Analog and Digital Control

7th Group of Theoretical Exercises

Κοσμάς Παπαζαχαρίας ΤΛ20441

Παναγιώτης Κουζής ΤΛ20411

Νικήτας Μενούνος ΤΛ20412

1) For the following plant:

$$G_P(s) = \frac{0.01}{(s+0.1)\,(s+0.2)\,(s+0.3)}$$

(a) design P, PI and PID controllers via the Ziegler Nichols method.

(b) Evaluate the steady state errors to the following reference inputs:

  (1) Step of magnitude 2

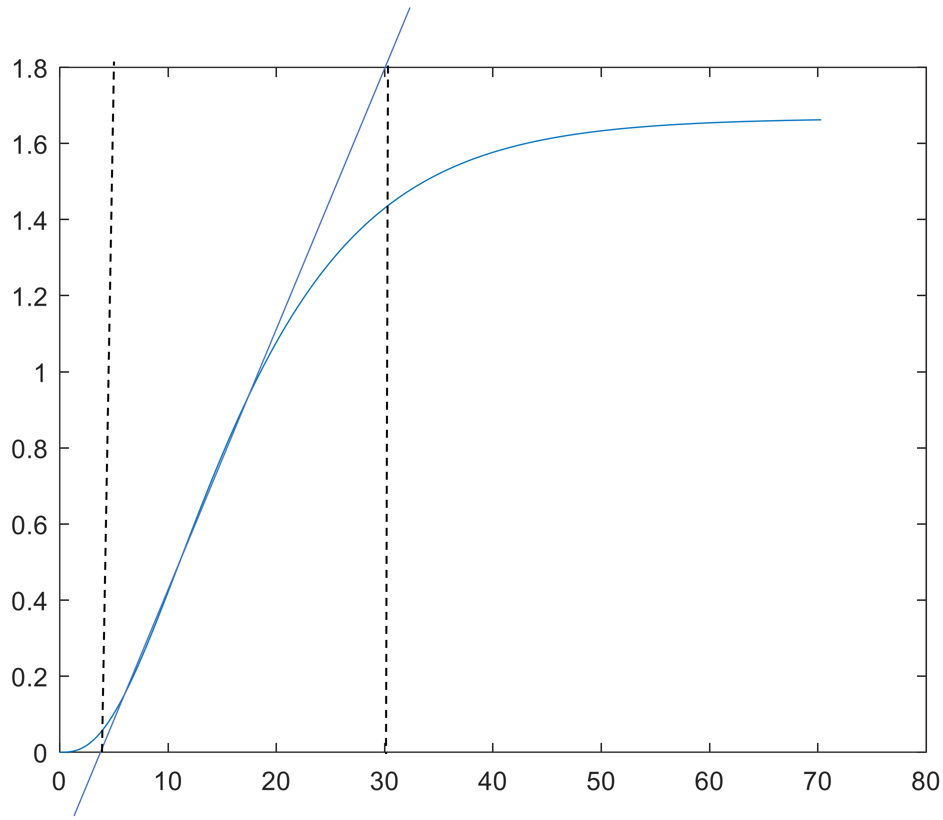
  (2) Ramp of slope 3

  (3) Quadratic

(c) What is the CLCS “type”?

(a)

Με χρήση της matlab κατασκευάζουμε το διάγραμμα απόκρισης του συστήματος.




Από το παραπάνω διάγραμμα παρατηρούμε ότι A=1.8 , B =30-3=27 και $t_d$= 3 . Άρα $\theta = \frac{A}{B} = \frac{1,8}{30} = 0.06$ .

| Controller | Kp | Ti | Td |
|---|---|---|---|
| P | $\frac{1}{t_d * \theta} = \frac{1}{3 * 0.06} = 5.6$ | | |
| P-I | $\frac{0.9}{t_d * \theta} = \frac{0.9}{3 * 0.06} = 5$ | $3.3 * t_d = 3.3 * 3 = 9.9$ | |
| P-I-D | $\frac{1.2}{t_d * \theta} = \frac{1.2}{3 * 0.06} = 6.7$ | $2 * t_d = 2 * 3 = 6$ | $0.5 * t_d = 0.5 * 3 = 1.5$ |

