Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος & Εικόνας

Μάθημα 15ο (Β')

Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Α. Μπακλέζος

abaklezos@hmu.gr

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

- Ο <u>ευθύς διακριτός μετασχηματισμός Fourier (Discrete Fourier Transform – DFT) N σημείων</u> μιας ακολουθίας $x[n]$ πεπερασμένου μήκους N που μηδενίζεται εκτός του διαστήματος $[0, N-1]$ ορίζεται :

$$\mathrm{X}_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot W_N^{nk}, k \in [0, N-1]$$

με $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}}$ (παράγοντας φάσης ή στροβιλισμού – phase/twiddle factor)

❖ Ο ορισμός του διακριτού μετασχηματισμού Fourier (**DFT**) N σημείων ισχύει και για την ακολουθία $x[n]$ πεπερασμένου μήκους $L < N$ που μηδενίζεται έξω από το διάστημα $[0, L-1]$. Δηλαδή το μήκος N του DFT πρέπει να είναι μεγαλύτερο ή ίσο από τη διάρκεια L του απεριοδικού σήματος. (**Στην περίπτωση $N < L$ εμφανίζεται το φαινόμενο της αναδίπλωσης στο πεδίο του χρόνου**)

❖ Στη περίπτωση αυτή γίνεται συμπλήρωση με μηδενικά (**zero padding**) στο τέλος του σήματος.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

- Ο <u>αντίστροφος διακριτός μετασχηματισμός Fourier(Inverse Discrete Fourier Transform – IDFT) N σημείων</u> ορίζεται :

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot W_N^{-nk}\, , n \in [0, N-1]$$

με $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}}$ (παράγοντας φάσης ή στροβιλισμού – phase/twiddle factor)

- Ο ευθύς και ο αντίστροφος διακριτός μετασχηματισμός Fourier (DFT) σημείων αποτελούν ένα μοναδικό ζεύγος :

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathrm{D}FT-N} X[k]$$

❖ Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier είναι διακριτός, τόσο στο πεδίο του χρόνου, όσο και στο πεδίο της συχνότητας.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

- Ο <u>ευθύς διακριτός μετασχηματισμός Fourier (Discrete Fourier Transform – DFT) N σημείων</u> μιας ακολουθίας $x[n]$ πεπερασμένου μήκους N που μηδενίζεται εκτός του διαστήματος $[0, N-1]$ ορίζεται :

$$\mathrm{X}_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot W_N^{nk}, k \in [0, N-1]$$

με $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}}$ (παράγοντας φάσης ή στροβιλισμού – phase/twiddle factor)

Εξαιτίας του όρου $e^{-j2\pi/N}$ στον υπολογισμό της ακολουθίας $X[k]$ των συντελεστών του DFT προκύπτει ότι αυτή είναι περιοδική, με περίοδο ίση με το πλήθος N των δειγμάτων της ακολουθίας $x[n]$.

Τα δείγματα της $\mathrm{X}_N[k]$ ξεκινούν από $k = 0$, που αντιστοιχεί στη συχνότητα $\omega = 0$ και φθάνουν έως $k = N - 1$.

Δεν περιλαμβάνουν το $k = N$, το οποίο αντιστοιχεί στη συχνότητα $\omega = 2\pi$ και περιλαμβάνεται στην επόμενη περίοδο.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Οι παράγοντες φάσης W_N^k ονομάζονται **παράγοντες φάσης ή αναδιάταξης** και δίνονται από τη σχέση:

$$W_N = e^{-\frac{j2\pi}{N}} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) - j\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)$$

Αποτελούν την N-οστή μιγαδική ρίζα της μονάδας, καθώς έχουν μοναδιαίο μέτρο και απλά διαφορετική φάση.

Αποδίδονται ως ανύσματα στον μοναδιαίο κύκλο στο μιγαδικό επίπεδο.

Παράγοντες φάσης για N=4:

$$W_4^0 = (W_4)^0 = 1$$
$$W_4^1 = (W_4)^1 = -j$$
$$W_4^2 = (W_4)^2 = -1$$
$$W_4^3 = (W_4)^3 = (-j)^3 = (-j)(-j)^2 = j$$

$$W_4^4 = W_4^0 = 1$$
$$W_4^5 = W_4^1 = -j$$
$$W_4^6 = W_4^2 = -1$$
$$W_4^7 = W_4^3 = j$$

$$W_4^8 = W_4^0 = 1$$
$$W_4^9 = W_4^1 = -j$$
$$W_4^{10} = W_4^2 = -1$$
$$W_4^{11} = W_4^3 = j$$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Οι παράγοντες φάσης W_N^k ονομάζονται **παράγοντες φάσης ή αναδιάταξης** και δίνονται από τη σχέση:

$$W_N = e^{-\frac{j2\pi}{N}} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) - j\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right)$$

Αποτελούν την N-οστή μιγαδική ρίζα της μονάδας, καθώς έχουν μοναδιαίο μέτρο και απλά διαφορετική φάση.

