Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος & Εικόνας

Μάθημα 10ο

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου
Απόκριση Συχνότητας

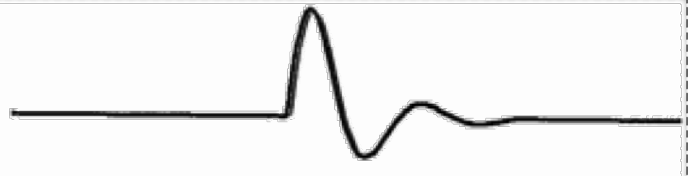
Α. Μπακλέζος

abaklezos@hmu.gr

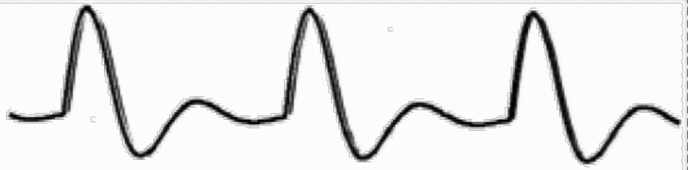
Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών

Κατηγορίες Σημάτων & Μετασχηματισμών Fourier

Μετασχηματισμός Fourier
Σήματα συνεχή και μη περιοδικά



Σειρές Fourier
Σήματα συνεχή και περιοδικά



Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου
Σήματα διακριτά και μη περιοδικά

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier
Σήματα διακριτά και περιοδικά

Μετασχηματισμός Fourier **διακριτού χρόνου**

- Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (Discrete Time Fourier Transform – DTFT) είναι ένας μετασχηματισμός, που συνδέει το πεδίο του διακριτού χρόνου με το πεδίο της (ψηφιακής) κυκλικής συχνότητας .

Ευθύς DTFT :

$$\mathrm{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n}, -\pi \leq \omega \leq \pi$$

- ο DTFT $\mathrm{X}(e^{j\omega})$, **αν υπάρχει**, μιας ακολουθίας διακριτού χρόνου $\mathrm{x}[n]$ είναι η αναπαράσταση της ακολουθίας συναρτήσει μιγαδικών εκθετικών ακολουθιών της μορφής $e^{-j\omega}$ με ω η ψηφιακή κυκλική συχνότητα

- Αντίστροφος IDTFT(Inverse Discrete Time Fourier Transform) :

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{X}(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega n} d\omega$$

- Εφόσον υπάρχουν, οι DTFT και IDTFT είναι μοναδικοί

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

- Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (Discrete Time Fourier Transform – DTFT) είναι ένας μετασχηματισμός, που συνδέει το πεδίο του διακριτού χρόνου με το πεδίο της (ψηφιακής) κυκλικής συχνότητας .

Ευθύς DTFT :

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n}$$

Συγκρίνοντας με τον Μ/Τ Fourier

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_a(j\Omega) * S_a(j\Omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_a(j\Omega - jk\,\Omega_s), \Omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

$$\rightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a[n] \cdot T_s\, e^{-j\omega n} \rightarrow$$

$$X(e^{j\omega}) = X_s(j\Omega)\Big|_{\Omega=\omega/T_s} = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_a(j\frac{\omega}{T_s} - j\frac{2\pi k}{T_s})$$

Ο DTFT είναι κλιμακωμένος στη συχνότητα με την κλιμάκωση $\omega = \Omega T_s$ να κάνει το DTFT περιοδικό με περίοδο 2π.

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

- <u>Ύπαρξη</u> μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου :

Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (**Discrete Time Fourier Transform – DTFT**) ακολουθίας διακριτού χρόνου $\mathrm{x}[n]$ υπάρχει εφόσον η ακολουθία είναι "παρατηρίσιμη", δηλαδή οι τιμές της δεν απειρίζονται άρα αρκεί το άθροισμα των πλατών της ακολουθίας να μην είναι άπειρο :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| = \mathrm{L} < \infty, \mathrm{L} > 0$$

Παράδειγμα : υπάρχει ο DTFT της ακολουθίας $x[n] = \left(\frac{1}{8}\right)^n \cdot u[n]$;

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\left(\frac{1}{8}\right)^n \cdot u[n]\right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n \cdot u[n] = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{8}\right)^n \cdot \cancelto{0}{u[n]} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n \cdot \cancelto{1}{u[n]} =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{8}{7}$$

Υπάρχει ο μετασχηματισμός!!

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Παράδειγμα : υπάρχει ο DTFT της ακολουθίας $x[n] = (2)^n \cdot u[n]$;

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |(2)^n \cdot u[n]| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (2)^n \cdot u[n] = \sum_{n=-\infty}^{-1} (2)^n \cdot \underbrace{u[n]}_{0} + \sum_{n=0}^{+\infty} (2)^n \cdot \underbrace{u[n]}_{1} =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (2)^n = +\infty$$

Δεν υπάρχει ο μετασχηματισμός!!

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

- Ο ευθύς και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου αποτελούν ένα μοναδικό ζεύγος

$$x[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X\left(e^{j\omega}\right)$$

- Το ολοκλήρωμα και το άθροισμα (σειρά) είναι γραμμικοί τελεστές → DTFT γραμμικός μετασχηματισμός

- Ο DTFT είναι μιγαδική συνάρτηση :

$$X\left(e^{j\omega}\right) = X_r\left(e^{j\omega}\right) + j \cdot X_i\left(e^{j\omega}\right) = \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

- Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου είναι περιοδικός με περίοδο 2π :

$$X\left(e^{j\omega}\right) = X\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right)$$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

- Υπολογισμός του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου :
  - έλεγχος ύπαρξης του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου, και αν υπάρχει
  - υπολογίζεται η έκφραση του μετασχηματισμού χρησιμοποιώντας τον ορισμό και τα γνωστά αθροίσματα

Παράδειγμα : Να βρεθεί ο DTFT της ακολουθίας $x[n] = a^n \cdot u[n], 0 < a < 1$;

Έλεγχος ύπαρξης :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a^n \cdot u[n]| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n \cdot u[n] = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n \cdot \cancelto{0}{u[n]} + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cdot \cancelto{1}{u[n]} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a} < \infty \surd$$

Υπολογισμός :

