Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος & Εικόνας

Μάθημα 14ο

Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών

Μετασχηματισμός Ζ (συνέχεια..)
Συνάρτηση Μεταφοράς

Α. Μπακλέζος

abaklezos@hmu.gr

Μονόπλευρος Μετασχηματισμός Z

- Ο <u>μονόπλευρος μετασχηματισμός Z</u> (one sided z–transform) μίας ακολουθίας διακριτού χρόνου ορίζεται

$$X^{+}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n] \cdot z^{-n}$$

δηλαδή το άθροισμα υπολογίζεται μόνο για τις μη αρνητικές τιμές του n.

Ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Z μίας ακολουθίας $\boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}]$ ταυτίζεται με τον αμφίπλευρο μετασχηματισμό Z της ακολουθίας $\boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}] \cdot \boldsymbol{u}[\boldsymbol{n}]$ (αν $\boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}]$ δεν είναι αιτιατό σήμα, αν $\boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}]$ είναι αιτιατό τότε Z^{+} και Z ταυτίζονται)

η Περιοχή Σύγκλισης (ROC) του μονόπλευρου μετασχηματισμού Z μίας ακολουθίας είναι η εξωτερική επιφάνεια ενός κύκλου, δηλαδή της μορφής $|z| > |\alpha|$

Για τα ζεύγη του μονόπλευρου μετασχηματισμού Z χρησιμοποιείται ο συμβολισμός:

$$x[n] \overset{\mathrm{Z}^{+}}{\leftrightarrow} X^{+}(z)$$

Ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Z χρησιμοποιείται για την επίλυση γραμμικών εξισώσεων διαφορών με σταθερούς συντελεστές με μη μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Ιδιότητες Μονόπλευρου Μετασχηματισμού Ζ

- Οι περισσότερες ιδιότητες του μονόπλευρου μετασχηματισμού Ζ είναι ίδιες με του αμφίπλευρου μετασχηματισμού.
- Διαφέρουν στην ιδιότητα της μετατόπισης στον χρόνο :

- Μετατόπιση στον χρόνο - ολίσθηση προς τα δεξιά :

Αν $x[n] \overset{Z^+}{\leftrightarrow} X^+(z), ROC$ τότε $x[n-n_o], n_o > 0 \overset{Z^+}{\leftrightarrow} z^{-n_o}X^+(z) + z^{-n_o}\sum_{i=1}^{n_o} x[-i]z^i$

Απόδειξη :

$$y[n] = x[n-n_o] \to Y^+(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} y[n]\cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n-n_o]\cdot z^{-n} \overset{\theta\varepsilon\tau\omega\ m=n-n_o}{\Longleftrightarrow} Y^+(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n-n_o]\cdot z^{-n}$$

$$= \sum_{m=-n_o}^{+\infty} x[m]\cdot z^{-(m+n_o)} = z^{-n_o}\sum_{m=-n_o}^{+\infty} x[m]\cdot z^{-m} = z^{-n_o}\sum_{m=-n_o}^{-1} x[m]\cdot z^{-m} + z^{-n_o}\sum_{m=0}^{+\infty} x[m]\cdot z^{-m}$$

$$= z^{-n_o}\sum_{i=1}^{n_o} x[-i]z^i + z^{-n_o}X^+(z)$$

Ιδιότητες Μονόπλευρου Μετασχηματισμού Ζ

- Μετατόπιση στον χρόνο - ολίσθηση προς τα αριστερά :

Αν $x[n] \overset{Z^{+}}{\leftrightarrow} X^{+}(z), ROC$ τότε $x[n+n_o], n_o > 0 \overset{Z^{+}}{\leftrightarrow} z^{n_o}X^{+}(z) - z^{n_o}\sum_{i=0}^{n_o-1} x[i]z^{-i}$

Απόδειξη :

$$\mathrm{y[n]} = x[n+n_o] \rightarrow Y^{+}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} y[n]\cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n-n_o]\cdot z^{-n} \overset{\theta\varepsilon\tau\omega\ m=n+n_o}{\Longleftrightarrow} Y^{+}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n-n_o]\cdot z^{-n}$$

$$= \sum_{m=n_o}^{+\infty} x[m]\cdot z^{-m+n_o} = z^{n_o}\sum_{m=-n_o}^{+\infty} x[m]\cdot z^{-m} = z^{n_o}\sum_{m=0}^{+\infty} x[m]\cdot z^{-m} - z^{n_o}\sum_{m=0}^{n_o-1} x[m]\cdot z^{-m}$$

$$= z^{n_o}\sum_{m=0}^{+\infty} x[m]\cdot z^{-m} - z^{n_o}\sum_{i=0}^{n_o-1} x[i]z^{-i} = z^{n_o}X^{+}(z) - z^{n_o}\sum_{i=0}^{n_o-1} x[i]z^{-i}$$

Ιδιότητες Μονόπλευρου Μετασχηματισμού Ζ

- Παράδειγμα:

Το σήμα $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n], x[-1] = 1$ έχει μονόπλευρο μετασχηματισμό $X^+(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{2}$

Τότε το σήμα $y[n] = x[n-1] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$ έχει μονόπλευρο μετασχηματισμό Ζ:

$$Y^+(z) = z^{-1}X^+(z) + x[-1] = z^{-1}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + 1 = \frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{2}$$

- Μετατόπιση στον χρόνο - ολίσθηση προς τα δεξιά :

Αν $x[n] \overset{Z^+}{\leftrightarrow} X^+(z), ROC$ τότε $x[n-n_o], n_o > 0 \overset{Z^+}{\leftrightarrow} z^{-n_o}X^+(z) + z^{-n_o}\sum_{i=1}^{n_o} x[-i]z^i$

Συνάρτηση Μεταφοράς

- Κάθε LTI σύστημα με κρουστική απόκριση $\boldsymbol{h}[\boldsymbol{n}]$ και είσοδο $\boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}]$ παράγει απόκριση $\boldsymbol{y}[\boldsymbol{n}] = \boldsymbol{h}[\boldsymbol{n}] * \boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}]$

- Ο μετασχηματισμός z, $\mathrm{H(z)}$, της κρουστικής απόκρισης $\boldsymbol{h}[\boldsymbol{n}]$ ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου (LTI) συστήματος ονομάζεται **συνάρτηση μεταφοράς (transfer function):**

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] \cdot z^{-n}$$

Προφανώς ισχύει ότι $\Upsilon(z) = H(z) \cdot \mathrm{X}(z)$

Κάθε γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα (LTI) περιγράφεται από μία γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

Αν πάρουμε τον μετασχηματισμό Z στα δύο μέλη :

$$\Upsilon(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} \mathrm{X}(z) - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} \Upsilon(z) \rightarrow \Upsilon(z) = \mathrm{X}(z) \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} - \Upsilon(z) \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} \rightarrow$$

$$\Upsilon(z) + \Upsilon(z) \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} = \mathrm{X}(z) \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} \rightarrow \Upsilon(z)\left(1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}\right) = \mathrm{X}(z) \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} \rightarrow$$

Συνάρτηση Μεταφοράς

$$x[n] \rightarrow \boxed{\text{LTI Σύστημα}} \rightarrow y[n] = h[n] * x[n]$$

$$X(z) \rightarrow \boxed{\text{LTI Σύστημα}} \rightarrow Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

$$\rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

η συνάρτηση μεταφοράς αρκεί για να περιγράψει ένα LTI σύστημα στο πεδίο της συχνότητας.

Παράδειγμα 1: Δίνεται η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές, που περιγράφει ένα LTI σύστημα $y[n] = 2x[n] + 3x[n-2] - 4y[n-1] + 5y[n-2]$. Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς.

$$y[n] = 2x[n] + 3x[n-2] - 4y[n-1] + 5y[n-2] \overset{Z}{\leftrightarrow} Y(z) = 2X(z) + 3z^{-2}X(z) - 4z^{-1}Y(z) + 5z^{-2}Y(z) \rightarrow$$

$$Y(z)(1 + 4z^{-1} - 5z^{-2}) = X(z)(2 + 3z^{-2}) \rightarrow$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2 + 3z^{-2}}{1 + 4z^{-1} - 5z^{-2}}$$

Συνάρτηση Μεταφοράς

Παράδειγμα 2: Δίνεται η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές, που περιγράφει ένα LTI σύστημα $y[n] = x[n] - x[n-1] + x[n-2] + 5y[n-1] - 4y[n-2]$. Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς.

$$y[n] = x[n] - x[n-1] + x[n-2] + 5y[n-1] - 4y[n-2]$$

Από την εξίσωση διαφορών προκύπτει ότι πρόκειται για IIR φίλτρο με M=2 και N=2 και ότι οι σταθεροί συντελεστές είναι:

$$b_o = 1, b_1 = -1, b_2 = 1, a_1 = -5, a_2 = 4$$

Άρα

$$H(z) = \frac{\Upsilon(z)}{\mathrm{X}(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{1 - z^{-1} + z^{-2}}{1 - 5z^{-1} + 4z^{-2}}$$

Συνάρτηση Μεταφοράς

Παράδειγμα 3: Δίνεται η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)=\frac{3-6z^{-2}}{1-2z^{-1}-5z^{-2}}$. Να βρεθεί η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές που περιγράφει το LTI σύστημα.

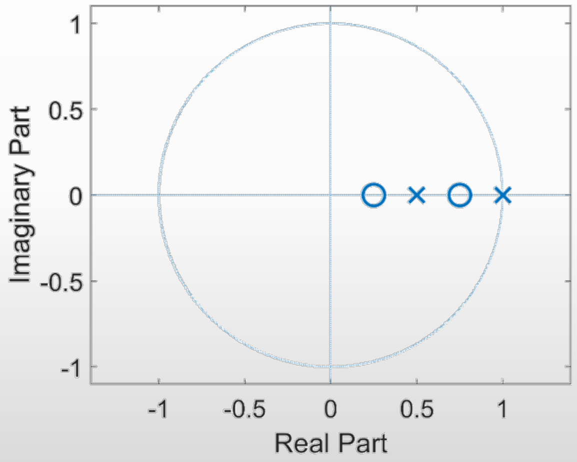
Από την εξίσωση διαφορών προκύπτει ότι είναι IIR φίλτρο με M=2 και N=2

με σταθερούς συντελεστές $b_o=3, b_1=0, b_2=-6, a_1=-2, a_2=-5$

Άρα $y[n]=3x[n]-6x[n-2]+2y[n-1]+5y[n-2]$

Παράδειγμα 4: Δίνεται η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)=\frac{1-z^{-1}+\frac{3}{16}z^{-2}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$. Να γίνει το διάγραμμα πόλων-μηδενικών της συνάρτησης μεταφοράς.

$$H(z)=\frac{1-z^{-1}+\frac{3}{16}z^{-2}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}=\frac{z^2-z+\frac{3}{16}}{z^2-\frac{3}{2}z+\frac{1}{2}}=\frac{\left(z-\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{3}{4}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-1)}$$



υπάρχουν δύο μηδενικά στα σημεία $z=\frac{1}{4}$ και $z=\frac{3}{4}$ και δύο πόλοι **στα σημεία** $z=\frac{1}{2}$ και $z=1$

Συνάρτηση Μεταφοράς

Σύνδεση συστημάτων σε σειρά:

LTI σύστημα με Συνάρτηση Μεταφοράς $H_1(z)$ συνδέεται σε σειρά με ένα LTI σύστημα με **Συνάρτηση Μεταφοράς** $H_2(z)$. Το πρώτο σύστημα έχει είσοδο $x[n]$ με **Μ/Τ z** $\mathrm{X}(z)$ και έξοδο $\mathrm{w}[n]$ με **Μ/Τ z** $\mathrm{W}(z)$. Το δεύτερο σύστημα έχει είσοδο την έξοδο του πρώτου συστηματος $\mathrm{w}[n]$ με Μ/Τ z $\mathrm{W}(z)$ και έξοδο $\mathrm{y}[n]$ με Μ/Τ Ζ $\mathrm{Y}(z)$. Η σύνδεση σε σειρά των δύο συστημάτων είναι ισοδύναμη με ένα LTI σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $\mathrm{H}(z) = H_1(z)H_2(z)$

Απόδειξη :

$\mathrm{Y}(z) = H_2(z)\mathrm{W}(z)$

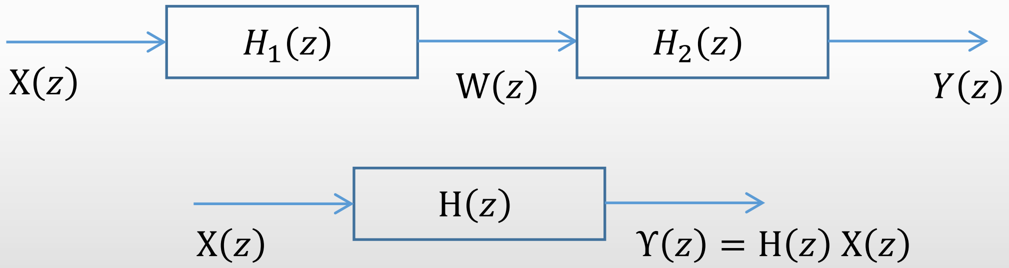
$\mathrm{W}(z) = H_1(z)\mathrm{X}(z)$

$$\mathrm{Y}(z) = H_2(z)\mathrm{W}(z) = H_2(z)\big(H_1(z)\mathrm{X}(z)\big) = \big(H_2(z)H_1(z)\big)\mathrm{X}(z)$$

Όμως $\mathrm{Y}(z) = \mathrm{H}(z)\mathrm{X}(z)$

Άρα

$\mathrm{H}(z) = H_1(z)H_2(z)$



Συνάρτηση Μεταφοράς

Σύνδεση συστημάτων παράλληλα:

LTI σύστημα με **Συνάρτηση Μεταφοράς** $H_1(z)$ συνδέεται παράλληλα με ένα LTI σύστημα με **Συνάρτηση Μεταφοράς** $H_2(z)$. Το πρώτο σύστημα έχει είσοδο $x[n]$ με M/T z $\mathrm{X}(z)$ και έξοδο $\mathrm{w}[n]$ με M/T z $\mathrm{W}(z)$. Το δεύτερο σύστημα έχει είσοδο $x[n]$ με M/T z $\mathrm{X}(z)$ και έξοδο $\mathrm{v}[n]$ με M/T z $\mathrm{V}(z)$. Η σύνδεση παράλληλα των δύο συστημάτων είναι ισοδύναμη με ένα LTI σύστημα με **Συνάρτηση Μεταφοράς** $\mathrm{H}(z) = H_1(z) + H_2(z)$

Απόδειξη :

$V(z) = H_2(z)\mathrm{X}(z)$

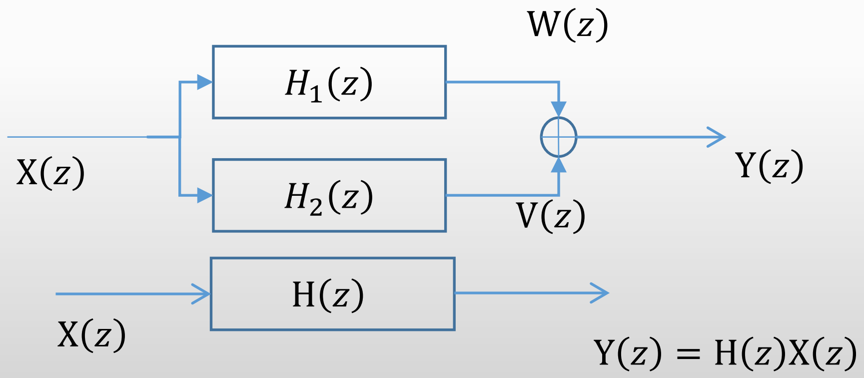
$\mathrm{W}(z) = H_1(z)\mathrm{X}(z)$

$$\mathrm{Y}(z) = V(z) + \mathrm{W}(z) = H_2(z)\mathrm{X}(z) + H_1(z)\mathrm{X}(z) = \big(H_2(z) + H_1(z)\big)\mathrm{X}(z)$$

Όμως $\mathrm{Y}(z) = \mathrm{H}(z)\mathrm{X}(z)$

Άρα

$\mathrm{H}(z) = H_1(z) + H_2(z)$



Συνάρτηση Μεταφοράς

Επίλυση εξισώσεων διαφορών μέσω μετασχηματισμού Z

Κάθε γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα περιγράφεται από μία γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

Και αρχικές συνθήκες εξόδου $\mathrm{y}[-1], \mathrm{y}[-2] \ldots., \mathrm{y}[-\mathrm{N}]$ και αρχικές συνθήκες εισόδου $\mathrm{x}[-1], \mathrm{x}[-2], \mathrm{x}[-3] \ldots, \mathrm{x}[-\mathrm{M}]$

Η γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές είναι ένας ανοικτός τύπος υπολογισμού της απόκρισης του συστήματος, δεδομένων των σταθερών συντελεστών.

Επομένως συνιστά έναν επαναληπτικό τρόπο υπολογισμού της εξόδου. Για να υπολογιστεί η έξοδος $\mathrm{y}[0]$ απαιτούνται οι αρχικές συνθήκες.

Η επίλυση μπορεί να γίνει μέσω του μετασχηματισμού Ζ και μάλιστα λόγω των αρχικών συνθηκών του **μονόπλευρου μετασχηματισμού z**.

Συνάρτηση Μεταφοράς

Επίλυση εξισώσεων διαφορών μέσω μετασχηματισμού Z

μονόπλευρος μετασχηματισμός z και στα δύο μέλη της εξίσωσης διαφορών:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

$$\mathrm{Y}^+(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k \left[z^{-k}\mathrm{X}^+(z) + z^{-k}\sum_{i=1}^{k} x[-i]z^i \right] - \sum_{k=1}^{N} a_k \left[z^{-k}\mathrm{Y}^+(z) + z^{-k}\sum_{i=1}^{k} y[-i]z^i \right]$$

Ισχύει ότι

$$\mathrm{Y}^+(z) = \mathrm{H}(\mathrm{z})\mathrm{X}^+(z) + H_x(\mathrm{z}) + H_y(\mathrm{z})$$

$$\mathrm{H}(\mathrm{z}) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

$$H_x(\mathrm{z}) = \frac{\sum_{k=1}^{M} \left[\sum_{i=1}^{M} b_i z^{k-i}\right] x[-k]}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

$$H_y(\mathrm{z}) = \frac{\sum_{k=1}^{N} \left[\sum_{i=1}^{N} a_i z^{k-i}\right] y[-k]}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

Συνάρτηση Μεταφοράς

Επίλυση εξισώσεων διαφορών μέσω μετασχηματισμού Z

$$\Upsilon^{+}(z) = \mathrm{H(z)}\mathrm{X}^{+}(z) + H_x(\mathrm{z}) + H_y(\mathrm{z})$$

- Ο πρώτος όρος εξαρτάται από τη συνάρτηση μεταφοράς, που αποτυπώνει τη συμπεριφορά του συστήματος για μηδενικές αρχικές συνθήκες εισόδου και εξόδου
- Ο δεύτερος όρος εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες εισόδου. Αν το σύστημα είναι αιτιατό, τότε οι αρχικές συνθήκες εισόδου είναι μηδενικές και ο όρος μηδενίζεται.
- Ο τρίτος όρος εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες εξόδου και αντιστοιχεί στην απόκριση του συστήματος για μηδενική είσοδο
- Παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Z προκύπτει η απόκριση του συστήματος

Συνάρτηση Μεταφοράς

Παράδειγμα : *Δίνεται ένα αιτιατό σύστημα με γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές:*

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}y[n-1] \text{ με αρχική συνθήκη } y[-1] = \frac{1}{4}$$

1) Να βρεθεί η κρουστική απόκριση. 2) Να βρεθεί η βηματική απόκριση

1) ***Η κρουστική απόκριση $\mathbf{h}[\boldsymbol{n}]$ είναι η έξοδος του φίλτρου με είσοδο $\boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}] = \boldsymbol{\delta}[\boldsymbol{n}]$ και μηδενικές αρχικές συνθήκες.***

Χρησιμοποιώντας τον αμφίπλευρο μετασχηματισμό z έχουμε $X(z) = 1$

Από την εξίσωση διαφορών $\mathrm{Y}(z) = X(z) + \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) \to \mathrm{Y}(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) = X(z) \to \mathrm{Y}(z)(1 - \frac{1}{2}z^{-1}) = X(z)$

Άρα η συνάρτηση μεταφοράς είναι $\mathrm{H}(z) = \frac{\mathrm{Y}(z)}{X(z)} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}, |z| > \frac{1}{2}$

Η κρουστική απόκριση είναι $\mathrm{h}[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$√

Συνάρτηση Μεταφοράς

Παράδειγμα(συνέχεια) : *Δίνεται ένα αιτιατό σύστημα με γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές:*

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}y[n-1] \text{ με αρχική συνθήκη } y[-1] = \frac{1}{4}$$

1) Να βρεθεί η κρουστική απόκριση. 2) Να βρεθεί η βηματική απόκριση

2) ***Η βηματική απόκριση είναι η έξοδος του φίλτρου*** $\mathbf{s[n]}$ ***με είσοδο*** $x[n] = u[n]$ *με αρχική συνθήκη* $y[-1] = \frac{1}{4}$

Χρησιμοποιώντας τον μονόπλευρο μετασχηματισμό z έχουμε $X^+(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})}, |z| > 1$

Από την εξίσωση διαφορών $Y^+(z) = X^+(z) + \frac{1}{2}(z^{-1}Y^+(z) + y[-1]) \to Y^+(z) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) = \frac{1}{2}y[-1] + X^+(z) \to$

$$\boxed{Y^+(z)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{(1-z^{-1})}} = \frac{\frac{9}{8} - \frac{1}{8}z^{-1}}{(1-z^{-1})} \to$$

$$Y^+(z) = \frac{\frac{9}{8} - \frac{1}{8}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1-z^{-1})}, |z| > 1$$

Συνάρτηση Μεταφοράς

Παράδειγμα (συνέχεια):

2) $Y^+(z) = \dfrac{\frac{9}{8} - \frac{1}{8}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)(1-z^{-1})}$, $|z| > 1$ που αναλύεται σε :

$$Y^+(z) = \frac{-\frac{7}{8}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} + \frac{2}{(1-z^{-1})}$$

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}}$$

$$\mu\varepsilon\ \sigma\upsilon\nu\tau\varepsilon\lambda\varepsilon\sigma\tau\acute{\varepsilon}\varsigma\ A_k = [(1 - p_k z^{-1}) \cdot X(z)]_{z=p_k}$$

$$\kappa\alpha\iota$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 - z^{-1}) = 0 \rightarrow p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = 1$$

Άρα η βηματική απόκριση του φίλτρου είναι

$$s[n] = \left(-\frac{7}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2u[n] \surd$$

Συνάρτηση Μεταφοράς

Παράδειγμα (συνέχεια):

Παρατήρηση:

Στο βήμα 2) είδαμε ότι $Y^+(z)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{4}+\frac{1}{(1-z^{-1})} \rightarrow Y^+(z)=\overbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}^{H_y(z)}+\underbrace{\frac{1}{(1-z^{-1})}}_{X^+(z)}\cdot\overbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}^{H(z)}$

$$\Upsilon^+(z)=\mathrm{H}(\mathrm{z})\mathrm{X}^+(z)+\underbrace{H_x(\mathrm{z})}_{0}+H_y(\mathrm{z})$$

- Ο όρος $H(z)$ εξαρτάται από την συνάρτηση μεταφοράς που αποτυπώνει την συμπεριφορά του συστήματος για μηδενικές αρχικές συνθήκες εισόδου και εξόδου.
- Επειδή το σύστημα είναι αιτιατό, δεν υπάρχει ο όρος που εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες εισόδου.
- Ο όρος $H_y(z)$ εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες εξόδου και αντιστοιχεί στην απόκριση του συστήματος για μηδενική είσοδο.

Συνάρτηση Μεταφοράς

Παράδειγμα (συνέχεια):

Παρατήρηση:

$$Y^+(z)=\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{1}{(1-z^{-1})}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{1}{8}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{2}{(1-z^{-1})}+\frac{-1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$X(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-p_k z^{-1}}$$

$$\text{με συντελεστές } A_k=\left[(1-p_k z^{-1})\cdot X(z)\right]_{z=p_k}$$

και

$$\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)(1-z^{-1})=0\rightarrow p_1=\frac{1}{2}, p_2=1$$

Άρα η απόκριση είναι

$$y[n]=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+(-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+2u[n]$$

απόκριση του συστήματος για μηδενική είσοδο (zero input response)

απόκριση του συστήματος για μηδενικές αρχικές συνθήκες εισόδου και εξόδου (zero state response)

Καλό Πάσχα με υγεία,

Καλά να περάσετε!

(συνέχεια μαθήματος & εργαστηρίου στις 26/4.)

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος & Εικόνας

Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών

Α. Μπακλέζος

abaklezos@hmu.gr