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι :

$$G_C(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_P + \left(\frac{K_P}{T_I}\right) * \frac{1}{s} + (K_P * T_D) * s = \begin{cases} P = 5.6 \\ P - I = 5 + 0.5/s \\ P - I - D = 6.7 + \frac{1.1}{s} + 10 * s \end{cases}$$

(b),(c)

$$G_p(s) = \frac{0.01}{(s+0.1)(s+0.2)(s+0.3)}$$

$G_c^1(s) = 5.6$, $G_c^2(s) = 5 + \frac{0.5}{s} = \frac{5s+0.5}{s}$, $G_c^3(s) = 6.7 + \frac{1.1}{s} + 10s = \frac{6.7s + 1.1 + 10s^2}{s}$

Άρα:

$$\overline{G_1}(s) = G_c^1(s) \cdot G_p(s) = \frac{0.056}{(s+0.1)(s+0.2)(s+0.3)} = \frac{0.056}{s^3+0.6s^2+0.11s+0.006}$$

$$\overline{G_2}(s) = G_c^2(s) \cdot G_p(s) = \frac{0.05s+0.005}{s^4+0.6s^3+0.11s^2+0.006s} = \frac{0.05s+0.005}{s(s^3+0.6s^2+0.11s+0.006)}$$

$$\overline{G_3}(s) = G_c^3(s) \cdot G_p(s) = \frac{0.1s^2+0.067s+0.011}{s^4+0.6s^3+0.11s^2+0.006s} = \frac{0.1s^2+0.067s+0.011}{s(s^3+0.6s^2+0.11s+0.006)}$$

Η $\overline{G_1}(s)$ είναι τύπου 0

Η $\overline{G_2}(s)$ είναι τύπου 1

Η $\overline{G_3}(s)$ είναι τύπου 1

Για $\overline{G}_1(s)$:

$$k_p = \lim_{s \to 0} \{\overline{G}_1(s)\} = \frac{0.056}{0.006} = 9.3$$

Άρα: $e_{ss} = \frac{\lambda}{1+k_p} = \frac{2}{1+9.3} = \frac{2}{10.3} = 0.19$

Για $\overline{G}_2(s)$:

$$k_v = \lim_{s \to 0} \{\overline{G}_2(s) \cdot s\} = \frac{0.005}{0.006} = 0.8$$

Άρα: $e_{ss} = \frac{\lambda}{k_v} = \frac{3}{0.8} = 3.75$

Για $\overline{G}_3(s)$:

$$k_v = \lim_{s \to 0} \{s \cdot \overline{G}_3(s)\} = \frac{0.011}{0.006} = 1.83$$

2) For the following plant:

$$G_P(s) = \frac{6}{(s+2)\,(s^2+2\,s+5)} = \frac{6}{s^3+4\,s^2+9\,s+10}$$

(c) Design P, PI and PID controllers via the Ziegler Nichols method.

(d) Evaluate the steady state errors to the following reference inputs:

(1) Step of magnitude 4

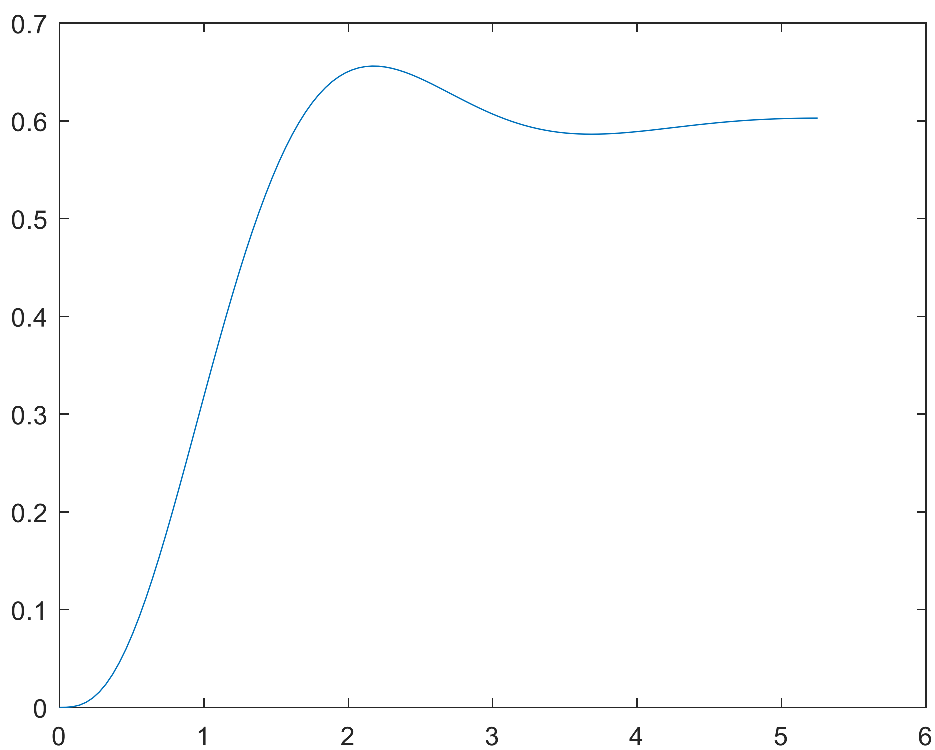
(2) Ramp of slope 5

(3) Quadratic

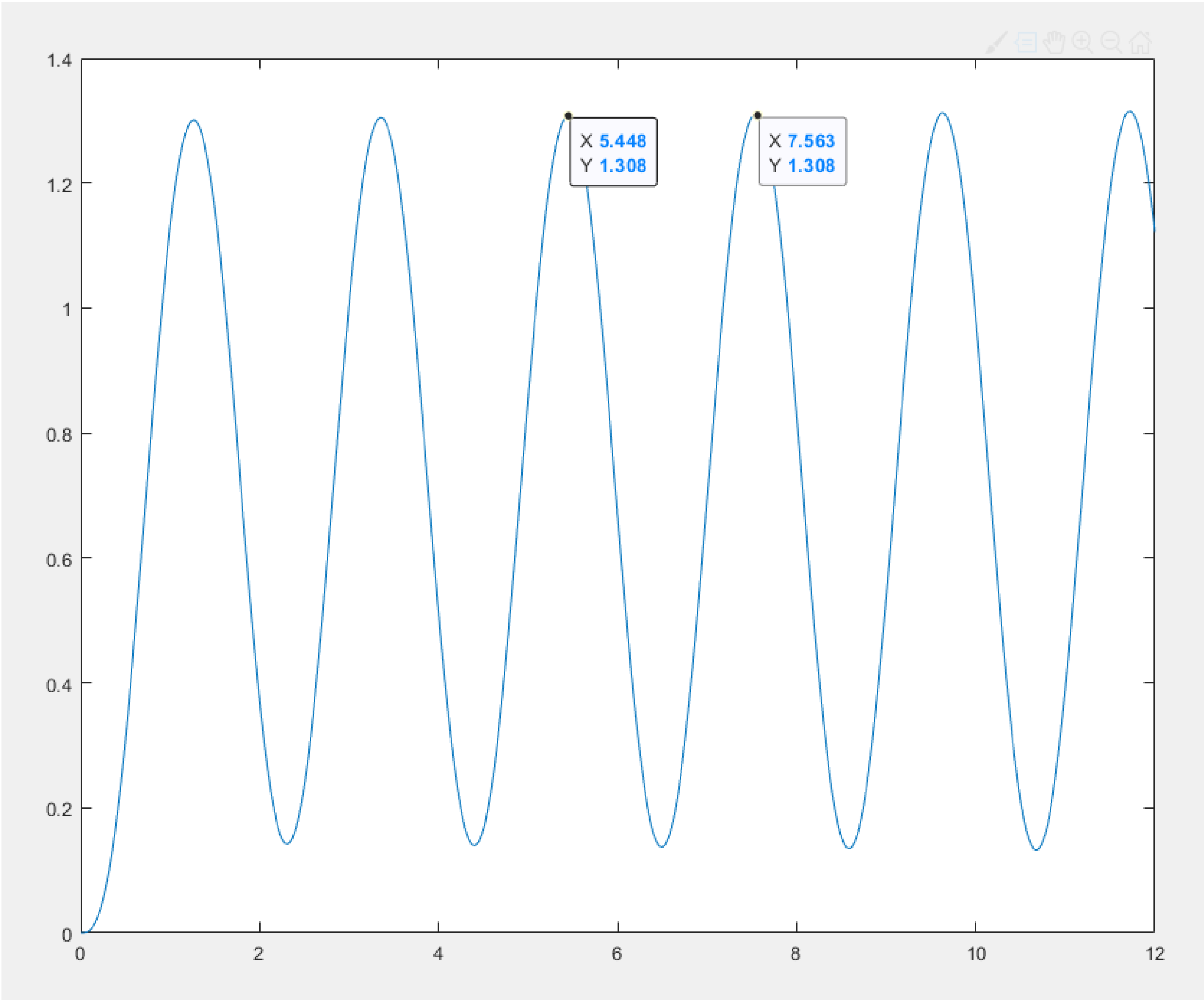
(c) What is the CLCS "type"?

(a)

Με χρήση της matlab κατασκευάζουμε το διάγραμμα απόκρισης του συστήματος.




Παρατηρούμε ότι το σύστημα έχει ταλαντωτική συμπεριφορά, οπότε σύμφωνα με την δεύτερη μέθοδο των Ziegler-Nichols αυξάνουμε την τιμή του $\widetilde{K_P}$ μέχρις ότου η βηματική απόκρισή κάνει μία σταθερή ταλάντωση. Αυτό γίνεται όταν το $\widetilde{K_P}$ πάρει τιμή 4.35, παράγοντας το παρακάτω αποτέλεσμα.




Η περίοδος ταλάντωσης είναι $\tilde{T} = 7.563 - 5.448 = 2.1$

Άρα :

| Controller | Kp | Ti | Td |
|---|---|---|---|
| P | $0.5 * \widetilde{K_p} = 0.5 * 4.35 = 2.17$ | | |
| P-I | $0.45 * \widetilde{K_p} = 0.45 * 4.35 = 1.95$ | $\frac{\tilde{T}}{1.2} = \frac{2.1}{1.2} = 1.75$ | |
| P-I-D | $0.6 * \widetilde{K_p} = 0.6 * 4.35 = 2.6$ | $\frac{\tilde{T}}{2} = \frac{2.1}{2} = 1.05$ | $\frac{\tilde{T}}{8} = \frac{2.1}{8} = 0.26$ |

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι :

$$G_C(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_P + \left(\frac{K_P}{T_I}\right) * \frac{1}{s} + (K_P * T_D) * s = \begin{cases} P = 2.17 \\ P - I = 1.95 + 1.1/s \\ P - I - D = 2.6 + \frac{2.5}{s} + 0.7 * s \end{cases}$$

(b),(c)

$$G_p(s) = \frac{6}{s^3+4s^2+9s+10}$$

$$G_c^1(s) = 2.17,\ G_c^2(s) = 1.95 + 1.1/s = \frac{1.95s+1.1}{s},\ G_c^3(s) = \frac{0.7s^2+2.6s+2.5}{s}$$

Άρα:

$$\overline{G_1}(s) = G_c^1(s) \cdot G_p(s) = \frac{13}{s^3+4s^2+9s+10}$$

$$\overline{G_2}(s) = G_c^2(s) \cdot G_p(s) = \frac{11.7s+6.6}{s(s^3+4s^2+9s+10)}$$

$$\overline{G_3}(s) = G_c^3 \cdot G_p(s) = \frac{4.2s^2+15.6s+15}{s(s^3+4s^2+9s+10)}$$