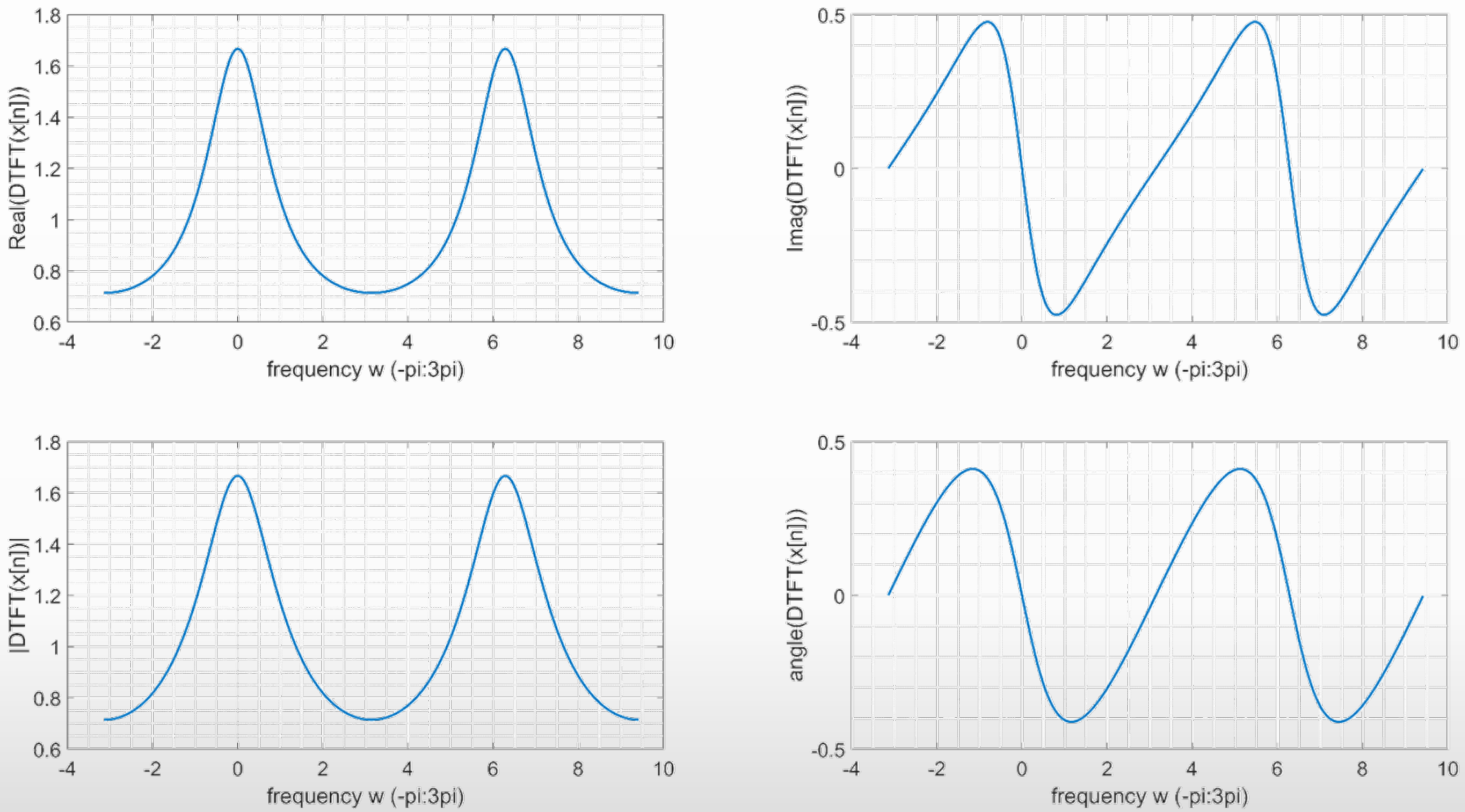
$$\mathrm{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n \cdot u[n] \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n \cdot u[n] \cdot e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cdot u[n] \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a \cdot e^{-j\omega}\right)^n \rightarrow$$

$$\textit{ομως}\ \left|a \cdot e^{-j\omega}\right| = \alpha < 1 \rightarrow \boxed{\mathrm{X}(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a \cdot e^{-j\omega}}}$$

$$\left|a \cdot e^{-j\omega}\right| = |a| \cdot \left|e^{-j\omega}\right| = |a| \cdot |\cos(-\omega) + j \cdot \sin(-\omega)| = |a| \cdot \sqrt{(\cos(-\omega))^2 + (\sin(-\omega))^2} = |a| = \alpha$$

Μετασχηματισμός Fourier **διακριτού χρόνου**

- DTFT της ακολουθίας $x[n] = 0.4^n \cdot u[n] \rightarrow \mathrm{X}\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{1-0.4\cdot e^{-j\omega}}$, ($\omega \in [-\pi, 3\pi]$ για τις γραφικές)



Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Άσκηση : Να βρεθεί ο DTFT της ακολουθίας $x[n] = 0.65^n \cdot u[n]$. Με χρήση της Octave να γίνουν τα διαγράμματα της πραγματικής συνιστώσας (**real()**), φανταστικής συνιστώσας(**imag()**, του μέτρου(**abs()**)και της φάσης (**angle()**) του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου της $x[n]$ για τιμές της $\omega \in [-3\pi, 3\pi]$

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n}}$$

Μετασχηματισμός Fourier **διακριτού χρόνου**

- <u>Παράδειγμα:</u> Να υπολογιστεί ο DTFT του $x[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & n = 0,2,4,\dots \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του DTFT έχουμε:

$$\mathrm{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega} = \sum_{n=0,2,4,\dots}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-jn\omega} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} e^{-2jk\omega} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}e^{-2j\omega}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-2j\omega}}$$

$\boxed{\text{Θέτω } \mathrm{n} = 2\mathrm{k}}$

Όμως :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}e^{-2j\omega}\right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}e^{-2j\omega}\right)^n$$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

- Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου:

❖ <u>Γραμμικότητα:</u>

Αν $x_1[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X_1(e^{j\omega})$ και $x_2[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X_2(e^{j\omega})$ τότε $\boxed{c_1 \cdot x_1[n] + c_2 \cdot x_2[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} c_1 \cdot X_1(e^{j\omega}) + c_2 \cdot X_2(e^{j\omega})}$

Απόδειξη:

Αν $y[n] = c_1 \cdot x_1[n] + c_2 \cdot x_2[n]$

$$\Upsilon(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_1 \cdot x_1[n] + c_2 \cdot x_2[n]) \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(c_1 \cdot x_1[n] \cdot e^{-j\omega n} + c_2 \cdot x_2[n] \cdot e^{-j\omega n}\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(c_1 \cdot x_1[n] \cdot e^{-j\omega n}\right) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(c_2 \cdot x_2[n] \cdot e^{-j\omega n}\right) = c_1 \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(x_1[n] \cdot e^{-j\omega n}\right) + c_2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(x_2[n] \cdot e^{-j\omega n}\right)$$

$$= c_1 \cdot X_1(e^{j\omega}) + c_2 \cdot X_2(e^{j\omega})$$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

- Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου:

  - Μετατόπιση στο χρόνο:

Αν $x[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$ τότε $\boxed{x[n-n_o] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega n_o} \cdot X(e^{j\omega})}$

Απόδειξη:

Αν $y[n] = x[n-n_o]$

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n-n_o] \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] \cdot e^{-j\omega(m+n_o)} = e^{-j\omega n_o} \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] \cdot e^{-j\omega m}$$

$$= e^{-j\omega n_o} \cdot X(e^{j\omega})$$

Θέτω $m = n - n_o$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n}}$$

- Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου:

  - Αναδίπλωση:

Αν $x[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$ τότε $\boxed{x[-n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(e^{-j\omega})}$

Απόδειξη:

Αν $y[n] = x[-n]$

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n] \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] \cdot e^{-j\omega(-m)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] \cdot e^{-j(-\omega)m} = X(e^{j(-\omega)})$$

$$= X(e^{-j\omega})$$

Θέτω $m = -n$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n}}$$

- Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου:

  - <u>Μετατόπιση στη συχνότητα:</u>

Αν $x[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$ τότε $\boxed{e^{j\omega_o n} \cdot x[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X\left(e^{j(\omega-\omega_o)}\right)}$

Απόδειξη:

Αν $y[n] = e^{j\omega_o n} \cdot x[n]$

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_o n} \cdot x[n] \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_o n - j\omega n} \cdot x[n]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j(\omega-\omega_o)n} = X\left(e^{j(\omega-\omega_o)}\right)$$

Μετασχηματισμός Fourier **διακριτού χρόνου**

- Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου:

❖ <u>Συνέλιξη:</u>

Αν $x_1[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X_1\left(e^{j\omega}\right)$ και $x_2[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X_2\left(e^{j\omega}\right)$ τότε $\boxed{x_1[n] * x_2[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X_1\left(e^{j\omega}\right) \cdot X_2\left(e^{j\omega}\right)}$

Απόδειξη:

Αν $y[n] = x_1[n] * x_2[n]$

$$\Upsilon\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x_1[n] * x_2[n]) \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} (x_1[m] \cdot x_2[n-m]) \right) \cdot e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x_1[m] \cdot x_2[n-m]) \cdot e^{-j\omega n} \right) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[m] \cdot \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x_2[n-m]) \cdot e^{-j\omega n} \right)$$

