διέλευσης είτε στη ζώνη αποκοπής.

Αλγόριθμος Parks–McClellan(ή REMEZ): επιλογή των κατάλληλων συντελεστών $a(k)$ του φίλτρου ώστε να ελαχιστοποιηθεί η μέγιστη απόλυτη τιμή του σφάλματος $E(e^{j\omega})$ κατά μήκος ενός συνόλου συχνοτήτων (ακροτάτων) στη ζώνη διέλευσης και στη ζώνη αποκοπής, αλλά όχι στη ζώνη μετάβασης (περιοχή αδιαφορίας).

Μαθηματική διατύπωση:

$$\min_{\alpha[k]} \left| \max_{\omega \in S} |E(e^{j\omega})| \right| \text{ όπου } S \triangleq [0, \omega_p] \cup [\omega_s, \pi]$$

Βέλτιστη Μέθοδος (equiripple filter) - Αλγόριθμος Parks–McClellan

1. Επιλέγουμε ένα αρχικό σύνολο $L + 2$ ακρότατων συχνοτήτων (extrema).
2. Υπολογίζουμε το μέγιστο σταθμισμένο σφάλμα (ε) λύνοντας το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos(\omega_0) & \dots & \cos(L\omega_0) & 1/W(e^{j\omega_0}) \\ 1 & \cos(\omega_1) & \dots & \cos(L\omega_1) & -1/W(e^{j\omega_1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(\omega_L) & \dots & \cos(L\omega_L) & (-1)^L/W(e^{j\omega_L}) \\ 1 & \cos(\omega_{L+1}) & \dots & \cos(L\omega_{L+1}) & (-1)^{L+1}/W(e^{j\omega_{L+1}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha[0] \\ \alpha[1] \\ \vdots \\ \alpha[L] \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_d(e^{j\omega_0}) \\ A_d(e^{j\omega_1}) \\ \vdots \\ A_d(e^{j\omega_L}) \\ A_d(e^{j\omega_{L+1}}) \end{bmatrix}$$

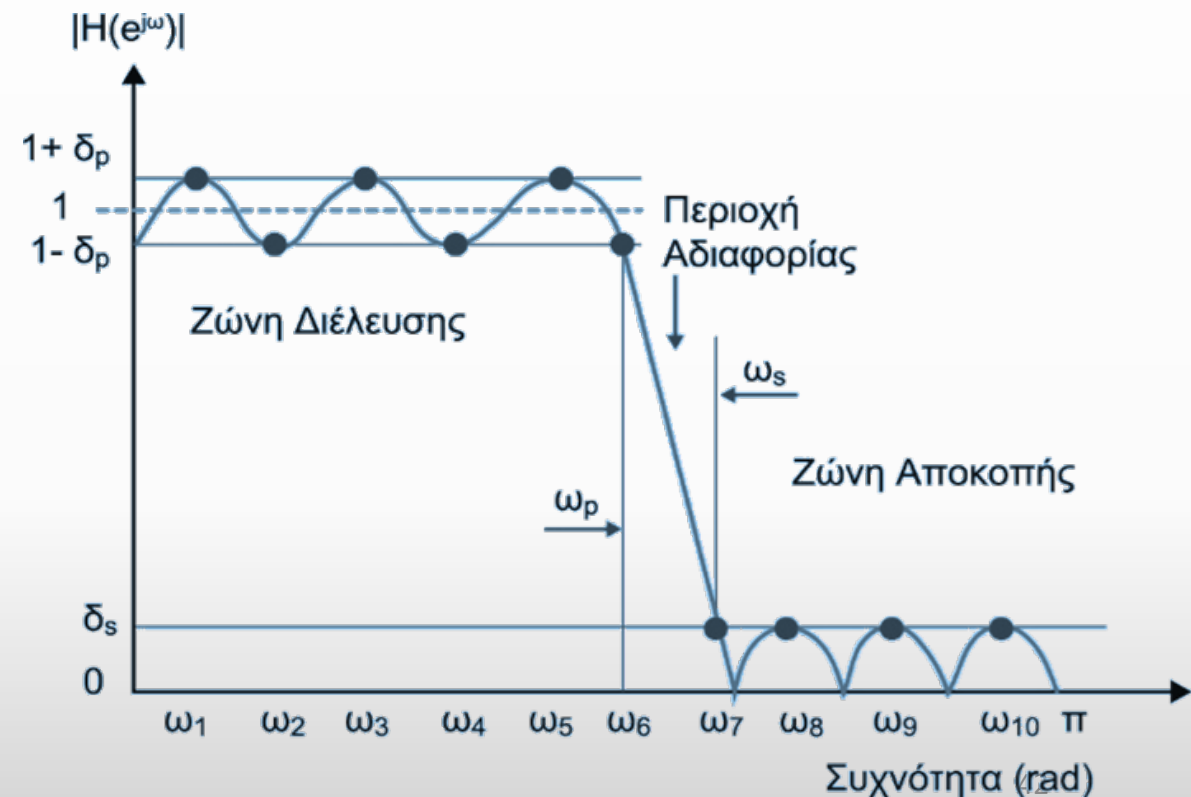
3. Εκτιμούμε τη συνάρτηση σφάλματος $E(e^{j\omega})$ σε όλο το σύνολο συχνοτήτων S , με παρεμβολή Lagrange στις ακρότατες συχνότητες.
4. Βρίσκουμε τα $L + 2$ τοπικά μέγιστα της συνάρτησης $E(e^{j\omega})$ για όλο το σύνολο S και κατόπιν υπολογίζουμε το μέγιστο σταθμισμένο σφάλμα $\max_{\omega \in S} |E(e^{j\omega})|$.
5. Αν το θεώρημα εναλλαγής ικανοποιείται, δηλαδή $\max_{\omega \in S} |E(e^{j\omega})| < \varepsilon$, τότε η επίλυση ολοκληρώθηκε και από το τρέχον σύνολο ακρότατων συχνοτήτων βρίσκουμε τους συντελεστές $h[n]$ του φίλτρου με αντίστροφο DTFT στη συνάρτηση $H(e^{j\omega})$.
6. Αν το θεώρημα εναλλαγής δεν ικανοποιείται, δηλαδή $\max_{\omega \in S} |E(e^{j\omega})| > \varepsilon$, τότε προσθέτουμε νέες συχνότητες στα σημεία που η συνάρτηση $E(e^{j\omega})$ έχει τοπικά μέγιστα και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία από το βήμα 2.

Βέλτιστη Μέθοδος (equiripple filter) - Αλγόριθμος Parks–McClellan

- Ο αλγόριθμος κρατά σταθερές τις ποσότητες N , ω_p και ω_s με σκοπό να ελέγχει τα όρια των ζωνών και επιτρέπει τη μεταβολή των δ_p και δ_s .
- Ο σχεδιαστής μπορεί να γνωρίζει εκ των προτέρων το πλήθος των συντελεστών που απαιτούνται.

Με τον αλγόριθμο βελτιστοποίησης Park - McClellan:

- Υποθέτουμε ότι τα ακρότατα συχνοτήτων (extrema) είναι ομοιόμορφα τοποθετημένα στις ζώνες διέλευσης και αποκοπής.
- Εκτελούμε πολυωνυμική παρεμβολή (Lagrange) και επαναπροσδιορίζουμε τις θέσεις των τοπικών ακρότατων.
- Μετακινούμε τα ακρότατα σε νέες θέσεις και επαναλαμβάνουμε μέχρι τα ακρότατα να σταματήσουν να μετακινούνται.



Προσδιορισμός τάξης φίλτρου - Αλγόριθμος Parks–McClellan

Ο προσδιορισμός της κατάλληλης τάξης N του FIR φίλτρου είναι το αρχικό βήμα για τον σχεδιασμό του φίλτρου.

Για FIR φίλτρα γραμμικής φάσης έχουν προταθεί διάφοροι εμπειρικοί τύποι.

Ο απλούστερος είναι ο τύπος Kaiser:

$$N = \frac{-10 \log_{10}(\delta_p \delta_s) - 13}{14.6 (\omega_s - \omega_p)}$$

Στη βιβλιογραφία αναφέρονται και άλλοι προσεγγιστικοί τύποι υπολογισμού της τάξης.

Κατά την έναρξη του αλγόριθμου Parks - McClellan δίνεται μία αρχική τιμή στην τάξη του φίλτρου, η οποία στη συνέχεια ενδέχεται να αλλάξει καθώς η τάξη συνδέεται αντιστρόφως ανάλογα με το μέγιστο σταθμισμένο σφάλμα.

Δομές Πραγματοποίησης FIR φίλτρων

Είναι σχηματικά διαγράμματα για τους διαφορετικούς αλλά ισοδύναμους τρόπους που μπορεί να οργανωθεί η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$.

Για τα FIR συστήματα οι σημαντικότερες μορφές είναι οι :

Ευθεία Μορφή I: Προκύπτει από την άμεση εφαρμογή της γραμμικής εξίσωσης διαφορών με σταθερούς συντελεστές σε διάγραμμα βαθμίδων.

Γραμμικής φάσης: Όταν η κρουστική απόκριση ικανοποιεί κάποιες ιδιότητες συμμετρίας τότε η φάση του συστήματος είναι γραμμική. Λόγω της συμμετρίας μειώνεται το πλήθος των απαιτούμενων υπολογισμών.

Direct Form I Transposed

Δομές Πραγματοποίησης FIR φίλτρων

Direct Form I- Ευθεία Μορφή I : Προκύπτει από την άμεση εφαρμογή της γραμμικής εξίσωσης διαφορών με σταθερούς συντελεστές σε διάγραμμα βαθμίδων (transversal form)

Για φίλτρο τάξης K και με συνάρτηση μεταφοράς

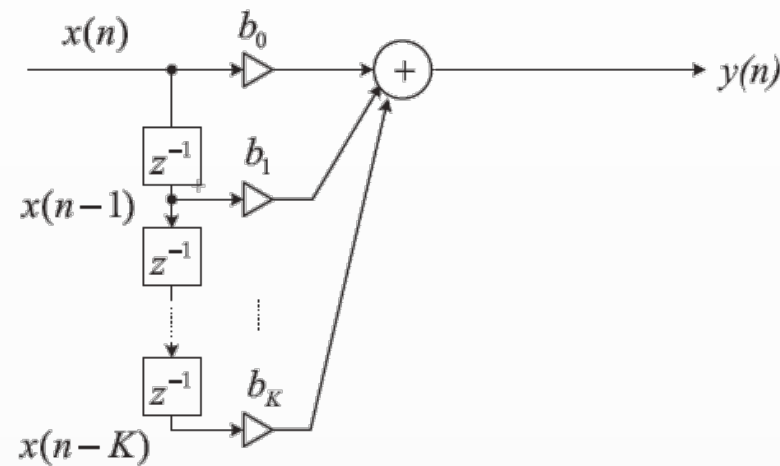
$$H(z) = \sum_{m=0}^K b_m z^{-m}$$

το πλήθος υπολογισμών στην ευθεία μορφή, είναι:

Πολλαπλασιασμοί: $K + 1$ για κάθε δείγμα εξόδου

Προσθέσεις: K για κάθε δείγμα εξόδου

Καθυστερήσεις: K



Δομή FIR συστήματος σε ευθεία μορφή

Αν υπάρχουν συμμετρίες στην κρουστική απόκριση, το πλήθος των πράξεων μπορεί να μειωθεί.

Δομές Πραγματοποίησης FIR φίλτρων

Παράδειγμα : (α) Να σχεδιαστεί η ευθεία μορφή του FIR συστήματος με κρουστική απόκριση:

$$h[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq 5 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(β) Να υπολογιστεί το πλήθος των πολλαπλασιασμών και των προσθέσεων που απαιτούνται για τον υπολογισμό κάθε δείγματος εξόδου καθώς και το πλήθος των καταχωρητών καθυστέρησης.

Απάντηση: (α) Η κρουστική απόκριση γράφεται:

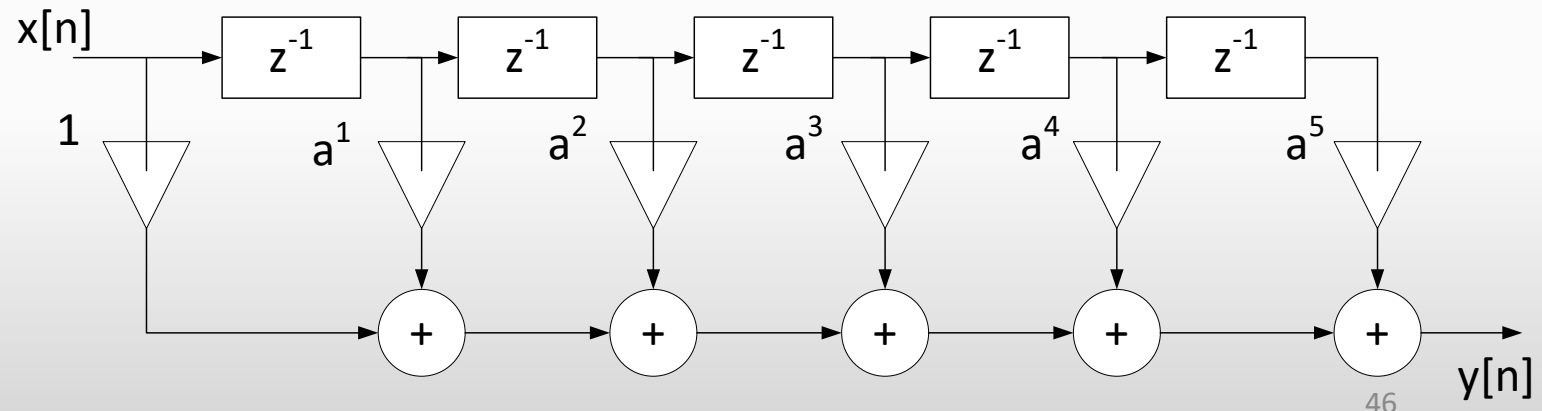
$$h[n] = a^n[u[n] - n[n - 6]] = \delta(0) + a\delta(1) + a^2\delta(2) + a^3\delta(3) + a^4\delta(4) + a^5\delta(5)$$

από την οποία προκύπτει ότι το διάγραμμα βαθμίδων ευθείας μορφής είναι:

(β) Από το διάγραμμα βαθμίδων προκύπτει ότι το πλήθος υπολογισμών στην ευθεία μορφή είναι:

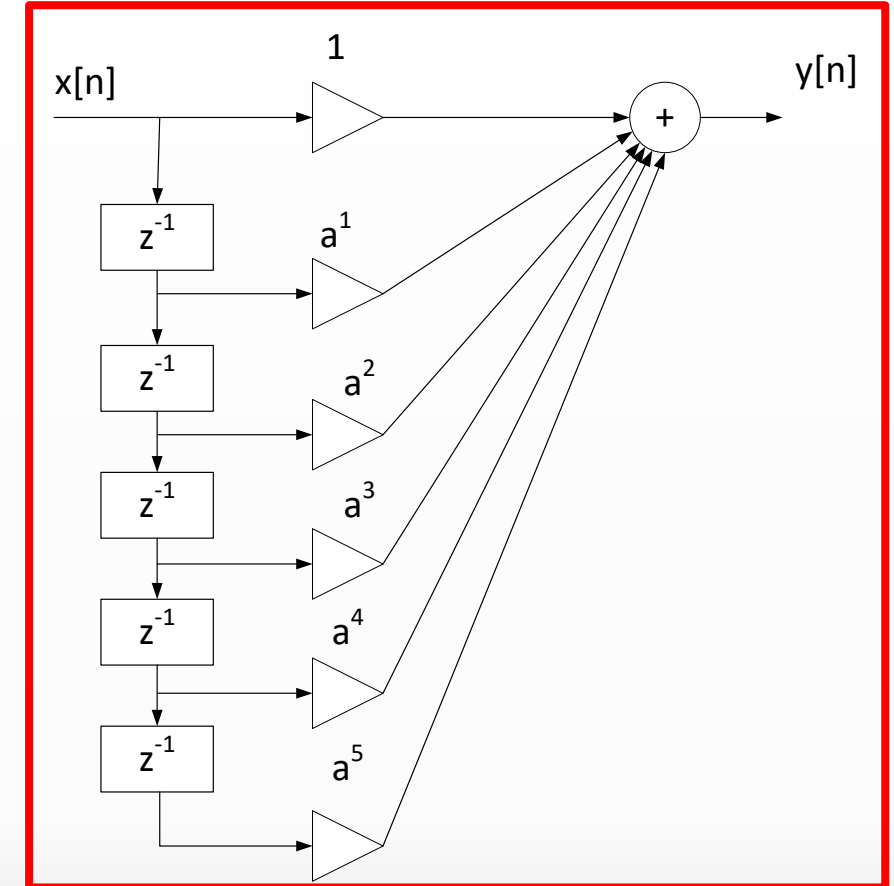
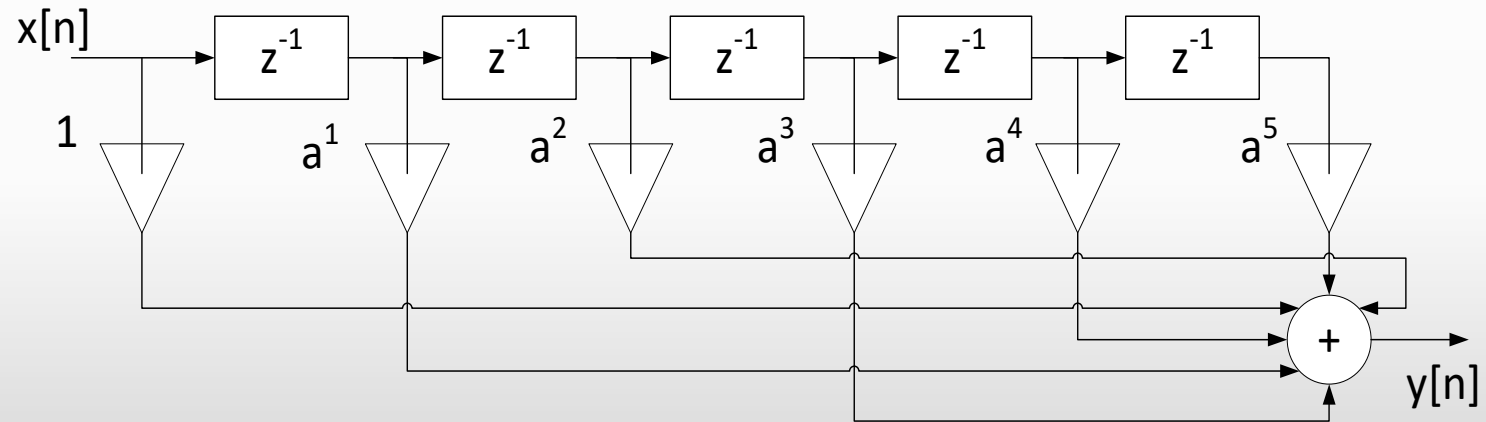
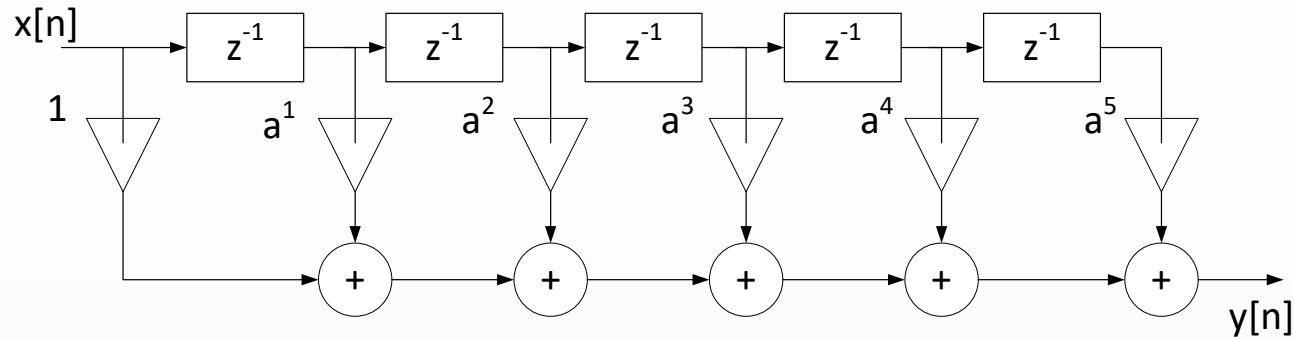
Πολλαπλασιασμοί: 6 για κάθε δείγμα εξόδου
Προσθέσεις: 5 για κάθε δείγμα εξόδου
Καθυστερήσεις: 5

Δομή FIR συστήματος σε ευθεία μορφή (N=5)



Δομές Πραγματοποίησης FIR φίλτρων

Direct Form I



Δομές Πραγματοποίησης FIR φίλτρων

Γραμμικής φάσης – Linear Phase Form : Τροποποίηση της transversal μορφής λόγω της **συμμετρίας των συντελεστών** της κρουστικής απόκρισης.

Π.χ. η κρουστική απόκριση μπορεί να είναι **συμμετρική**, δηλαδή:

$$h[n] = h[K - n]$$

απλοποιούμε τη μορφή του διαγράμματος βαθμίδων.

Απαιτεί τους **~μισούς** πολλαπλασιασμούς σε σχέση με την άμεση μορφή $K + 1$

Για φίλτρο τάξης K και με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \sum_{m=0}^K b_m z^{-m}$$

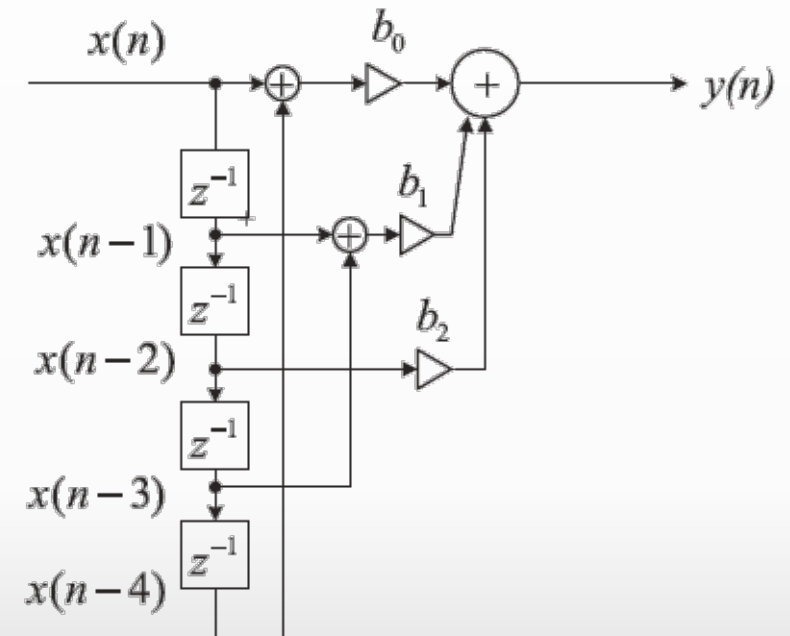
Π.χ. για $K=4$

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_1 x z^{-3} + b_0 z^{-4}$$

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + b_1 x[n-3] + b_0 x[n-4]$$

$$\frac{K}{2} + 1, K \text{ άρτιος}$$

$$\frac{K+1}{2}, K \text{ περιττός}$$



Δομή FIR συστήματος σε μορφή γραμμικής φάσης

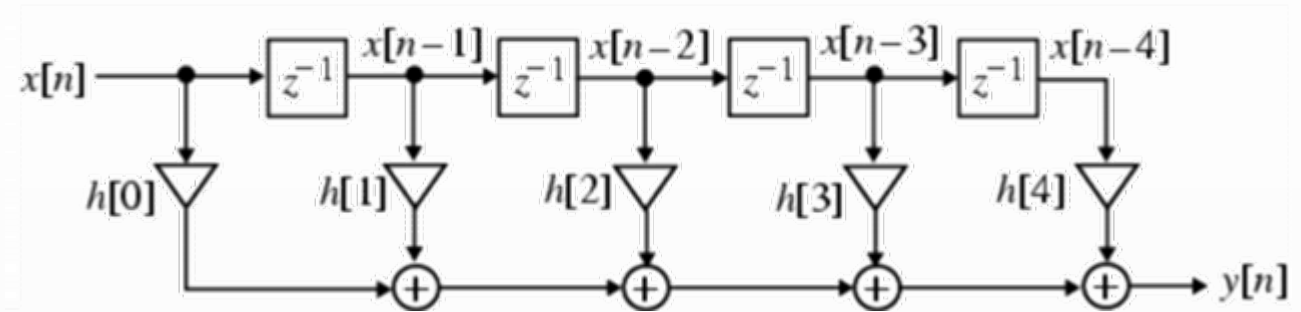
Δομές Πραγματοποίησης FIR φίλτρων

Μορφή Direct Form Transposed : Τροποποίηση της transversal (Direct Form) μορφής

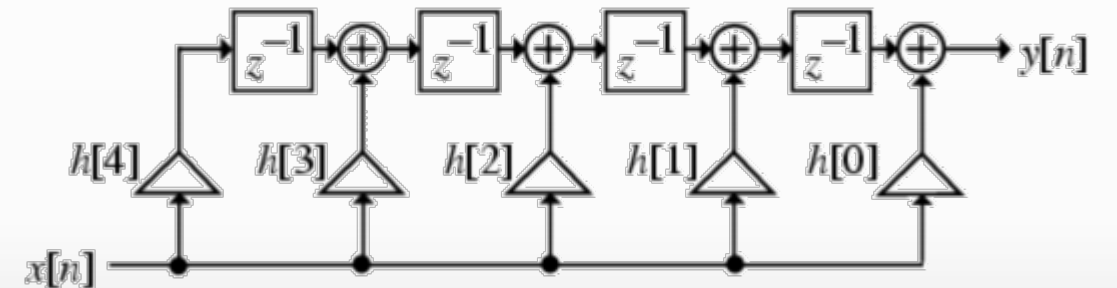
$$H(z) = \sum_{m=0}^K h_m z^{-m}, K = 4$$

$$y[n] = h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + h[2]x[n-2] + h[3]x[n-3] + h[4]x[n-4]$$

Direct Form



Transposed Form



- Η είσοδος φτάνει ταυτόχρονα σε όλους τους κλάδους άρα είναι αποδοτικότερη για παραλληλοποίηση ενώ η Direct Form είναι αποδοτικότερη για σειριακές υλοποιήσεις (loops) λόγω της μικρότερης απαίτησης σε μνήμη (λόγω data path στην DF vs του accumulator D.F. Transposed)

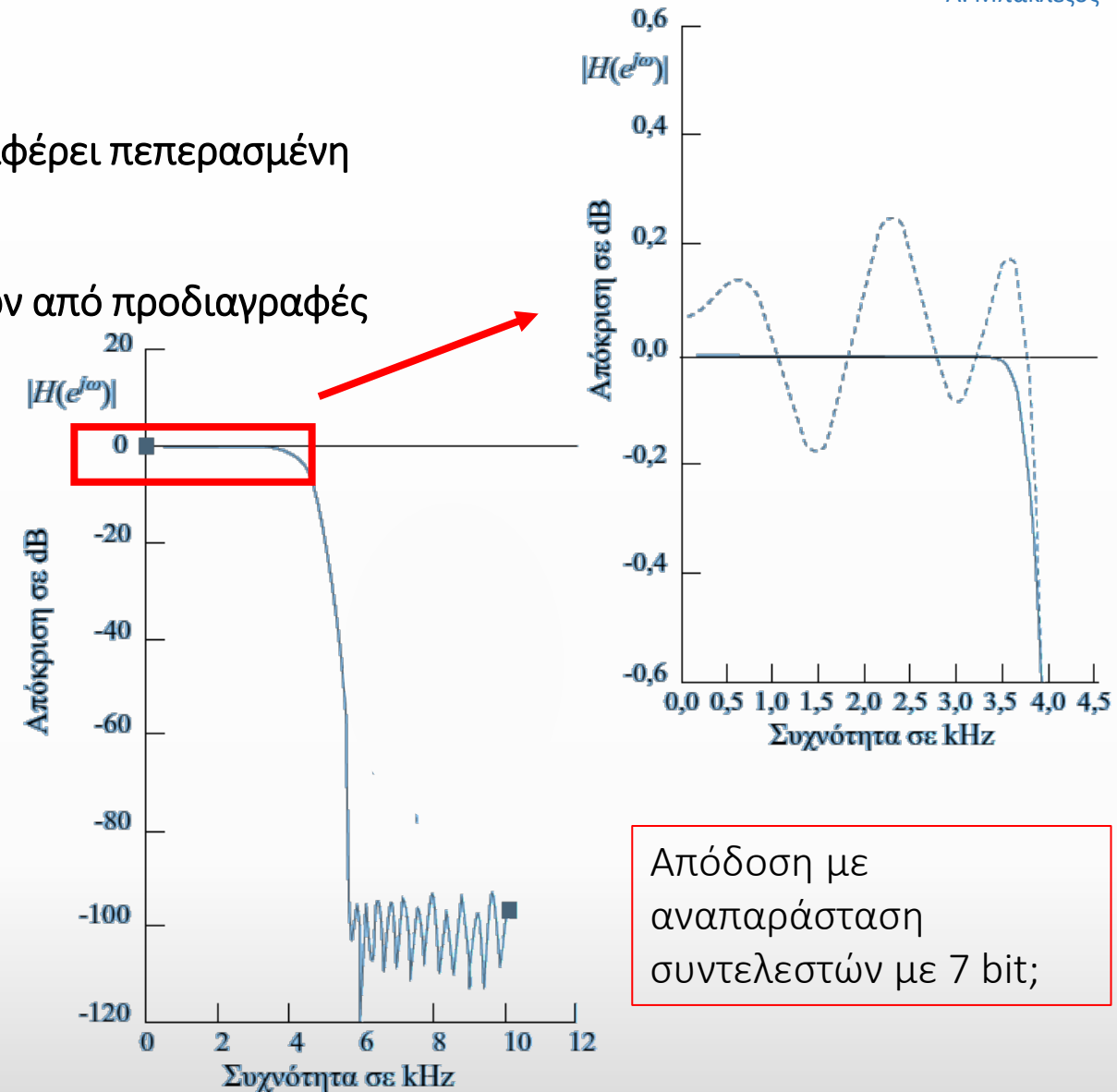
Σφάλματα από κβάντιση συντελεστών

Η υλοποίηση FIR φίλτρων με ψηφιακά κυκλώματα (hardware) επιφέρει πεπερασμένη ακρίβεια αναπαράστασης των συντελεστών του φίλτρου

περιορισμός ακρίβειας συντελεστών \rightarrow απόκλιση χαρακτηριστικών από προδιαγραφές

Έτσι το φίλτρο παύει να είναι βέλτιστο (Finite word-length Effect)

- μείωση 1 bit στην ακρίβεια των συντελεστών υποβιβάζει την απόδοση του φίλτρου $\sim (4.5 - 6) \text{ dB}$.
- Αν το φίλτρο έχει σχεδιαστεί με θεωρητική απόρριψη στη ζώνη αποκοπής $A \text{ dB}$
 - τότε απαιτούνται $A/6$ bits στη δυαδική αναπαράσταση των συντελεστών για να μην υπάρξει αλλοίωση στην απόκριση του φίλτρου



Σφάλματα από κβάντιση συντελεστών

- FIR Φίλτρο έχει θεωρητική αποκοπή στην ζώνη απόρριψης 106dB. Πόσα bit αναπαράσταση χρειάζεται να έχει το hardware στο οποίο θα υλοποιηθεί ώστε να μην αλλοιωθεί η απόκριση του φίλτρου;
- $n_{bits} = \frac{106}{6} = 17.666 \dots = 18 \text{ bits}$ αναπαράσταση
- Αν τελικά υλοποιηθεί με 8bit hardware, ποιά η μέγιστη αποκοπή στην ζώνη απόρριψης που μπορεί να επιτύχει;
- $A = (-6) \cdot 8 = -48dB$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος & Εικόνας

Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών

Α. Μπακλέζος

abaklezos@hmu.gr