Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος & Εικόνας

Μάθημα 11ο

Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών

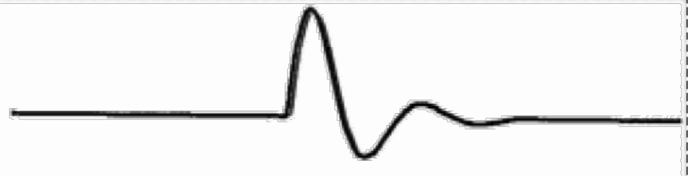
Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου
Απόκριση Συχνότητας (συνέχεια)

Α. Μπακλέζος

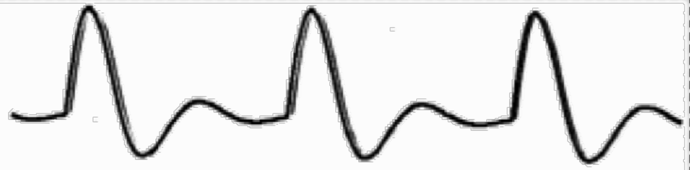
abaklezos@hmu.gr

Κατηγορίες Σημάτων & Μετασχηματισμών Fourier

Μετασχηματισμός Fourier
Σήματα συνεχή και μη περιοδικά



Σειρές Fourier
Σήματα συνεχή και περιοδικά



Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου
Σήματα διακριτά και μη περιοδικά

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier
Σήματα διακριτά και περιοδικά

Μετασχηματισμός Fourier **διακριτού χρόνου**

- Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (Discrete Time Fourier Transform – DTFT) είναι ένας μετασχηματισμός, που συνδέει το πεδίο του διακριτού χρόνου με το πεδίο της (ψηφιακής) κυκλικής συχνότητας .

Ευθύς DTFT :

$$\mathrm{X}\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n}, -\pi \leq \omega \leq \pi$$

- ο DTFT $\mathrm{X}\left(e^{j\omega}\right)$, **αν υπάρχει**, μιας ακολουθίας διακριτού χρόνου $\mathrm{x}[n]$ είναι η αναπαράσταση της ακολουθίας συναρτήσει μιγαδικών εκθετικών ακολουθιών της μορφής $e^{-j\omega}$ με ω η ψηφιακή κυκλική συχνότητα

- **Αντίστροφος IDTFT**(Inverse Discrete Time Fourier Transform) :

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{X}\left(e^{j\omega}\right) \cdot e^{j\omega n} d\omega$$

- **Εφόσον υπάρχουν**, οι DTFT και IDTFT είναι μοναδικοί

Μετασχηματισμός Fourier **διακριτού χρόνου**

- Η συνάρτηση $X(e^{j\omega})$ είναι γενικά **μιγαδική**.
- **Καρτεσιανή μορφή**:

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

$X_R(e^{j\omega})$ και $X_I(e^{j\omega})$ είναι το πραγματικό και φανταστικό μέρος του DTFT.

- **Πολική μορφή** :

$$X(e^{j\omega}) = \left|X(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi_x(\omega)}$$

  - Πλάτος (μέτρο):

$$\left|X(e^{j\omega})\right| = \sqrt{X_R^2(e^{j\omega}) + X_I^2(e^{j\omega})}$$

  - Φάση:

$$\varphi_X(\omega) = tan^{-1}\left[\frac{X_I(e^{j\omega})}{X_R(e^{j\omega})}\right]$$

- Οι γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων ονομάζονται **φάσμα πλάτους** (magnitude spectrum) και **φάσμα φάσης** (phase spectrum),

Μετασχηματισμός Fourier **διακριτού χρόνου**

- Φάση:

$$\varphi_X(\omega) = tan^{-1}\left[\frac{X_I(e^{j\omega})}{X_R(e^{j\omega})}\right]$$

- καθυστέρηση ομάδας (group delay)

$$\tau_{\mathrm{X}} = -\frac{d\varphi_{\mathrm{X}}(e^{j\omega})}{d\omega}$$

Σε συστήματα με **γραμμική φάση (γραμμική ως προς τη συχνότητα)** η καθυστέρηση ομάδας είναι **σταθερή** για όλες τις συχνότητες του σήματος εισόδου.

Επομένως, όλες οι φασματικές συνιστώσες του σήματος εισόδου «καθυστερούν» το ίδιο να διέλθουν από το σύστημα, έτσι το σήμα στην έξοδο του συστήματος θα διατηρεί τις συχνότητες με αλληλουχία συχνοτήτων ίδια με αυτή του σήματος εισόδου.

Αν η φάση δεν είναι γραμμική, τότε κάποιες συχνότητες του σήματος υπόκεινται σε διαφορετική καθυστέρηση από κάποιες άλλες. Άρα, η αλληλουχία των συχνοτήτων στην έξοδο του συστήματος είναι διαφορετική από αυτήν της εισόδου.

Αν και το ανθρώπινο σύστημα ακοής δεν είναι ευαίσθητο στις φασικές μετατοπίσεις των αρμονικών ενός σήματος, μία τέτοια αλλαγή έχει καταστρεπτικά αποτελέσματα σε περιπτώσεις που ενδιαφέρει η μορφή του σήματος όπως στις τηλεπικοινωνίες, σε ιατρικά σήματα, σε εικόνες, κλπ.

Μετασχηματισμός Fourier **διακριτού χρόνου**

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί ο DTFT της ακολουθίας $x[n] = A(u[n] - u[n-N])$.

Διακριτός Παλμός πλάτους A, διάρκειας N δειγμάτων

Απάντηση: Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του DTFT έχουμε:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{N-1} A\, e^{-jn\omega} = A\sum_{n=0}^{N-1} e^{-jn\omega} = A\sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{-j\omega}\right)^n = \frac{A\left(1-e^{-j\omega N}\right)}{1-e^{-j\omega}}$$

$$= \frac{Ae^{-j\omega N/2}\left(e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2}\right)}{e^{-j\omega/2}\left(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}\right)} = \frac{Ae^{-j\omega N/2}\, 2j\, sin(\omega N/2)}{e^{-j\omega/2}\, 2j\, sin(\omega/2)} = Ae^{-j\omega(N-1)/2}\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$$

Το μέτρο του DTFT είναι:

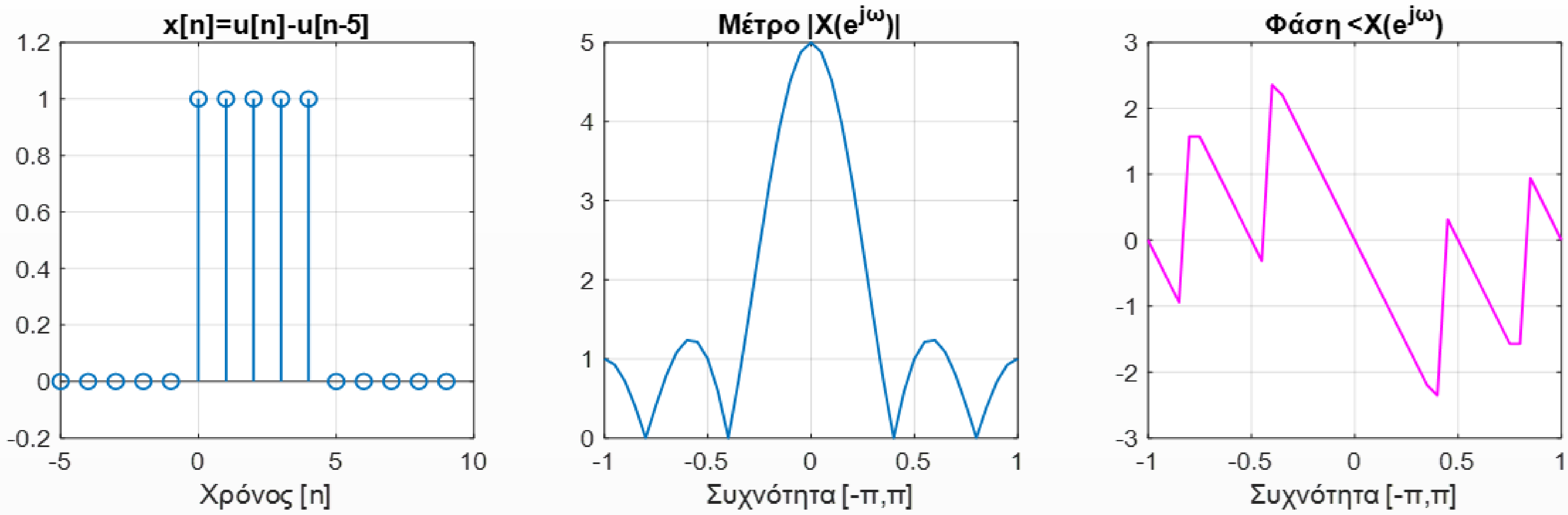
$$\left|X(e^{j\omega})\right| = |A|\left|\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}\right| \qquad (1)$$

και η φάση είναι:

$$\varphi_X(\omega) = -\frac{\omega(N-1)}{2} \qquad (2)$$

Μετασχηματισμός Fourier **διακριτού χρόνου**

Παράδειγμα(συνέχεια): Να υπολογιστεί ο DTFT της ακολουθίας $x[n] = A(u[n] - u[n-N])$.

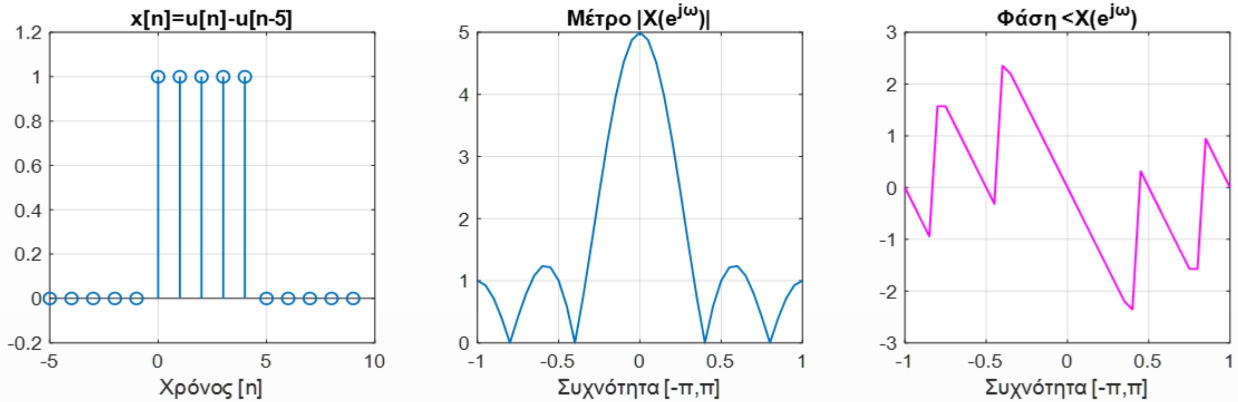


(α) Σήμα $x[n]$=$u[n]$−$u[n$−5], (β) Φάσμα πλάτους, (γ) Φάσμα φάσης, σε μία περίοδο

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Παράδειγμα(συνέχεια): Να υπολογιστεί ο DTFT της ακολουθίας $x[n] = A(u[n] - u[n-N])$.

- το μέτρο του DTFT $\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|$ είναι άρτια συνάρτηση



(α) Σήμα $x[n]=u[n]-u[n-5]$, (β) Φάσμα πλάτους, (γ) Φάσμα φάσης

- $\left|X\left(e^{j\mathbf{0}}\right)\right| = |A|\left|\frac{\sin(\mathbf{0}N/2)}{\sin(\mathbf{0}\omega/2)}\right| = \mathrm{A}\frac{0}{0}$?

Με τον κανόνα de l’Hospital βρίσκουμε ότι για τη συχνότητα $\omega = 0$ το μέτρο λαμβάνει τη μέγιστη τιμή η οποία είναι.

$$\boxed{\left|X\left(e^{j\mathbf{0}}\right)\right| = N \cdot A}$$

- Τα σημεία μηδενισμού του μέτρου είναι αυτά που ικανοποιούν τη σχέση $\sin(\omega N/2) = 0$, άρα το μέτρο μηδενίζεται στις συχνότητες $\omega = \frac{2k\pi}{N}, k \in Z$.
  - ➢ Για το παράδειγμα N=5 $(\pm 0.4\pi, \pm 0.8\pi, \dots)$

Μετασχηματισμός Fourier **διακριτού χρόνου**

Παράδειγμα: Να βρεθεί ο I-DTFT της συνάρτησης $X(e^{j\omega})$ ορθογώνιας μορφής, που δίνεται από:

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < B \\ 0, & B < |\omega| < \pi \end{cases}, \text{ όπου } B = \pi/2$$

Απάντηση: Ο αντίστροφος DTFT σύμφωνα με τον ορισμό είναι:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{jn\omega}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-B}^{B} 1\, e^{jn\omega}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{jn}\left[e^{jn\omega}\right]_{-B}^{B} = \frac{1}{2\pi jn}\left(e^{jnB} - e^{-jnB}\right) = \frac{\sin(Bn)}{\pi n}, \qquad n \neq 0$$

Για $n = 0$ η τιμή $x[0]$ υπολογίζεται από τον κανόνα de L’Hospital και είναι:

$$x[0] = \lim_{n\to 0}\frac{B\cos(Bn)}{\pi} = \frac{B}{\pi} = 0.5$$

Επομένως, η ακολουθία $x[n]$ είναι:

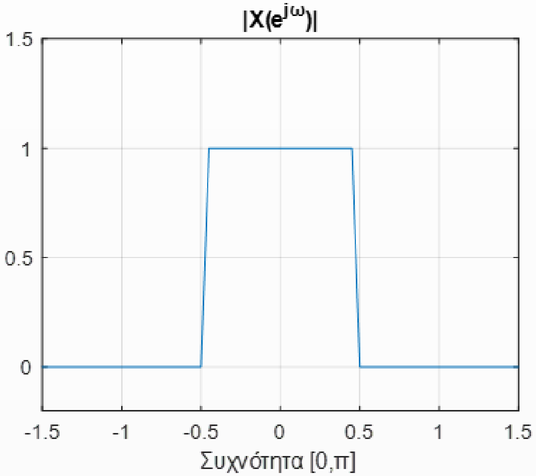
$$x[n] = \begin{cases} 0.5, & n = 0 \\ \dfrac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}, & n \neq 0 \end{cases}$$

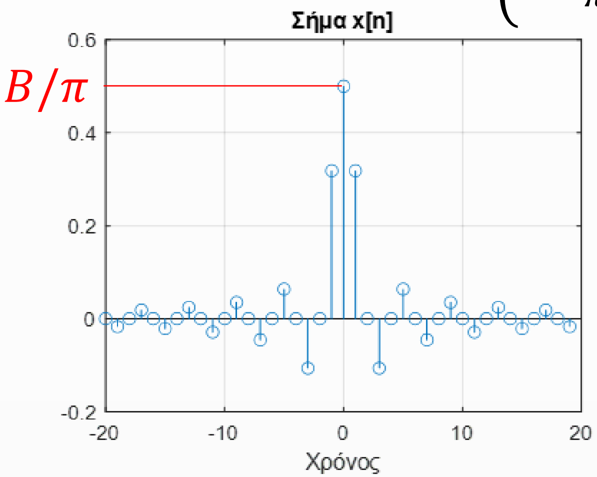
Μετασχηματισμός Fourier **διακριτού χρόνου**

Παράδειγμα: Να βρεθεί ο I-DTFT της συνάρτησης $X(e^{j\omega})$ ορθογώνιας μορφής, που δίνεται από:

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < B \\ 0, & B < |\omega| < \pi \end{cases}, \text{ όπου } B = \pi/2 \longrightarrow x[n] = \begin{cases} 0.5, & n = 0 \\ \dfrac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}, & n \neq 0 \end{cases}$$

(α) Φάσμα πλάτους ορθογώνιας μορφής στην κανονικοποιημένη συχνότητα $[-\pi,\pi]$





Γραφική παράσταση ακολουθίας $x[n] = \sin(\pi n/2)/\pi n$

Παρατηρούμε ο αντίστροφος DTFT ενός ορθογώνιου φάσματος παράγει μία μη-αιτιατή ακολουθία. Η μέγιστη τιμή της ακολουθίας είναι $B = 0.5$ και τα σημεία μηδενισμού της είναι τα $n = k\pi/B = 2k$.

Η ορθογώνια συνάρτηση $X(e^{j\omega})$ αντιστοιχεί στο φάσμα ενός ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου, τότε η χρονική ακολουθία αντιστοιχεί στην κρουστική απόκριση $h[n]$ του φίλτρου.

Επειδή σύμφωνα η κρουστική απόκριση είναι μια ακολουθία άπειρης διάρκειας και μη-αιτιατή, το ιδανικό βαθυπερατό δεν είναι πραγματοποιήσιμο.

Μετασχηματισμός Fourier **διακριτού χρόνου**

- Ο ευθύς και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου αποτελούν ένα μοναδικό ζεύγος

$$x[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X\left(e^{j\omega}\right)$$

- Το ολοκλήρωμα και το άθροισμα (σειρά) είναι γραμμικοί τελεστές → DTFT γραμμικός μετασχηματισμός

- Ο DTFT είναι μιγαδική συνάρτηση :

$$X\left(e^{j\omega}\right) = X_r\left(e^{j\omega}\right) + j \cdot X_i\left(e^{j\omega}\right) = \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

- Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου είναι περιοδικός με περίοδο 2π :

$$\boxed{X\left(e^{j\omega}\right) = X\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right)}$$

$$X\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j(\omega+2\pi)n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j2\pi n} e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot \left(\cancelto{1}{e^{-j2\pi}}\right)^n e^{-j\omega n} = X\left(e^{j\omega}\right)$$

για τη σχεδίαση του DTFT $X(e^{j\omega})$ αρκεί **μία μόνο περίοδος**, συνήθως επιλέγουμε $[-\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi})$.

Μετασχηματισμός Fourier **διακριτού χρόνου**

Ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) είναι **περιοδική συνάρτηση**.

Η περιοδικότητα του DTFT οφείλεται στο γεγονός ότι τα διακριτού χρόνου μιγαδικά εκθετικά σήματα όταν διαφέρουν στη συχνότητα κατά πολλαπλάσια του 2π, είναι μεταξύ τους ταυτόσημα.

Αν το **σήμα $\boldsymbol{x[n]}$ είναι πραγματικό** τότε τα φάσματά του έχουν τις ίδιες ιδιότητες **φασματικής συμμετρίας** με αυτές των φασμάτων σημάτων συνεχούς χρόνου, δηλαδή:

Το πλάτος $|X(e^{j\omega})|$ και το πραγματικό μέρος $Re\{X(e^{j\omega})\}$ είναι άρτιες συναρτήσεις της συχνότητας ω,

Η φάση $\measuredangle X(e^{j\omega})$ και το φανταστικό μέρος $Im\{X(e^{j\omega})\}$ είναι περιττές συναρτήσεις της συχνότητας ω,

$$|X(e^{j\omega})| = |X(-e^{j\omega})|$$

$$Re\{X(e^{j\omega})\} = Re\{X(-e^{j\omega})\}$$

$$\measuredangle X(e^{j\omega}) = -\measuredangle X(-e^{j\omega})$$

$$Im\{X(e^{j\omega})\} = -Im\{X(-e^{j\omega})\}$$

- Με βάση τις ιδιότητες αυτές προκύπτει ότι για τη σχεδίαση της **απόκρισης συχνότητας** $H(e^{j\omega})$ αρκεί **μισή μόνο περίοδος**, συνήθως επιλέγουμε $[\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\pi}]$.
- Έτσι οι χαμηλές συχνότητες αντιστοιχούν σε ψηφιακές συχνότητες στην γειτονιά του $\omega = 0$ και οι υψηλές συχνότητες στην γειτονιά του $\omega = \pi$.

Μετασχηματισμός Fourier **διακριτού χρόνου**

- Χαρακτηριστικά Ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου (πλέον του προηγούμενου μαθήματος) :

Ακολουθία Διακριτού Χρόνου $\longleftrightarrow$	**DTFT** $X(e^{j\omega})$
$u[n]-u[n-\mathrm{N}]$	$\dfrac{sin(\omega\mathrm{N}/2)}{sin(\omega/2)}e^{-j(\mathrm{N}-1)/2}$
$a^n\,cos(n\omega_0)\,u[n]$	$\dfrac{1-a\,e^{-j\omega}\cos\omega_0}{1-2a\,e^{-j\omega}\cos\omega_0+a^2e^{-2j\omega}}$
$a^n\,sin(n\omega_0)\,u[n]$	$\dfrac{a\,e^{-j\omega}\sin\omega_0}{1-2a\,e^{-j\omega}\cos\omega_0+a^2e^{-2j\omega}}$
$\cos(\omega_o\cdot n)$	$\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)+\delta(\omega+\omega_0+2\pi k)$
$\sin(\omega_o\cdot n)$	$-j\cdot\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)-\delta(\omega+\omega_0+2\pi k)$
$e^{j\omega_o n}$	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)$

Μα δάσκαλε?????

$\boxed{k\in Z}$

Μετασχηματισμός Fourier **διακριτού χρόνου**

- Χαρακτηριστικά Ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου (από προηγούμενο μάθημα…):

Ακολουθία Διακριτού Χρόνου $\longleftrightarrow$	**DTFT** $X(e^{j\omega})$
$\delta[n]$	1
$\delta[n-n_o]$	$e^{-j\omega n_o}$
1	$2\pi\cdot\delta(\omega)$
$e^{j\omega_o n}$	$2\pi\cdot\delta(\omega-\omega_o)$
$a^n\cdot u[n], \|a\|<1$	$\dfrac{1}{1-a\cdot e^{-j\omega}}$
$-a^n\cdot u[-n-1], \|a\|>1$	$\dfrac{1}{1-a\cdot e^{-j\omega}}$
$(n+1)a^n\cdot u[n], \|a\|<1$	$\dfrac{1}{(1-a\cdot e^{-j\omega})^2}$
$\sin(\omega_o\cdot n)$	$-j\cdot\pi\cdot[\delta(\omega-\omega_o)-\delta(\omega+\omega_o)]$
$\cos(\omega_o\cdot n)$	$\pi\cdot[\delta(\omega-\omega_o)-\delta(\omega+\omega_o)]$

στο $[-\pi,\pi)$

στο $[-\pi,\pi)$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Να αποδειχθεί ότι ο DTFT του σήματος $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, όπου $\omega \in (-\pi, \pi]$, δίνεται από τη σχέση

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\, \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k), \qquad k \in Z$$

<u>Απάντηση</u>: Επειδή το σήμα δεν είναι απολύτως αθροίσιμο ο DTFT δεν μπορεί να υπολογιστεί από τον ορισμό του. Για το λόγο αυτό θα εργαστούμε αντίστροφα, δηλαδή θα υπολογίσουμε τον αντίστροφο DTFT. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\, \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$$

είναι ένα άπειρο άθροισμα κρουστικών συναρτήσεων που απέχουν μεταξύ τους απόσταση $2\pi k$ επάνω στον άξονα συχνοτήτων.
Με άλλα λόγια ο DTFT του $e^{j\omega_0 n}$ περιέχει κρουστικές συναρτήσεις στις συχνότητες $\omega_0 \pm 2\pi$k.
Ο **αντίστροφος** DTFT υπολογίζεται στην περιοχή συχνοτήτων $(-\pi, \pi]$ από τη σχέση:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\, \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) \right\} e^{j\omega n}\, d\omega$$

Στην περιοχή όμως $(-\pi, \pi]$ υπάρχει μόνο η συνάρτηση $\delta(\omega - \omega_0)$, οπότε το ολοκλήρωμα είναι:

$$x[n] = \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega - \omega_0)\, e^{j\omega n}\, d\omega = e^{j\omega n}\Big|_{\omega=\omega_0} = e^{j\omega_0 n}$$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Να υπολογιστεί ο DTFT του σήματος $x[n] = \cos(\omega_0 n)$

Απάντηση: Γνωρίζουμε ότι:

$$e^{j\omega_0 n} \longleftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\,\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k),$$

Θέτοντας $\omega = -\omega_0$ έχουμε:

$$e^{-j\omega_0 n} \longleftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\,\delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k),$$

Από τη σχέση Euler ισχύει:

$$x[n] = \cos(\omega_0 n) = \frac{1}{2}\{e^{jn\omega_0} + e^{-jn\omega_0}\}$$

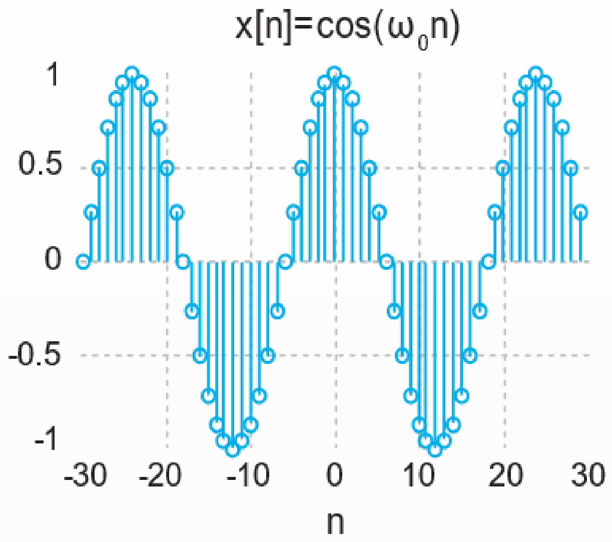
Επειδή ο DTFT είναι γραμμικός, έχουμε:

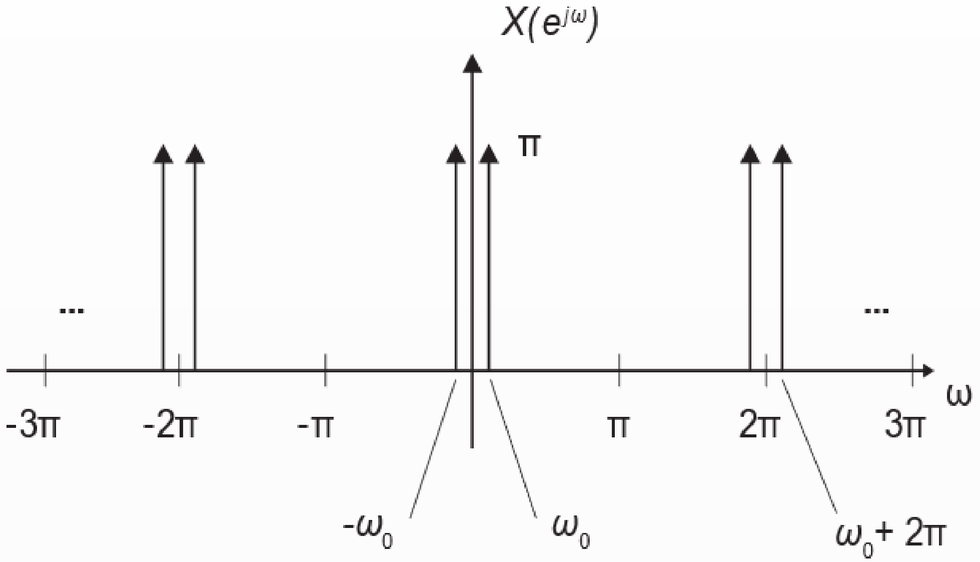
$$X(e^{j\omega}) = DTFT\left\{\frac{1}{2}\{e^{jn\omega_0} + e^{-jn\omega_0}\}\right\} = \frac{1}{2}DTFT\{e^{jn\omega_0}\} + \frac{1}{2}DTFT\{e^{-jn\omega_0}\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\,\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) + \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\,\delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty}\{\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi m) + \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi m)\}$$

Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου

Να υπολογιστεί ο DTFT του σήματος $x[n] = \cos(\omega_0 n)$





(α) $x[n] = \cos(\omega_0 n)$ (β) $X\left(e^{j\omega}\right) = \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty}\{\delta(\omega-\omega_0+2\pi m)+\delta(\omega+\omega_0+2\pi m)\}$

Αν περιορίσουμε τη λύση στο διάστημα συχνοτήτων [-π,π), η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

ανάλογα για το ημίτονο:

$$sin(\omega_0 n) = \frac{1}{2}j\{e^{jn\omega_0} - e^{-jn\omega_0}\} \longleftrightarrow \pi j \sum_{m=-\infty}^{\infty}\{\delta(\omega-\omega_0+2\pi m)-\delta(\omega+\omega_0+2\pi m)\}$$

Απόκριση Συχνότητας

Ο DTFT της κρουστικής απόκρισης $h[n]$ ενός ΓΑΚΜ ευσταθούς συστήματος ονομάζεται **απόκριση συχνότητας** (frequency response) και υπολογίζεται από:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, e^{-j\omega k}$$

Πλάτος (magnitude):

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \sqrt{H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega})}$$

Φάση (phase):

$$\varphi_H(\omega) = \tan^{-1}\left[\frac{H_I\left(e^{j\omega}\right)}{H_R\left(e^{j\omega}\right)}\right]$$

Απόκριση Συχνότητας

Διάγραμμα απολαβής (κέρδους) με τη συχνότητα: $\mathrm{G}(\omega) = 20\,log_{10}\left(\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|\right)$ (dB)

Ισχύει: $\left|H(e^{j\omega})\right| = 1 \rightarrow 0\ dB,\ \ \left|H(e^{j\omega})\right| = 10 \rightarrow 20\ dB,\ \ \left|H(e^{j\omega})\right| = 0.1 \rightarrow -20\ dB$

Ως συχνότητα 3dB του φίλτρου ορίζεται η συχνότητα ω$_c$ $(\omega_c > 0)$:

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|\Big|_{\omega=\omega_c} = \frac{\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|\Big|_{max}}{\sqrt{2}} = \mathbf{0,707}\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|\Big|_{max}$$

Γιατί π.χ. για ένα χαμηλοπερατό φίλτρο για το οποίο $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|\Big|_{max} = \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|\Big|_{\omega=0} = 1$

$$\mathrm{G}(\omega_c) = 20log_{10}\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|\Big|_{\omega=\omega_c} = 20log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|\Big|_{\omega=0}\right) = 20log_{10}\left(\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|\Big|_{\omega=0}\right) - 20log_{10}(\sqrt{2})$$
$$= 0 - 3.0103 \cong -3dB$$

Απόκριση Συχνότητας

- **Παράδειγμα : Η εξίσωση διαφορών ενός απλού συστήματος μέσης τιμής**

$$y[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[n-1])$$

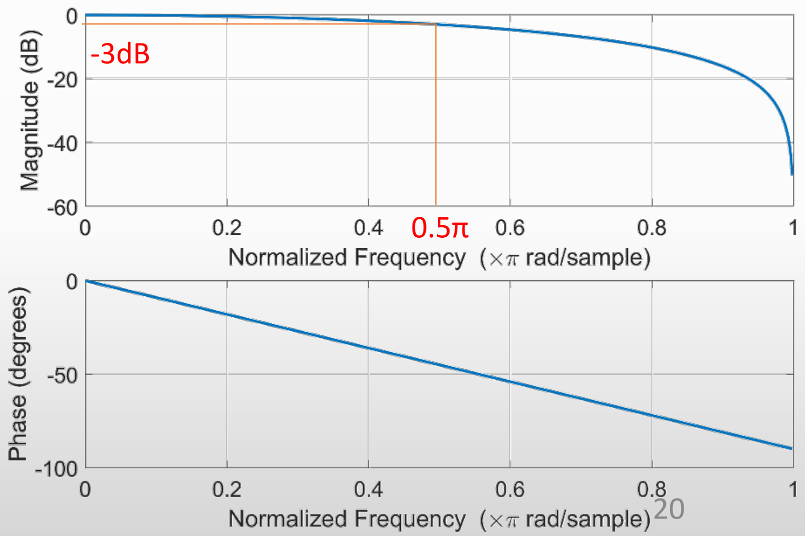
Η απόκριση συχνότητας είναι

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + e^{-j\omega}}{1} = \frac{e^{j\omega} + 1}{2e^{j\omega}}$$

$$\mathrm{H}(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega} + 1}{2e^{j\omega}} = \frac{e^{j\frac{\omega}{2}}\left(e^{j\frac{\omega}{2}} + e^{-j\frac{\omega}{2}}\right)}{2e^{j\omega}}$$

$$\mathrm{H}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2e^{j\frac{\omega}{2}}}\left(\left(\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right) + \left(\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) - j\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)\right)$$

$$\mathrm{H}(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{\omega}{2}}\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \rightarrow |H(e^{j\omega})| = \cos\left(\frac{\omega}{2}\right), \varphi(\omega) = -\frac{\omega}{2}$$



Απόκριση Συχνότητας

- **Παράδειγμα :** Παράδειγμα : Η εξίσωση διαφορών ενός απλού ψηφιακού διαφοριστή είναι

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

Η απόκριση συχνότητας είναι

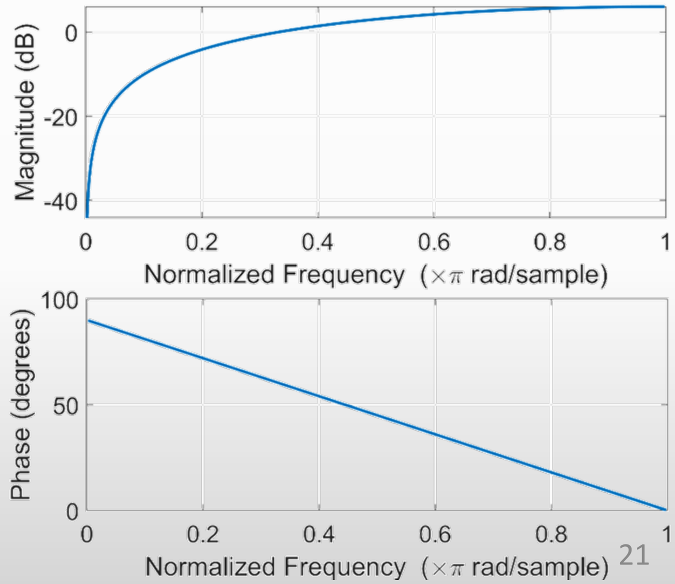
$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1-e^{-j\omega}}{1} = 1 - e^{-j\omega}$$

$$\mathrm{H}(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j\omega} = e^{-j\frac{\omega}{2}}\left(e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}\right) =$$

$$\mathrm{H}(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{\omega}{2}}\left(\left(\cos(\frac{\omega}{2}) + j\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) - \left(\left(\cos(\frac{\omega}{2}) - j\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)\right)\right) = 2je^{-j\frac{\omega}{2}}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Όμως $j = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{j\frac{\pi}{2}} \rightarrow \mathrm{H}(e^{j\omega}) = 2e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-j\frac{\omega}{2}}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = 2e^{j(\frac{\pi}{2}-\frac{\omega}{2})}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$

$$\rightarrow \left|H(e^{j\omega})\right| = 2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right), \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}$$



Απόκριση Συχνότητας

- **Παράδειγμα :** Η εξίσωση διαφορών ενός συστήματος μέσης τιμής του σχήματος

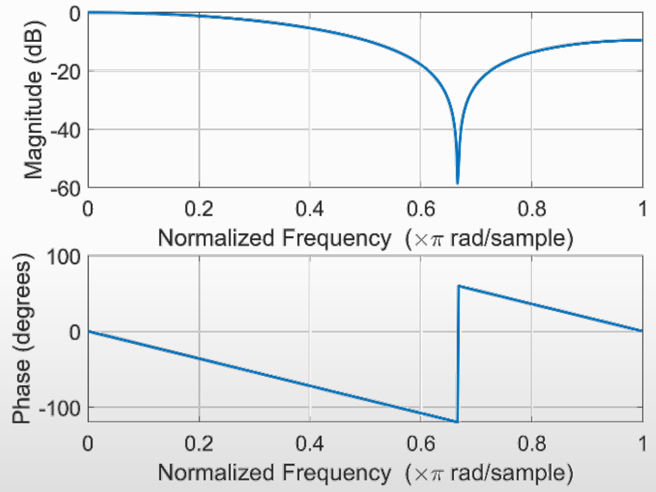
$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$$

Η απόκριση συχνότητας είναι

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 + e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}}{1} = \frac{1}{3}(1 + e^{-j\omega} + e^{-2j\omega})$$

$$\mathrm{H}(e^{j\omega}) = \frac{1}{3}(1 + e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}) = \frac{1}{3}e^{-j\omega}(e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega}) = \frac{1}{3}e^{-j\omega}\left((e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + 1\right)$$

$$\mathrm{H}(e^{j\omega}) = \frac{1}{3}e^{-j\omega}(2\cos(\omega) + 1) \rightarrow |H(e^{j\omega})| = \frac{1}{3}(2\cos(\omega) + 1), \varphi(\omega) = -\omega$$



Απόκριση Συχνότητας

$$\delta[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow \boxed{g[n]} \longrightarrow \delta[n]$$

Δεδομένου ενός ΓΑΚΜ συστήματος διακριτού χρόνου με κρουστική απόκριση $h[n]$, το **αντίστροφο σύστημα** έχει κρουστική απόκριση $g[n]$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$h[n] * g[n] = \delta[n]$$

Η απόκριση συχνότητας του αντίστροφου συστήματος είναι:

$$H\left(e^{j\omega}\right) G\left(e^{j\omega}\right) = 1 \Rightarrow G\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{H(e^{j\omega})}$$

Μετά την αντιστροφή ενός πρακτικού συστήματος θα πρέπει να ελέγχουμε αν το αντίστροφο σύστημα που προκύπτει είναι αιτιατό, δηλαδή πρακτικά υλοποιήσιμο.

Απόκριση Συχνότητας

$$\delta[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow \boxed{g[n]} \rightarrow \delta[n]$$

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του **αντίστροφου** συστήματος ενός ΓΑΚΜ συστήματος με απόκριση συχνότητας:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - 0.4\, e^{-j\omega}}{1 + 0.7\, e^{-j\omega}}$$

Απάντηση: Η απόκριση συχνότητας του αντίστροφου συστήματος είναι:

$$G(e^{j\omega}) = \frac{1}{H(e^{j\omega})} = \frac{1 + 0.7\, e^{-j\omega}}{1 - 0.4\, e^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - 0.4\, e^{-j\omega}} + \frac{0.7\, e^{-j\omega}}{1 - 0.4\, e^{-j\omega}}$$

Χρησιμοποιώντας το ζεύγος DTFT :

$$\frac{1}{1 - \alpha\, e^{-j\omega}} \xleftrightarrow{DTFT} \alpha^n u[n], \qquad |\alpha| < 1$$

και την ιδιότητα μετατόπισης στο χρόνο:

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{DTFT} e^{-jn_0\omega} X(e^{j\omega})$$

βρίσκουμε την κρουστική απόκριση:

$$g[n] = (0.4)^n\, u[n] + 0.7\, (0.4)^{n-1} u[n-1]$$

Υποδειγματοληψία

Αποδεικνύεται ότι ο μετασχηματισμός DTFT του **υποδειγματοληπτημένου (downsampled)** σήματος

$x_d[n] = x[nM\ ]$, $(M > 1)$, είναι:

$$X_d\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{M} X\left(e^{j\omega/M}\right)$$

Η συρρίκνωση του σήματος στο χρόνο κατά έναν παράγοντα M προκαλεί επέκταση του φάσματος κατά τον ίδιο παράγοντα.

<u>Προσοχή</u>: Στην υποδειγματοληψία ενός σήματος διακριτού χρόνου $x[n\ ]$ με έναν συντελεστή Μ, για να μην προκύψει επικάλυψη των συχνοτήτων, πρέπει το σήμα να είναι φασματικά **περιορισμένο** μέχρι τη συχνότητα π/M.

Αν ισχύει η προϋπόθεση, τότε το φάσμα του υποδειγματοληπτημένου σήματος είναι μία εκτεταμένη εκδοχή του φάσματος του αρχικού σήματος.

Αν δεν ισχύει η προϋπόθεση, τότε πριν την υποδειγματοληψία πρέπει να φιλτράρουμε το σήμα με ένα βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $\omega_c = \pi/M$ (κέρδος φίλτρου M).

Υπερδειγματοληψία

Στην **υπερδειγματοληψία** (upsampling), το νέο σήμα $x_u[n]$ σχηματίζεται παρεμβάλλοντας πλήθος $N-1$ μηδενικών τιμών ανάμεσα σε δύο διαδοχικά δείγματα του $x[n]$:

$$x_u[n] = \begin{cases} x[n/N], & n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Αν $X(e^{j\omega})$ είναι ο DTFT του σήματος $x[n]$, τότε ο DTFT του υπερδειγματοληπτημένου σήματος $x_u[n]$, είναι:

$$X_u(e^{j\omega}) = \sum_{n=0,\pm N,\ldots} x[n/N]\, e^{-jn\omega} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\, e^{-jNm\omega} = X(e^{j\omega N})$$

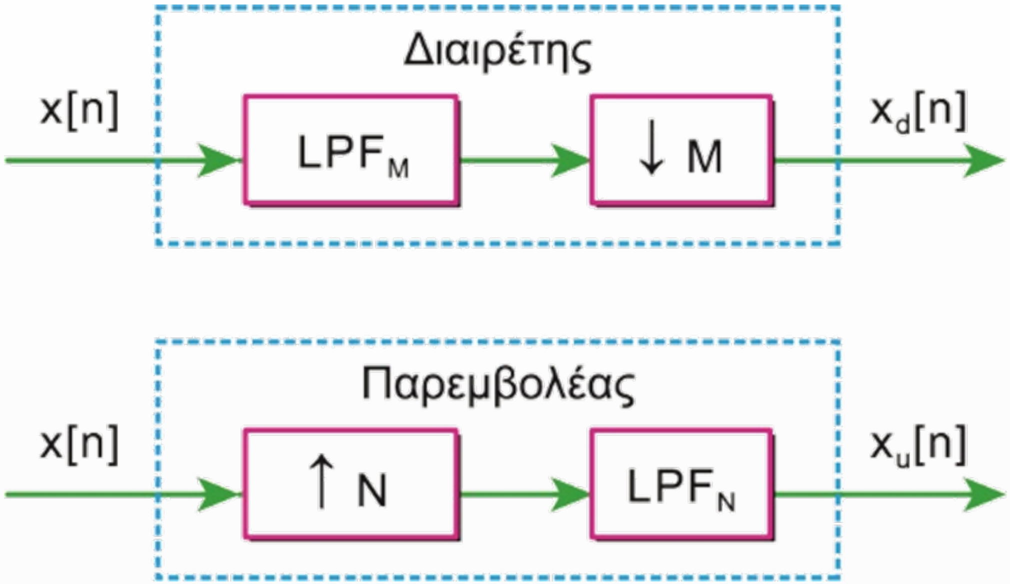
Η έκταση του σήματος στο χρόνο κατά έναν παράγοντα N, προκαλεί συρρίκνωση του φάσματος κατά τον ίδιο παράγοντα.

Η υπερδειγματοληψία δεν οδηγεί σε παραβίαση του κριτηρίου Nyquist.

Όμως μετά τον πολλαπλασιασμό συχνότητας πρέπει να απομακρυνθούν τα είδωλα της $X(e^{j\omega})$ εκτός αυτών που βρίσκονται σε ακέραια πολλαπλάσια του 2π.

Αυτό γίνεται με το φιλτράρισμα του υπερδειγματοληπτημένου σήματος $x_u[n]$ με ένα βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής $\omega_c = \pi/N$ και κέρδος N.

Υποδειγματοληψία & Υπερδειγματοληψία



Διαιρέτης (decimator): η σε σειρά σύνδεση του διαιρέτη συχνότητας με το βαθυπερατό φίλτρο.

Παρεμβολέας (interpolator): η σε σειρά σύνδεση του πολλαπλασιαστή συχνότητας με το βαθυπερατό φίλτρο.

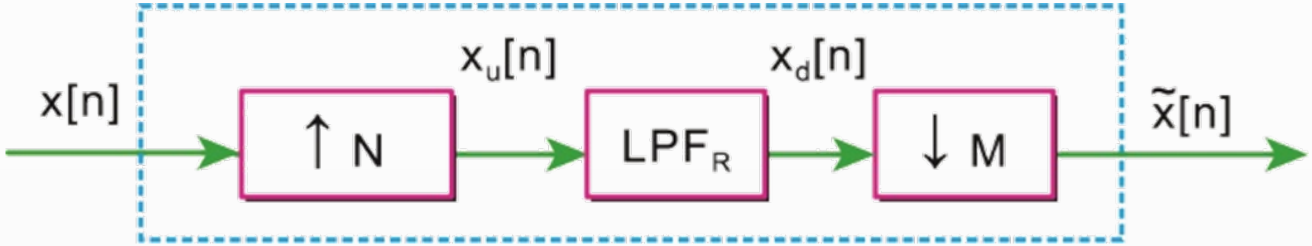
Μετατροπή ρυθμού δειγματοληψίας κατά ρητό συντελεστή

Για τη μετατροπή του ρυθμού δειγματοληψίας κατά ένα ρητό συντελεστή

$$R = \frac{N}{M} = \frac{\text{Τελικό Sampling } Rate}{\text{Αρχικο Sampling } Rate}$$

συνδέουμε σε σειρά

- έναν παρεμβολέα (interpolator), ο οποίος αυξάνει το ρυθμό δειγματοληψίας κατά έναν συντελεστή N με
- έναν διαιρέτη (decimator), ο οποίος μειώνει τον ρυθμό δειγματοληψίας κατά έναν συντελεστή M.
- $\omega_c = \min\left\{\frac{\pi}{M}, \frac{\pi}{N}\right\}$



Μετατροπέας ρητού ρυθμού δειγματοληψίας

Μετατροπή ρυθμού δειγματοληψίας κατά ρητό συντελεστή

matlab/octave **factor(A)**

Παράδειγμα:

Η αποθήκευση ψηφιακού ήχου σε δίσκο CD χρησιμοποιεί $f_s = 44.1\ kHz$ ενώ σε μαγνητική ταινία (DAT) χρησιμοποιεί $f_s = 48\ kHz$. Να βρεθεί το φίλτρο στον μετατροπέα ρητού ρυθμού δειγματοληψίας ώστε να είναι δυνατή η απευθείας μεταφορά ψηφιοποιημένης μουσικής από CD σε DAT.

Απάντηση: Αναλύουμε τους ρυθμούς δειγματοληψίας σε **γινόμενο πρώτων παραγόντων** και έχουμε: $f_{sDAT} = 2^7 3\ 5^3$ και $f_{sCD} = 2^2 3^2 5^2 7^2$.

$$R = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}} = \frac{f_{sDAT}}{f_{sCD}} = \frac{2^7 3\ 5^3}{2^2\ 3^2\ 5^2\ 7^2} = \frac{2^5\ 5}{3\ 7^2} = \frac{160}{147}$$

Για μετατροπή ρυθμού δειγματοληψίας από 44.1 kHz σε 48 kHz, απαιτείται πολ/σμός συχνότητας με M=160 και κατόπιν διαίρεση συχνότητας με N=147.

Το βαθυπερατό φίλτρο μεταξύ του πολλαπλασιαστή και του διαιρέτη συχνότητας έχει συχνότητα αποκοπής:

$$\omega_c = \min\left\{\frac{\pi}{M}, \frac{\pi}{N}\right\} = \min\left\{\frac{\pi}{160}, \frac{\pi}{147}\right\} = \frac{\pi}{160}$$

και κέρδος $R = 160$.

Μετατροπή ρυθμού δειγματοληψίας κατά ρητό συντελεστή

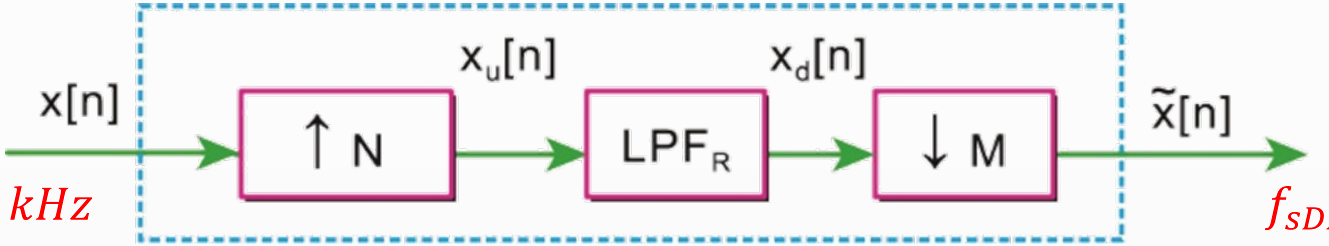
Για τη μετατροπή του ρυθμού δειγματοληψίας κατά ένα ρητό συντελεστή

$$R = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}} = \frac{f_{sDAT}}{f_{sCD}} = \frac{160}{147}$$

συνδέουμε σε σειρά

- έναν παρεμβολέα (interpolator), ο οποίος αυξάνει το ρυθμό δειγματοληψίας κατά έναν συντελεστή $N = 160$ με
- έναν διαιρέτη (decimator), ο οποίος μειώνει τον ρυθμό δειγματοληψίας κατά έναν συντελεστή $M = 147$.
- $\omega_c = \frac{\pi}{160}$

$f_{sCD} = 44.1\ kHz$



$f_{sDAT} = 48\ kHz$

$$\omega_c = \frac{\pi}{160}$$

Μετατροπέας ρητού ρυθμού δειγματοληψίας

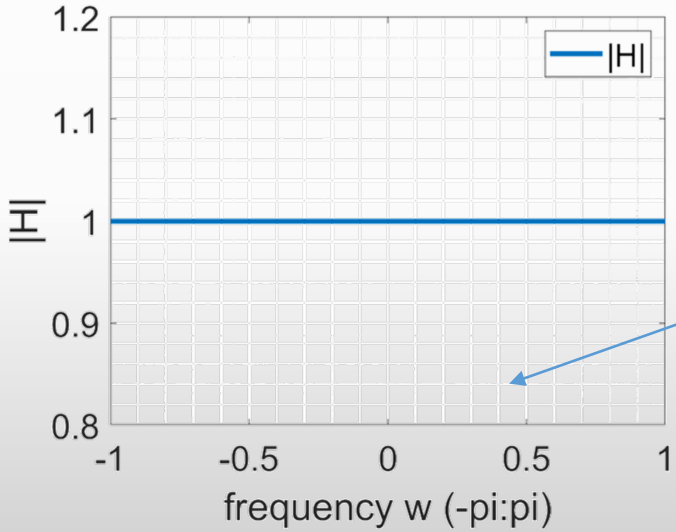
Ιδανικά Φίλτρα επιλογής συχνοτήτων

- Ιδανικό ολοπερατό φίλτρο (All Pass) : το μέτρο της απόκρισης συχνότητας σταθερό $\left|\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right)\right| = 1$

- Παράδειγμα ενός ολοπερατού φίλτρου είναι το σύστημα με απόκριση συχνότητας είναι $\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right) = \frac{e^{-j\omega}-\alpha}{1-\alpha e^{-j\omega}}, |\alpha| < 1, \alpha \in \mathrm{R}$

$$\left|\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right)\right| = \mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right) \cdot H^*\left(e^{j\omega}\right) = \frac{e^{-j\omega}-\alpha}{1-\alpha e^{-j\omega}} \cdot \frac{e^{j\omega}-\alpha}{1-\alpha e^{j\omega}} = \frac{e^{-j\omega} \cdot e^{j\omega} - ae^{-j\omega} - ae^{j\omega} + a^2}{1-\alpha e^{j\omega} - ae^{-j\omega} + a^2 e^{-j\omega} e^{j\omega}} = \frac{e^0 - ae^{-j\omega} - ae^{j\omega} + a^2}{1-\alpha e^{j\omega} - ae^{-j\omega} + a^2 e^0} = 1$$

- Η κρουστική απόκριση του συγκεκριμένου ολοπερατού φίλτρου είναι $\mathrm{h[n]} = -a^{n+1} \cdot \delta[n] + (1-a^2) \cdot a^{n-1} \cdot u[n-1]$



All Pass

Ιδανικά Φίλτρα επιλογής συχνοτήτων

- Να βρεθεί η κρουστική απόκριση του ιδανικού ολοπερατού φίλτρου με απόκριση συχνότητας $\mathrm{H}(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega}-\alpha}{1-\alpha e^{-j\omega}}, |\alpha| < 1, \alpha \in \mathrm{R}$

Ισχύει $\mathrm{H}(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega}-\alpha}{1-\alpha e^{-j\omega}} = e^{-j\omega}\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}} - \alpha\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$

Υπολογίζοντας τον IDTFT :

$$\mathrm{h[n]} = a^{n-1}\cdot u[n-1] - a\cdot a^{n}\cdot u[n]$$

Όμως $\delta[n] = u[n] - u[n-1] \rightarrow u[n] = \delta[n] + u[n-1]$

Έτσι

$$\mathrm{h[n]} = a^{n-1}\cdot u[n-1] - a\cdot a^{n}\cdot u[n] = a^{n-1}\cdot u[n-1] - a\cdot a^{n}\,(\delta[n] + u[n-1]) = -a\cdot a^{n}\cdot \delta[n] + (a^{n-1} - a\cdot a^{n})\cdot u[n-1]$$

$$\rightarrow$$

$$\mathrm{h[n]} = -a^{n+1}\cdot\delta[n] + (1-a^2)\cdot a^{n-1}\cdot u[n-1]$$

Ιδανικά Φίλτρα επιλογής συχνοτήτων

- Ιδανικό φίλτρο επιλογής συχοτήτων:
- Ένα ιδανικό φίλτρο (ideal filter) είναι εκείνο το οποίο αφήνει αναλλοίωτα τα σήματα με περιεχόμενο συχνοτήτων που περιέχεται στην ζώνη διελεύσεώς του ενώ αποκόπτει πλήρως τα σήματα των οποίων το περιεχόμενο συχνοτήτων ευρίσκεται εκτός της ζώνης διελεύσεώς του.
- Ένα φίλτρο είναι ιδανικό αν <u>δεν παραμορφώνει</u> τα σήματα των οποίων το περιεχόμενο συχνοτήτων εμπεριέχεται στην ζώνη διελεύσεώς του.
- φίλτρο με κατά τμήματα σταθερό μέτρο της απόκρισης συχνότητας
    - Χαμηλοπερατά ή βαθυπερατά φίλτρα (Low Pass)
    - υψηπερατά φίλτρα (High Pass)
    - ζωνοπερατά φίλτρα (Band Pass)
    - ζωνοφρακτικά φίλτρα ή φίλτρα απόρριψης ζώνης (Band Stop)

❖*Τα ιδανικά γραμμικά φίλτρα δεν μπορούν να υλοποιηθούν γιατί δεν είναι αιτιατά.*

Ιδανικά Φίλτρα επιλογής συχνοτήτων

- Ένα σύστημα δεν παραμορφώνει την είσοδό του $x[n]$ αν είτε την ενισχύει ομοιόμορφα είτε/και την μετατοπίζει ομοιόμορφα, που σημαίνει ότι η έξοδός του $y[n]$ είναι της μορφής $y[n] = kx[n - n_o]$

- *Αν θεωρήσουμε ότι είναι LTI με απόκριση συχνότητας* $\mathrm{H}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| \cdot e^{j\varphi_h(\omega)}$

τότε

$$\Upsilon(e^{j\omega}) = \mathrm{H}(e^{j\omega})\mathrm{X}(e^{j\omega}) \rightarrow ke^{-j\omega n_o}\mathrm{X}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| \cdot e^{j\varphi_h(\omega)}\mathrm{X}(e^{j\omega})$$
$$\rightarrow ke^{-j\omega n_o} = |H(e^{j\omega})| \cdot e^{j\varphi_h(\omega)}$$

Άρα θα πρέπει

$$|H(e^{j\omega})| = k \text{ και } \varphi_h(\omega) = -\omega n_o$$

Γραμμική φάση,
σταθερή καθυστέρηση ομάδας

για όλες τις τιμές των συχνοτήτων που ανήκουν στην περιοχή διελεύσεως του φίλτρου.

Ας θεωρήσουμε $k = 1$, δηλαδή δεν έχουμε ενίσχυση αλλά ομοιόμορφη διέλευση

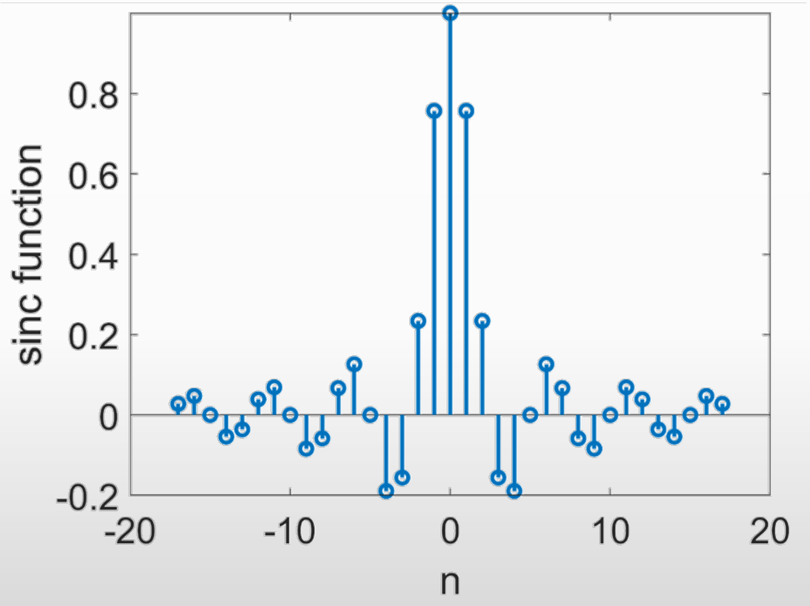
Ιδανικά Φίλτρα επιλογής συχνοτήτων

- Χαμηλοπερατό ή βαθυπερατό φίλτρο (Low Pass) :

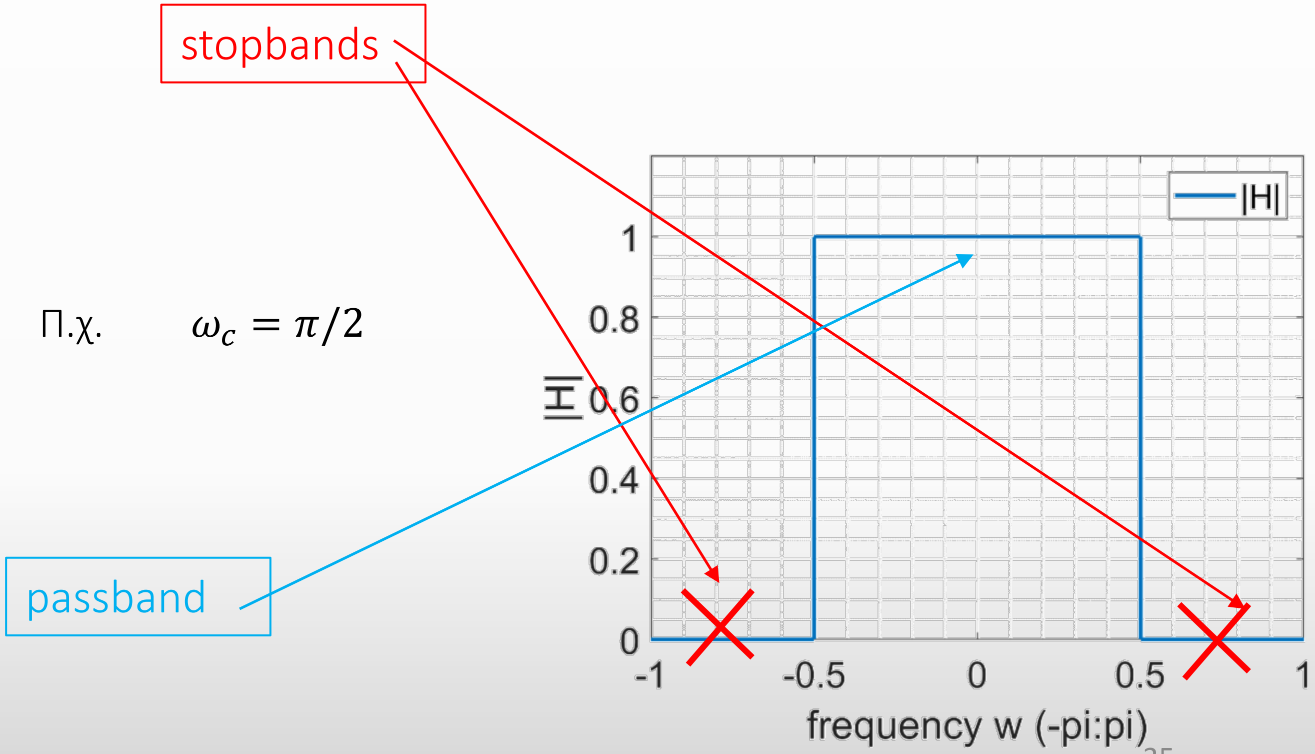
  φίλτρο με αποκριση συχνοτητας με $H_{lp}(e^{j\omega}) = 1, \omega \in [-\omega_c, \omega_c], 0 < \omega_c < \pi$

  ω_c συχνότητα αποκοπής

- $h_{lp}[\mathrm{n}] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$ (δηλ. $sinc()$)



Π.χ. $\omega_c = \pi/2$



Φίλτρα επιλογής συχνοτήτων

- Υψηπερατό φίλτρο (High Pass) : $H_{hp}\left(e^{j\omega}\right) = 1 - H_{lp}\left(e^{j\omega}\right)$

  φίλτρο με αποκριση συχνοτητας με $H_{hp}\left(e^{j\omega}\right) = 1, \omega \notin [-\omega_c, \omega_c], 0 < \omega_c < \pi$

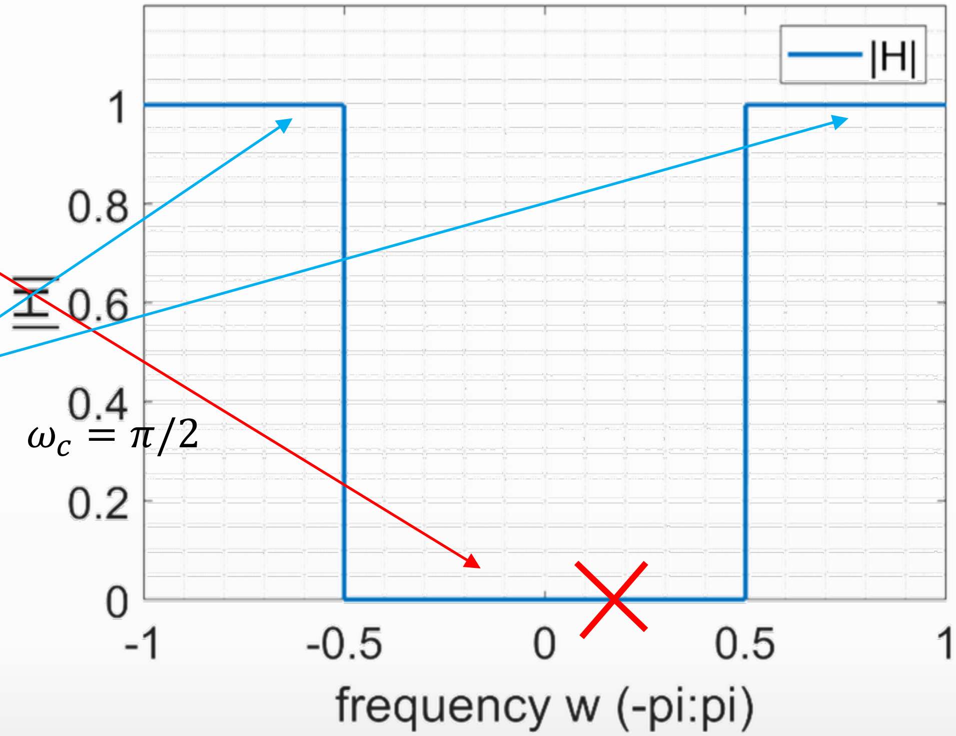
  ω_c συχνότητα αποκοπής

- $h_{hp}[\mathrm{n}] = \delta[n] - \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$

stopband

passbands

Π.χ. $\omega_c = \pi/2$



Φίλτρα επιλογής συχνοτήτων

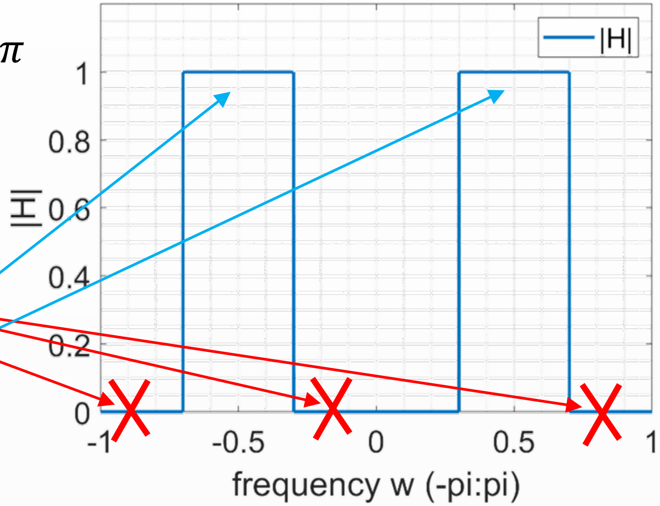
- Ζωνοπερατό φίλτρο (Band Pass):

φίλτρο με αποκριση συχνοτητας με $\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right) = 1, \omega \in [-\omega_2, -\omega_1] \cup [\omega_1, \omega_2], 0 < \omega_1 < \omega_2 < \pi$

$$\Pi.\chi.\ \omega_1 = 0.3\pi$$
$$\omega_2 = 0.7\pi$$

stopbands

passbands



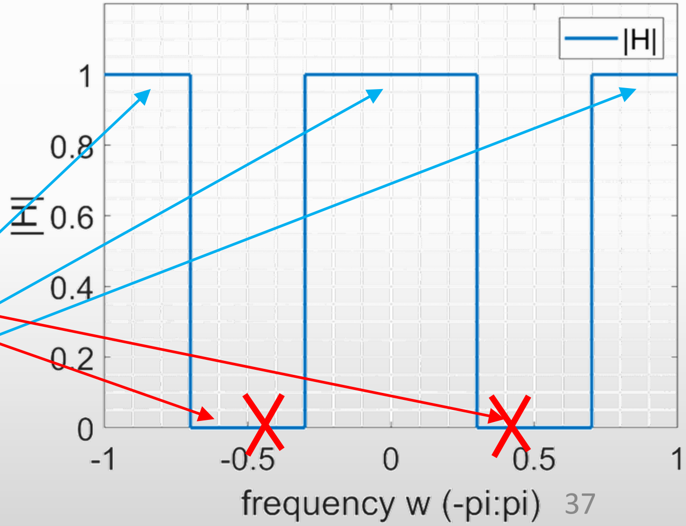
- Ζωνοφρακτικό φίλτρο ή φίλτρο απόρριψης ζώνης (Band Stop) :

φίλτρο με αποκριση συχνοτητας με $\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right) = 1, \omega \notin [-\omega_2, -\omega_1] \cup [\omega_1, \omega_2], 0 < \omega_1 < \omega_2 < \pi$

$$\Pi.\chi.\ \omega_1 = 0.3\pi$$
$$\omega_2 = 0.7\pi$$

stopbands

passbands



Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος & Εικόνας

Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών

Α. Μπακλέζος

abaklezos@hmu.gr