Θέτω $\mathrm{n} - m = k$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[m] \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_2[k] \cdot e^{-j\omega(m+k)} \right) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[m] \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_2[k] \cdot e^{-j\omega m} \cdot e^{-j\omega k} \right)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[m] \cdot e^{-j\omega m} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_2[k] \cdot e^{-j\omega k} \right) = \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[m] \cdot e^{-j\omega m} \right) \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_2[k] \cdot e^{-j\omega k} \right) = X_1\left(e^{j\omega}\right) \cdot X_2\left(e^{j\omega}\right)$$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

- Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου:

❖ Μιγαδική Συζυγία:

Αν $x[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$ τότε $\boxed{x^*[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X^*(e^{j\omega})}$

Απόδειξη:

Αν $y[n] = x^*[n]$

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]\cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*[n]\cdot e^{-j\omega n}$$

Άρα το συζυγές

$$Y^*(e^{j\omega}) = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*[n]\cdot e^{-j\omega n}\right)^* = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x^*[n])^*\cdot\left(e^{-j\omega n}\right)^* = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\cdot e^{-j(-\omega)n} = X(e^{-j\omega})$$

Δηλαδή

$$Y(e^{j\omega}) = \left(Y^*(e^{j\omega})\right)^* = \left(X(e^{-j\omega})\right)^* = X^*(e^{-j\omega})$$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

- Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου:

  - Θεώρημα Parseval – Διατήρησης της Ενέργειας:

Αν $x[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$ τότε

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left|X(e^{j\omega})\right|^2 d\omega}$$

ο μετασχηματισμός DTFT διατηρεί τη συνολική ενέργεια κατά τη μετάβαση από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

- Χαρακτηριστικά Ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου:

Ακολουθία Διακριτού Χρόνου	**DTFT** $X\left(e^{j\omega}\right)$
$\delta[n]$	1
$\delta[n-n_o]$	$e^{-j\omega n_o}$
1	$2\pi\cdot\delta(\omega)$
$e^{j\omega_o n}$	$2\pi\cdot\delta(\omega-\omega_o)$
$a^n\cdot u[n], \lvert a\rvert<1$	$\dfrac{1}{1-a\cdot e^{-j\omega}}$
$-a^n\cdot u[-n-1], \lvert a\rvert>1$	$\dfrac{1}{1-a\cdot e^{-j\omega}}$
$(n+1)a^n\cdot u[n], \lvert a\rvert<1$	$\dfrac{1}{(1-a\cdot e^{-j\omega})^2}$
$\sin(\omega_o\cdot n)$	$-j\cdot\pi\cdot[\delta(\omega-\omega_o)-\delta(\omega+\omega_o)]$
$\cos(\omega_o\cdot n)$	$\pi\cdot[\delta(\omega-\omega_o)-\delta(\omega+\omega_o)]$

Αντιστροφος Μετασχηματισμός Fourier **διακριτού χρόνου**

- Αντίστροφος IDTFT(Inverse Discrete Time Fourier Transform) :

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{X}\left(e^{j\omega}\right) \cdot e^{j\omega n} d\omega$$

❖ υπολογισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου, μέσω των ζευγών μετασχηματισμού και των ιδιοτήτων μετασχηματισμού

- <u>Παράδειγμα :</u> Να υπολογιστεί το σήμα $\mathrm{x}[n]$ που έχει μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου $X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{4}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)}$

→*παρατηρούμε ότι εντός των παρενθέσεων έχουμε όρους της μορφής* $\frac{1}{1-a\cdot e^{-j\omega}}$ *που είναι ο DTFT γνωστής ακολουθίας. Αν το αναλύσουμε σε άθροισμα απλών κλασμάτων με χρήση της ιδιότητας της γραμμικότητας μπορούμε να βρούμε το ζητούμενο σήμα* $\mathrm{x}[n]$. Δηλαδή :

$$4 \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)} = \frac{\mathrm{A}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)} + \frac{\mathrm{B}}{\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)} \rightarrow \frac{4}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)} = \frac{\mathrm{A}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)} + \frac{\mathrm{B}}{\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)} \rightarrow$$

$$\frac{4}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)} = \frac{\mathrm{A}\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right) + \mathrm{B}\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)} \rightarrow \mathrm{A}\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right) + \mathrm{B}\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right) = 4 \rightarrow$$

Αντιστροφος Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

- Παράδειγμα (συνέχεια):

$$(\mathrm{A}+\mathrm{B})-\left(\frac{1}{3}\mathrm{A}+\frac{1}{2}\mathrm{B}\right)e^{-j\omega}=4$$

Άρα

$$\begin{cases}\mathrm{A}+\mathrm{B}=4\\ \frac{1}{3}\mathrm{A}+\frac{1}{2}\mathrm{B}=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\mathrm{A}=12\\ \mathrm{B}=-8\end{cases}$$

Άρα

$$X\left(e^{j\omega}\right)=12\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)}-8\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)}$$

$\overset{DTFT}{\longleftrightarrow}$

$a^n\cdot u[n], \|a\|<1$	$\frac{1}{1-a\cdot e^{-j\omega}}$

Έτσι

$$x[n]=12\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-8\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

Αντιστροφος Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

- Παράδειγμα 2: Να βρεθεί ο αντίστροφος DTFT της $X\left(e^{j\omega}\right) = \cos^2\omega$.

$$\boxed{cos\omega = \frac{1}{2}e^{j\omega} + \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

Ο DTFT της καθυστερημένης μοναδιαίας ώσης είναι:

$$\delta[n-n_0] \overset{DTFT}{\Longleftrightarrow} e^{-jn_0\omega}$$

Αναπτύσσουμε την $X\left(e^{j\omega}\right) = \cos^2\omega$ σε εκθετικούς μιγαδικούς όρους:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \left(\frac{1}{2}e^{j\omega} + \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{j2\omega} + \frac{1}{4}e^{-j2\omega}$$

Επομένως, ο αντίστροφος DTFT, δηλ. η $x[n]$ είναι:

$$x[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{4}\delta[n+2] + \frac{1}{4}\delta[n-2]$$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

- Συνέλιξη μέσω του μετασχηματισμού DTFT:

υπολογισμός της συνέλιξης $x[n] = x_1[n] * x_2[n]$ μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου, με χρήση των ζευγών μετασχηματισμού και των ιδιοτήτων μετασχηματισμού :

❖ Για τις δοσμένες ακολουθίες $x_1[n], x_2[n]$, ελέγχουμε αν υπάρχουν οι μετασχηματισμοί τους.

❖ Εάν υπάρχουν δηλαδή $x_1[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X_1(e^{j\omega})$ και $x_2[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X_2(e^{j\omega})$, υπολογίζουμε το γινόμενο

$$X(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega})$$

❖ το γινόμενο αναλύεται σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

❖ Τέλος, υπολογίζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου από τα ζεύγη του μετασχηματισμού και την ιδιότητα της γραμμικότητας του μετασχηματισμού

Μετασχηματισμός Fourier **διακριτού χρόνου**

- Παράδειγμα : Να υπολογιστεί η συνέλιξη $x[n] = x_1[n] * x_2[n]$ των σημάτων $x_1[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$ και $x_2[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$
- Αρχικά ελέγχουμε εάν υπάρχουν οι DTFT για τα δύο σήματα :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_1[n]| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u[n]\right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u[n] = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u[n] + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u[n] = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} < \infty \surd$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_2[n]| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u[n]\right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u[n] = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u[n] + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u[n] = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} < \infty \surd$$

υπολογίζονται οι (ευθείς) μετασχηματισμοί DTFT για τα δύο σήματα :

$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)}$$

$$X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}$$

Μετασχηματισμός Fourier **διακριτού χρόνου**

- <u>Παράδειγμα (συνέχεια):</u>
- Υπολογίζουμε το γινόμενο

$$X(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) \cdot X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}$$

- το γινόμενο αναλύεται σε άθροισμα απλών κλασμάτων

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} = \frac{\mathrm{A}}{\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)} + \frac{\mathrm{B}}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} \rightarrow$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} = \frac{\mathrm{A}\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)+\mathrm{B}\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} \rightarrow \mathrm{A}\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)+\mathrm{B}\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right) = 1 \rightarrow$$

$$(\mathrm{A}+\mathrm{B}) - \left(\frac{1}{4}\mathrm{A}+\frac{1}{3}\mathrm{B}\right)e^{-j\omega} = 1 \rightarrow \begin{cases} \mathrm{A}+\mathrm{B}=1 \\ \frac{1}{4}\mathrm{A}+\frac{1}{3}\mathrm{B}=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{A}=4 \\ \mathrm{B}=-3 \end{cases} \rightarrow$$

$$X(e^{j\omega}) = 4\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)} - 3\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} \rightarrow x[n] = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 3\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

- Άσκηση 1: Υπολογίστε τον DTFT, εφόσον υπάρχει, των σημάτων
  - Α) $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$
  - Β) $x[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$
  - Γ) $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 2$
  - Δ) $x[n] = 3\left(\frac{1}{5}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

- Άσκηση 2: Να υπολογιστεί το σήμα $\mathrm{x}[n]$ που έχει μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου $X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{5}e^{-j\omega}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{6}e^{-j\omega}\right)}$

- Άσκηση 3: Να υπολογιστεί η συνέλιξη $x[n] = x_1[n] * x_2[n]$ των σημάτων $x_1[n] = \left(\frac{1}{9}\right)^n u[n]$ και $x_2[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$

Απόκριση Συχνότητας

Αν $\mathrm{h}[n]$ είναι η κρουστική απόκριση ενός LTI συστήματος τότε η απόκριση στην είσοδο $x[n]=e^{j\omega n}$ είναι

$$y[n]=h[n]*x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(h[k]\cdot x[n-k])=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(h[k]\cdot e^{j\omega(n-k)}\right)=e^{j\omega n}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(h[k]\cdot e^{-j\omega k}\right)=e^{j\omega n}\cdot H\left(e^{j\omega}\right)=$$
$$=H\left(e^{j\omega}\right)\cdot e^{j\omega n}=\lambda\cdot x[n]$$

Ο συντελεστής λ είναι ανεξάρτητος του n

$$\lambda=H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(h[k]\cdot e^{-j\omega k}\right)$$ DTFT $h[n]$

Άρα $x[n]=e^{j\omega n}$ ιδιοσυνάρτηση του LTI συστήματος

- **Ιδιοσυνάρτηση** ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου (LTI) συστήματος είναι ένα σήμα $x[n]$, το οποίο αν τεθεί ως είσοδος στο σύστημα, παράγει έξοδο

$$y[n]=\lambda\cdot x[n]$$

  - δηλαδή η έξοδος είναι η είσοδος πολλαπλασιασμένη επί ένα συντελεστή λ, την **ιδιοτιμή**

- Τα LTI-ΓΧΑ συστήματα έχουν ιδιοσυναρτήσεις της μορφής $x[n]=e^{j\omega n}$

Απόκριση Συχνότητας

$$\boxed{\mathrm{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n}}$$

- Επισης, ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) της κρουστικής απόκρισης $\mathrm{h[n]}$ είναι η συνάρτηση $\mathrm{H}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$,
- Η οποία <u>υπάρχει πάντα</u> για ευσταθή LTI συστήματα (συνθήκη ύπαρξης DTFT αλλά και συνθήκη ευστάθειας)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\mathrm{h}[n]| = \mathrm{L} < \infty, \mathrm{L} > 0$$

- Ο DTFT $\mathrm{H}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ της κρουστικής απόκρισης $\mathrm{h[n]}$ ενός LTI συστήματος ονομάζεται <u>**απόκριση συχνότητας (frequency response)**</u> :

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(h[n] \cdot e^{-j\omega n}\right)$$

❖ Στα LTI συστήματα ισχύει ότι $y[n] = h[n] * x[n]$ άρα από τις ιδιότητες του DTFT

$$\Upsilon(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot \mathrm{X}(e^{j\omega})$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{LTI Σύστημα}} \longrightarrow \mathrm{y}[n] = h[n] * x[n]$$

$$\mathrm{X}(e^{j\omega}) \longrightarrow \boxed{\text{LTI Σύστημα}} \longrightarrow \Upsilon(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot \mathrm{X}(e^{j\omega})$$

Απόκριση Συχνότητας

- **Η απόκριση συχνότητας (frequency response)** $H(e^{j\omega})$ είναι μιγαδική συνάρτηση
- $H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + j \cdot H_I(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| \cdot e^{j\varphi_h(e^{j\omega})}$

- Η εξάρτηση του μέτρου (πλάτους) $|H(e^{j\omega})|$ από τη συχνότητα ω ονομάζεται **φάσμα πλάτους** (magnitude spectrum)

- Η εξάρτηση της φάσης $\varphi_h(e^{j\omega})$ από τη συχνότητα ω ονομάζεται **απόκριση φάσης** (phase spectrum)

- Αν η κρουστική απόκριση $\mathrm{h}[n]$ είναι **πραγματική** τότε η απόκριση συχνότητας είναι συζυγής συμμετρική $H(e^{-j\omega}) = H^*(e^{j\omega})$ και
- $H_R(e^{j\omega}) = H_R(e^{-j\omega})$ άρτια συμμετρία για το πραγματικο μέρος
- $H_I(e^{j\omega}) = -H_I(e^{-j\omega})$ περιττή συμμετρία για το φανταστικό μέρος
- $|H(e^{j\omega})| = |H(e^{-j\omega})|$ άρτια συμμετρία για το μέτρο (πλάτος)
- $\varphi_h(e^{j\omega}) = -\varphi_h(e^{-j\omega})$ περιττή συμμετρία για τη φάση

Απόκριση Συχνότητας

❖ Στα LTI συστήματα ισχύει ότι $y[n] = h[n] * x[n]$ και

$$\Upsilon(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega})$$

$$|\Upsilon(e^{j\omega})| \cdot e^{j\varphi_y(e^{j\omega})} = |H(e^{j\omega})| \cdot e^{j\varphi_h(e^{j\omega})} \cdot |X(e^{j\omega})| \cdot e^{j\varphi_x(e^{j\omega})} \rightarrow$$

$$\boxed{|\Upsilon(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})| \cdot |X(e^{j\omega})|}$$

$$e^{j\varphi_y(e^{j\omega})} = e^{j\varphi_h(e^{j\omega})} \cdot e^{j\varphi_x(e^{j\omega})} \rightarrow \boxed{\varphi_y(e^{j\omega}) = \varphi_h(e^{j\omega}) + \varphi_x(e^{j\omega})}$$

Η απόκριση πλάτους δρα **πολλαπλασιαστικά** στο πλάτος του σήματος εισόδου και η απόκριση φάσης του συστήματος δρα **προσθετικά** στη φάση του σήματος εισόδου.

$$\varphi_h(e^{j\omega}) = tan^{-1}\frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})}$$

- Συχνά αντί για τη φάση χρησιμοποιείται η καθυστέρηση ομάδας (group delay) που ορίζεται ως

$$\tau_h = -\frac{d\varphi_h(e^{j\omega})}{d\omega}$$

Και για σήματα στενής ζώνης (narrow band) δίνει μια προσέγγιση της καθυστέρησης ενός ημιτονοειδούς παλμού στη έξοδο σε σχέση με την είσοδο. Για τον υπολογισμό της καθυστέρησης ομάδας η φάση θεωρείται συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση της ω προσθέτοντας ακέραια πολλαπλάσια του 2π στη πρωτεύουσα φάση μια τεχνική που ονομάζεται ξεδίπλωμα/ξετύλιγμα της φάσης («phase unwraping»).

Απόκριση Συχνότητας

- Θεωρούμε το σήμα $\mathrm{x}[n] = \mathrm{A}\cos(\omega_o n + \theta)$ ως είσοδο σε LTI σύστημα με κρουστική απόκριση $\mathrm{h}[n]$ (που παίρνει πραγματικές τιμές).

Ποια η έξοδος;

Αν αναλύσουμε την $\mathrm{x}[n]$ σε άθροισμα εκθετικών δηλαδή $\mathrm{x}[n] = \frac{1}{2}\mathrm{A}e^{j(n\omega_o+\theta)} + \frac{1}{2}\mathrm{A}e^{-j(n\omega_o+\theta)}$ τότε η απόκριση του συστήματος είναι

$$\mathrm{y}[n] = \frac{1}{2}\mathrm{A}H(e^{j\omega_o})e^{jn\omega_o}e^{j\theta} + \frac{1}{2}\mathrm{A}H(e^{-j\omega_o})e^{-jn\omega_o}e^{-j\theta}$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{A}\left|H(e^{j\omega_o})\right| \cdot e^{j\varphi_h(e^{j\omega_o})}e^{jn\omega_o}e^{j\theta} + \frac{1}{2}\mathrm{A}\left|H(e^{-j\omega_o})\right| \cdot e^{j\varphi_h(e^{-j\omega_o})}e^{-jn\omega_o}e^{-j\theta} =$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{A}\left|H(e^{j\omega_o})\right| \cdot e^{j\left(n\omega_o+\theta+\varphi_h(e^{j\omega_o})\right)} + \frac{1}{2}\mathrm{A}\left|H(e^{j\omega_o})\right| \cdot e^{-j\left(n\omega_o+\theta-\varphi_h(e^{j\omega_o})\right)} = \mathrm{Re}\left\{\mathrm{A}H(e^{j\omega_o})e^{j\left(n\omega_o+\theta+\varphi_h(e^{j\omega_o})\right)}\right\}$$
$$= \mathrm{A}\left|H(e^{j\omega_o})\right|\cos\left(\mathrm{n}\omega_o + \theta + \varphi_h(e^{j\omega_o})\right)$$

$$\mathrm{y}[n] = \mathrm{A}\left|H(e^{j\omega_o})\right|\cos\left(\mathrm{n}\omega_o + \theta + \varphi_h(e^{j\omega_o})\right)$$

- Η απόκριση σε ημιτονικό σήμα ονομάζεται απόκριση στη σταθερή κατάσταση(steady state response).
- Η απόκριση ενός LTI συστήματος σε ημιτονικο ή μιγαδικό εκθετικό σήμα είναι ένα ίδιο σήμα στην ίδια συχνότητα με την είσοδο.

$H(e^{j\omega_o}) = \left|H(e^{j\omega_o})\right| \cdot e^{j\varphi_h(e^{j\omega_o})}$

$\left|H(e^{j\omega_o})\right| = \left|H(e^{-j\omega_o})\right|, \varphi_h(e^{j\omega_o}) = -\varphi_h(e^{-j\omega_o})$

Απόκριση Συχνότητας

- Παράδειγμα : Δίνεται η κρουστική απόκριση ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου (LTI) συστήματος

$$\mathrm{h}[n] = \delta[n] + 5\delta[n-1] - 8\delta[n-2]$$

Η απόκριση συχνότητας είναι

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(h[n]\cdot e^{-j\omega n}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(\delta[n] + 5\delta[n-1] - 8\delta[n-2]\,)e^{-j\omega n} = 1e^{-j\omega 0} + 5e^{-j\omega 1} - 8e^{-j\omega 2} = 1 + 5e^{-j\omega} - 8e^{-2j\omega}$$

- Παράδειγμα : Δίνεται η κρουστική απόκριση ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου (LTI) συστήματος

$$\mathrm{h}[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1]$$

Η απόκριση συχνότητας είναι

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(h[n]\cdot e^{-j\omega n}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(\delta[n] - 2\delta[n-1])e^{-j\omega n} = 1e^{-j\omega 0} - 2e^{-j\omega 1} = 1 - 2e^{-j\omega} \rightarrow$$

$$H\left(e^{j\omega}\right) = 1 - 2(\cos(-\omega) + j\cdot\sin(-\omega)) = 1 - 2\cos(\omega) + j\cdot 2\sin(\omega)$$

- $H_R\left(e^{j\omega}\right) = \mathrm{Re}\{1 - 2\cos(\omega) + j\cdot 2\sin(\omega)\,\} = 1 - 2\cos(\omega)$
- $H_I\left(e^{j\omega}\right) = \mathrm{Im}\{1 - 2\cos(\omega) + j\cdot 2\sin(\omega)\,\} = 2\sin(\omega)$

Απόκριση Συχνότητας

- Θεωρούμε το LTI σύστημα με βηματική απόκριση $\mathrm{h}[n] = a^n u[n], \mu\varepsilon\ |\alpha| < 1, \alpha \in \mathrm{R}$. Να βρεθεί το φάσμα πλάτους και φάσης.

Η απόκριση συχνότητας είναι

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(h[n] \cdot e^{-j\omega n}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(a^n u[n] e^{-j\omega n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a^n e^{-j\omega n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(ae^{-j\omega}\right)^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

Το μέτρο της απόκρισης συχνότητας είναι

$$|H(e^{j\omega})| = \left|\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}\right| = \left|\frac{1}{1 - \alpha\,(\cos(-\omega) + j\sin(-\omega))}\right| = \left|\frac{1}{1 - \alpha\cos(\omega) + j\alpha\sin(\omega)}\right| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \alpha\cos(\omega))^2 + (\alpha\sin(\omega))^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - 2\,a\cos(\omega) + \alpha^2}}$$

- ω=0 → $\left|H(e^{j\omega})\right|\Big|_{\omega=0} = \frac{1}{\sqrt{1-2\,a\cos(0)+\alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha)^2}} = \frac{1}{1-\alpha}$
- ω=π → $\left|H(e^{j\omega})\right|\Big|_{\omega=\pi} = \frac{1}{\sqrt{1-2\,a\cos(\pi)+\alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1+\alpha)^2}} = \frac{1}{1+\alpha}$

Κάντε δύο διαγράμματα για α=0.5 και α=-0.5 για να δείτε το φάσμα πλάτους για διαφορετικές τιμές του α!

Απόκριση Συχνότητας

Το φάσμα φάσης είναι

$$\varphi_h\left(e^{j\omega}\right) = tan^{-1}\frac{H_I\left(e^{j\omega}\right)}{H_R\left(e^{j\omega}\right)}$$

Όμως :

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} = \frac{1-ae^{j\omega}}{|1-ae^{-j\omega}|^2} = \frac{1-a\left(\cos(\omega)+jsin(\omega)\right)}{\left(\sqrt{(1-\alpha\cos(\omega))^2+(\alpha\, sin(\omega))^2}\right)^2} = \frac{1-a\left(\cos(\omega)+jsin(\omega)\right)}{1-2\,\mathrm{a}\cos(\omega)+\alpha^2}$$

$$= \frac{1-\alpha\cos(\omega)}{1-2\,\mathrm{a}\cos(\omega)+\alpha^2} + \frac{-jasin(\omega)}{1-2\,\mathrm{a}\cos(\omega)+\alpha^2}$$

Άρα το φάσμα φάσης

$$\varphi_h(\omega) = tan^{-1}\left(\frac{H_I\left(e^{j\omega}\right)}{H_R\left(e^{j\omega}\right)}\right) = tan^{-1}\left(\frac{\frac{-asin(\omega)}{1-2\,\mathrm{a}\cos(\omega)+\alpha^2}}{\frac{1-\alpha\cos(\omega)}{1-2\,\mathrm{a}\cos(\omega)+\alpha^2}}\right) = tan^{-1}\left(\frac{-asin\omega}{1-\mathrm{a}\cos\omega}\right)$$

- η καθυστέρηση ομάδας (group delay)

$$\tau_h = -\frac{d\varphi_h(\omega)}{d\omega} = \frac{\alpha^2-acos\omega}{1+\alpha^2-2acos\omega}$$

Απόκριση Συχνότητας

$$\boxed{x[n-n_o] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega n_o} \cdot X(e^{j\omega})}$$

Περιγραφή LTI Συστημάτων

Κάθε γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα (LTI) περιγράφεται από μία γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

Αν πάρουμε τον DTFT στα δύο μέλη :

$$\Upsilon(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k} X(e^{j\omega}) - \sum_{k=1}^{N} a_k e^{-j\omega k} \Upsilon(e^{j\omega}) \to \Upsilon(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k} - \Upsilon(e^{j\omega}) \sum_{k=1}^{N} a_k e^{-j\omega k} \to$$

$$\Upsilon(e^{j\omega}) + \Upsilon(e^{j\omega}) \sum_{k=1}^{N} a_k e^{-j\omega k} = X(e^{j\omega}) \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k} \to \Upsilon(e^{j\omega}) \left(1 + \sum_{k=1}^{N} a_k e^{-j\omega k}\right) = X(e^{j\omega}) \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}$$

Όμως $\Upsilon(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega}) \to$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\Upsilon(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k e^{-j\omega k}}$$

η απόκριση συχνότητας αρκεί για να περιγράψει ένα LTI σύστημα στο πεδίο της συχνότητας.

Απόκριση Συχνότητας

Παράδειγμα : Δίνεται η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές, που περιγράφει ένα LTI σύστημα

$$y[n] = x[n] + x[n-2] - 2y[n-1] + 3y[n-2]$$

Να υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας.

Προσοχή DTFT$\{x[n-n_o]\} = \mathrm{X}(e^{j\omega})e^{-j\omega n_o}$ από τη ιδιοτητα Μετατόπισης στο χρόνο

- Αν πάρουμε τον DTFT στα δύο μέλη :

$$\Upsilon(e^{j\omega}) = \mathrm{X}(e^{j\omega}) + e^{-2j\omega}\mathrm{X}(e^{j\omega}) - 2e^{-j\omega}\Upsilon(e^{j\omega}) + 3e^{-2j\omega}\Upsilon(e^{j\omega}) \rightarrow$$

$$\Upsilon(e^{j\omega})(1 + 2e^{-j\omega} - 3e^{-2j\omega}) = \mathrm{X}(e^{j\omega})(1 + e^{-2j\omega}) \rightarrow$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\Upsilon(e^{j\omega})}{\mathrm{X}(e^{j\omega})} = \frac{1 + e^{-2j\omega}}{1 + 2e^{-j\omega} - 3e^{-2j\omega}}$$

Εναλλακτικά πρόκειται για IIR φίλτρο (N,M)=(2,2) με σταθερούς συντελεστές $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -3$, $b_0 = 1$, $b_1 = 0, b_2 = 1$ άρα από τον τύπο

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k e^{-j\omega k}} = \frac{1 + e^{-2j\omega}}{1 + 2e^{-j\omega} - 3e^{-2j\omega}}$$

Απόκριση Συχνότητας

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k e^{-j\omega k}}$$

Παράδειγμα : Δίνεται η απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega}) = \frac{4+5e^{-2j\omega}}{1-2e^{-j\omega}-3e^{-2j\omega}+6e^{-3j\omega}}$

Να βρεθεί η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές που περιγράφει το LTI σύστημα.

Πρόκειται για IIR φίλτρο (N,M)=(3,2) με σταθερούς συντελεστές $\alpha_1 = -2,\ \alpha_2 = -3, \alpha_3 = 6, b_0 = 4,\ b_1 = 0, b_2 = 5$ άρα η εξίσωση διαφορών είναι

$$y[n] = 4x[n] + 5x[n-2] + 2y[n-1] + 3y[n-2] - 6y[n-3]$$

Ή αναλυτικά **μέσω IDTFT** :

$$H(e^{j\omega}) = \frac{4+5e^{-2j\omega}}{1-2e^{-j\omega}-3e^{-2j\omega}+6e^{-3j\omega}} \rightarrow \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{4+5e^{-2j\omega}}{1-2e^{-j\omega}-3e^{-2j\omega}+6e^{-3j\omega}} \rightarrow$$

$$Y(e^{j\omega})(1-2e^{-j\omega}-3e^{-2j\omega}+6e^{-3j\omega}) = X(e^{j\omega})(4+5e^{-2j\omega}) \rightarrow$$

$$Y(e^{j\omega}) - 2e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) - 3e^{-2j\omega}Y(e^{j\omega}) + 6e^{-3j\omega}Y(e^{j\omega}) = 4X(e^{j\omega}) + 5e^{-2j\omega}X(e^{j\omega}) \rightarrow$$

$$Y(e^{j\omega}) = 4X(e^{j\omega}) + 5e^{-2j\omega}X(e^{j\omega}) + 2e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) + 3e^{-2j\omega}Y(e^{j\omega}) - 6e^{-3j\omega}Y(e^{j\omega}) \rightarrow IDTFT \rightarrow$$

$$y[n] = 4x[n] + 5x[n-2] + 2y[n-1] + 3y[n-2] - 6y[n-3]$$

Απόκριση Συχνότητας

Σύνδεση συστημάτων σε σειρά:

LTI σύστημα με απόκριση συχνότητας $H_1(e^{j\omega})$ συνδέεται σε σειρά με ένα LTI σύστημα με απόκριση $H_2(e^{j\omega})$. Το πρώτο σύστημα έχει είσοδο $x[n]$ με DTFT $\mathrm{X}(e^{j\omega})$ και έξοδο $\mathrm{w}[n]$ με DTFT $\mathrm{W}(e^{j\omega})$. Το δεύτερο σύστημα έχει είσοδο την έξοδο του πρώτου συστηματος $\mathrm{w}[n]$ με DTFT $\mathrm{W}(e^{j\omega})$ και έξοδο $\mathrm{y}[n]$ με DTFT $\mathrm{Y}(e^{j\omega})$. Η σύνδεση σε σειρά των δύο συστημάτων είναι ισοδύναμη με ένα LTI σύστημα με απόκριση συχνότητας $\mathrm{H}(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega})$

Απόδειξη :

$\mathrm{Y}(e^{j\omega}) = H_2(e^{j\omega})\mathrm{W}(e^{j\omega})$

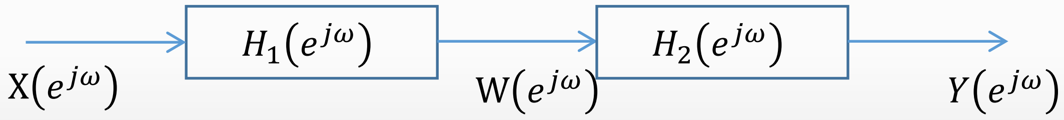
$\mathrm{W}(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega})\mathrm{X}(e^{j\omega})$

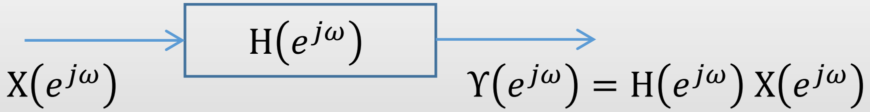
$$\mathrm{Y}(e^{j\omega}) = H_2(e^{j\omega})\mathrm{W}(e^{j\omega}) = H_2(e^{j\omega})\left(H_1(e^{j\omega})\mathrm{X}(e^{j\omega})\right) = \left(H_2(e^{j\omega})H_1(e^{j\omega})\right)\mathrm{X}(e^{j\omega})$$

Όμως $\mathrm{Y}(e^{j\omega}) = \mathrm{H}(e^{j\omega})\mathrm{X}(e^{j\omega})$

Άρα

$\mathrm{H}(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega})$





Απόκριση Συχνότητας

Σύνδεση συστημάτων παράλληλα:

LTI σύστημα με απόκριση συχνότητας $H_1(e^{j\omega})$ συνδέεται παράλληλα με ένα LTI σύστημα με απόκριση $H_2(e^{j\omega})$. Το πρώτο σύστημα έχει είσοδο $x[n]$ με DTFT $\mathrm{X}(e^{j\omega})$ και έξοδο $\mathrm{w}[n]$ με DTFT $\mathrm{W}(e^{j\omega})$. Το δεύτερο σύστημα έχει είσοδο $x[n]$ **με DTFT** $\mathrm{X}(e^{j\omega})$ και έξοδο $\mathrm{v}[n]$ με DTFT $\mathrm{V}(e^{j\omega})$. Η σύνδεση παράλληλα των δύο συστημάτων είναι ισοδύναμη με ένα LTI σύστημα με απόκριση συχνότητας $\mathrm{H}(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega})$

Απόδειξη :

$$V(e^{j\omega}) = H_2(e^{j\omega})\mathrm{X}(e^{j\omega})$$

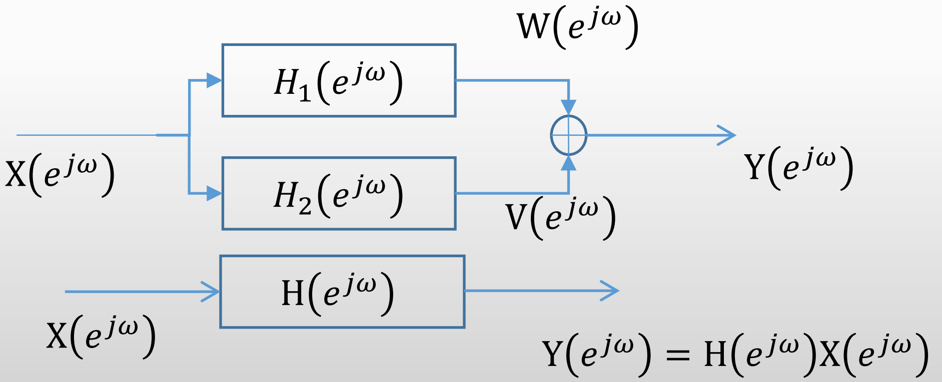
$$\mathrm{W}(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega})\mathrm{X}(e^{j\omega})$$

$$\mathrm{Y}(e^{j\omega}) = V(e^{j\omega}) + \mathrm{W}(e^{j\omega}) = H_2(e^{j\omega})\mathrm{X}(e^{j\omega}) + H_1(e^{j\omega})\mathrm{X}(e^{j\omega}) = \left(H_2(e^{j\omega}) + H_1(e^{j\omega})\right)\mathrm{X}(e^{j\omega})$$

Όμως $\mathrm{Y}(e^{j\omega}) = \mathrm{H}(e^{j\omega})\mathrm{X}(e^{j\omega})$

Άρα

$$\mathrm{H}(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega})$$



Απόκριση Συχνότητας

Επίλυση εξισώσεων διαφορών μέσω μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

- Η επίλυση εξισώσεων διαφορών μέσω μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου γίνεται μέσω των ζευγών του μετασχηματισμού, όσο και τις ιδιότητες.

Παράδειγμα : Δίνεται η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές, που περιγράφει ένα LTI σύστημα

$$y[n] = x[n] + x[n-2] + \frac{1}{3}y[n-1]$$

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του φίλτρου $\mathrm{h}[n]$, δηλαδή η έξοδος του συστήματος για είσοδο $x[n] = \delta[n]$

$$y[n] = x[n] + x[n-2] + \frac{1}{3}y[n-1] \xrightarrow{\text{DTFT}} \Upsilon(e^{j\omega}) = \mathrm{X}(e^{j\omega}) + e^{-2j\omega}\mathrm{X}(e^{j\omega}) + \frac{1}{3}e^{-j\omega}\Upsilon(e^{j\omega}) \rightarrow$$

$$\Upsilon(e^{j\omega})\left(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}\right) = \mathrm{X}(e^{j\omega})(1 + e^{-2j\omega})$$

- Η απόκριση συχνότητας είναι $H(e^{j\omega}) = \frac{\Upsilon(e^{j\omega})}{\mathrm{X}(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k e^{-j\omega k}} = \frac{1+e^{-2j\omega}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} + e^{-2j\omega}\ \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$

- Προσοχή $\mathrm{DTFT}\{x[n-n_o]\} = \mathrm{X}(e^{j\omega})e^{-j\omega n_o}$ από τη ιδιοτητα Μετατόπισης στο χρόνο

Απόκριση Συχνότητας

Επίλυση εξισώσεων διαφορών μέσω μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

❖ Η επίλυση εξισώσεων διαφορών μέσω μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου γίνεται μέσω των ζευγών του μετασχηματισμού, όσο και τις ιδιότητες.

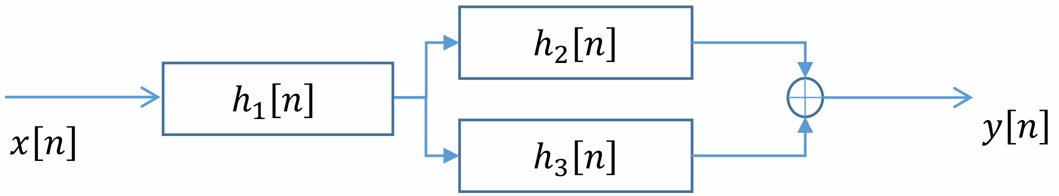
Παράδειγμα (συνέχεια):

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\Upsilon(e^{j\omega})}{\mathrm{X}(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k e^{-j\omega k}} = \frac{1+e^{-2j\omega}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} + e^{-2j\omega}\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

Από τα ζεύγη του μετασχηματισμού $\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$

- Από τη μετατόπιση του μετασχηματισμού $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} u[n-2] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} e^{-2j\omega}\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$
- Άρα $\mathrm{h}[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} u[n-2]$
- Προσοχή $\mathrm{DTFT}\{x[n-n_o]\} = \mathrm{X}(e^{j\omega})e^{-j\omega n_o}$ από τη ιδιοτητα Μετατόπισης στο χρόνο

Απόκριση Συχνότητας



Παράδειγμα : Έστω το σύστημα της εικόνας με

$$h_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n],\ h_2[n] = \delta[n-2],\ h_3[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

Να υπολογιστεί α)η απόκριση συχνότητας του συστήματος, β)η κρουστική απόκριση του συστήματος και γ) μια εξίσωση διαφορών που να περιγράφει το σύστημα.

<u>Λύση :</u>

α) Το σύστημα είναι σύνδεση σε σειρά του συστήματος 1 και της παράλληλης σύνδεσης των συστημάτων 2 και 3.

Άρα η απόκριση συχνότητας του συστήματος

$$\mathrm{H}(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) \cdot \left(H_2(e^{j\omega}) + H_3(e^{j\omega})\right)$$

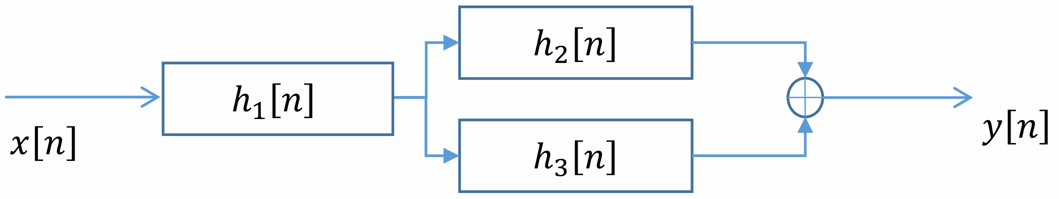
Όμως $H_1(e^{j\omega}) = DTFT\{h_1[n]\} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$, $H_2(e^{j\omega}) = DTFT\{h_2[n]\} = e^{-j\omega 2}$, $H_3(e^{j\omega}) = DTFT\{h_3[n]\} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$

Άρα $\mathrm{H}(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) \cdot \left(H_2(e^{j\omega}) + H_3(e^{j\omega})\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \cdot \left(e^{-j\omega 2} + \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}\right) = \frac{e^{-j\omega 2}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}$

γ ερώτημα

Ο όρος $\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}$ αναλύεται σε άθροισμα απλών κλασμάτων $\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} = \frac{\mathrm{A}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)} + \frac{\mathrm{B}}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} \rightarrow$

Απόκριση Συχνότητας



Παράδειγμα(συνέχεια) : Έστω το σύστημα της εικόνας με

$$h_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n],\ h_2[n] = \delta[n-2],\ h_3[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

Να υπολογιστεί α)η απόκριση συχνότητας του συστήματος, β)η κρουστική απόκριση του συστήματος και γ) μια εξίσωση διαφορών που να περιγράφει το σύστημα.

