Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος & Εικόνας

Μάθημα 3ο

Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών

Συνέλιξη Σημάτων Πεπερασμένης Διάρκειας
Ετεροσυσχέτιση Σημάτων
Αυτοσυσχέτιση Σήματος

Α. Μπακλέζος

abaklezos@hmu.gr

Γραμμική συνέλιξη σημάτων διακριτού χρόνου

- Η **γραμμική συνέλιξη** (linear convolution) δύο σημάτων $x_1[n]$ και $x_2[n]$ διακριτού χρόνου ορίζεται ως

$$x[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k] \cdot x_2[n-k]$$

❖ Ιδιότητες συνέλιξης :

- ❖ Ταυτοτικό στοιχείο $\boldsymbol{x[n] * \delta[n] = x[n]}$ και $\boldsymbol{x[n] * \delta[n-n_o] = x[n-n_o]}$
- ❖ Αντιμεταθετική ιδιότητα $x_1[n] * x_2[n] = x_2[n] * x_1[n]$
- ❖ Προσεταιριστική ιδιότητα $x_1[n] * (x_2[n] * x_3[n]) = (x_1[n] * x_2[n]) * x_3[n]$
- ❖ Επιμεριστική ιδιότητα $x_1[n] * (x_2[n] + x_3[n]) = x_1[n] * x_2[n] + x_1[n] * x_3[n]$

Γραμμική συνέλιξη σημάτων διακριτού χρόνου

- Η γραμμική συνέλιξη (linear convolution) δύο σημάτων $x_1[n]$ και $x_2[n]$ διακριτού χρόνου ορίζεται ως

$$x[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k] \cdot x_2[n-k]$$

❖ Όταν τα σήματα είναι **πεπερασμένης διάρκειας**, τότε η γραμμική συνέλιξη είναι και αυτή ένα σήμα πεπερασμένης διάρκειας.

- σήμα $x_1[n]$ έχει διάρκεια $[\mathrm{A}_1, \mathrm{T}_1], \mathrm{A}_1 \leq \mathrm{T}_1, \mathrm{A}_1, \mathrm{T}_1 \in Z$ και
- σήμα $x_2[n]$ έχει διάρκεια $[\mathrm{A}_2, \mathrm{T}_2], \mathrm{A}_2 \leq \mathrm{T}_2, \mathrm{A}_2, \mathrm{T}_2 \in Z$

→η γραμμική συνέλιξη $x[n] = x_1[n] * x_2[n]$ έχει διάρκεια $[\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2, \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2]$

❖ Το μήκος της διάρκειας $[\mathrm{A}, \mathrm{T}]$ ενός σήματος $x[n]$ είναι $\Delta = \mathrm{T} - \mathrm{A} + 1$

❖ το μήκος διάρκειας της συνέλιξης Δ_Σ δυο σημάτων με μήκη διάρκειας Δ_1και Δ_2είναι

$$\Delta_\Sigma = \Delta_1 + \Delta_2 - 1$$

❖ η γραμμική συνέλιξη είναι μία πράξη κατά την οποία μεταβάλλεται τόσο το πλάτος όσο και ο χρόνος.

Γραμμική συνέλιξη σημάτων διακριτού χρόνου

- Η γραμμική συνέλιξη (linear convolution) δύο σημάτων $x_1[n]$ και $x_2[n]$ διακριτού χρόνου ορίζεται ως

$$x[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k] \cdot x_2[n-k]$$

❖ Η γραμμική συνέλιξη δύο σημάτων διακριτού χρόνου **πεπερασμένης διάρκειας** υπολογίζεται με μία από τις παρακάτω μεθοδολογίες:

1) Αναλυτικά,
2) χρήση των πράξεων της αναδίπλωσης και της μετατόπισης (sliding rule),
3) Με χρήση πίνακα (tabular)
4) γραφικά

Γραμμική συνέλιξη σημάτων διακριτού χρόνου

- Υπολογισμός γραμμικής συνέλιξης (linear convolution) δύο σημάτων $x_1[n]$ και $x_2[n]$ διακριτού χρόνου ορίζεται ως

$$x[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k] \cdot x_2[n-k]$$

Με χρήση της **αναλυτικής τεχνικής**:

α. Εκφράζουμε σε άθροισμα δέλτα το ένα σήμα (π.χ. αυτό με το μικρότερο πλήθος όρων).

β. Χρησιμοποιούμε το ταυτοτικό στοιχείο και την επιμεριστική ιδιότητα της συνέλιξης

γ. Εκφράζουμε τη παράσταση ως άθροισμα δέλτα και υπολογίζουμε τους όρους

δ. Έχοντας την γενική μορφή, υπολογίζουμε τις τιμές στο διάστημα που παίρνει τιμές ($[\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2, \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2]$)

Γραμμική συνέλιξη σημάτων διακριτού χρόνου

- Παράδειγμα : Υπολογίστε την συνέλιξη $x[n]$ των σημάτων $x_1[n] = 4 \cdot \delta[n+1] + 5 \cdot \delta[n] + 6 \cdot \delta[n-1] + 7 \cdot \delta[n-2]$ και $x_2[n] = 3 \cdot \delta[n-1] + 2 \cdot \delta[n-2] + \delta[n-3]$.

- Το σήμα $x_1[n]$ υπάρχει στο χρονικό διάστημα $[-1,2]$ και το σήμα $x_2[n]$ στο χρονικό διάστημα $[1,3]$. Η γραμμική συνέλιξη υπάρχει στο χρονικό διάστημα $[0,5]$.