Η $\overline{G_1}(s)$ είναι τύπου 0

Η $\overline{G_2}(s)$ είναι τύπου 1

Η $\overline{G_3}(s)$ είναι τύπου 1

Για $\overline{G_1}(s)$:

$$k_p = \lim_{s \to 0} \{\overline{G_1}(s)\} = \frac{13}{10} = 1.3$$

$$\text{Άρα: } e_{ss} = \frac{2}{1+k_p} = \frac{4}{2.3} = 1.73$$

Για $\overline{G_2}(s)$:

$$k_v = \lim_{s \to 0} \{s\,\overline{G_2}(s)\} = \frac{6.6}{10} = 0.66$$

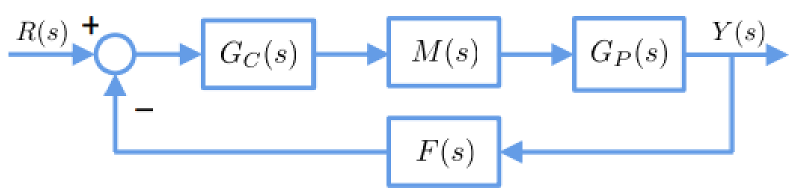
$$\text{Άρα: } e_{ss} = \frac{\lambda}{k_v} = \frac{5}{0.66} = 7.57$$

Για $\overline{G}_3(s)$:

$k_v = \lim\limits_{s \to 0} \{ s \cdot \overline{G}_3(s) \} = \frac{15}{10} = 1.5$

Άρα: $e_{ss} = \frac{2}{k_v} = \frac{5}{1.5} = 3.3$

3) Assume the following CLCS:




$$G_P(s) = \frac{1}{s+2} \qquad G_C(s) = \frac{(140\,s + 500)\cdot(s+2)\cdot(s+4)}{s\cdot(s^3 + 17\,s^2 + 192\,s + 500)} \qquad M(s) = 1 \qquad F(s) = \frac{4}{s+4}$$

(a) Derive the expression for the total TF.

(b) Evaluate the steady state errors to unit reference inputs.

(c) What is the CLCS “type”?

$$\overline{G}(s) = G_c(s) \cdot M(s) \cdot G_p(s) = \frac{(140s+500)\cdot\cancel{(s+2)}(s+4)}{s\cdot(s^3+17s^2+192s+500)} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\cancel{s+2}} =$$

$$\frac{(140s+500)\cdot(s+4)}{s(s^3+17s^2+192s+500)}$$

$$\overline{\overline{G}} = \frac{\overline{G}}{1+\overline{G}\cdot F-\overline{G}} = \frac{\frac{(140s+500)(s+4)}{s\cdot(s^3+17s^2+192s+500)}}{1+\frac{(140s+500)\cancel{(s+4)}}{s(s^3+17s^2+192s+500)}\cdot\frac{4}{\cancel{(s+4)}} - \frac{(140s+500)(s+4)}{s(s^3+17s^2+192s+500)}} =$$

$$\frac{\frac{(140s+500)(s+4)}{\cancel{s(s^3+17s^2+192s+500)}}}{\frac{s(s^3+17s^2+192s+500)}{\cancel{s(s^3+17s^2+192s+500)}}+\frac{(140s+500)\cdot 4}{\cancel{s(s^3+17s^2+192s+500)}} - \frac{(140s+500)(s+4)}{\cancel{s(s^3+17s^2+192s+500)}}} =$$

$$\frac{(140s+500)(s+4)}{s^4+17s^3+192s^2+500s+560s+\cancel{2000}-140s^2-\cancel{560s}-\cancel{500s}-\cancel{2000}} =$$

$$\frac{(140s+500)(s+4)}{s^4+17s^3+52s^2} = \frac{(140s+500)(s+4)}{s^2(s^2+17s+52)} = \overline{\overline{G}}(s)$$

Άρα η $\overline{\overline{G}}(s)$ είναι τύπου 2 αφού έχει δύο ελεύθερους ολοκληρωτές.

Άρα έχει:

σφάλμα Βηματικής 0

σφάλμα ramp 0

και σφάλμα quadratic $\frac{\lambda}{k_a} = \frac{2}{k_a}$

όπου $k_a = \lim_{s\to 0}\{s^2\overline{\overline{G}}(s)\} = \frac{2000}{52} = 38.4$

Άρα $e_{ss} = \frac{2}{k_a} = \frac{2}{38.4} = 0.052$