Λύση :

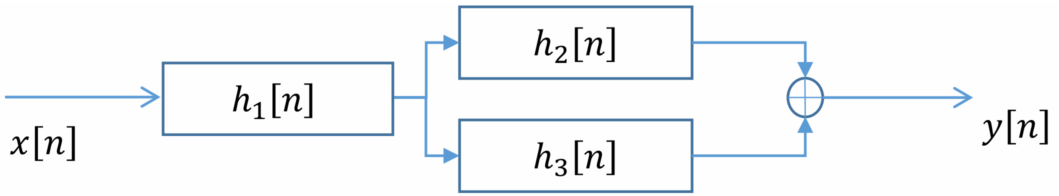
α) Ο όρος $\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}$ αναλύεται σε άθροισμα απλών κλασμάτων $\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} = \frac{\mathrm{A}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)} + \frac{\mathrm{B}}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} \rightarrow$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} = \frac{\mathrm{A}\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right) + \mathrm{B}\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} \rightarrow \mathrm{A}\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right) + \mathrm{B}\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right) = 1 \rightarrow$$

$$(\mathrm{A}+\mathrm{B}) + \left(-\frac{1}{4}\mathrm{A} - \frac{1}{2}\mathrm{B}\right)e^{-j\omega} = 1 \rightarrow \begin{cases} \mathrm{A}+\mathrm{B} = 1 \\ -\frac{1}{4}\mathrm{A} - \frac{1}{2}\mathrm{B} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{A} = 2 \\ \mathrm{B} = -1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right) = \frac{e^{-j\omega 2}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} = \frac{e^{-j\omega 2}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)} - \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} \surd$$

Απόκριση Συχνότητας



Παράδειγμα(συνέχεια) :

β) η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι ο αντίστροφος Μ/Τα Fourier διακριτού χρόνου της $\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right)$.

Άρα η κρουστική απόκριση του συστήματος

$$h[n] = IDTFT\{\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right)\} = IDTFT\left\{\frac{e^{-j\omega 2}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)} - \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}\right\}$$

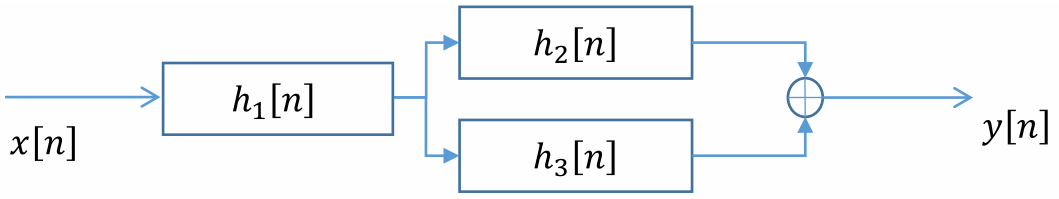
$$= IDTFT\left\{\frac{e^{-j\omega 2}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right\} + 2\cdot IDTFT\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)}\right\} - IDTFT\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}\right\}$$

Όμως $IDTFT\left\{\frac{e^{-j\omega 2}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right\} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2]$, $IDTFT\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)}\right\} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n]$ και $IDTFT\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}\right\} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n} u[n]$.

Άρα :

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2] + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n] - \left(\frac{1}{4}\right)^{n} u[n] \surd$$

Απόκριση Συχνότητας



Παράδειγμα(συνέχεια) :

γ) Για την εξίσωση διαφορών έχουμε ότι

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k e^{-j\omega k}}$$

Άρα από την απόκριση συχνότητας θα πρέπει κάνοντας πράξεις να την φέρω στην παραπάνω μορφή (1 κλάσμα) ώστε να αναγνωρίσω τους συντελεστές της εξίσωσής, δηλαδή :

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega 2}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} \rightarrow$$

Από α ερώτημα

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega 2}.\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)+1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} = \frac{e^{-j\omega 2}-\frac{1}{4}e^{-j\omega 3}+1}{1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}+\frac{1}{8}e^{-j\omega 2}} \rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{b_0 = 1, b_1 = 0, b_2 = 1} \\ \boldsymbol{b_3 = -\frac{1}{4}} \\ \boldsymbol{\alpha_1 = -\frac{3}{4}, \alpha_2 = \frac{1}{8}} \end{array}}$$

$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{e^{-j\omega 2} - \frac{1}{4}e^{-j\omega 3} + 1}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega} + \frac{1}{8}e^{-j\omega 2}} \rightarrow Y(e^{j\omega}) - \frac{3}{4}e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) + \frac{1}{8}e^{-j\omega 2}Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega 2}X(e^{j\omega}) - \frac{1}{4}e^{-j\omega 3}X(e^{j\omega}) + X(e^{j\omega})$$

$$\rightarrow IDTFT\{\quad\} \rightarrow$$

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n-2] - \frac{1}{4}x[n-3] + x[n] \rightarrow y[n] = x[n] + x[n-2] - \frac{1}{4}x[n-3] + \frac{3}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] \checkmark$$

Απόκριση Συχνότητας

- Άσκηση 1: Δίνεται η κρουστική απόκριση ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου (LTI) συστήματος

$$h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-3]$$

Να υπολογίσετε την απόκριση συχνότητας.

- Άσκηση 2: Δίνεται η κρουστική απόκριση ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου (LTI) συστήματος

$$h[n] = \delta[n] - 3\delta[n-1]$$

Να υπολογίσετε την απόκριση συχνότητας.

- Άσκηση 3: Δίνεται η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές, που περιγράφει ένα LTI σύστημα:

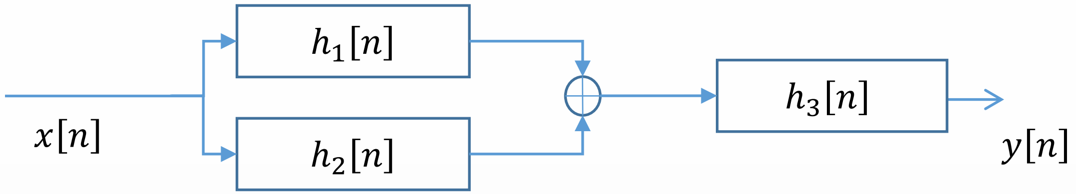
$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2] + x[n-3] + 5y[n-1] - 4y[n-3]$$

Να υπολογιστεί η απόκριση συχνότητας.

- Άσκηση 4: Δίνεται η απόκριση συχνότητας $H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1-35e^{-j\omega}+5e^{-2j\omega}}{1+5e^{-j\omega}-4e^{-3j\omega}}$

Να βρεθεί η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές που περιγράφει το LTI σύστημα.

Απόκριση Συχνότητας



- Άσκηση 5: Έστω το επόμενο σύστημα με
- $h_1[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$, $h_2[n] = \delta[n-3]$, $h_3[n] = \left(\frac{1}{6}\right)^n u[n]$
- Να υπολογιστεί α)η απόκριση συχνότητας του συστήματος, β)η κρουστική απόκριση του συστήματος και γ) μια εξίσωση διαφορών που να περιγράφει το σύστημα.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος & Εικόνας

Α. Μπακλέζος

abaklezos@hmu.gr

Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών