



ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εξέταση Μαθήματος - ΙΟΥΝΙΟΣ 2024

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: Θεόδωρος Γκιθιόπουλος

A.M.: T120533

Οι απαντήσεις θα πρέπει να είναι πλήρως αναλυτικές καθώς θα βαθμολογηθούν ως προς την ορθότητα και πληρότητά τους, αναφέροντας όπου χρειάζεται συγκεκριμένους ορισμούς, αρχές, θεωρήματα που θα βρείτε στο βοηθητικό φύλλο εξέτασης.

3/4

- A) 1.** Ένας ακέραιος αριθμός n ονομάζεται κουζουλός αν το $n^2 + 2n$ είναι περιττός.
i) Γράψτε σε συμβολική μορφή τον ισχυρισμό: "Όλοι οι κουζουλοί αριθμοί είναι περιττοί"
ii) Εφαρμόστε τη μέθοδο του αντιθετοαντίστροφου για να αποδείξετε τον παραπάνω ισχυρισμό.
2. Ορίζετε τη συνάρτηση $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ μέσω της έκφρασης $f(x) = 3x - 5$. Δείξτε αν η συνάρτηση αυτή είναι αμφιμονοσήμαντη και αν είναι επιρριπτική.

- B) 1.** Θεωρήστε την αναδρομική σχέση:

$$K(n) = \begin{cases} 1 & \text{αν } n = 0 \\ 2 \cdot K(n-1) - n + 1 & \text{αν } n > 0 \end{cases}$$

Δείξτε, με μαθηματική επαγωγή ότι η σχέση $f(n) = n + 1$ είναι λύση κλειστή μορφής της $K(n)$ για κάθε $n \geq 0$

2. Έστω $S = \{5, 6, 7\}$ και $T = \{3, 4, 5\}$. Γράψτε όλα τα στοιχεία των παρακάτω συνόλων
i) καρτεσιανό γινόμενο $S \times T$ ii) δυναμοσύνολο $P(S)$ iii) καρτεσιανό γινόμενο $(S \cup T) \times (S \cap T)$

- Γ) 1.** Από μία τάξη 13 φοιτητών και 7 φοιτητριών θέλουμε να κάνουμε μια 6-μελή επιτροπή αποτελούμενη από τις διακεκριμένες θέσεις πρόεδρου και αντιπρόεδρου καθώς και 4 μελών της επιτροπής. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε την επιτροπή αν θέλουμε πρόεδρος και αντιπρόεδρος να μην είναι του ίδιου φύλου;

2. Βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΔΙΑΚΡΙΤΑ στους οποίους

- i) τα δύο A παραμένουν στη θέση τους
ii) τουλάχιστον ένα από τα A μένει στην ίδια θέση. (αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού)

- Δ) 1.) 1.** Έστω G το σύνολο των λέξεων της αγγλικής γλώσσας. Ορίζουμε τη σχέση R επί του G ως εξής: για δύο στοιχεία g_1, g_2 του G είναι $g_1 R g_2 \iff$ οι g_1 και g_2 έχουν έστω ένα κοινό γράμμα. Δείξτε αν ισχύουν για την R κάθε μία από τις ιδιότητες των σχέσεων ισοδυναμίας. (Προσοχή! για κάθε ιδιότητα να δώσετε πλήρη αναλυτική αιτιολόγηση της απάντησης ή να εξηγήσετε αναλυτικά το αντιπαράδειγμα που θα χρησιμοποιήσετε.)

2. Ένα τεστ πολλαπλής επιλογής (με μία σωστή απάντηση ανά ερώτηση) αποτελείται από δέκα ερωτήσεις και σε κάθε ερώτηση επιλέγετε μία από τις τέσσερις διαθέσιμες απαντήσεις. Αν μαντεύετε στην τύχη κάθε απάντησή σας ποια είναι η πιθανότητα να επιτύχετε έξι ή λιγότερες σωστές απαντήσεις;

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Ε) Πολλαπλής επιλογής με αρνητική βαθμολόγηση. Κάθε λάθος απάντηση/επιλογή αφαιρεί μία σωστή απάντηση/επιλογή (δεν χρειάζεται αιτιολόγηση)

100%

<p>1) Πόσους κωδικούς μπορείτε να κάνετε με δύο γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου ακολουθούμενα από δύο αριθμητικά ψηφία;</p> <p>α) $2 \cdot 24 + 2 \cdot 10$ β) $24^2 + 10^2$ γ) $24^2 \cdot 10^2$</p> <p>δ) $24 \cdot 23 \cdot 10 \cdot 9$ <u>ε) $24 \cdot 23 + 10 \cdot 9$</u> στ) $2 \cdot 24 \cdot 10$</p>	<p>6) Σε μία αίθουσα με 110 άτομα πόσα τουλάχιστον άτομα έχουν γενέθλια τον ίδιο μήνα;</p> <p>α) κανένα β) τρία γ) τέσσερα δ) πέντε</p> <p>ε) επτά <u>στ) οκτώ</u> <u>ζ) εννέα</u> η) δέκα</p>
<p>2) Έχετε 24 μαγνήτες ψυγείου με όλα τα γράμματα του Ελληνικού αλφαβήτου. Πόσες συμβολοσειρές τριών γραμμάτων με αυτά μπορεί να κάνετε;</p> <p>α) 24^3 β) 3^{24} γ) $C(26, 3)$ <u>δ) $24 \cdot 23 \cdot 22$</u></p> <p>ε) $24/3$ στ) $24!/3!$ ζ) $P(24, 3)$ η) $C(24, 3)$</p> <p>(για τα Ρ και C δείτε το βοηθητικό φύλλο)</p>	<p>7) Ποια είναι η πιθανότητα ρίχνοντας τρία ζάρια αυτά να αθροίζουν 4;</p> <p>α) $1/216$ β) $2/216$ <u>γ) $3/216$</u> δ) $4/216$</p> <p>ε) $1/18$ στ) $2/18$ ζ) $3/18$ η) $4/18$</p> <p>θ) $1/36$ ι) $2/36$ κ) $3/36$ λ) $4/36$</p>
<p>3) Τι ονομάζεται δεσμευμένη πιθανότητα;</p> <p>α) Όταν αυτή περιορίζεται μεταξύ δύο συγκεκριμένων τιμών</p> <p>β) Για ένα ζεύγος ενδεχομένων η πιθανότητα να έχουν την ίδια τιμή.</p> <p><u>γ) Για ένα ζεύγος ενδεχομένων η πιθανότητα του ενός ενδεχομένου αν γνωρίζουμε την τιμή που έχει το άλλο.</u></p> <p>δ) Όταν η πιθανότητα του ενδεχομένου δεν μεταβάλλεται.</p> <p>ε) Όταν ο δειγματοχώρος για τον υπολογισμό της πιθανότητας δεν είναι άπειρος.</p>	<p>8) Για το σύνολο των ατόμων που εξετάζονται στο μάθημα, έστω $H(x)$: το x έχει γράψει καλά $C(x)$: το x θα περάσει το μάθημα. Ποιο από τα παρακάτω εκφράζει τον ισχυρισμό: «όσα άτομα γράψουν καλά θα περάσουν το μάθημα»;</p> <p>α) $(\exists x)(H(x) \wedge C(x))$</p> <p>β) $(\exists x)(H(x) \vee C(x))$</p> <p>γ) $(\exists x)(H(x) \rightarrow C(x))$</p> <p>δ) $(\forall x)(H(x) \wedge C(x))$</p> <p>ε) $(\forall x)(H(x) \vee C(x))$</p> <p><u>στ) $(\forall x)(H(x) \rightarrow C(x))$</u></p>
<p>4) Στην κατηγορηματική λογική, κατηγορήμα ονομάζεται κάθε δήλωση που</p> <p>α) είναι πάντα αληθής</p> <p>β) είναι πάντα ψευδής</p> <p><u>γ) δεν είναι ισχυρισμός</u></p> <p>δ) περιέχει μεταβλητές</p> <p>ε) διαχωρίζει κατηγορίες</p>	<p>9) Δύο σύνολα A και B ονομάζονται ξένα μεταξύ τους όταν</p> <p>α) $A \cup B = \emptyset$ β) $A \cup B \neq \emptyset$</p> <p><u>γ) $A \cap B = \emptyset$</u> δ) $A \cap B \neq \emptyset$</p> <p>ε) $A - B = \emptyset$ στ) $A - B \neq \emptyset$</p>
<p>5) Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε 12 ίδια κοκάλια σε τρεις διαφορετικούς σκύλους;</p> <p><u>α) 12^3</u> β) 3^{12} γ) $12/3$ δ) $C(14, 2)$</p> <p>ε) $3 \cdot 12$ στ) $P(12, 3)$ ζ) $12!/3$ η) $C(12, 3)$</p> <p>(για τα Ρ και C δείτε το βοηθητικό φύλλο)</p>	<p>10) Αν απαντάτε τυχαία σε 10 ερωτήσεις Σωστό ή Λάθος πόση είναι η πιθανότητα να απαντήσατε σωστά σε όλες; (περίπου)</p> <p>α) 0.01% <u>β) 0,1%</u> γ) 1% δ) 5%</p> <p>ε) 10% στ) 20% ζ) 30% η) 50%</p>

48
36
108
4

36
x 6
216

180

50 50
25

50 50
25

50 50
25

50 50
25

50% 50%
25%

1/2 1/2 1/2

1/2 1/2 1/2

1/2 1/2 1/2

1/2 1/2 1/2

1/2 1/2 1/2

1/2 1/2 1/2

1/2 1/2 1/2

1/2 1/2 1/2

1/2 1/2 1/2

1/2 1/2 1/2

1/2 1/2 1/2

ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΟΥΝΙΟΥ

- A) i) Ένας ακέραιος αριθμός n ονομάζεται κουζουλό αν το $n^2 + 2n$ είναι πριμπί.
 ii) Γράψτε σε συμβολική μορφή τον ισχυρισμό: "Όλοι οι κουζουλοί αριθμοί είναι πριμπί"
 iii) Εφαρμόστε τη μέθοδο του αντιθεταναίστροφου για να αποδείξετε τον παραπάνω ισχυρισμό.

Λύση

- i) Έστω: $p = \text{"Όλοι αριθμοί είναι πριμπί"}$ και
 $q = \text{"Όλοι αριθμοί είναι κουζουλοί"}$

Άρα ο ισχυρισμός "S" μεταφράζεται: $S = q \rightarrow p$

- ii) για να αποδείξω τον παραπάνω ισχυρισμό με τη μέθοδο του αντιθεταναίστροφου, θα πρέπει να αποδείξω ότι για οποιοδήποτε ~~α~~ ακέραιο αριθμό n που είναι άρτιος, δεν είναι κουζουλό, δηλαδή το $n^2 + 2n$ είναι άρτιος αριθμός.

Έστω ~~α~~ ακέραιος και άρτιος αριθμός n , εκ του ορισμού 1 έχουμε $n = 2k$ για κάποιο ακέραιο k .

$$n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2 \text{ (λόγω του Αξιώματος 1 παραμένουν ακέραιοι)}$$

$$\text{και τα δύο μέλη}) \Rightarrow n^2 + 2n = 4k^2 + 4k \text{ (πάλι Αξ.1)}$$

$$\Rightarrow \text{θεωρώ } \gamma = 2k^2 + 2k \text{ (ακέραιος) οπότε:}$$

$\Rightarrow n^2 + 2n = 2\gamma$ άρα εκ του ορισμού 1 ο $n^2 + 2n$ είναι επίσης άρτιος αριθμός, άρα με τη μέθοδο της αντιθεταναίστροφής αποδεικνύεται ο ισχυρισμός του ερωτήματος (i).

- 2) Ορίστε τη συνάρτηση $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ μέσω της έκφρασης $f(x) = 3x - 5$. Δείξτε αν η συνάρτηση αυτή είναι αμφιμονοσήμαντη και αν είναι επληρηντική.

Λύση

Έστω ότι $a, b \in \mathbb{Z}$ και έστω ότι $f(a) = f(b)$. Αν $a = b$ τότε η συνάρτηση θα είναι 1-1.

$$f(a) = f(b) \Rightarrow 3a - 5 = 3b - 5 \Rightarrow 3a = 3b \Rightarrow \underline{a = b}$$

Άρα η συνάρτηση είναι αμφιμονοσήμαντη καθώς έδειξα ότι αν $f(a) = f(b)$, ισχύει και ότι $a = b$.

Για να δείξω ότι η συνάρτηση είναι και επληρηντική,

Α) Έστω οποιοδήποτε $y \in \mathbb{Z}$. Υπάρχει $x = \frac{y+5}{3}$ που ανήκει ~~στο~~ στο \mathbb{Z} και:

$$f(x) = f\left(\frac{y+5}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{y+5}{3}\right) - 5 = y + 5 - 5 = y \text{ άρα,}$$

f είναι και επί συνάρτηση. $f: \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ ~~και~~

~~η f είναι συνάρτηση, ονομάζεται ένα προς ένα αντιστοίχηση~~

Β) 1) θεωρήστε την αναδρομική σχέση:

$$K(n) = \begin{cases} 1 & \text{αν } n=0 \\ 2 \cdot K(n-1) - n + 1 & \text{αν } n > 0 \end{cases}$$

Δείξτε με μαθηματική επαγωγή ότι η σχέση $f(n) = n+1$ είναι λύση καθεμιάς μορφής της $K(n)$ $\forall n \geq 0$

Πέμπτη 11

2) Έστω $S = \{5, 6, 7\}$ και $T = \{3, 4, 5\}$. Γράψτε όλα τα στοιχεία των παρακάτω συνόλων:

i) Καρτεσιανό γινόμενο $S \times T$ ii) Δυναμοσύνολο $P(S)$ iii) Καρτεσιανό γινόμενο $(S \cup T) \times (S \cap T)$

Λύση

i) $S \times T = \{(5, 3), (5, 4), (5, 5), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (7, 3), (7, 4), (7, 5)\}$.

ii) $P(S) = \{\emptyset, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 7\}, \{5, 6, 7\}\}$.

iii) $S \cup T = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ $S \cap T = \{5\}$

$(S \cup T) \times (S \cap T) = \{(3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5), (7, 5)\}$

Γ) 1) Από μία τάξη 13 φοιτητών και 7 φοιτητριών θέλουμε

να κάνουμε μια 6-μελή επιτροπή αποτελούμενη από τις διακε-
κριμένες θέσεις προέδρου και αντιπροέδρου καθώς και 4 μελών της
επιτροπής. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε την επι-
τροπή αν θέλουμε πρόεδρος και αντιπρόεδρος να μην είναι του
ίδιου φύλλου;

VLSI

Φεβρουάριος 2024

1) (10 μονάδες)