Διακριτά Μαθηματικά Α΄ πακέτο ασκήσεων Νικήτας Μενούνος Τ120412

Α1.

α) p: Ο Αλέξης πεινάει

q: Το ψυγείο είναι άδειο

r: Ο Αλέξης είναι εκνευρισμένος

∧: λογικός σύνδεσμος "και"

→: λογικός σύνδεσμος "αν... τότε..."

Άρα:

Από τη φράση μπορούμε να βρούμε δύο βασικά ~~[illegible]~~ κομμάτια

- Ο αλέξης πεινάει και το ψυγείο είναι άδειο: Σε ισχυρισμό τυπικής λογικής: $p \land q$

- Αν $(p \land q)$, τότε ο αλέξης είναι εκνευρισμένος: Σε ισχυρισμό τυπικής λογικής $\underline{(p \land q) \to r}$

β)

p	q	r	$p \land q$	$(p \land q) \to r$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

γ)

- $(p \land q) \to r$ = Αληθής
- Ο αλέξης δεν είναι εκνευρισμένος $\neg r = 1$ $(r = 0)$
- Το ψυγείο είναι άδειο $q = 1$

Αν πεινάει ο Αλέξης $p = 1$ και $q = 1$. Τότε $p \land q = 1$.

Αλλά για $(p \land q) = 1$ και $r = 0$, ο ισχυρισμός $(p \land q) \to r$ είναι ψευδής. Όμως γνωρίζουμε ότι είναι αληθής. Άρα $p = 0$, δηλαδή ο Αλέξης δεν πεινάει

A2.

a) Η αρχική πρόταση σε τυπική λογική μεταγράφεται ως:

$$(p \wedge \neg q) \to r$$

Απο κανόνα συνεπαγωγής, γνωρίζουμε ότι $A \to B$ είναι ισοδύναμο με $\neg A \vee B$

Άρα έχουμε ότι

$$\neg(p \wedge \neg q) \vee r$$

B) Απο πρώτο νόμο DeMorgan έχουμε ότι $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$

Άρα απο a) έχουμε ότι:

$$\neg(p \wedge \neg q) \vee r \equiv (\neg p \vee \neg(\neg q)) \vee r$$

c) Απο διπλή άρνηση $p \Leftrightarrow \neg\neg p$,
έχουμε ότι:

$$(\neg p \vee \neg(\neg q)) \vee r \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \vee r$$

Απο προσεταιριστικότητα έχουμε ότι $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

Άρα

$$(\neg p \vee q) \vee r \Leftrightarrow \neg p \vee (q \vee r)$$

Απο συνεπαγωγή έχουμε ότι $\neg p \vee q \Leftrightarrow p \to q$

Άρα

$$\neg p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow p \to (q \vee r)$$

d) Αν χρησιμοποιήσεσε τη λεσίνα σο απόγευμα, σότε, θα ~~..~~ καθαρίσεσε μετά το γεύμα ή ~~..~~ μετά σο δείπνο

A3.

a) $S_1 = \neg(\exists x)(R(x) \wedge B(x))$

Αρα: Δεν υπάρχει τρίγωνο x, που να είναι ορθογώνιο και να έχει κάποια αμβλεία γωνία

$S_2 = (\forall x)(R(x) \to \neg B(x))$

Αρα: Για κάθε τρίγωνο x, αν είναι ορθογώνιο, τότε δεν περιέχει αμβλεία γωνία

β) Για να ισχύει $S_1 \Leftrightarrow S_2$ θα πρέπει να ισχύουν τα εξής: $S_1 \Rightarrow S_2$ και $S_2 \Rightarrow S_1$

- $S_1 \Rightarrow S_2$

  · S_1 είναι $\neg(\exists x)(R(x) \wedge B(x))$

  Απο de Morgan έχουμε ότι:

  $$(\forall x)\neg(R(x) \wedge B(x))$$

  $$(\forall x)(R(x) \to \neg B(x))$$

  Αρα $S_1 \Rightarrow S_2$

- $S_2 \Rightarrow S_1$

  · S_2 είναι $(\forall x)(R(x) \to \neg B(x))$

  Απο $A \to B \equiv \neg A \vee B$ έχουμε ότι:

  $$(\forall (x))(\neg R(x) \vee \neg B(x))$$

  $$\cancel{(\forall x) \neg R}$$

  $$\neg(\exists x)(R(x) \wedge B(x))$$

Αφού ισχύει $S_1 \Rightarrow S_2$ και $S_2 \Rightarrow S_1$ τοτε $S_1 \Leftrightarrow S_2$

A4.

~~α) "Για κάθε ακέραιο n" =>~~

α) "Για κάθε θετικό ακέραιο n" => $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

"Υπάρχουν θετικοί ακέραιοι x, y, z" => $\exists x,y,z \in \mathbb{Z}^+$

"ώστε $x^n + y^n = z^n$" $P(n, x, y, z)$

Άρα ο ισχυρισμός γράφεται ως:

$$(\forall n \in \mathbb{Z}^+)(\exists x,y,z \in \mathbb{Z}^+)(P(n,x,y,z))$$

β)

Η άρνηση του ισχυρισμού είναι

$$\neg(\forall n \in \mathbb{Z}^+)(\exists x,y,z \in \mathbb{Z}^+)(P(n,x,y,z))$$

Από κανόνα ποσοδείκτη της άρνησης:

$$(\exists n \in \mathbb{Z}^+)\neg(\exists x,y,z \in \mathbb{Z}^+)(P(n,x,y,z))$$

Εφαρμογή ίδιου κανόνα στη πρόταση

$$(\exists n \in \mathbb{Z}^+)(\forall x,y,z \in \mathbb{Z}^+)\neg(P(n,x,y,z))$$

γ) Ένας θετικός ακέραιος n για τον οποίο δεν υπάρχει κανένα x, y, z που να ικανοποιεί την εξίσωση $x^n + y^n = z^n$

Από τελευταίο θεώρημα του Φέρμα έχουμε ότι για κάθε $n \geq 3$ δεν υπάρχει κανένα x, y, z που να ικανοποιούν την εξίσωση

A5.

a)

- Ενας ακεραιος αριθμος x είναι αρτιος αν μπορεί να γραφεί ως $x=2k$ οπου k είναι ακεραιος
- Ενας ακεραιος αριθμος y είναι περιττος αν μπορει να γραφει ως $y=2m+1$ οπου m είναι ακεραιος

$x=2k$, $y=2m+1$

$y+x=2k+(2m+1)=2(k+m)+1$

Επειδή $k+m$ είναι ακέραιος, το αποτέλεσμα έχει μορφή $2(k)+1$, που είναι περιττός αριθμός.

B)

- Ενας ακεραιος n λέγεται κουζουλος αν και μόνο αν n^2+2n είναι περιττος
- Στη μέθοδο αντιθετοαντιστροφής, αποδεικνύουμε ~~ότι~~ την ισοδύναμη πρόταση:

Αν n αρτιος, τότε n^2+2n είναι αρτιος

Εστω n αρτιος, δηλαδη $n=2k$ για κάποιον ακεραιο k

$$n^2+2n=(2k)^2+2(2k)=4k^2+4k=4(k^2+k)$$

$4(k^2+k)$ είναι πολ/σιο του 4, αρα αρτιος αριθμός

γ) Εστω $x=2k$, $y=2m$

$$3(2k)+5(2m)=153$$
$$6k+10m=153$$

$6k+10m$ είναι αρτιος αριθμός
Αλλα 153 περιττος

Αρα η εξίσωση είναι ατοπη