Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος & Εικόνας

Μάθημα 15ο (Α’)

Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών

Μετασχηματισμός Ζ (συνέχεια..)
Συνάρτηση Μεταφοράς

Α. Μπακλέζος

abaklezos@hmu.gr

Συνάρτηση Μεταφοράς

Παράδειγμα : Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του LTI συστήματος που παράγει την έξοδο

$y[n] = 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$ για είσοδο $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - (2)^n u[n]$.

Απάντηση: Η συνάρτηση μεταφοράς είναι $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$. Υπολογίζουμε τους μετασχηματισμούς Z για τις $\mathrm{x}[n], y[n]$

Παρατηρούμε ότι η είσοδος και η έξοδος είναι αιτιατά σήματα.

$$X(z) = Z\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - (2)^n u[n]\right\} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{1-2z^{-1}}, ROC_X = \left(|z| > \frac{1}{2} \cap |z| > 2\right) = (|z| > 2)$$

$$Y(z) = Z\left\{6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]\right\} = 6\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - 6\frac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}}, ROC_Y = \left(|z| > \frac{1}{2} \cap |z| > \frac{3}{4}\right) = \left(|z| > \frac{3}{4}\right)$$

Συνάρτηση Μεταφοράς

Παράδειγμα(συνέχεια) : Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του LTI συστήματος που παράγει την έξοδο

$y[n] = 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$ για είσοδο $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - (2)^n u[n]$.

Απάντηση: Ξαναγράφουμε τις $X(z), Y(z)$

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{1-2z^{-1}} = \frac{-\frac{3}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)(1-2z^{-1})}, ROC_X = (|z| > 2)$$

$$Y(z) = 6\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - 6\frac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}} = \frac{-\frac{3}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)}, ROC_Y = \left(|z| > \frac{3}{4}\right)$$

Συνάρτηση Μεταφοράς

Παράδειγμα(συνέχεια) : Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του LTI συστήματος που παράγει την έξοδο

$y[n] = 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$ για είσοδο $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - (2)^n u[n]$.

Απάντηση: *Άρα η συνάρτηση μεταφοράς*

$$\mathrm{H}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\dfrac{-\frac{3}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)}}{\dfrac{-\frac{3}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)(1-2z^{-1})}} = \frac{(1-2z^{-1})}{\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)}, ROC_H = ???????$$

Συνάρτηση Μεταφοράς

Παράδειγμα(συνέχεια) : Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του LTI συστήματος που παράγει την έξοδο

$y[n] = 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$ για είσοδο $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - (2)^n u[n]$.

Απάντηση: *η συνάρτηση μεταφοράς έχει ένα πόλο* $z = \frac{3}{4}$ *άρα δύο περιπτώσεις* $ROC_{\mathrm{H}} = \left(|z| < \frac{3}{4}\right)$ *ή* $ROC_{\mathrm{H}} = \left(|z| > \frac{3}{4}\right)$

Πως θα αποφασίσω ποια περιοχή σύγκλισης είναι η σωστή;

Θυμάμαι από την ιδιότητα της συνέλιξης του Μ/Τ Ζ (διάλεξη 12) ότι

- <u>Συνέλιξη :</u>

  Αν $x_1[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X_1(z), ROC_1$ και $x_2[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X_2(z), ROC_2$

  τότε $x_1[n] * x_2[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X_1(z) \cdot X_2(z)$, ROC <u>θα περιέχει τουλάχιστον</u> $ROC_1 \cap ROC_2$

$\rightarrow ROC_{Y}$ *περιέχει τουλάχιστον* $ROC_{\mathrm{X}} \cap ROC_{\mathrm{H}}$

Συνάρτηση Μεταφοράς

$\boxed{ROC_Y \text{ περιέχει τουλάχιστον } ROC_X \cap ROC_H}$

Παράδειγμα(συνέχεια) : Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του LTI συστήματος που παράγει την έξοδο

$y[n] = 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$ για είσοδο $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - (2)^n u[n]$.

Απάντηση: *η συνάρτηση μεταφοράς έχει ένα πόλο* $z = \frac{3}{4}$ *άρα δύο περιπτώσεις* $ROC_H = \left(|z| < \frac{3}{4}\right)$ *ή* $ROC_H = \left(|z| > \frac{3}{4}\right)$

- $ROC_H = \left(|z| < \frac{3}{4}\right)$
  - $ROC_X \cap ROC_H = \left((|z| > 2) \cap \left(|z| < \frac{3}{4}\right)\right) = \emptyset$ *και* $ROC_Y = \left(|z| > \frac{3}{4}\right)$
- $ROC_H = \left(|z| > \frac{3}{4}\right)$
  - $ROC_X \cap ROC_H = \left((|z| > 2) \cap \left(|z| > \frac{3}{4}\right)\right) = (|z| > 2)$ *και* $ROC_Y = \left(|z| > \frac{3}{4}\right) \rightarrow \boxed{ROC_X \cap ROC_H \subseteq ROC_Y}$

Άρα $ROC_H = \left(|z| > \frac{3}{4}\right)$ *και το σύστημα είναι αιτιατό.*

Συνάρτηση Μεταφοράς

- Μετατόπιση στον χρόνο - ολίσθηση προς τα δεξιά :
  Αν $x[n] \overset{Z^+}{\leftrightarrow} X^+(z), ROC$ τότε $x[n-n_o], n_o > 0 \overset{Z^+}{\leftrightarrow} z^{-n_o}X^+(z) + z^{-n_o}\sum_{i=1}^{n_o} x[-i]z^i$

Παράδειγμα : Να βρεθεί η απόκριση του LTI συστήματος που περιγράφεται από τη γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές $y[n] = 0.2y[n-1] + 0.8y[n-2] + x[n]$, για είσοδο $x[n] = (0.5)^n\, u[n]$ και αρχικές συνθήκες $y[-1] = 5$ και $y[-2] = 10$.

Απάντηση: Υπολογίζουμε τον Z^+ κάθε ενός από τους όρους της ΓΕΔΣΣ:

$$Y^+(z) = 0.2\left[z^{-1}Y^+(z) + y[-1]\right] + 0.8\left[z^{-2}\,Y^+(z) + z^{-1}y[-1] + y[-2]\right] + X^+(z)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των αρχικών συνθηκών, έχουμε:

$$Y^+(z) = 0.2\,[z^{-1}\,Y^+(z) + 5] + 0.8\,[z^{-2}\,Y^+(z) + 5z^{-1} + 10] + X^+(z) \Rightarrow$$

$$Y^+(z) = 0.2\,z^{-1}\,Y^+(z) + 1 + 0.8\,z^{-2}\,Y^+(z) + 4z^{-1} + 8 + X^+(z)$$

Μεταφέροντας τους όρους που περιέχουν την $Y^+(z)$ στο αριστερό μέλος, έχουμε:

$$Y^+(z)[1 - 0.2z^{-1} - 0.8z^{-2}] = 9 + 4z^{-1} + X^+(z)$$

Συνάρτηση Μεταφοράς

Παράδειγμα(συνέχεια) : Να βρεθεί η απόκριση του LTI συστήματος που περιγράφεται από τη γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές $y[n] = 0.2y[n-1] + 0.8y[n-2] + x[n]$, για είσοδο $x[n] = (0.5)^n\, u[n]$ και αρχικές συνθήκες $y[-1] = 5$ και $y[-2] = 10$.

Απάντηση: Επειδή ο μονόπλευρος μετασχηματισμός $X^+(z)$ της $x[n] = (0.5)^n u[n]$ είναι:

$$X^+(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} \rightarrow$$

$$Y^+(z)[1 - 0.2z^{-1} - 0.8z^{-2}] = (9 + 4z^{-1}) + \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

Επιλύοντας ως προς $Y^+(z)$ έχουμε:

$$Y^+(z) = \frac{(9 + 4z^{-1})}{1 - 0.2z^{-1} - 0.8z^{-2}} + \frac{\frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}}{1 - 0.2z^{-1} - 0.8z^{-2}} \qquad (1)$$

Εκτελώντας την πρόσθεση των κλασμάτων και κατόπιν παραγοντοποιώντας τον παρονομαστή, έχουμε:

$$Y^+(z) = \frac{10 - 0.5z^{-1} - 2z^{-2}}{(1 - 0.2z^{-1} - 0.8z^{-2})(1 - 0.5z^{-1})} = \frac{10 - 0.5\, z^{-1} - 2z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + 0.8z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})}$$

Συνάρτηση Μεταφοράς

$$Y^{+}(z) = \frac{10 - 0.5\,z^{-1} - 2z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + 0.8z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})}$$

Παράδειγμα(συνέχεια) : Να βρεθεί η απόκριση του LTI συστήματος που περιγράφεται από τη γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές $y[n] = 0.2y[n-1] + 0.8y[n-2] + x[n]$, για είσοδο $x[n] = (0.5)^n\, u[n]$ και αρχικές συνθήκες $y[-1] = 5$ και $y[-2] = 10$.

Απάντηση: Για το ανάπτυγμα του $Y^{+}(z)$ σε μερικά κλάσματα θα υπολογίσουμε τα υπόλοιπα $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$ και A_3:

$$Y^{+}(z) = \frac{A_1}{1 - z^{-1}} + \frac{A_2}{1 + 0.8z^{-1}} + \frac{A_3}{1 - 0.5z^{-1}}$$

Επειδή οι πόλοι είναι απλοί και διακριτοί ($z_1 = 1,\; z_2 = -0.8,\; z_3 = 0.5$),

$$A_1 = [Y^{+}(z)(1 - z^{-1})]_{z=1} = \left[\frac{10 - 0.5\,z^{-1} - 2z^{-2}}{(1 + 0.8z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})}\right]_{z=1} = \frac{25}{3}$$

$$A_2 = [Y^{+}(z)(1 + 0.8z^{-1})]_{z=-0.8} = \left[\frac{10 - 0.5\,z^{-1} - 2z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})}\right]_{z=-0.8} = \frac{80}{39}$$

$$A_3 = [Y^{+}(z)(1 - 0.5z^{-1})]_{z=0.5} = \left[\frac{10 - 0.5\,z^{-1} - 2z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + 0.8z^{-1})}\right]_{z=0.5} = -\frac{10}{26}$$

Συνάρτηση Μεταφοράς

Παράδειγμα(συνέχεια) : Να βρεθεί η απόκριση του LTI συστήματος που περιγράφεται από τη γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές $y[n] = 0.2y[n-1] + 0.8y[n-2] + x[n]$, για είσοδο $x[n] = (0.5)^n\, u[n]$ και αρχικές συνθήκες $y[-1] = 5$ και $y[-2] = 10$.

Απάντηση:

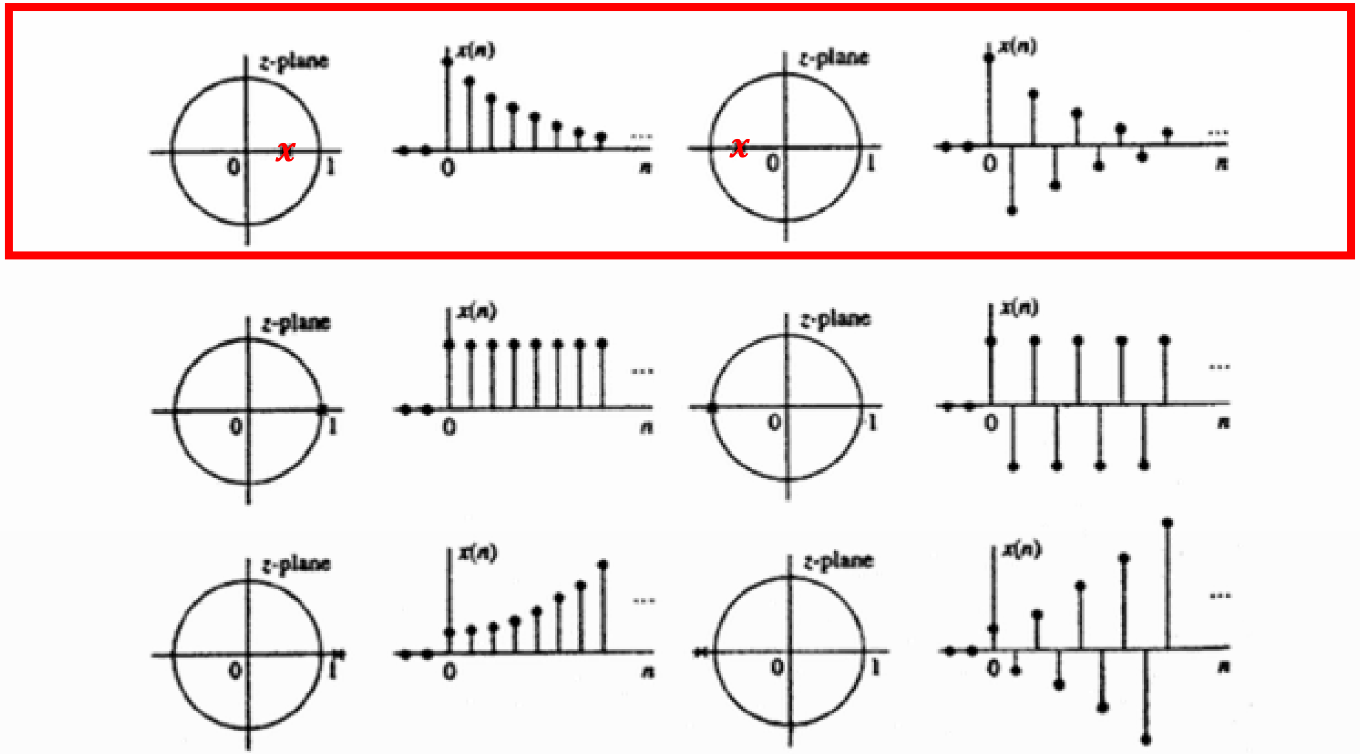
Επομένως, το ανάπτυγμα της $Y^+(z)$ σε μερικά κλάσματα είναι:

$$Y^+(z) = \left(\frac{25}{3}\right)\frac{1}{1-z^{-1}} + \left(\frac{80}{39}\right)\frac{1}{1+0.8z^{-1}} + \left(-\frac{10}{26}\right)\frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

Εκτελώντας αντίστροφο μετασχηματισμό Z προκύπτει η ζητούμενη λύση:

$$y[n] = \left(\frac{25}{3}\right)(1)^n u[n] + \left(\frac{80}{39}\right)(-0.8)^n u[n] + \left(-\frac{10}{26}\right)(0.5)^n u[n] = \left[\left(\frac{25}{3}\right) + \left(\frac{80}{39}\right)(-0.8)^n \left(-\frac{10}{26}\right)(0.5)^n\right] u[n]$$

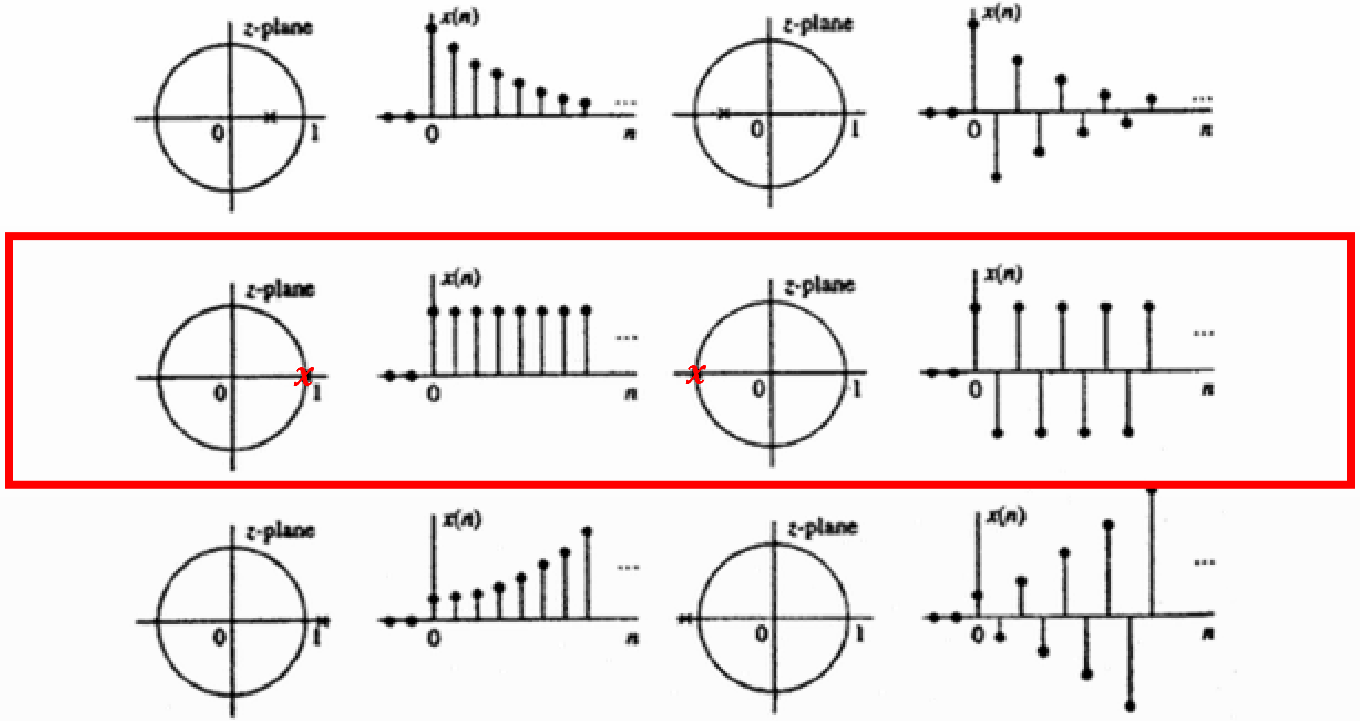
Ευστάθεια



Σήματα:

- *Ευσταθές : όλοι οι πόλοι του μετασχηματισμού Ζ του σήματος βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου.*
    - *Αν το σήμα είναι πραγματικό και ο πόλος* $\mathbf{p}$ είναι θετικός $(0 < p < 1)$ τότε το σήμα είναι φθίνουσα συνάρτηση,
    - αν ο πόλος είναι αρνητικός, δηλαδή $(-1 < p < 0)$ το σήμα είναι απόλυτα φθίνουσα συνάρτηση
    - Αν οι πόλοι είναι **μιγαδικοί** (εμφανίζονται σε ζεύγη συζυγών μιγαδικών), δηλαδή $|p| = |p^*| < 1$,τότε το σήμα είναι φθίνον ημιτονοειδές σήμα (φθίνουσα ταλάντωση)

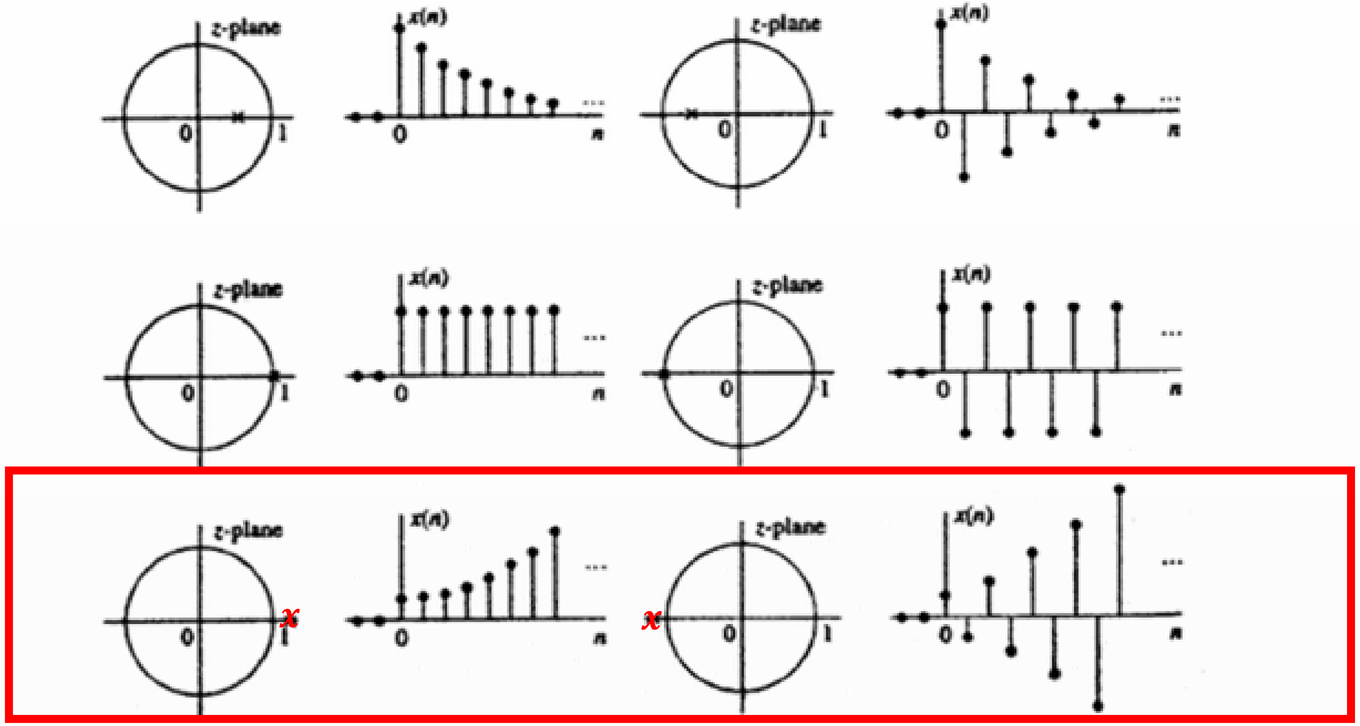
Ευστάθεια



Σήματα:

- *Οριακά Ευσταθές : όλοι οι πόλοι του μετασχηματισμού Ζ του σήματος βρίσκονται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο ή εντός του μοναδιαίου κύκλου και ένας τουλάχιστον πόλος βρισκεται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο*
    - *Αν το σήμα είναι πραγματικό και ο πόλος* $\boldsymbol{p}$ είναι θετικός ($p = 1$) τότε το σήμα είναι σταθερή συνάρτηση (ίση με 1),
    - αν ο πόλος είναι αρνητικός, δηλαδή ($p = -1$) το σήμα παλινδρομεί ανάμεσα στις τιμές 1 και -1,
    - αν οι πόλοι είναι **μιγαδικοί** (εμφανίζονται σε ζεύγη συζυγών μιγαδικών), δηλαδή $|p| = |p^*| = 1$,τότε το σήμα είναι ημιτονοειδές.

Ευστάθεια



Σήματα:

- *ασταθές : τουλάχιστον ένας πόλος του μετασχηματισμού Z του σήματος βρίσκεται εκτός του μοναδιαίου κύκλου.*
  - *Αν το σήμα είναι πραγματικό και ο πόλος* $\boldsymbol{p}$ είναι θετικός ($p > 1$) τότε το σήμα είναι αύξουσα συνάρτηση,
  - αν ο πόλος είναι αρνητικός, δηλαδή ($-1 > p$) το σήμα είναι απόλυτα αύξουσα συνάρτηση
  - Αν οι πόλοι είναι **μιγαδικοί** (εμφανίζονται σε ζεύγη συζυγών μιγαδικών), δηλαδή $|p| = |p^*| > 1$,τότε το σήμα είναι αύξον ημιτονοειδές σήμα (αύξουσα ταλάντωση)

Χαρακτηρισμός Συστημάτων

- *Ευσταθές :*
  - (πεδίο του χρόνου) ένα LTI σύστημα είναι ευσταθές, όταν η κρουστική απόκριση ικανοποιεί τη σχέση

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = L < +\infty$$

  - (πεδίο συχνότητας) ένα LTI σύστημα είναι ευσταθές, όταν ο μοναδιαίος κύκλος ανήκει στην Περιοχή Σύγκλισης (ROC) της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος

- *Αιτιατό :*
  - (πεδίο του χρόνου) ένα LTI σύστημα είναι αιτιατό, όταν η κρουστική απόκριση ικανοποιεί τη σχέση

$$h[n] = 0, n < 0$$

  - (πεδίο συχνοτήτας) ένα LTI σύστημα είναι αιτιατό, όταν η Περιοχή Σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος είναι η εξωτερική επιφάνεια ενός κύκλου, δηλαδή είναι της μορφής $|z| > a$

→όλοι οι πόλοι ανήκουν σε περιοχή της μορφής $|z| \leq a$ αφού δεν ανήκουν στο ROC

Χαρακτηρισμός Συστημάτων

- *Πραγματοποιήσιμο :*
  - Ένα LTI σύστημα είναι πραγματοποιήσιμο, όταν είναι ευσταθές και αιτιατό άρα ο μοναδιαίος κύκλος ανήκει στην Περιοχή Σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος και ταυτόχρονα ότι όλοι οι πόλοι ανήκουν σε περιοχή μορφής $|z| \leq |\alpha|$
  - Δηλαδή $0 \leq |\alpha| < 1$ που σημαίνει ότι **όλοι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος βρίσκονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου**

Παράδειγμα: Το LTI σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $H(z) = \frac{c}{1+\frac{1}{8}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{8}$ έχει έναν πόλο στο $z = -\frac{1}{8}$

- Είναι αιτιατό γιατί Περιοχή Σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος είναι η εξωτερική επιφάνεια κύκλου $|z| > \alpha$
- Είναι ευσταθές γιατί η Περιοχή Σύγκλισης είναι $|z| > \frac{1}{8}$ δηλαδή ο μοναδιαίος κύκλος ανήκει στη Περιοχή Σύγκλισης
- Άρα πραγματοποιήσιμο! (πόλος $z = -\frac{1}{8}$ στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου)

Χαρακτηρισμός Συστημάτων

Ευστάθεια αιτιατών LTI συστημάτων διακριτού χρόνου και συνάρτηση μεταφοράς

- Ευσταθές αιτιατό LTI σύστημα : όταν όλοι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου.
- Ασταθές αιτιατό LTI σύστημα : όταν ένας τουλάχιστον πόλος της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος βρίσκεται εκτός του μοναδιαίου κύκλου.
- Οριακά ευσταθές αιτιατό LTI σύστημα :
    - όταν όλοι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος βρίσκονται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο ή
    - εντός του μοναδιαίου κύκλου και ένας τουλάχιστον πόλος της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος βρίσκεται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο.

Χαρακτηρισμός Συστημάτων

Παράδειγμα : *Να εξεταστεί ως προς την ευστάθεια το αιτιατό LTI σύστημα, που περιγράφεται από τη γραμμική εξίσωσης διαφορών με σταθερούς συντελεστές* $y[n] = x[n] + 7y[n-1] - 12y[n-2]$

Η συνάρτηση μεταφοράς είναι

$$\mathrm{H}(z) = \frac{1}{1 - 7z^{-1} + 12z^{-2}} = \frac{1}{(1 - 3z^{-1})\,(1 - 4z^{-1})}$$

Με πόλους $\mathrm{p}_1 = 3$ και $\mathrm{p}_2 = 4$

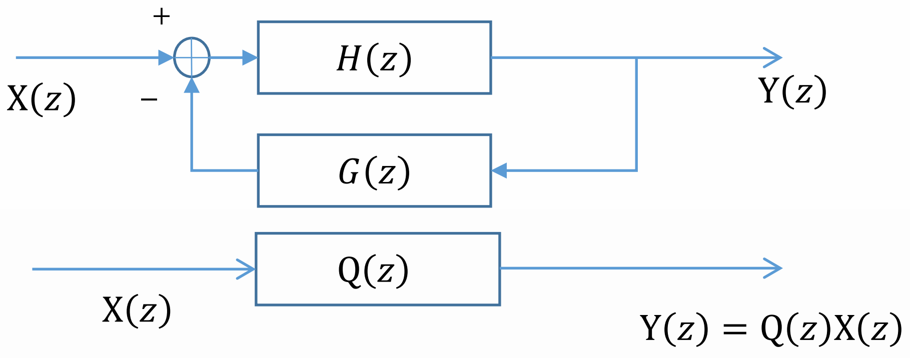
Αφού το σύστημα είναι αιτιατό, η Περιοχή Σύγκλισης είναι: $|\mathrm{z}| > 4$.

Προφανώς, ο μοναδιαίος κύκλος δεν ανήκει στην Περιοχή Σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος.

Άρα το σύστημα είναι ασταθές.

Ανάδραση

Σύστημα Ανάδρασης



Το σύστημα αποτελείται από δύο LTI συστήματα. Το σύστημα έχει είσοδο με μετασχηματισμό Ζ $\mathrm{X(z)}$ και έξοδο με μετασχηματισμό Ζ $\mathrm{Y(z)}$. Το σύστημα του ευθέως κλάδου με συνάρτηση μεταφοράς $\mathrm{H(z)}$ και το σύστημα κλάδου ανάδρασης με συνάρτηση μεταφοράς $\mathrm{G(z)}$.

Το συνολικό σύστημα ανάδρασης έχει συνάρτηση μεταφοράς $\mathrm{Q(z)} = \frac{Y(z)}{X(z)}$

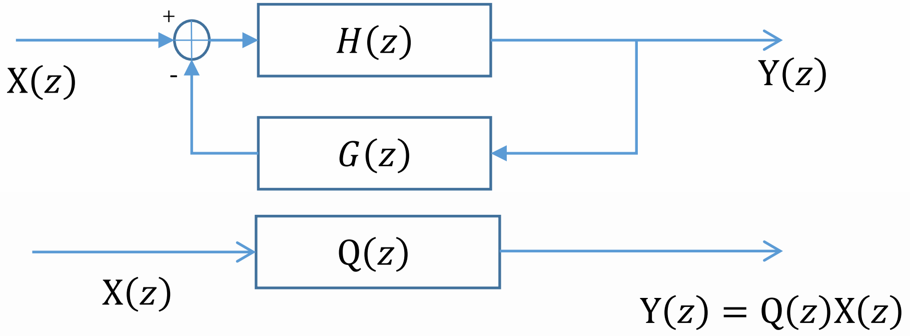
όμως $\mathrm{Y(z)} = H(z)[\mathrm{X(z)} - G(z)Y(z)] \rightarrow \mathrm{Y(z)} = H(z)\mathrm{X(z)} - H(z)G(z)Y(z) \rightarrow$

$$\mathrm{Y(z)}[1 + H(z)G(z)] = H(z)X(z) \rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H(z)}{1 + H(z)G(z)}$$

$$\mathrm{Q(z)} = \frac{H(z)}{1 + H(z) \cdot G(z)}$$

❖ Μία εφαρμογή των συστημάτων ανάδρασης είναι η χρήση τους, για τη σταθεροποίηση ασταθών συστημάτων.

Ανάδραση



Παράδειγμα :

Δίνεται LTI σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{9}{5}z^{-1}}, |z| > \frac{9}{5}$$

Το σύστημα είναι αιτιατό γιατί η Περιοχή Σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς είναι $|z| > \frac{9}{5}$.

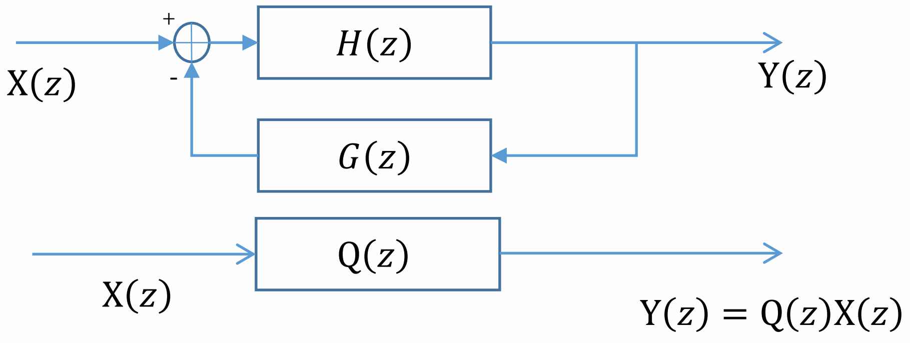
Όμως ο μοναδιαίος κύκλος δεν ανήκει στην Περιοχή Σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος, μιας και η συνάρτηση μεταφοράς έχει έναν πόλο $\mathrm{p} = \frac{9}{5} > 1$ στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου, οπότε το σύστημα είναι ασταθές.

Θεωρούμε τώρα ένα αιτιατό σύστημα ανάδρασης, όπου το σύστημα του ευθέως κλάδου έχει συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ και το σύστημα κλάδου ανάδρασης έχει συνάρτηση μεταφοράς $\mathrm{G}(z) = C > 0$

Τότε, το συνολικό σύστημα ανάδρασης έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$\mathrm{Q(z)} = \frac{H(z)}{1 + H(z) \cdot G(z)} = \frac{\frac{1}{1 - \frac{9}{5}z^{-1}}}{1 + \frac{1}{1 - \frac{9}{5}z^{-1}} \cdot C} = \frac{\frac{1}{1 - \frac{9}{5}z^{-1}}}{\frac{1 - \frac{9}{5}z^{-1} + C}{1 - \frac{9}{5}z^{-1}}} = \frac{1}{1 + C - \frac{9}{5}z^{-1}}$$

Ανάδραση



Παράδειγμα (συνέχεια) :

Η συνάρτηση μεταφοράς του συνολικού συστήματος ανάδρασης έχει έναν πόλο

$$p' = \frac{\frac{9}{5}}{1 + C}$$

το σύστημα ανάδρασης είναι αιτιατό, η Περιοχή Σύγκλισης είναι $|z| > p' = \frac{\frac{9}{5}}{1+C}$

Για να είναι το σύστημα ανάδρασης ευσταθές, πρέπει όταν ο μοναδιαίος κύκλος να ανήκει στην Περιοχή Σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος. Επομένως, πρέπει: $p' = \frac{\frac{9}{5}}{1+C} < 1 \rightarrow C > \frac{4}{5}$

- ο πόλος p' του συστήματος ανάδρασης είναι μία φθίνουσα συνάρτηση της παραμέτρου C

$$\lim_{C \to 0} p' = \lim_{C \to 0} \frac{\frac{9}{5}}{1+C} = \frac{9}{5} = p$$ ο πόλος τείνει στον πόλο της συνάρτησης μεταφοράς του ευθέως κλάδου

$$\lim_{C \to +\infty} p' = \lim_{C \to +\infty} \frac{\frac{9}{5}}{1+C} = 0$$ ο πόλος τείνει στο 0

όσο αυξάνει η τιμή του C ο πόλος «σπρώχνεται» προς το εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου

Ασκήσεις

- Άσκηση 1 : Αιτιατό σήμα $x[n]$ έχει μετασχηματισμό Z είναι $\mathrm{X(z)} = \frac{8}{3-2z^{-1}+5z^{-2}}$. Βρείτε τη τιμή x[0].
- Άσκηση 2 : Μη αιτιατό σήμα $x[n]$ έχει μετασχηματισμό Z είναι $\mathrm{X(z)} = \frac{2z^{-1}+3z^{-3}+4z^{-4}}{2z^{-1}+5z^{-2}+9z^{-4}}$. Βρείτε τη τιμή x[0].
- Άσκηση 3 : Μέσω του μετασχηματισμού z να υπολογίσετε τη γραμμική συνέλιξη $\mathrm{x}[n] = \alpha^n u[n] * u[n], 0 < a < 1$
- Άσκηση 4 : Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος που έχει είσοδο $\mathrm{x}[n] = u[n]$ έξοδο $\mathrm{y}[n] = 2(\frac{1}{3})^n u[n]$. Στη συνέχεια βρείτε τη κρουστική απόκριση του.
- Άσκηση 5 : Δίνεται η γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερους συντελεστες $\mathrm{y}[n] = x[n] + \frac{3}{2}y[n-1] - \frac{1}{2}y[n-2]$. Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς και την κρουστική απόκριση του συστήματος
- Άσκηση 6 : Δίνεται LTI σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $\mathrm{H(z)} = \frac{1}{1-2z^{-1}}$, $|z| > 2$. Εξετάστε το ως προς την ευστάθεια. Εάν είναι ασταθές θεωρήστε σύστημα ανάδρασης, όπου το σύστημα του ευθέως κλάδου έχει συνάρτηση μεταφοράς $\mathrm{H(z)}$ και το σύστημα κλάδου ανάδρασης έχει συνάρτηση μεταφοράς $\mathrm{G(z)} = C, C > 0$. Βρείτε τις τιμές της παραμέτρου C ώστε το σύστημα ανάδρασης να είναι ευσταθές.
- Άσκηση 7 : Δίνεται η γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερους συντελεστες $\mathrm{y}[n] = x[n] + 3y[n-1]$ με αρχική συνθήκη $\mathrm{y}[-1] = 1$. Να υπολογίσετε την κρουστική απόκριση $\mathrm{h}[n]$ δηλαδή την έξοδο του φίλτρου με είσοδο και $x[n] = \delta[n]$ και μηδενικές αρχικές συνθήκες. Στη συνέχεια να υπολογίσετε τη βηματική απόκριση $\mathrm{s}[n]$, δηλαδή την έξοδο του φίλτρου με είσοδο $x[n] = u[n]$.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος & Εικόνας

Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών

Α. Μπακλέζος

abaklezos@hmu.gr