- $x[n] = x_1[n] * x_2[n] = x_1[n] * (3 \cdot \delta[n-1] + 2 \cdot \delta[n-2] + \delta \cdot [n-3]) = x_1[n] * 3 \cdot \delta[n-1] + x_1[n] * 2 \cdot \delta[n-2] + x_1[n] * \delta[n-3] = \underline{3 \cdot x_1[n-1]} + \underline{2 \cdot x_1[n-2]} + \underline{x_1[n-3]} \rightarrow$

- $x[n] = \underline{3(4 \cdot \delta[n-1+1] + 5 \cdot \delta[n-1] + 6 \cdot \delta[n-1-1] + 7 \cdot \delta[n-1-2])} + \underline{2 \cdot (4 \cdot \delta[n-2+1] + 5 \cdot \delta[n-2] + 6 \cdot \delta[n-2-1] + 7 \cdot \delta[n-2-2])} + \underline{(4 \cdot \delta[n-3+1] + 5 \cdot \delta[n-3] + 6 \cdot \delta[n-3-1] + 7 \cdot \delta[n-3-2])} \rightarrow \ldots.$

- $x[n] = 12 \cdot \delta[n] + 23 \cdot \delta[n-1] + 32 \cdot \delta[n-2] + 38 \cdot \delta[n-3] + 20 \cdot \delta[n-4] + 7 \cdot \delta[n-5], \forall n \rightarrow$

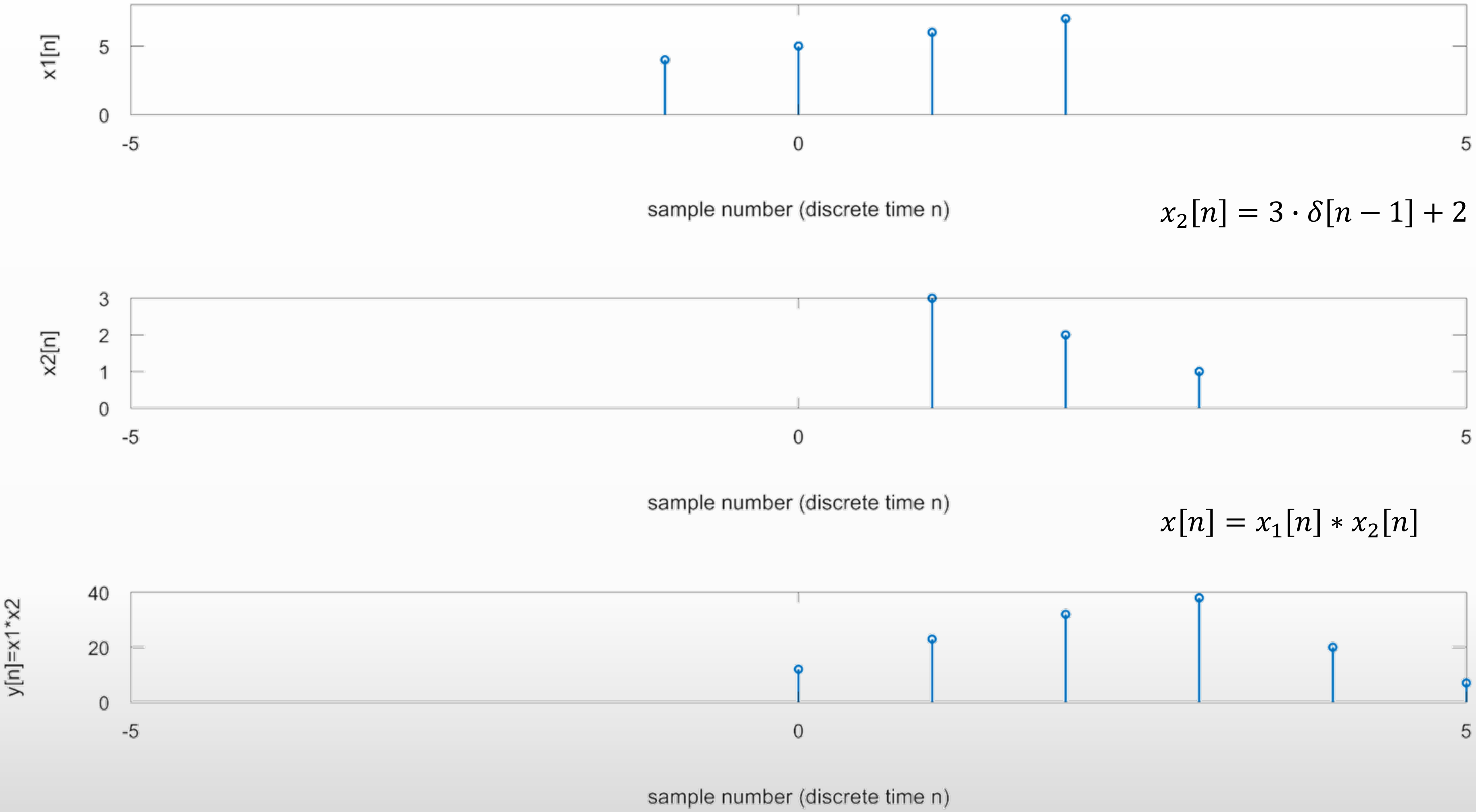
  $x[0] = 12,\quad x[1] = 23,\quad x[2] = 32,\quad x[3] = 38,\quad x[4] = 20,\quad x[5] = 7$

Γραμμική συνέλιξη σημάτων διακριτού χρόνου

$$x_1[n] = 4 \cdot \delta[n+1] + 5 \cdot \delta[n] + 6 \cdot \delta[n-1] + 7 \cdot \delta[n-2]$$

$$x_2[n] = 3 \cdot \delta[n-1] + 2 \cdot \delta[n-2] + \delta \cdot [n-3]$$

$$x[n] = x_1[n] * x_2[n]$$



Γραμμική συνέλιξη σημάτων διακριτού χρόνου

- Υπολογισμός γραμμικής συνέλιξης (linear convolution) δύο σημάτων $x_1[n]$ και $x_2[n]$ διακριτού χρόνου ορίζεται ως

$$x[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k] \cdot x_2[n-k]$$

Με χρήση των πράξεων της αναδίπλωσης και της μετατόπισης (**slide rule**):

α. **Αναδίπλωση** του ενός σήματος.

β. **Μετατόπιση του αναδιπλωμένου σήματος** στο διάστημα χρόνου του άλλου(αμετακίνητου) σήματος. Η μετατόπιση γίνεται από τη στιγμή που το αναδιπλωμένο σήμα εισέρχεται στο διάστημα χρόνου του σταθερού σήματος μέχρι τη στιγμή που το αναδιπλωμένο σήμα εξέρχεται από το διάστημα χρόνου του σταθερού σήματος.

- Μετατόπιση του αναδιπλωμένου σήματος δεξιά για $n > 0$, ενώ αριστερά για $n < 0$

$$\boxed{\boldsymbol{x[k] \xrightarrow{\alpha\nu\alpha\delta\iota\pi\lambda\omega\sigma\eta} x[-k] \xrightarrow{o\lambda\iota\sigma\theta\eta\sigma\eta\ \kappa\alpha\tau\alpha\ n} x[-(k-n)] = x[-k+n]}}$$

γ. **Πολλαπλασιασμός** των τιμών του αμετακίνητου σήματος με τις τιμές του μετατοπισμένου σήματος.

δ. **Πρόσθεση** των τιμών.

Γραμμική συνέλιξη σημάτων διακριτού χρόνου

$$\boldsymbol{x[k]} \xrightarrow{\boldsymbol{αναδιπλωση}} \boldsymbol{x[-k]} \xrightarrow{\boldsymbol{ολισθηση\ κατα\ n}} \boldsymbol{x[-(k-n)] = x[-k+n]}$$

- Παράδειγμα : Υπολογίστε την συνέλιξη $x[n]$ των σημάτων $x_1[n] = 4 \cdot \delta[n+1] + 5 \cdot \delta[n] + 6 \cdot \delta[n-1] + 7 \cdot \delta[n-2]$ και $x_2[n] = 3 \cdot \delta[n-1] + 2 \cdot \delta[n-2] + \delta[n-3]$.

- Το σήμα $x_1[n]$ υπάρχει στο χρονικό διάστημα $[-1,2]$ και το σήμα $x_2[n]$ στο χρονικό διάστημα $[1,3]$. Η γραμμική συνέλιξη υπάρχει στο χρονικό διάστημα $[0,5]$.

		k	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	
		$\boldsymbol{x_1[k]}$			4	5	6	7			
		$\boldsymbol{x_2[k]}$					3	2	1		
Αναδίπλωση &μετατόπιση στην αρχή του $\boldsymbol{x_1[k]}$ *(εάν χρειάζεται)*	$n = 0$	$x_2[-k]$	1	2	3						$x[0] = 3 \cdot 4 = 12$
μετατόπιση	$n = 1$	$x_2[-k+1]$		1	2	3					$x[1] = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 23$
μετατόπιση	$n = 2$	$x_2[-k+2]$			1	2	3				$x[2] = 32$
μετατόπιση	$n = 3$	$x_2[-k+3]$				1	2	3			$x[3] = 38$
μετατόπιση	$n = 4$	$x_2[-k+4]$					1	2	3		$x[4] = 20$
μετατόπιση	$n = 5$	$x_2[-k+5]$						1	2	3	$x[5] = 7$

Γραμμική συνέλιξη σημάτων διακριτού χρόνου

- Παράδειγμα : Υπολογίστε την συνέλιξη $x[n]$ των σημάτων $x_1[n] = 4 \cdot \delta[n+1] + 5 \cdot \delta[n] + 6 \cdot \delta[n-1] + 7 \cdot \delta[n-2]$ και $x_2[n] = 3 \cdot \delta[n-1] + 2 \cdot \delta[n-2] + \delta[n-3]$.

- Το σήμα $x_1[n]$ υπάρχει στο χρονικό διάστημα $[-1,2]$ και το σήμα $x_2[n]$ στο χρονικό διάστημα $[1,3]$. Η γραμμική συνέλιξη υπάρχει στο χρονικό διάστημα $[0,5]$.

		k	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	
		$\boldsymbol{x_2[k]}$					3	2	1		
		$\boldsymbol{x_1[k]}$			4	5	6	7			
Αναδίπλωση &μετατόπιση στην αρχή του $\boldsymbol{x_1[k]}$	$n=0$	$x_1[-k]$		7	6	5	4				$x[0] = 3 \cdot 4 = 12$
μετατόπιση	$n=1$	$x_1[-k+1]$			7	6	5	4			$x[1] = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 23$
μετατόπιση	$n=2$	$x_1[-k+2]$				7	6	5	4		$x[2] = 32$
μετατόπιση	$n=3$	$x_1[-k+3]$					7	6	5	4	$x[3] = 38$
μετατόπιση	$n=4$	$x_1[-k+4]$						7	6	5	$x[4] = 20$
μετατόπιση	$n=5$	$x_1[-k+5]$							7	6	$x[5] = 7$

$\boldsymbol{x_2[n] * x_1[n] = x_1[n] * x_2[n]}$

Γραμμική συνέλιξη σημάτων διακριτού χρόνου

$$\boldsymbol{x}[\boldsymbol{k}] \xrightarrow{\alpha\nu\alpha\delta\iota\pi\lambda\omega\sigma\eta} \boldsymbol{x}[-\boldsymbol{k}] \xrightarrow{o\lambda\iota\sigma\theta\eta\sigma\eta\ \kappa\alpha\tau\alpha\ n} \boldsymbol{x}[-(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{n})] = \boldsymbol{x}[-\boldsymbol{k}+\boldsymbol{n}]$$

- Παράδειγμα : Υπολογίστε την συνέλιξη $x[n]$ των σημάτων $x_1[n] = 4 \cdot \delta[n+1] + 5 \cdot \delta[n] + 6 \cdot \delta[n-1] + 7 \cdot \delta[n-2]$ και $x_2[n] = 3 \cdot \delta[n-4] + 2 \cdot \delta[n-5] + \delta[n-6]$.
- Το σήμα $x_1[n]$ υπάρχει στο χρονικό διάστημα $[-1,2]$ και το σήμα $x_2[n]$ στο χρονικό διάστημα $[4,6]$. Η γραμμική συνέλιξη υπάρχει στο χρονικό διάστημα $[3,8]$.

		k	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	
		$\boldsymbol{x_1[k]}$						4	5	6	7					
		$\boldsymbol{x_2[k]}$											3	2	1	
Αναδίπλωση	$n=0$	$x_2[-k]$	1	2	3											
μετατόπιση στην αρχή του $\boldsymbol{x_1[k]}$	$n=3$	$x_2[-k+3]$				1	2	3								$x[3]=12$
μετατόπιση	$n=4$	$x_2[-k+4]$					1	2	3							$x[4]=23$
μετατόπιση	$n=5$	$x_2[-k+5]$						1	2	3						$x[5]=32$
μετατόπιση	$n=6$	$x_2[-k+6]$							1	2	3					$x[6]=38$
μετατόπιση	$n=7$	$x_2[-k+7]$								1	2	3				$x[7]=20$
μετατόπιση	$n=8$	$x_2[-k+8]$									1	2	3			$x[8]=7$

Γραμμική συνέλιξη σημάτων διακριτού χρόνου

$$\boldsymbol{x[k]} \xrightarrow{\boldsymbol{\alpha\nu\alpha\delta\iota\pi\lambda\omega\sigma\eta}} \boldsymbol{x[-k]} \xrightarrow{\boldsymbol{o\lambda\iota\sigma\theta\eta\sigma\eta\ \kappa\alpha\tau\alpha\ n}} \boldsymbol{x[-(k-n)] = x[-k+n]}$$

- Παράδειγμα : Υπολογίστε την συνέλιξη $x[n]$ των σημάτων $x_1[n] = 4 \cdot \delta[n+2] + 5 \cdot \delta[n+1] + 6 \cdot \delta[n] + 7 \cdot \delta[n-1]$ και $x_2[n] = 3 \cdot \delta[n] + 2 \cdot \delta[n-1] + \delta[n-2]$.
- Το σήμα $x_1[n]$ υπάρχει στο χρονικό διάστημα $[-2,1]$ και το σήμα $x_2[n]$ στο χρονικό διάστημα $[0,2]$. Η γραμμική συνέλιξη υπάρχει στο χρονικό διάστημα $[-2,3]$.

		k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	
		$\boldsymbol{x_1[k]}$				4	5	6	7			
		$\boldsymbol{x_2[k]}$						3	2	1		
Αναδίπλωση	$n=0$	$x_2[-k]$				1	2	3				
μετατόπιση στην αρχή του $\boldsymbol{x_1[k]}$	$n=-2$	$x_2[-k-2]$		1	2	3						$x[-2]=12$
μετατόπιση	$n=-1$	$x_2[-k-1]$			1	2	3					$x[-1]=23$
μετατόπιση	$n=0$	$x_2[-k]$				1	2	3				$x[0]=32$
μετατόπιση	$n=1$	$x_2[-k+1]$					1	2	3			$x[1]=38$
μετατόπιση	$n=2$	$x_2[-k+2]$						1	2	3		$x[2]=20$
μετατόπιση	$n=3$	$x_2[-k+3]$							1	2	3	$x[3]=7$

Γραμμική συνέλιξη σημάτων διακριτού χρόνου

- Υπολογισμός γραμμικής συνέλιξης (linear convolution) δύο σημάτων $x_1[n]$ και $x_2[n]$ διακριτού χρόνου ορίζεται ως

$$x[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k] \cdot x_2[n-k]$$

Με χρήση **πίνακα** :

κατασκευή ενός πίνακα με το 1ο στοιχείο κενό

α. Οι τιμές του πρώτου σήματος γίνονται τα στοιχεία της 1ης στήλης

β. Οι τιμές του δεύτερου σήματος γίνονται τα στοιχεία της 1ης γραμμής

γ. Οι τιμές των υπολοίπων στοιχείων του πίνακα είναι το γινόμενο των στοιχείων της 1ης γραμμής και της 1ης στήλης

δ. οι τιμές της συνέλιξης είναι το **διαγώνιο άθροισμα** των τιμών του στοιχείων του πίνακα

δ. οι χρονικές τιμές (τάξη όρων **n**) της συνέλιξης είναι το άθροισμα των δεικτών των επιμέρους δειγμάτων (προφανώς μία φορά)

Γραμμική συνέλιξη σημάτων διακριτού χρόνου

- Παράδειγμα : Υπολογίστε την συνέλιξη $x[n]$ των σημάτων $x_1[n] = 4 \cdot \delta[n+1] + 5 \cdot \delta[n] + 6 \cdot \delta[n-1] + 7 \cdot \delta[n-2]$ και $x_2[n] = 3 \cdot \delta[n-1] + 2 \cdot \delta[n-2] + 1 \cdot \delta[n-3]$.

- Το σήμα $x_1[n]$ υπάρχει στο χρονικό διάστημα $[-1,2]$ και το σήμα $x_2[n]$ στο χρονικό διάστημα $[1,3]$.

$x_2[n]$ / $x_1[n]$		$x_2[1]$	$x_2[2]$	$x_2[3]$
		3	2	1
$x_1[-1]$	4	12	8	4
$x_1[0]$	5	15	10	5
$x_1[1]$	6	18	12	6
$x_1[2]$	7	21	14	7

- Δείκτες (n): άθροισμα δεικτών
- -1+1=0, -1+2=1, -1+3=2
- 0+1=1, 0+2=2, 0+3=3
- 1+1=2, 1+2=3, 1+3=4
- 2+1=3, 2+2=4, 2+3=5
- Η γραμμική συνέλιξη υπάρχει στο χρονικό διάστημα $[0,5]$.

Οι τιμές είναι το διαγώνιο άθροισμα των τιμών του στοιχείων του πίνακα :

$x[0] = \mathbf{12}$, $x[1] = 8 + 15 = \mathbf{23}$, $x[2] = 4 + 10 + 18 = \mathbf{32}$,

$x[3] = 5 + 12 + 21 = \mathbf{38}$, $x[4] = 6 + 14 = \mathbf{20}$, $x[5] = \mathbf{7}$

Γραμμική συνέλιξη σημάτων διακριτού χρόνου

- Παράδειγμα : Υπολογίστε την συνέλιξη $x[n]$ των σημάτων $x_1[n] = 4 \cdot \delta[n+1] + 5 \cdot \delta[n] + 6 \cdot \delta[n-1] + 7 \cdot \delta[n-2]$ και $x_2[n] = 3 \cdot \delta[n-1] + 2 \cdot \delta[n-2] + 1 \cdot \delta[n-3]$.

- Το σήμα $x_1[n]$ υπάρχει στο χρονικό διάστημα $[-1,2]$ και το σήμα $x_2[n]$ στο χρονικό διάστημα $[1,3]$.

$x_2[n]$ \ $x_1[n]$		$x_1[-1]$	$x_1[0]$	$x_1[1]$	$x_1[2]$
		4	5	6	7
$x_2[1]$	3	12	15	18	21
$x_2[2]$	2	8	10	12	14
$x_2[3]$	1	4	5	6	7

- Δείκτες (n): άθροισμα δεικτών
- -1+1=0, -1+2=1, -1+3=2
- 0+1=1, 0+2=2, 0+3=3
- 1+1=2, 1+2=3, 1+3=4
- 2+1=3, 2+2=4, 2+3=5
- Η γραμμική συνέλιξη υπάρχει στο χρονικό διάστημα $[0,5]$.

Οι τιμές είναι το διαγώνιο άθροισμα των τιμών του στοιχείων του πίνακα :

$x[0] = \mathbf{12}$, $x[1] = 8 + 15 = \mathbf{23}$, $x[2] = 4 + 10 + 18 = \mathbf{32}$,

$x[3] = 5 + 12 + 21 = \mathbf{38}$, $x[4] = 6 + 14 = \mathbf{20}$, $x[5] = \mathbf{7}$

$\boldsymbol{x_2[n] * x_1[n] = x_1[n] * x_2[n]}$

Γραμμική συνέλιξη σημάτων διακριτού χρόνου

- Παράδειγμα : Υπολογίστε την συνέλιξη $x[n]$ των σημάτων $x_1[n] = 4 \cdot \delta[n+1] + 5 \cdot \delta[n] + 6 \cdot \delta[n-1] + 7 \cdot \delta[n-2]$ και $x_2[n] = 3 \cdot \delta[n-4] + 2 \cdot \delta[n-5] + 1 \cdot \delta[n-6]$.

- Το σήμα $x_1[n]$ υπάρχει στο χρονικό διάστημα $[-1,2]$ και το σήμα $x_2[n]$ στο χρονικό διάστημα $[4,6]$.

$x_1[n]$ \ $x_2[n]$		$x_2[4]$	$x_2[5]$	$x_2[6]$
		3	2	1
$x_1[-1]$	4	12	8	4
$x_1[0]$	5	15	10	5
$x_1[1]$	6	18	12	6
$x_1[2]$	7	21	14	7

- Δείκτες (n): άθροισμα δεικτών
- -1+4=3, -1+5=4, -1+6=5
- 0+4=4, 0+5=5, 0+6=6
- 1+4=5, 1+5=6, 1+6=7
- 2+4=6, 2+5=7, 2+6=8
- Η γραμμική συνέλιξη υπάρχει στο χρονικό διάστημα $[3,8]$.

Οι τιμές είναι το διαγώνιο άθροισμα των τιμών του στοιχείων του πίνακα :

$x[3] = \mathbf{12}$, $x[4] = 8 + 15 = \mathbf{23}$, $x[5] = 4 + 10 + 18 = \mathbf{32}$,

$x[6] = 5 + 12 + 21 = \mathbf{38}$, $x[7] = 6 + 14 = \mathbf{20}$, $x[8] = \mathbf{7}$

Γραμμική συνέλιξη σημάτων διακριτού χρόνου

- Παράδειγμα : Υπολογίστε την συνέλιξη $x[n]$ των σημάτων $x_1[n] = 4 \cdot \delta[n+2] + 5 \cdot \delta[n+1] + 6 \cdot \delta[n] + 7 \cdot \delta[n-1]$ και $x_2[n] = 3 \cdot \delta[n] + 2 \cdot \delta[n-1] + \delta[n-2]$.

- Το σήμα $x_1[n]$ υπάρχει στο χρονικό διάστημα $[-2,1]$ και το σήμα $x_2[n]$ στο χρονικό διάστημα $[0,2]$.

$x_1[n]$ \ $x_2[n]$		$x_2[0]$	$x_2[1]$	$x_2[2]$
		3	2	1
$x_1[-2]$	4	12	8	4
$x_1[-1]$	5	15	10	5
$x_1[0]$	6	18	12	6
$x_1[1]$	7	21	14	7

- Δείκτες (n): άθροισμα δεικτών
- -2+0=**-2**, -2+1=**-1**, -2+2=**0**
- -1+0=-1, -1+1=0, -1+2=**1**
- 0+0=0, 0+1=1, 0+2=**2**
- 1+0=1, 1+1=2, 1+2=**3**
- Η γραμμική συνέλιξη υπάρχει στο χρονικό διάστημα $[-2,3]$.

Οι τιμές είναι το διαγώνιο άθροισμα των τιμών του στοιχείων του πίνακα :

$x[-2] = \mathbf{12}$, $x[-1] = 8 + 15 = \mathbf{23}$, $x[0] = 4 + 10 + 18 = \mathbf{32}$,

$x[1] = 5 + 12 + 21 = \mathbf{38}$, $x[2] = 6 + 14 = \mathbf{20}$, $x[3] = \mathbf{7}$

Ασκήσεις στη γραμμική συνέλιξη

- Άσκηση 1 : Δείξτε ότι το μήκος διάρκειας της συνέλιξης Δ_Σ δυο σημάτων με μήκη διάρκειας Δ_1 και Δ_2 είναι
$$\Delta_\Sigma = \Delta_1 + \Delta_2 - 1$$
- Άσκηση 2 : Υπολογίστε την γραμμική συνέλιξη $5\delta[n] * 4\delta[n]$
- Άσκηση 3 : Υπολογίστε την γραμμική συνέλιξη $(\delta[n] + \delta[n-1]) * (\delta[n+1] + 2\delta[n-1])$
- Άσκηση 4 : Υπολογίστε την γραμμική συνέλιξη των σημάτων $x_1[n] = [\underline{-1}\ k\ 7]$ και $x_2[n] = [-k\ 4\ \underline{k}\ 2]$ όπου k το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας.
- Άσκηση 5 : Υπολογίστε την γραμμική συνέλιξη $(\delta[n+1] + \delta[n]) * ((u[n] - u[n-2]) - (u[n-2] - u[n]))$

Συσχέτιση σημάτων διακριτού χρόνου

- <u>ετεροσυσχέτιση</u> (cross-correlation) δύο σημάτων διακριτού χρόνου $\mathrm{x}[\mathrm{n}]$ και $\mathrm{y}[\mathrm{n}]$ ορίζεται:

$$r_{xy}[\mathrm{n}] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^*[k] \cdot y[k-n]$$

n: χρονική καθυστέρηση ανάμεσα στα δύο σήματα(lag)

Για πραγματικά σήματα:

$$\boxed{r_{xy}[\mathrm{n}] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot y[k-n]}$$

❖ Η ετεροσυσχέτιση δύο σημάτων είναι ένα μέτρο ομοιότητας των δύο σημάτων x, y. Συγκεκριμένα μας δίνει για κάθε τιμή καθυστέρησης n την ομοιότητα της μορφής τους. Η συσχέτιση χρησιμοποιείται σε διάφορα πεδία επεξεργασίας σήματος π.χ. ψηφιακές επικοινωνίες, ρανταρ, σόναρ κ.τ.λ.

Συσχέτιση σημάτων διακριτού χρόνου

$$x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k] \cdot x_2[n-k]$$

- <u>ετεροσυσχέτιση</u> (cross-correlation) δύο σημάτων διακριτού χρόνου x[n] και y[n] ορίζεται

$$r_{xy}[\mathrm{n}] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^*[k] \cdot y[k-n]$$

n: καθυστέρηση (lag)

Για πραγματικά σήματα:

$$\boxed{r_{xy}[\mathrm{n}] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot y[k-n]}$$

❖ Η ετεροσυσχέτιση σχετίζεται με τη γραμμική συνέλιξη

$$\boxed{r_{xy}[\mathrm{n}] = x[n] * y[-n]}$$

- Όταν τα σήματα είναι πεπερασμένης διάρκειας, τότε η ετεροσυσχέτιση είναι επίσης πεπερασμένης διάρκειας
- Ο υπολογισμός της ετεροσυσχέτισης μπορεί να γίνει μεσω της αναδίπλωσης και της μετατόπισης.
  - **δεν απαιτείται η αναδίπλωση του μετατοπιζόμενου σήματος**, γιατί πρέπει να αναδιπλωθεί δύο φορές, άρα επανέρχεται στην αρχική του κατάσταση.

$$\boxed{x[n] \xrightarrow{\alpha\nu\alpha\delta\iota\pi\lambda\omega\sigma\eta} x[-n] \xrightarrow{o\lambda\iota\sigma\theta\eta\sigma\eta} x[-(n-n_o)] = x[-n+n_o] \xrightarrow{\alpha\nu\alpha\delta\iota\pi\lambda\omega\sigma\eta} x[n+n_o]}$$

  - σήμα $x[n]$ έχει διάρκεια $[\mathrm{A}_x, \mathrm{T}_x], \mathrm{A}_x \leq \mathrm{T}_x, \mathrm{A}_x, \mathrm{T}_x \in Z$ και
  - σήμα $y[n]$ έχει διάρκεια $[\mathrm{A}_y, \mathrm{T}_y], \mathrm{A}_y \leq \mathrm{T}_y, \mathrm{A}_y, \mathrm{T}_y \in Z \rightarrow y[-n]\ \delta\iota\alpha\rho\kappa\epsilon\iota\alpha\ [-\mathrm{T}_y, -\mathrm{A}_y]$

    →ετεροσυσχέτιση $r_{xy}[\mathrm{n}] = x[n] * y[-n]$ έχει διάρκεια $[\mathrm{A_x} - \mathrm{T_y}, \mathrm{T_x} - \mathrm{A_y}]$
  - Ισχύει $\underline{r_{xy}[\mathrm{n}] = r_{yx}[-\mathrm{n}]}$

Συσχέτιση σημάτων διακριτού χρόνου

- Παράδειγμα : Υπολογίστε την ετεροσυσχετιση $\boldsymbol{r_{xy}[n]}$ των σημάτων $x[n] = 4 \cdot \delta[n+1] + 5 \cdot \delta[n]$ και $y[n] = \delta[n-2] + 2 \cdot \delta[n-3] + 3 \cdot \delta[n-4]$

- Το σήμα $x[n]$ υπάρχει στο χρονικό διάστημα $[-1,0]$ και το σήμα $y[n]$ στο χρονικό διάστημα $[2,4]$. Τότε το σήμα $y[-n]$ στο χρονικό διάστημα $[-4,2]$ και η ετεροσυσχέτιση $r_{xy}[\mathrm{n}]$ υπάρχει στο χρονικό διάστημα $[-5,-2]$.

$$\boxed{r_{xy}[\mathrm{n}] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot y[k-n]}$$

		k	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	
		$x[k]$			4	5					
		$y[k]$						1	2	3	
μετατόπιση στην αρχή του $x[\boldsymbol{k}]$ ←	$n=-5$	$y[5+k]$	1	2	3						$r_{xy}[-5] = 3 \cdot 4 = 12$
μετατόπιση →	$n=-4$	$y[4+k]$		1	2	3					$r_{xy}[-4] = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 23$
μετατόπιση →	$n=-3$	$y[3+k]$			1	2	3				$r_{xy}[-3] = 14$
μετατόπιση →	$n=-2$	$y[2+k]$				1	2	3			$r_{xy}[-2] = 5$

Συσχέτιση σημάτων διακριτού χρόνου

- Παράδειγμα : Υπολογίστε την έτεροσυσχετιση $\boldsymbol{r_{yx}[n]}$ των σημάτων $x[n] = 4 \cdot \delta[n+1] + 5 \cdot \delta[n]$ και $y[n] = \delta[n-2] + 2 \cdot \delta[n-3] + 3 \cdot \delta[n-4]$

- Το σήμα $x[n]$ υπάρχει στο χρονικό διάστημα $[-1,0]$. Άρα το $x[-n]$ υπάρχει στο χρονικό διάστημα $[0,1]$ και το σήμα $y[n]$ στο χρονικό διάστημα $[2,4]$. Η ετεροσυσχέτιση $r_{yx}[\mathrm{n}]$ υπάρχει στο χρονικό διάστημα $[2,5]$.

$$\boxed{r_{yx}[\mathrm{n}] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y[k] \cdot x[k-n]}$$

k	-1	0	1	2	3	4	5	
$x[k]$	4	5						
$y[k]$				1	2	3		
$\mathrm{x}[k-2]$			4	5				$r_{xy}[2] = 5 \cdot 1 = 5$
$x[k-3]$				4	5			$r_{xy}[3] = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 14$
$x[k-4]$					4	5		$r_{xy}[4] = 23$
$\mathrm{x}[k-5]$						4	5	$r_{xy}[5] = 12$

$$\boldsymbol{r_{xy}[\mathrm{n}] = r_{yx}[-n]}$$

Γραμμική συνέλιξη σημάτων διακριτού χρόνου

$$\boxed{r_{yx}[\mathrm{n}] = y[n] * x[-n]}$$

- Παράδειγμα : Υπολογίστε την έτεροσυχετιση $\boldsymbol{r_{yx}[n]}$ των σημάτων $x[n] = 4 \cdot \delta[n+1] + 5 \cdot \delta[n]$ και $y[n] = \delta[n-2] + 2 \cdot \delta[n-3] + 3 \cdot \delta[n-4]$
- το χρονικό διάστημα $[-1{,}0]$. Άρα το $x[-n]$ υπάρχει στο χρονικό διάστημα $[0{,}1]$ και το σήμα $y[n]$ στο χρονικό διάστημα $[2{,}4]$. Η ετεροσυσχέτιση $r_{yx}[\mathrm{n}]$ υπάρχει στο χρονικό διάστημα [2,5].

❖ $x[n] = 4 \cdot \delta[n+1] + 5 \cdot \delta[n] \rightarrow x[-n] = 5 \cdot \delta[n] + 4 \cdot \delta[n-1]$

$\boldsymbol{y}[n]$ / $\boldsymbol{x}[-n]$		$\boldsymbol{y}[2]$	$y[3]$	$y[4]$
		1	2	3
$x[0]$	5	5	10	15
$x[1]$	4	4	8	12

- Δείκτες (n): άθροισμα δεικτών
- 2+0=2, 2+1=3,
- 3+0=3, 3+1=4,
- 4+0=4, 4+1=5,
- Η έτεροσυχετιση $\boldsymbol{r_{yx}[n]}$ υπάρχει στο χρονικό διάστημα $[-2{,}3]$.

Οι τιμές είναι το διαγώνιο άθροισμα των τιμών του στοιχείων του πίνακα :

$x[2] = 5,\quad x[3] = 4 + 10 = 14,\quad x[4] = 15 + 8 = 23,\quad x[5] = 12$

Συσχέτιση σημάτων διακριτού χρόνου

- <u>αυτοσυσχέτιση</u> (autocorrelation) ενός **πραγματικού** σήματος διακριτού χρόνου $\mathrm{x[n]}$ ορίζεται

$$r_{xx}[\mathrm{n}] = r_x[\mathrm{n}] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot x[k-n]$$

❖ Η αυτοσυσχέτιση σχετίζεται με τη γραμμική συνέλιξη

$$\boxed{r_x[\mathrm{n}] = x[n] * x[-n]}$$

- Όταν το σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας, τότε η αυτοσυσχέτιση είναι επίσης πεπερασμένης διάρκειας
- Ο υπολογισμός της αυτοσυσχέτισης μπορεί να γίνει μέσω αναδίπλωσης και μετατόπισης.
  - **δεν απαιτείται η αναδίπλωση του μετατοπιζόμενου σήματος**, γιατί πρέπει να αναδιπλωθεί δύο φορές, άρα επανέρχεται στην αρχική του κατάσταση.
  - σήμα $x[n]$ έχει διάρκεια $[\mathrm{A}_x, \mathrm{T}_x], \mathrm{A}_x \leq \mathrm{T}_x, \mathrm{A}_x, \mathrm{T}_x \in Z$ και → $x[-n]$ $διαρκεια$ $[-\mathrm{T}_x, -\mathrm{A}_x]$

  →αυτοσυσχέτιση $r_x[\mathrm{n}] = x[n] * x[-n]$ έχει διάρκεια $[\mathrm{A_x} - \mathrm{T_x}, \mathrm{T_x} - \mathrm{A}_x]$

❖ Η μέγιστη τιμή της αυτοσυσχέτισης παρουσιάζεται πάντα στο n=0 → μέγιστη ομοιότητα ενός σήματος με ένα καθυστερημένο αντίγραφο του.

Συσχέτιση σημάτων διακριτού χρόνου

- Παράδειγμα : Υπολογίστε την αυτοσυσχετιση $r_x[\mathrm{n}]$ του σημάτων $x[n] = 2 \cdot \delta[n+2] + 4 \cdot \delta[n] + 5 \cdot \delta[n-1]$.

- Το σήμα $x[n]$ υπάρχει στο χρονικό διάστημα $[-2{,}1]$. Τότε το σήμα $\mathrm{x}[-n]$ στο χρονικό διάστημα $[-1{,}2]$ και η αυτοσυσχέτιση $r_x[\mathrm{n}]$ υπάρχει στο χρονικό διάστημα $[-3,-3]$.

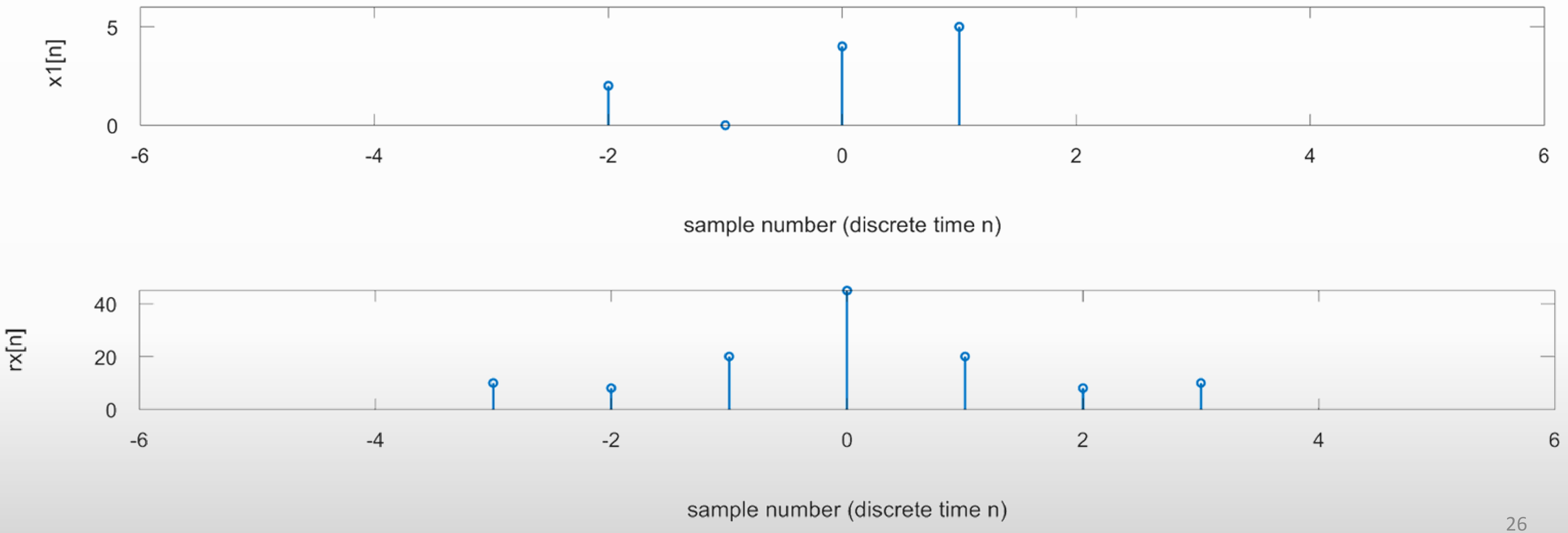
$$r_x[\mathrm{n}] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot x[k-n]$$

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	
$x[k]$				2	0	4	5				
$x[k+3]$	2	0	4	5							$r_x[-3] = 2 \cdot 5 = 10$
$x[k+2]$		2	0	4	5						$r_x[-2] = 2 \cdot 4 = 8$
$x[k+1]$			2	0	4	5					$r_x[-1] = 20$
$x[k]$				2	0	4	5				$r_x[0] = 45$
$x[k-1]$					2	0	4	5			$r_x[1] = 20$
$x[k-2]$						2	0	4	5		$r_x[2] = 8$
$\mathrm{x}[k-3]$							2	0	4	5	$r_x[3] = 10$

Συσχέτιση σημάτων διακριτού χρόνου

- Παράδειγμα : Υπολογίστε την αυτοσυσχετιση $r_x[\mathrm{n}]$ του σηµάτος $x[n] = 2 \cdot \delta[n+2] + 4 \cdot \delta[n] + 5 \cdot \delta[n-1]$.

- Το σήμα $x[n]$ υπάρχει στο χρονικό διάστημα $[-2,1]$. Τότε το σήμα $\mathrm{x}[-n]$ στο χρονικό διάστημα $[-1,2]$ και η αυτοσυσχέτιση $r_x[\mathrm{n}]$ υπάρχει στο χρονικό διάστημα $[-3,3]$.



Συσχέτιση σημάτων διακριτού χρόνου

$$\boxed{r_x[\mathrm{n}] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot x[k-n]}$$

- Παράδειγμα : Υπολογίστε την αυτοσυσχέτιση $r_x[\mathrm{n}]$ του σημάτων $x[n] = 2 \cdot \delta[n+2] + 4 \cdot \delta[n] + 5 \cdot \delta[n-1]$.

- Το σήμα $x[n]$ υπάρχει στο χρονικό διάστημα $[-2,1]$. Τότε το σήμα $\mathrm{x}[-n]$ στο χρονικό διάστημα $[-1,2]$ και η αυτοσυσχέτιση $r_x[\mathrm{n}]$ υπάρχει στο χρονικό διάστημα $[-3,3]$.

$$\boxed{r_x[\mathrm{n}] = x[n] * x[-n]}$$

$x[-n]$ \ $\boldsymbol{x}[n]$		$x[-2]$	$x[-\mathbf{1}]$	$x[0]$	$x[1]$
		2	0	4	5
$x[-1]$	5	10	0	20	25
$x[0]$	4	8	0	16	20
$x[1]$	0	0	0	0	0
$x[2]$	2	4	0	8	10

- Δείκτες (n): άθροισμα δεικτών
- -2-1=-3, ….2+1=3,
- Η **αυτοσυσχέτιση $\boldsymbol{r_x[n]}$** υπάρχει στο χρονικό διάστημα $[-3,3]$.

$r_x[-3] = 10, r_x[-2] = 8, r_x[-1] = 20, r_x[0] =45, r_x[1] = 20, r_x[2] = 8, r_x[3] = 10$

Συσχέτιση σημάτων διακριτού χρόνου

- Η αυτοσυσχέτιση έχει άρτια συμμετρία $r_x[\mathrm{n}] = r_x[-\mathrm{n}]$

Απόδειξη : Ισχύει $r_x[\mathrm{n}] = x[n] * x[-n] \rightarrow$

$$r_x[-\mathrm{n}] = x[-n] * x[-(-n)] = x[-n] * x[n] = x[n] * x[-n] = r_x[\mathrm{n}]$$

- η αυτοσυσχέτιση ενός πραγματικού σήματος **ενέργειας** διακριτού χρόνου σχετίζεται με την ενέργεια του σήματος

$$\mathrm{E} = r_x[0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^2[k]$$

- η αυτοσυσχέτιση ενός πραγματικού σήματος **ισχύος** διακριτού χρόνου είναι

$$\overline{r_x}[\mathrm{n}] = \lim_{\mathrm{N}\to\infty}\left[\frac{1}{2\cdot\mathrm{N}+1}\cdot\sum_{k=-N}^{+N} x[k]\cdot x[n+k]\right] = \lim_{\mathrm{N}\to\infty}\left[\frac{1}{2\cdot\mathrm{N}+1}\cdot\sum_{k=-N}^{+N} x[k]\cdot x[n+k]\right]$$

και σχετίζεται με τη μέση ισχύ του πραγματικού σήματος

$$P = \overline{r_x}[0] = \lim_{\mathrm{N}\to\infty}\left[\frac{1}{2\cdot\mathrm{N}+1}\cdot\sum_{k=-N}^{+N} x^2[k]\right]$$

Ασκήσεις στη συσχέτιση σημάτων

- Άσκηση 1 : Αποδείξτε ότι $r_{xy}[\mathrm{n}] = r_{yx}[-\mathrm{n}]$
- Άσκηση 2 : Με χρήση της αναλυτικής τεχνικής (από τη συνέλιξη) λύστε τα λυμένα παραδείγματα στην αυτοσυσχέτιση και την ετεροσυσχέτιση
- Άσκηση 3 : Υπολογίστε την ετεροσυσχέτιση των σημάτων $x[n] = 2\delta[n] + 4\delta[n-1] + 6\delta[n-2]$ και $y[n] = \delta[n] + 3\delta[n-1]$ **αναλυτικά**, με **slide rule** και **με χρήση πίνακα**
- Άσκηση 4 : Βρείτε την αυτοσυσχέτιση του σήματος $x[n] = 2\delta[n] + 4\delta[n-1] + 6\delta[n-2]$ με το slide rule και με χρήση πίνακα
- Άσκηση 5 : Βρείτε την αυτοσυσχέτιση του σήματος $x[n] = \delta[n] + 3\delta[n-1]$ με το slide rule και με χρήση πίνακα

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος & Εικόνας

Α. Μπακλέζος

abaklezos@hmu.gr

Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών