Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος & Εικόνας

Μάθημα 18ο

Ψηφιακά Φίλτρα & Φίλτρα FIR
Δομές Πραγματοποίησης FIR Φίλτρων

Α. Μπακλέζος

abaklezos@hmu.gr

Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών

Ψηφιακά Φίλτρα

Αν στην είσοδο ενός LTI συστήματος με κρουστική απόκριση $h[n]$ εφαρμοστεί μία μιγαδική εκθετική ακολουθία $x[n] = Ae^{jn\omega_0}, -\infty < n < +\infty$, ψηφιακής συχνότητας ω_0, τότε η έξοδος υπολογίζεται από τη συνέλιξη:

$$y[n] = A\, e^{jn\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] e^{-j\omega_0 k}$$

Η συνάρτηση $H\left(e^{j\omega}\right)$ ονομάζεται **απόκριση συχνότητας** και υπολογίζεται από τον DTFT της κρουστικής απόκρισης:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] e^{-j\omega k}$$

Η απόκριση συχνότητας μπορεί να γραφεί σε πολική μορφή (μέτρο, φάση) ως:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| e^{j\varphi_h(\omega)}$$

$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$ απόκριση πλάτους/μέτρου

$\varphi_h(\omega)$ απόκριση φάσης

Τα διαγράμματά τους (συνήθως εκφρασμένα σε dB) είναι τα **φάσματα πλάτους** (μέτρου) και **φάσης**, αντίστοιχα.

Ψηφιακά Φίλτρα

Αν η κρουστική απόκριση είναι **πραγματική ακολουθία**

το πραγματικό μέρος και το πλάτος της απόκρισης συχνότητας του φίλτρου, εμφανίζουν **άρτια συμμετρία**:

$$H_R\left(e^{j\omega}\right) = H_R\left(e^{-j\omega}\right) \text{ και } \left|H_R\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|H_R\left(e^{-j\omega}\right)\right|$$

το φανταστικό μέρος, η φάση και η καθυστέρηση ομάδας εμφανίζουν **περιττή συμμετρία**:

$$H_I\left(e^{j\omega}\right) = -H_I\left(e^{-j\omega}\right), \ \varphi_h(\omega) = -\varphi_h(-\omega) \text{ και } \tau_h(\omega) = -\tau_h(-\omega)$$

καθυστέρηση ομάδας (group delay)

$$\tau_h = -\frac{d\varphi_h(\omega)}{d\omega}$$

- Ένα ψηφιακό φίλτρο για να είναι **πρακτικά υλοποιήσιμο** πρέπει να είναι **ευσταθές** και **αιτιατό**.

- Τα πρακτικά ψηφιακά φίλτρα είναι επίσης επιθυμητό να είναι **γραμμικά και αμετάβλητα κατά τη μετατόπιση** (Linear Time Invariant – LTI - Linear Shift Invariant - LSI) .

Έλεγχος Απολαβής (Κέρδους) Φίλτρου

- Η απόκριση συχνότητας ενός συστήματος(φίλτρου) είναι ο μετασχηματισμός Fourier της κρουστικής του απόκρισης $h[n]$, δηλαδή ο υπολογισμός τους μετασχηματισμού Z πάνω στο μοναδιαίο κύκλο ($z = e^{j\omega}$) :

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n}\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

Η ρητή συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ μπορεί να γραφτεί ως :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \mathrm{A}\frac{\prod_{k=0}^{M}(1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=0}^{N}(1 - p_k z^{-1})} = b_o z^{N-M}\frac{(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_M)}{(z - p_1)(z - p_2)\dots(z - p_N)}$$

Με $z_1, z_1, \dots, z_\mathrm{M}$ τα M μηδενικά (zeros) και $p_1, p_2, \dots, p_\mathrm{N}$ οι N πόλοι (poles) της συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$.

Ο όρος $1 - z_k z^{-1} = \frac{z-z_k}{z}$ συνεισφέρει στην συνάρτηση μεταφοράς ένα μηδενικό στο $z = z_k$ και έναν πόλο στο $z = 0$.

Αντίστοιχα ο όρος $1 - p_k z^{-1} = \frac{z-p_k}{z}$ συνεισφέρει στην συνάρτηση μεταφοράς έναν πόλο στο $z = p_k$ και ένα μηδενικό στο $z = 0$.

- Έτσι αν συνυπολογιστούν οι πολοι και τα μηδενικά στο 0 και στο ∞, οι πόλοι και τα μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς έχουν το ίδιο πλήθος.

Έλεγχος Απολαβής (Κέρδους) Φίλτρου

- Η απόκριση συχνότητας ενός συστήματος(φίλτρου) είναι ο μετασχηματισμός Fourier της κρουστικής του απόκρισης $h[n]$, δηλαδή ο υπολογισμός τους μετασχηματισμού Z πάνω στο μοναδιαίο κύκλο ($z = e^{j\omega}$) :

$$H(z) = \left. \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] z^{-n} \right|_{z=e^{j\omega}}$$

Η ρητή συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ μπορεί να γραφτεί ως :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \mathrm{A} \frac{\prod_{k=0}^{M} (1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=0}^{N} (1 - p_k z^{-1})} = b_o z^{N-M} \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_M)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_N)}$$

Με $z_1, z_1, \dots, z_\mathrm{M}$ τα M μηδενικά (zeros) και $p_1, p_2, \dots, p_\mathrm{N}$ οι N πόλοι (poles) της συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$.

- Αν η κρουστική απόκριση $h[n]$ είναι πραγματική ακολουθία τότε η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ είναι συζυγής συμμετρική δηλαδή

$$H(z) = \mathrm{H}^*(z^*)$$

και τα μηδενικά και οι πόλοι εμφανίζονται σε συζυγή συμμετρικά ζευγάρια, δηλαδή εάν υπάρχει ένα μιγαδικό μηδενικό (ή πόλος) z_o τότε το z_o^* είναι επίσης μηδενικό (ή πόλος)

Έλεγχος Απολαβής (Κέρδους) Φίλτρου

- Η απόκριση συχνότητας ενός συστήματος(φίλτρου) είναι ο μετασχηματισμός Fourier της κρουστικής του απόκρισης, δηλαδή ο υπολογισμός τους μετασχηματισμού Z πάνω στο μοναδιαίο κύκλο ($z = e^{j\omega}$) :

$$H(z) = \left. \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] z^{-n} \right|_{z=e^{j\omega}}$$

Η ρητή συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ μπορεί να γραφτεί ως :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \mathrm{A} \frac{\prod_{k=0}^{M} (1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=0}^{N} (1 - p_k z^{-1})} = b_o z^{N-M} \frac{(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_M)}{(z-p_1)(z-p_2)\ldots(z-p_N)}$$

Με $z_1, z_1, \ldots, z_{\mathrm{M}}$ τα M μηδενικά (zeros) και $p_1, p_2, \ldots, p_{\mathrm{N}}$ οι N πόλοι (poles) της **συνάρτησης μεταφοράς** $H(z)$. Δηλαδή :

$$H(z) = b_o z^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^{M} (z - z_k)}{\prod_{k=1}^{N} (z - p_k)} \text{ και για } z = e^{j\omega}$$

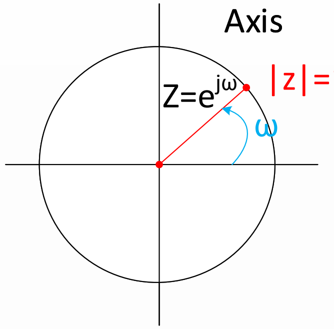
η απόκριση συχνότητας του φίλτρου μπορεί να γραφεί:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^{N} \alpha_k e^{-jk\omega}} = \mathrm{A} \frac{\prod_{k=0}^{M} (1 - z_k e^{-jk\omega})}{\prod_{k=0}^{N} (1 - p_k e^{-jk\omega})} = b_0\, e^{j(N-M)\omega} \frac{\prod_{k=1}^{M} (e^{j\omega} - z_k)}{\prod_{k=1}^{N} (e^{j\omega} - p_k)}$$

όπου z_k είναι τα **μηδενικά** (zeros) και p_k είναι οι **πόλοι** (poles) της απόκρισης συχνότητας.

Έλεγχος Απολαβής (Κέρδους) Φίλτρου

$$H(e^{j\omega}) = b_0\, e^{j(N-M)\omega} \frac{\prod_{k=1}^{M}(e^{j\omega} - z_k)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega} - p_k)}$$



Αναλυτικότερα :

$$H(e^{j\omega}) = b_o e^{j\omega(N-M)} \frac{(e^{j\omega} - z_1)(e^{j\omega} - z_2)\dots(e^{j\omega} - z_M)}{(e^{j\omega} - p_1)(e^{j\omega} - p_2)\dots(e^{j\omega} - p_N)}$$

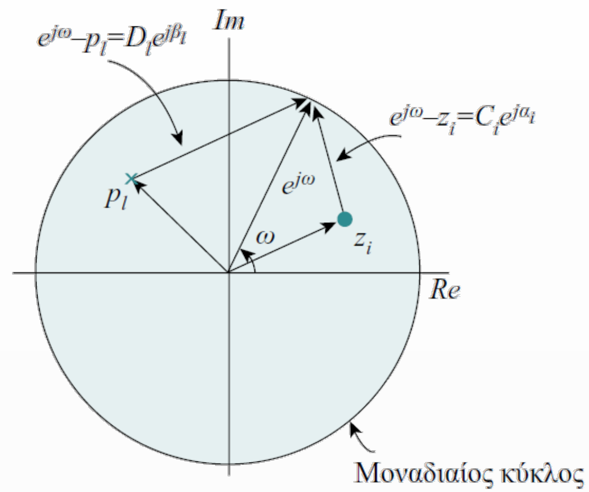
Κάθε μιγαδικός αριθμός μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα διάνυσμα στο μιγαδικό επίπεδο.

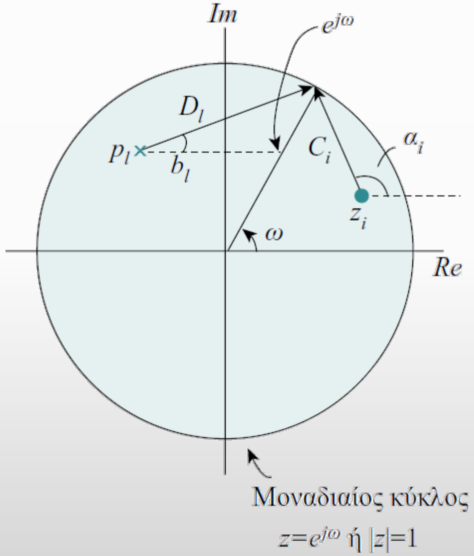
Το $e^{j\omega}$ είναι διάνυσμα με μέτρο 1, αρχή την αρχή των αξόνων και γωνία ω με τον άξονα των θετικών πραγματικών

- $e^{j\omega} - z_i = C_i e^{ja_i}, i = 1, \dots, M$ διάνυσμα από το μηδενικό z_i μέχρι το σημείου του μοναδιαίου κύκλου που καταλήγει το $e^{j\omega}$
- $e^{j\omega} - p_i = \mathrm{D}_i e^{j\beta_i}, i = 1, \dots, N$ διάνυσμα από τον πόλο p_i μέχρι το σημείου του μοναδιαίου κύκλου που καταλήγει το $e^{j\omega}$
- Οι φάσεις a_i, b_i είναι οι γωνίες των αντίστοιχων διανυσμάτων με τον άξονα των θετικών πραγματικών

$$H(e^{j\omega}) = b_o e^{j\omega(N-M)} \frac{(C_1 e^{ja_1})(C_2 e^{ja_2})\dots(C_M e^{ja_M})}{(\mathrm{D}_1 e^{j\beta_1})(\mathrm{D}_2 e^{j\beta_2})\dots(\mathrm{D}_N e^{j\beta_N})}$$

Έλεγχος Απολαβής (Κέρδους) Φίλτρου





$$H(e^{j\omega}) = b_o e^{j\omega(N-M)} \frac{(C_1 e^{ja_1})(C_2 e^{ja_2}) \dots (C_M e^{ja_M})}{(\mathrm{D}_1 e^{j\beta_1})(\mathrm{D}_2 e^{j\beta_2}) \dots (\mathrm{D}_N e^{j\beta_N})} = \mathrm{V} e^{j\Theta}$$

Άρα το μέτρο

$$|H(e^{j\omega})| = \mathrm{V} = |b_o| \frac{C_1 C_2 \dots C_\mathrm{M}}{\mathrm{D}_1 \mathrm{D}_2 \dots \mathrm{D}_\mathrm{N}}$$

Και η φάση

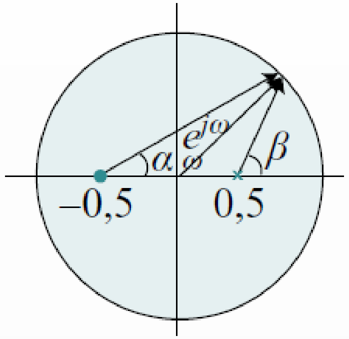
$$\Theta = \angle b_o + (N-M)\omega + (a_1 + a_2 + \cdots + a_\mathrm{M}) - (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\mathrm{N})$$

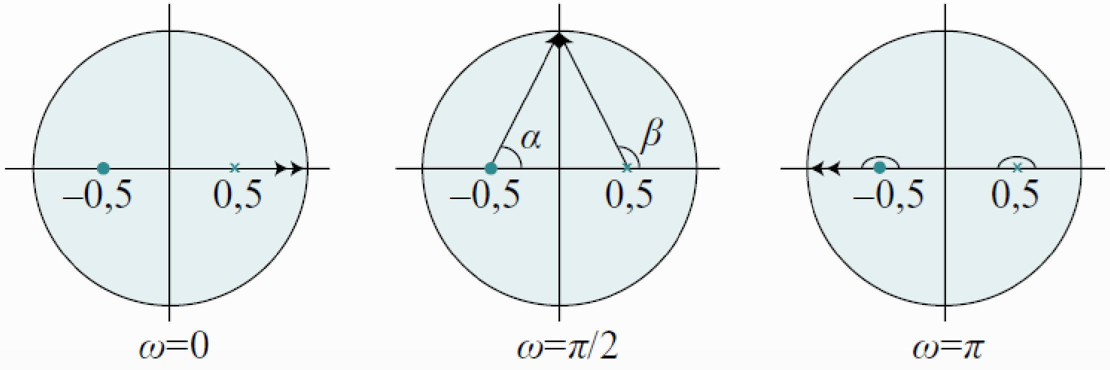
Η φάση του b_o είναι 0 ή π ανάλογα με το πρόσημό του (θετικό η αρνητικό)

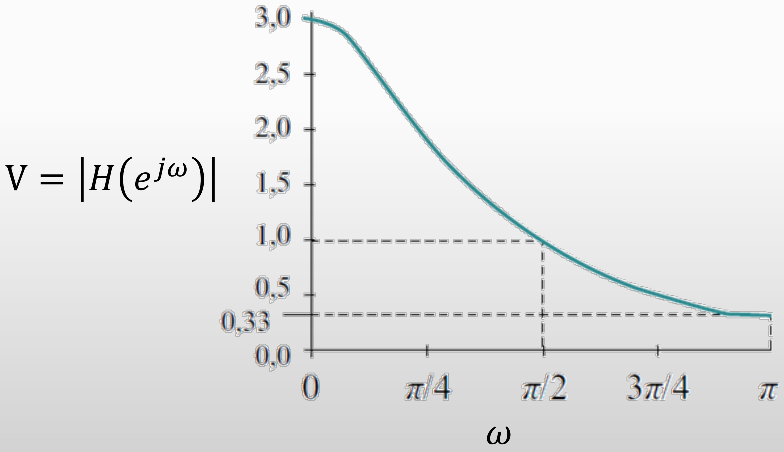
Έλεγχος Απολαβής (Κέρδους) Φίλτρου

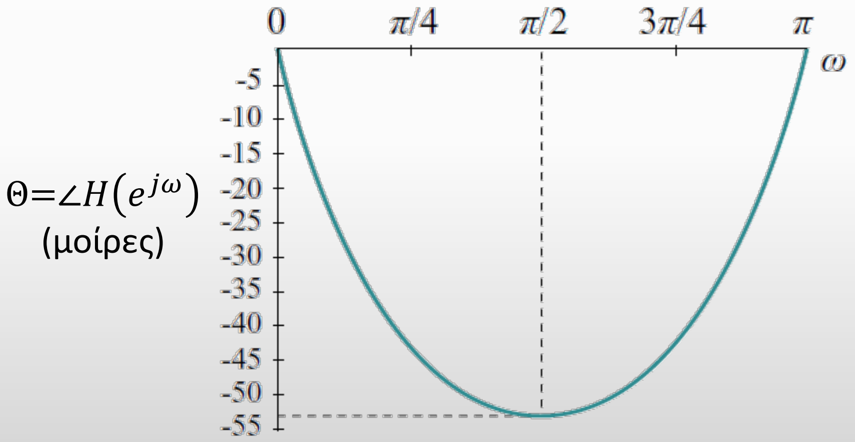
Παράδειγμα : Απόκριση συχνότητας του συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς $H(z) = \frac{z+0.5}{z-0.5}, |z| > 0.5$

Απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega}+0.5}{e^{j\omega}-0.5} = \frac{(Ce^{ja})}{(De^{j\beta})} = Ve^{j\Theta}$ με $V = \frac{C}{D}$ και $\Theta = \alpha - \beta$.









Έλεγχος Απολαβής (Κέρδους) Φίλτρου

- Έάν ένα μηδενικό z_i βρίσκεται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο τότε το $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = 0$ για $\omega = \angle z_i$
  - Ένα μηδενικό πολύ κοντά στο μοναδιαιο κύκλο οδηγεί την απόκριση συχνότητας να λάβει πολύ μικρές τιμές για τιμές της συχνότητας κοντά στο συγκεκριμένο μηδενικό.
- Εάν ένας πόλος p_i βρίσκεται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο τότε το $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \infty$ για $\omega = \angle p_i$
  - Ένας πόλος πολύ κοντά στο μοναδιαίο κύκλο οδηγεί την απόκριση συχνότητας να λάβει πολύ μεγάλες τιμές για τιμές της συχνοτητας κοντά στο συγκεκριμένο πόλο.
- Οι πόλοι επιφέρουν αντίθετα αποτελέσματα από τα μηδενικά
- Θέτοντας ένα μηδενικό κοντά σε έναν πόλο, αυτό εξουδετερώνει την επίδραση του πόλου και το αντίθετο.

$$H\left(e^{j\omega}\right) = b_o e^{j\omega(N-M)} \frac{\left(e^{j\omega} - z_1\right)\left(e^{j\omega} - z_2\right) \ldots \cancel{\left(e^{j\omega} - z_M\right)}}{\left(e^{j\omega} - p_1\right)\left(e^{j\omega} - p_2\right) \ldots \cancel{\left(e^{j\omega} - p_N\right)}} \qquad z_i = p_j$$

- Εφαρμογή στα notch φίλτρα (φίλτρα αποκοπής ή απόρριψης μιας συχνότητας, π.χ. 50Hz)
- Αν έχουμε την επιθυμητή απόκριση συχνότητας μπορούμε να σχεδιάσουμε την συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος που έχει αυτή την απόκριση δηλαδή το κατάλληλο φίλτρο.

Έλεγχος Απολαβής (Κέρδους) Φίλτρου

- Αν $\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| > 1$ τότε το φίλτρο προκαλεί **ενίσχυση** του σήματος εισόδου.
- Αν $\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| < 1$, τότε συμβαίνει **εξασθένιση** του σήματος εισόδου.

Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **φιλτράρισμα** του σήματος εισόδου και μπορεί να οδηγήσει στην παραγωγή μίας εξόδου με επιθυμητά φασματικά χαρακτηριστικά.

→Ο σχεδιασμός του ψηφιακού φίλτρου μπορεί να προσδιορίσει κατάλληλα το πλάτος της απόκρισης συχνότητας σε δεδομένη συχνότητα ω_0 ώστε να προκύπτει είτε ενίσχυση είτε εξασθένιση του σήματος εισόδου στη συγκεκριμένη συχνότητα ω_0

Λαμβάνοντας υπόψη ότι ένα αιτιατό LTI σύστημα είναι ευσταθές όταν και μόνο όταν όλοι οι πόλοι του βρίσκονται μέσα στον μοναδιαίο κύκλο, καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως για μία συγκεκριμένη συχνότητα ω_0:

- ❖ Αν είναι επιθυμητή η **ενίσχυση** του σήματος εισόδου, τότε τοποθετούμε έναν **πόλο πολύ κοντά** στον μοναδιαίο κύκλο (**εντός αυτού**) σε γωνία ίση με τη συχνότητα ω_0.
- ❖ Αν είναι επιθυμητή η **εξασθένιση** του σήματος εισόδου, τότε τοποθετούμε ένα **μηδενικό** πολύ κοντά στον μοναδιαίο κύκλο σε γωνία ίση με τη συχνότητα ω_0.

❖ επιβάλλεται **όλοι οι πόλοι** του φίλτρου να βρίσκονται **μέσα** στον μοναδιαίο κύκλο, ώστε το φίλτρο να παραμένει ευσταθές.

Φίλτρα Ελάχιστης και Μέγιστης Φάσης

Η θέση των **μηδενικών** ενός σταθερού φίλτρου επηρεάζει τη φάση της απόκρισης συχνότητας.

Συγκεκριμένα, το σύστημα είναι:

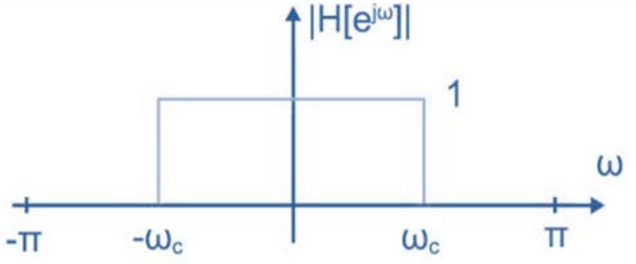
- **Ελάχιστης φάσης** όταν όλα τα μηδενικά βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου.
- **Μέγιστης φάσης** όταν όλα τα μηδενικά βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου.
- **Μικτής φάσης** όταν ορισμένα μηδενικά βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου και τα υπόλοιπα εκτός αυτού.

Για παράδειγμα, το φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς:

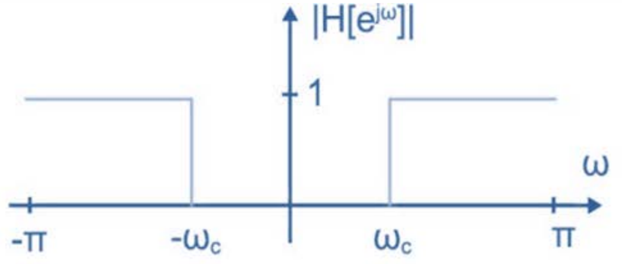
$$H(z) = \frac{(z-0.2)(z+0.4)}{(z+0.5)(z-0.7)}$$

είναι ελάχιστης φάσης, επειδή οι θέσεις των μηδενικών $z_1 = 0.2$ και $z_2 = -0.4$ βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου.

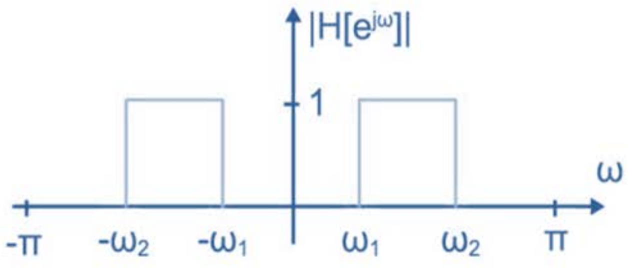
Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων



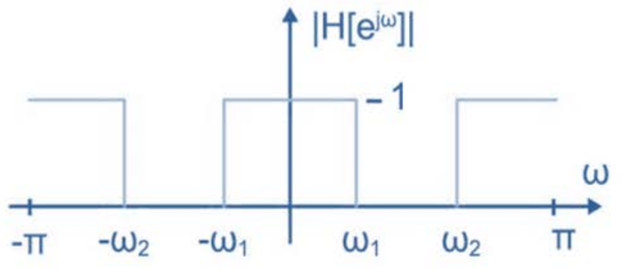
(α) Ιδανικό *Χαμηλοπερατό Φίλτρο (Low-Pass).*



(β) Ιδανικό *Υψιπερατό Φίλτρο (High-Pass).*



(γ) Ιδανικό *Ζωνοπερατό Φίλτρο (Band-Pass).*



(δ) Ιδανικό *Ζωνοφρακτικό Φίλτρο (Band-Stop).*

- **Ζώνη διέλευσης** (pass zone): η περιοχή συχνοτήτων στην οποία $|H(e^{j\omega})| = 1$.
- **Ζώνη αποκοπής** (stop zone): η περιοχή συχνοτήτων στην οποία $|H(e^{j\omega})| = 0$.
- **Συχνότητες αποκοπής** (cut-off frequencies): οι οριακές συχνότητες που σημειώνουν τα άκρα της ζώνης διέλευσης και αποκοπής.

Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων

- **Ιδανικό Βαθυπερατό Φίλτρο** (Low Pass Filter, LPF):

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \begin{cases} 1, & 0 \le |\omega| \le \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

- **Ιδανικό Υψιπερατό Φίλτρο** (High Pass Filter, HPF):

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \begin{cases} 1, & \omega_c < |\omega| < \pi \\ 0, & 0 \le |\omega| \le \omega_c \end{cases}$$

- **Ιδανικό Ζωνοπερατό Φίλτρο** (Band Pass Filter, BPF):

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \begin{cases} 1, & \omega_1 \le |\omega| \le \omega_2 \\ 0, & 0 < |\omega| < \omega_1 \text{ και } \omega_2 < |\omega| < \pi \end{cases}$$

- **Ιδανικό Ζωνοφρακτικό Φίλτρο** (Band Stop Filter, BSF):

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \begin{cases} 1, & 0 < |\omega| < \omega_1 \text{ και } \omega_2 < |\omega| < \pi \\ 0, & \omega_1 \le |\omega| \le \omega_2 \end{cases}$$

- Όμως τα ιδανικά φίλτρα είναι **μη-αιτιατά**, άρα **μη-υλοποιήσιμα**.

Πραγματικά Ψηφιακά Φίλτρα

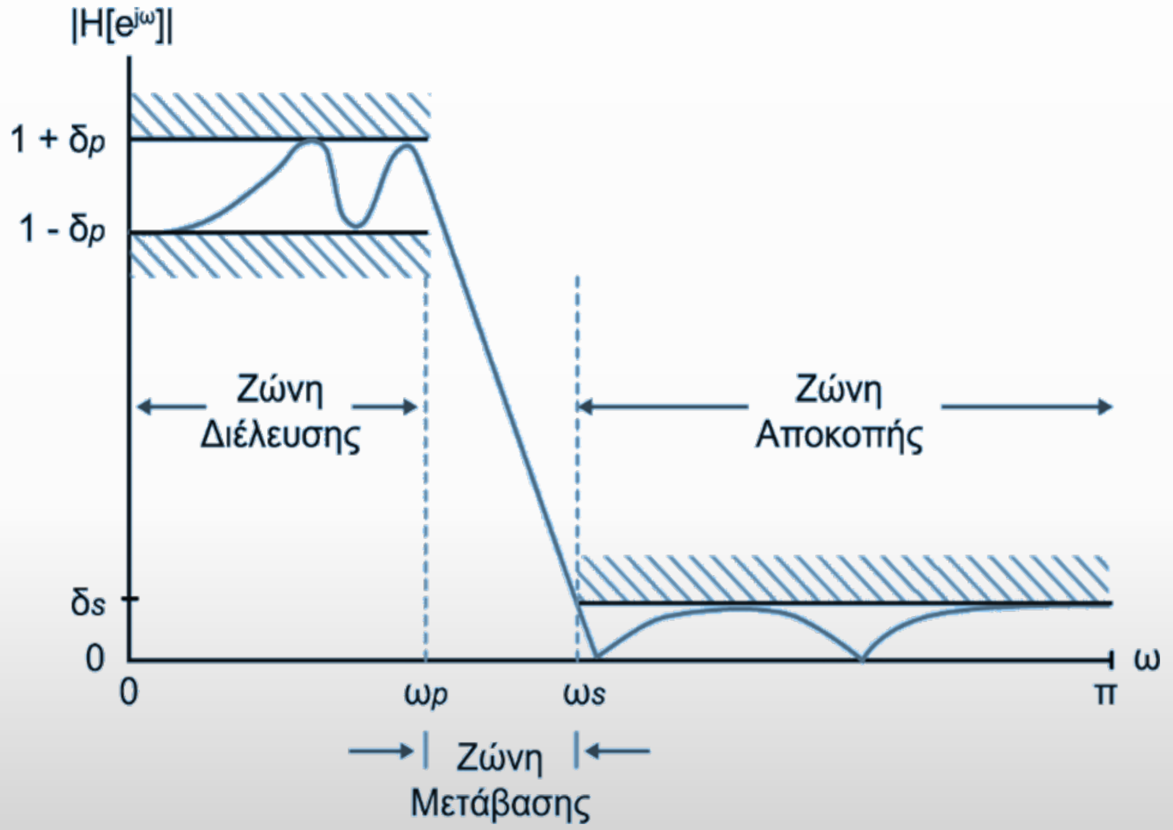
Με αποκλίσεις από την ιδανική απόκριση → **πραγματικά φίλτρα**.

Για παράδειγμα για τον σχεδιασμό πραγματικού βαθυπερατό φίλτρου θέτουμε:

- $1 - \delta_p < |H(e^{-j\omega})| \leq 1 + \delta_p \qquad 0 \leq |\omega| < \omega_p$ (ζώνη διέλευσης)
- $|H(e^{-j\omega})| \leq \delta_s \qquad \omega_s \leq |\omega| < \pi$ (ζώνη αποκοπής)

Απόλυτες προδιαγραφές:

- ω_p : συχνότητα αποκοπής στη ζώνη διέλευσης
- ω_s : συχνότητα αποκοπής στη ζώνη αποκοπής
- δ_p : απόκλιση στη ζώνη διέλευσης
- δ_s : απόκλιση στη ζώνη αποκοπής
- $[\omega_p, \omega_s]$: ζώνη μετάβασης



Πραγματικά Ψηφιακά Φίλτρα

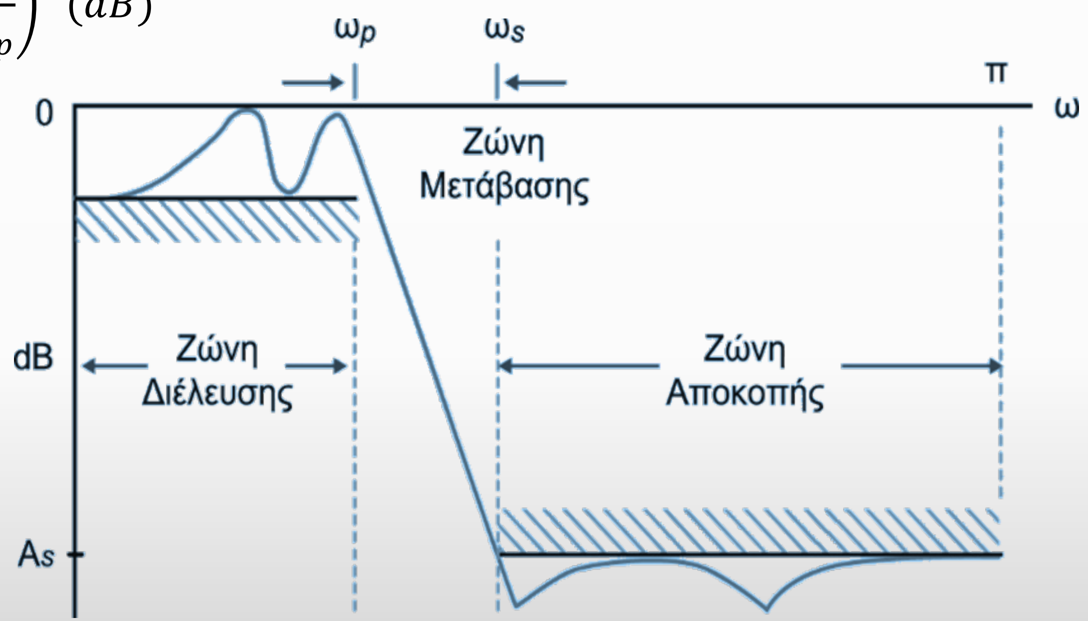
Σχετικές προδιαγραφές:

R_p: **κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης** (passband ripple):

$$R_p = -20\log_{10}\left(\frac{1-\delta_p}{1+\delta_p}\right) \quad (dB)$$

A_s: **εξασθένιση στη ζώνη αποκοπής** (stopband attenuation):

$$A_s = -20\log_{10}\left(\frac{\delta_s}{1+\delta_p}\right) \quad (dB)$$



Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος & Εικόνας

Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών

Α. Μπακλέζος

abaklezos@hmu.gr