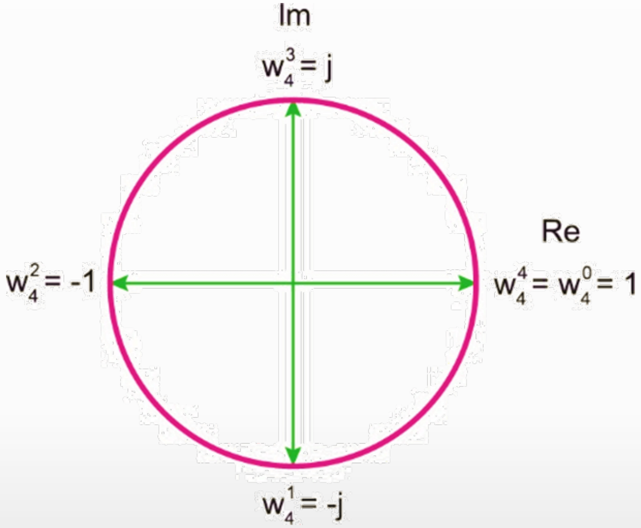
Αποδίδονται ως ανύσματα στον μοναδιαίο κύκλο στο μιγαδικό επίπεδο.

Παράγοντες φάσης για N=4 (4-σημείων):

$$\begin{aligned} W_4^0 &= (W_4)^0 = 1 \\ W_4^1 &= (W_4)^1 = -j \\ W_4^2 &= (W_4)^2 = -1 \\ W_4^3 &= (W_4)^3 = (-j)^3 = (-j)(-j)^2 = j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_4^4 &= W_4^0 = 1 \\ W_4^5 &= W_4^1 = -j \\ W_4^6 &= W_4^2 = -1 \\ W_4^7 &= W_4^3 = j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_4^8 &= W_4^0 = 1 \\ W_4^9 &= W_4^1 = -j \\ W_4^{10} &= W_4^2 = -1 \\ W_4^{11} &= W_4^3 = j \end{aligned}$$



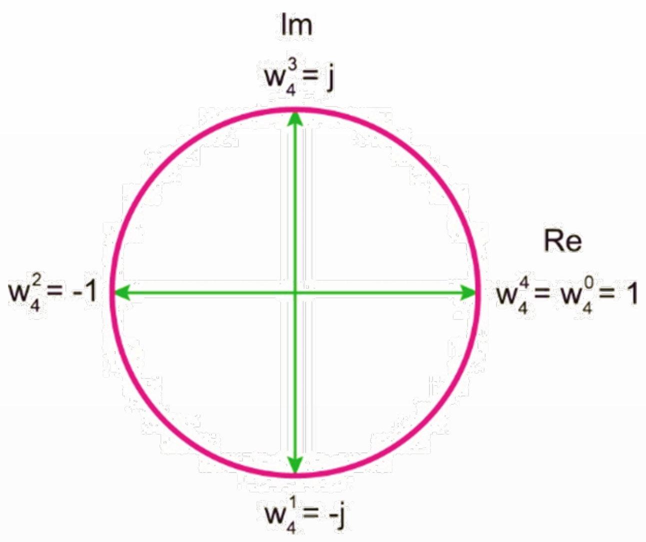
Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Ιδιότητες Παραγόντων Φάσης

$W_N^{k+N} = W_N^k$ (περιοδικότητα)

$W_N^{k+\frac{N}{2}} = -W_N^k$ (συμμετρία)

$W_N^2 = W_{\frac{N}{2}}$



Αν το N είναι δύναμη του 2, τα ανύσματα εμφανίζονται σε ζεύγη συζυγών μιγαδικών αριθμών.

Η εφαρμογή των ιδιοτήτων στον υπολογισμό του DFT οδηγεί σε σημαντική μείωση του πλήθους των πράξεων για τον υπολογισμό των παραγόντων φάσης και έτσι μειώνεται το κόστος υπολογισμού του DFT.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Φάσμα Πλάτους:

$$|X[k]| = \sqrt{X_R^2[k] + X_I^2[k]}, \qquad 0 \le k \le N-1$$

Άρτια συμμετρία επειδή: $|X[N-k]| = |X[k]|$

Φάσμα Φάσης:

$$\varphi_X[k] = tan^{-1}\left[\frac{X_I[k]}{X_R[k]}\right], \qquad 0 \le k \le N-1$$

Περιττή συμμετρία επειδή: $\measuredangle X[N-k] = -\measuredangle X[k]$

Φάσμα Ισχύος

$$P[k] = \frac{1}{N^2}|X[k]|^2 = \frac{1}{N^2}\{X_R^2[k] + X_I^2[k]\}, \qquad 0 \le k \le N-1$$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

- *Υπολογισμός διακριτού μετασχηματισμού Fourier*:

  Από ορισμό :

- **Παράδειγμα :** DFT N σημείων για $x[n] = \delta[n] = \{1, 0, \dots, 0\}$

$$X_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot W_N^{nk}, k \in [0, N-1], \boxed{W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}}$$

$$X_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] \cdot (W_N)^{nk} = 1 \cdot (W_N)^{0k} = 1, k \in [0, N-1]$$

δηλαδή $X_N[k] = [1,1,1, \dots 1]$ (πλήθος N)

- **Παράδειγμα :** DFT 2 σημείων N=2 για $x[n] = a_o\delta[n] + a_1\delta[n-1] = \{a_o, a_1\}$

$$X_2[k] = \sum_{n=0}^{1} x[n] \cdot W_2^{nk}, k \in [0, 1], \boxed{W_2 = e^{-j\frac{2\pi}{2}} = e^{-j\pi}}$$

$$X_2[0] = \sum_{n=0}^{1} x[n] \cdot W_2^{n0} = x[0](e^{-j\pi})^{0\cdot 0} + x[1](e^{-j\pi})^{1\cdot 0} = a_o + a_1$$

$$X_2[1] = \sum_{n=0}^{1} x[n] \cdot W_2^{n1} = x[0](e^{-j\pi})^{0\cdot 1} + x[1](e^{-j\pi})^{1\cdot 1} = x_o + x_1\cos(\pi) = a_o - a_1$$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

- *Υπολογισμός διακριτού μετασχηματισμού Fourier*:

  Από ορισμό :

- Παράδειγμα : DFT N σημείων για $x[n] = \delta[n - n_0]$

$$\mathrm{X}_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n - n_0] W_N^{nk} = \delta[0] W_N^{n_0 k} = W_N^{n_0 k}, \qquad k = 0,1,\dots,N-1$$

Είναι δηλαδή $X[k] = \left[1, W_N^{n_0}, W_N^{2n_0}, \dots, W_N^{(N-1)n_0}\right]$

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα, παρατηρούμε ότι η χρονική μετατόπιση της $\delta[n]$ κατά n_0 παράγει DFT το ίδιο πλάτος αλλά με ολίσθηση φάσης.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

- *Υπολογισμός διακριτού μετασχηματισμού Fourier*:

  Από ορισμό :

- **Παράδειγμα :** DFT 10 σημείων N=10 για $x[n] = \delta[n]+2\delta[n-5] = \{1,0,0,0,0,2,0,0,0,0\}$

$$X_{10}[k] = \sum_{n=0}^{9} x[n] \cdot W_{10}^{nk}, k \in [0,9], \boxed{W_{10} = e^{-j\frac{2\pi}{10}} = e^{-j\frac{\pi}{5}}}$$

$$X_{10}[k] = \sum_{n=0}^{9} (\delta[n]+2\delta[n-5]) \cdot (W_{10})^{nk} = 1 \cdot (W_{10})^{0\cdot k} + 2 \cdot (W_{10})^{5\cdot k} = 1 + 2\left(e^{-j\frac{\pi}{5}}\right)^{5\cdot k}$$

$$X_{10}[k] = 1 + 2\left(e^{-j\pi}\right)^{k}, k \in [0,9]$$

$$X_{10}[k] = 1 + 2(\cos(-\pi) + j\sin(-\pi))^{k}, k \in [0,9]$$

$$X_{10}[k] = 1 + 2(\cos(\pi) - j\sin(\pi))^{k}, k \in [0,9]$$

$$X_{10}[k] = 1 + 2(-1 - j0)^{k}, k \in [0,9]$$

$$X_{10}[k] = 1 + 2(-1)^{k}, k \in [0,9]$$

Euler : $e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)$

$$X_{10}[0] = 1 + 2(-1)^0 = 3, \quad X_{10}[1] = 1 + 2(-1)^1 = -1,$$
$$X_{10}[2] = 1 + 2(-1)^2 = 3, \ldots\ldots, X_{10}[9] = 1 + 2(-1)^9 = -1$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος & Εικόνας

Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών

Α. Μπακλέζος

abaklezos@hmu.gr