Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος & Εικόνας

Μάθημα 2ο

Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών

Σήματα Διακριτού Χρόνου..συνέχεια
Πράξεις Σημάτων
Συνέλιξη Σημάτων Άπειρης Διάρκειας

Α. Μπακλέζος

abaklezos@hmu.gr

Βασικά Σήματα Διακριτού Χρόνου (…συνέχεια)

- Ημιτονοειδές σήμα διακριτού χρόνου:

$$\mathrm{x}[n] = A sin(\omega_o n + \varphi)$$

όπου A είναι το πλάτος του σήματος, ω_o (rad/sample) είναι η συχνότητα και είναι φ (rad) η φάση του σήματος

Το ημιτονοειδές σήμα διακριτού χρόνου δεν είναι πάντα περιοδικό.

Πρέπει :

$$\mathrm{x}[n] = \mathrm{x}[n + N]$$
$$A sin(\omega_o n + \varphi) = A sin(\omega_o (n + N) + \varphi)$$
$$\rightarrow \omega_o n + \varphi + k2\pi = \omega_o (n + N) + \varphi, \qquad k \in Z$$
$$\rightarrow \omega_o n + \varphi + k2\pi = \omega_o n + \omega_o N + \varphi$$
$$\rightarrow \omega_o N = k2\pi$$
$$\rightarrow \boxed{\omega_o = 2\pi \frac{k}{N} \ \textbf{ρητό πολλαπλάσιο του } 2\pi}$$

<u>Μόνο τότε</u> το ημιτονοειδές σήμα <u>διακριτού χρόνου είναι περιοδικό</u> με θεμελιώδη περίοδο $N = \frac{2\pi}{\omega_o} \quad (k = 1)$

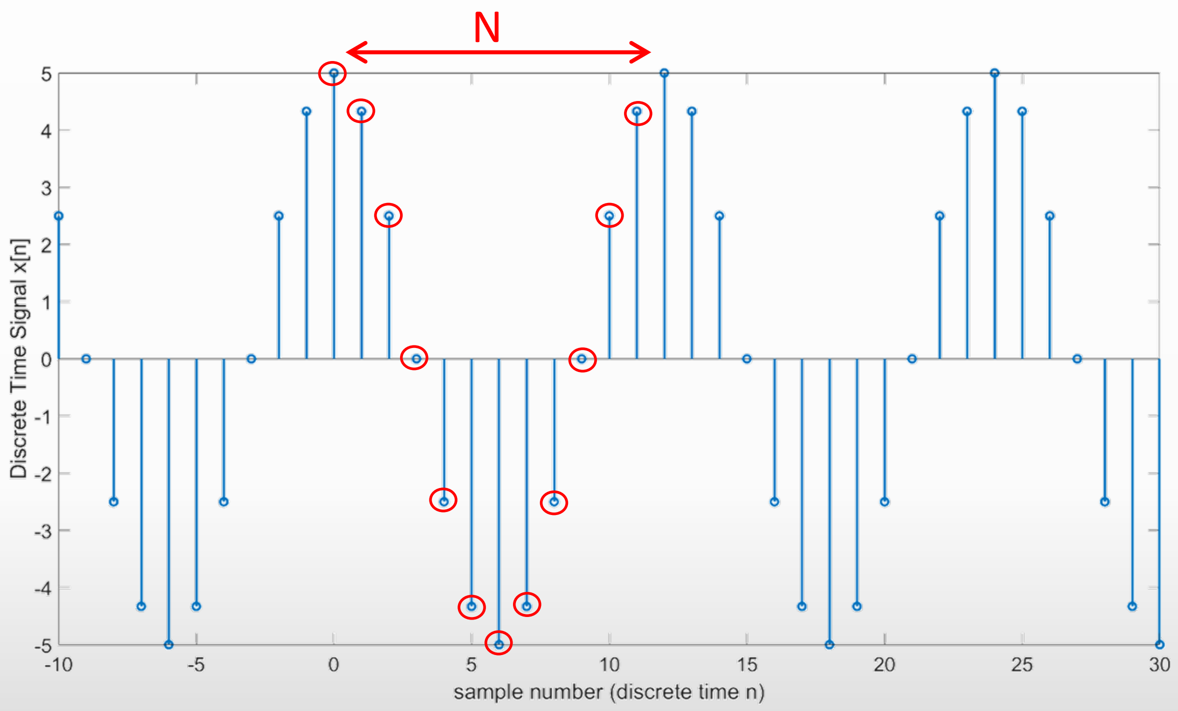
Αν $N = \frac{2\pi}{\omega_o}$ δεν είναι ακέραιος, τοτε από την $\mathrm{N} = k\frac{2\pi}{\omega_o}$ βρίσκουμε το μικρότερο $k \in Z$ ώστε το $N = k\frac{2\pi}{\omega_o}$ **ακεραιος**

Βασικά Σήματα Διακριτού Χρόνου

- Παράδειγμα :

  Είναι το σήμα $x[n] = 5\cos\left(\frac{\pi}{6}n\right)$ περιοδικό; Αν ναι ποια είναι η περίοδός;

- $\omega_o = \frac{\pi}{6}$ ρητό πολλαπλάσιο του 2π άρα περιοδικό!
- $\mathrm{N} = \frac{2\pi}{\omega_o} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$ → περίοδος $\mathrm{N} = 12$



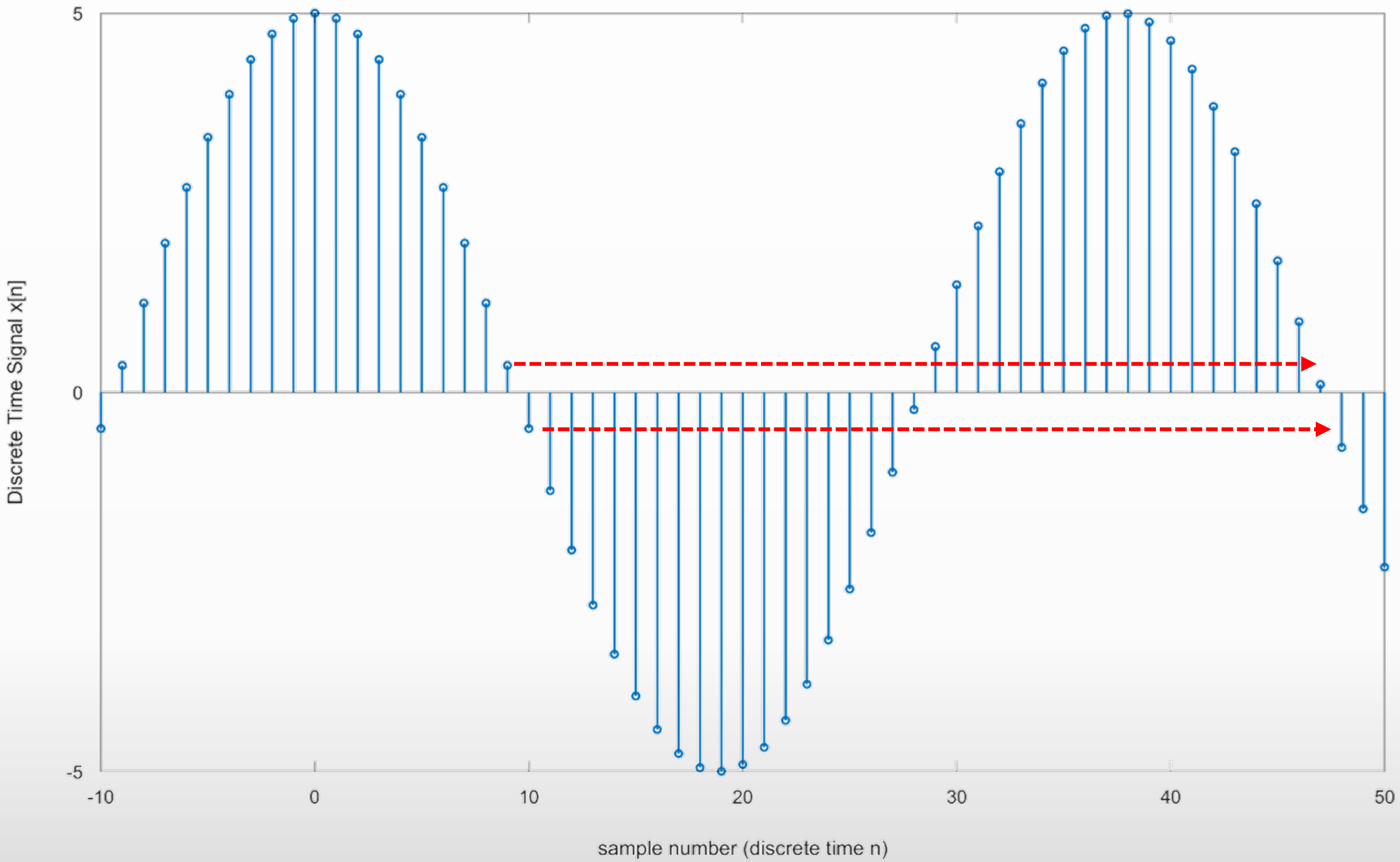
Βασικά Σήματα Διακριτού Χρόνου

- Παράδειγμα :

  Είναι το σήμα $x[n] = 5\cos\left(\frac{n}{6}\right)$ περιοδικό;

- $\omega_o = \frac{1}{6}$, δεν είναι ρητό πολλαπλάσιο του 2π

  → Το $x[n]$ **δεν είναι περιοδικό**.



Βασικά Σήματα Διακριτού Χρόνου

- Ισχύει ότι $x_1[n], x_2[n]$ περιοδικές ημιτονοειδής ακολουθίες με περιόδους N_1, N_2, τότε και το άθροισμά τους $y[n] = x_1[n] + x_2[n]$, είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο :

$$N_y = \frac{N_1 N_2}{\text{ΜΚΔ}(N_1, N_2)}$$

- Περιοδικό επίσης είναι και το γινομενό τους $y[n] = x_1[n] \cdot x_2[n]$ με περίοδο N_y, αλλά σε αυτή περίπτωση η N_y δεν είναι υποχρεωτικά η θεμελιώδης περίοδος.

Βασικά Σήματα Διακριτού Χρόνου

- Άσκηση: Να υπολογισθεί η περίοδος του $x[n] = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}n\right) + 3\cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right)$

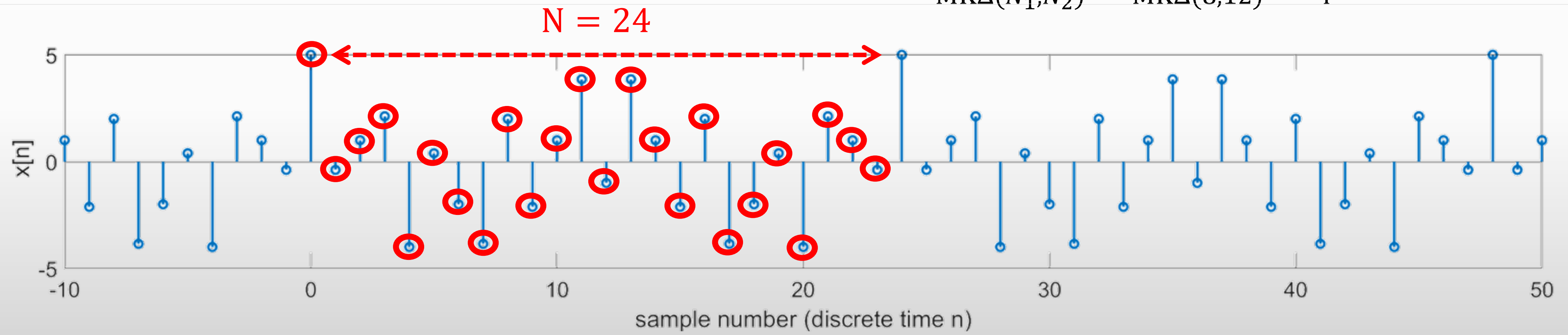
Το $x[n]$ είναι άθροισμα δύο σημάτων $x_1[n] = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}n\right)$,$x_2[n] = 3\cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right)$

Για το $x_1[n] = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}n\right)$: $N_1 = \frac{2\pi}{\omega_o} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$ →περίοδος $N_1 = 12$

Για το $x_2[n] = 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right)$ $N_2 = \frac{2\pi}{\omega_o} = \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{4}} = \frac{8}{3}$ δεν είναι ακέραιος.

→ $N_2 = k\frac{2\pi}{\omega_o} = k\frac{8}{3}$→ μικρότερο k=3 άρα η περίοδος $N_2 = 8$

Άρα το $x[n]$= $x_1[n]$+ $x_2[n]$ είναι περιοδικό με περίοδο $N = \frac{N_1 N_2}{\text{ΜΚΔ}(N_1,N_2)} = \frac{8\cdot 12}{\text{ΜΚΔ}(8,12)} = \frac{96}{4} = 24$

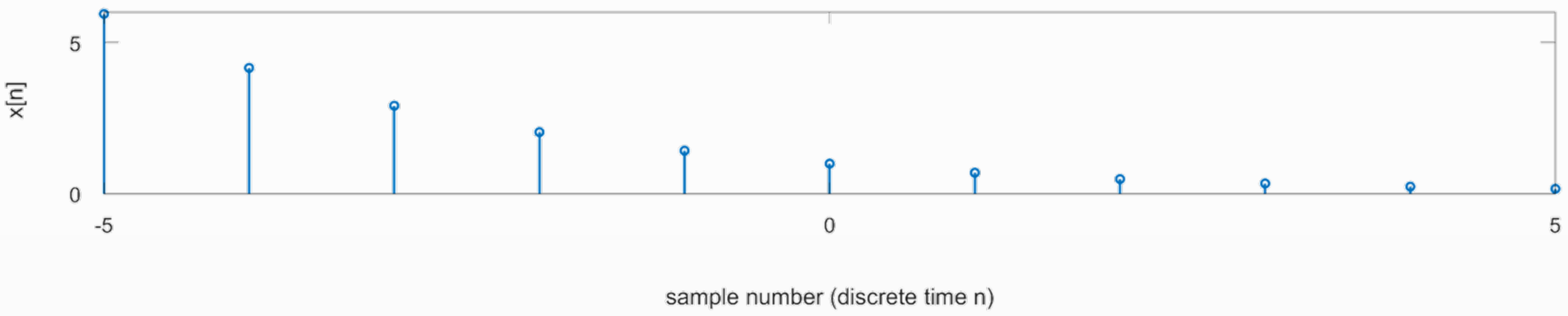


Βασικά Σήματα Διακριτού Χρόνου

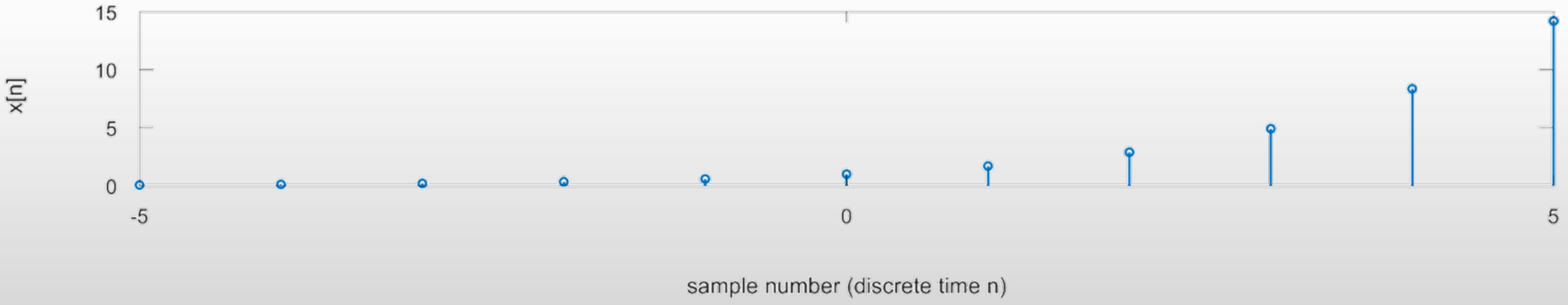
- Πραγματικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου

$$\mathrm{x[n]} = r^n \,, r \in R$$

- $|r| < 1$ φθίνουσα ακολουθία
- $|r| > 1$ αύξουσα ακολουθία
- $|r| = 1,$
    - $\mathrm{x[n]} = 1, \alpha\nu\ r = 1,$ σταθερό σήμα
    - $\mathrm{x[n]} = \pm 1, \alpha\nu\ r = -1$



$$\mathrm{x[n]} = (0.7)^n$$



$$\mathrm{x[n]} = (1.7)^n$$

Βασικά Σήματα Διακριτού Χρόνου

- Φανταστικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου

$$\mathrm{x[n]} = e^{j\cdot\omega_o\cdot n} = \cos(\omega_o \cdot n) + j \cdot sin(\omega_o \cdot n) = |\mathrm{x[n]}| \cdot e^{j\cdot\varphi(n)}$$

$$Re\{\mathrm{x[n]}\} = \cos(\omega_o \cdot n)$$

$$Im\{\mathrm{x[n]}\} = sin(\omega_o \cdot n)$$

$$|\mathrm{x[n]}| = \sqrt{cos^2(\omega_o \cdot n) + sin^2(\omega_o \cdot n)} = 1$$

$$\varphi(n) = \arg(\mathrm{x[n]}) = \arctan\left(\frac{Im\{\mathrm{x[n]}\}}{Re\{\mathrm{x[n]}\}}\right) = \arctan\left(\frac{sin(\omega_o \cdot n)}{\cos(\omega_o \cdot n)}\right) = \arctan(\tan(\omega_o \cdot n)) = \omega_o \cdot n$$

❖ το φανταστικό εκθετικό σήμα έχει γραμμική φάση (ως προς τον χρόνο n)
❖ φανταστικά εκθετικά σήματα με συχνότητες που διαφέρουν 2π είναι ίσα ($e^{j\cdot(\omega_o+2\pi)\cdot n} = e^{j\cdot\omega_o\cdot n} \cdot e^{j\cdot 2\cdot\pi\cdot n} = e^{j\cdot\omega_o\cdot n}$)

Βασικά Σήματα Διακριτού Χρόνου

- Φανταστικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου

$$\mathrm{x}[\mathrm{n}] = e^{j\cdot\omega_o\cdot n} = \cos(\omega_o \cdot n) + j \cdot sin(\omega_o \cdot n) = |\mathrm{x}[\mathrm{n}]| \cdot e^{j\cdot\varphi(n)}$$

❖ Το φανταστικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου δεν είναι πάντα περιοδικό.

Πρέπει :

$$\mathrm{x}[n] = \mathrm{x}[n+N]$$

$$e^{j\cdot\omega_o\cdot n} = e^{j\cdot\omega_o\cdot(n+\mathrm{N})} \rightarrow e^{j\cdot\omega_o\cdot n} = e^{j\cdot\omega_o\cdot n} e^{j\cdot\omega_o\cdot N} \rightarrow e^{j\cdot\omega_o\cdot N} = 1$$

$$\rightarrow \cos(\omega_o \cdot N) + j \cdot sin(\omega_o \cdot N) = 1 + j \cdot 0 \rightarrow \omega_o \cdot N = 2k\pi$$

$\rightarrow \boxed{\omega_o = 2\pi \frac{k}{N}}$ δηλαδή ω_o **ρητό πολλαπλάσιο του** 2π

Μόνο τότε το **φανταστικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου** είναι περιοδικό με **θεμελιώδη περίοδο** $\boldsymbol{N} = \frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{\omega_o}}$ $(k = 1)$

Αν $N = \frac{2\pi}{\omega_o}$ δεν είναι ακέραιος, **τοτε από την** $\mathrm{N} = k\frac{2\pi}{\omega_o}$ βρίσκουμε το μικρότερο $k \in Z$

ώστε το $N = k\frac{2\pi}{\omega_o}$ **να είναι ακέραιος**

Βασικά Σήματα Διακριτού Χρόνου

Παράδειγμα : Είναι περιοδικό το σήμα $\mathrm{x}[\mathrm{n}] = e^{j\cdot\frac{\pi}{4}\cdot n}$

Έχει συχνότητα $\omega_o = \frac{\pi}{4}$. Ρητό πολλαπλάσιο του 2π άρα περιοδικό.

Θεμελιώδης περίοδος $N = \frac{2\pi}{\omega_o} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$

Παράδειγμα : Είναι περιοδικό το σήμα $\mathrm{x}[\mathrm{n}] = e^{j\cdot\pi\cdot\sqrt{3}\cdot n}$

Έχει συχνότητα $\omega_o = \pi \cdot \sqrt{3}$. Δεν είναι ρητό πολλαπλάσιο του 2π άρα δεν είναι περιοδικό.

- Άσκηση : Είναι περιοδικό το σήμα $\mathrm{x}[\mathrm{n}] = e^{j\cdot\frac{\pi}{2}\cdot n} \cdot e^{j\cdot\frac{4\pi}{3}\cdot n}$

Βασικά Σήματα Διακριτού Χρόνου

- Μιγαδικό εκθετικό σήμα διακριτού χρόνου

$$\mathrm{x}[\mathrm{n}] = r^n \cdot e^{j\cdot\omega_o\cdot n} = r^n \cdot [\cos(\omega_o \cdot n) + j \cdot sin(\omega_o \cdot n)] = r^n \cdot e^{j\cdot\varphi(n)}$$

$$Re\{\mathrm{x}[\mathrm{n}]\} = r^n \cdot \cos(\omega_o \cdot n)$$

$$Im\{\mathrm{x}[\mathrm{n}]\} = r^n \cdot sin(\omega_o \cdot n)$$

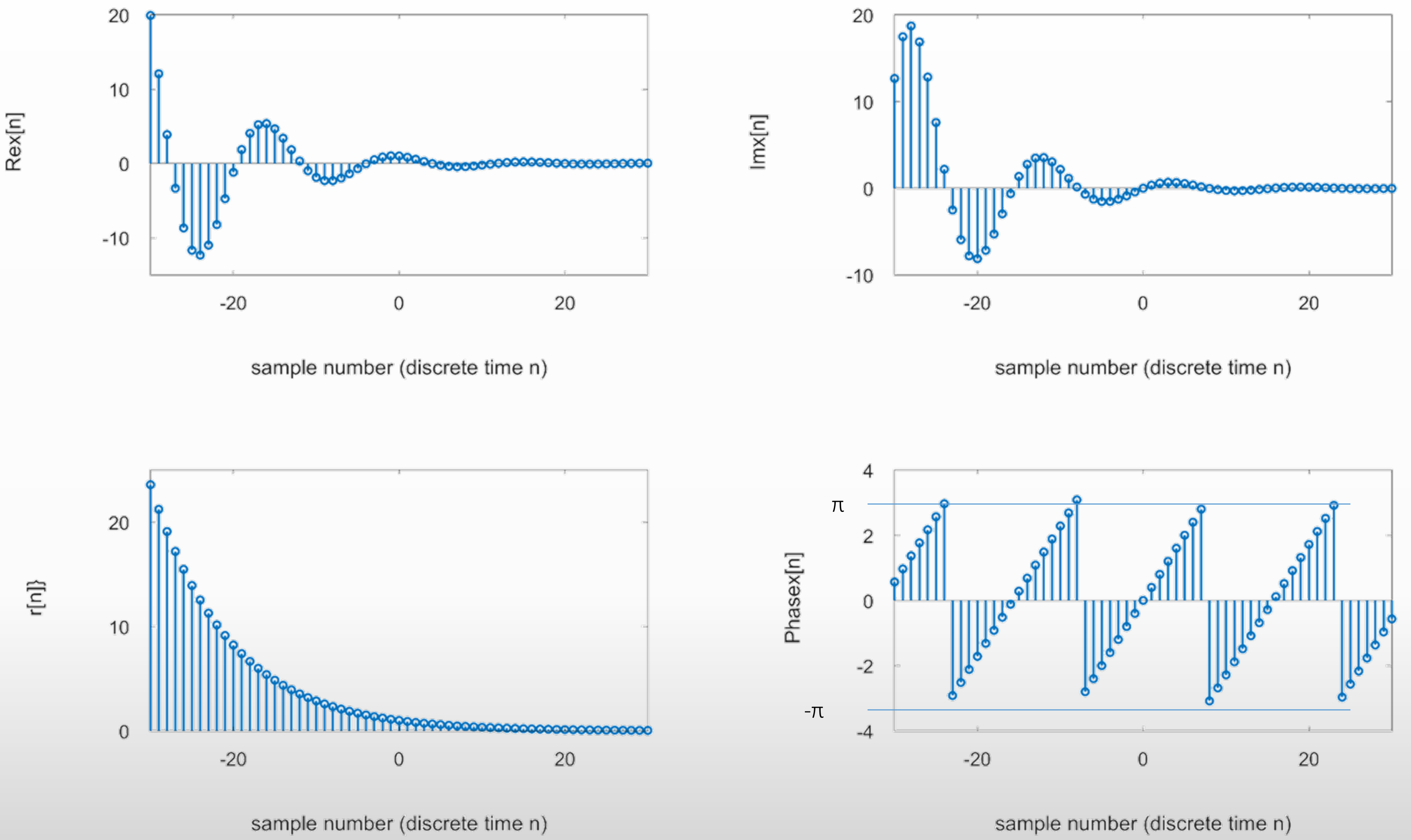
$$|\mathrm{x}[\mathrm{n}]| = r^n$$

$$\varphi(n) = \arg(\mathrm{x}[\mathrm{n}]) = \arctan\left(\frac{Im\{\mathrm{x}[\mathrm{n}]\}}{Re\{\mathrm{x}[\mathrm{n}]\}}\right) = \arctan\left(\frac{r^n \cdot sin(\omega_o \cdot n)}{r^n \cdot \cos(\omega_o \cdot n)}\right) = \arctan(\tan(\omega_o \cdot n)) = \omega_o \cdot n$$

❖ Το μιγαδικό εκθετικό σήμα έχει γραμμική φάση (ως προς τον χρόνο) $\varphi(n) = \omega_o \cdot n$

Βασικά Σήματα Διακριτού Χρόνου

- Παράδειγμα : $\mathrm{x}[\mathrm{n}] = (0.9)^{n} \cdot e^{j \cdot 0.4 \cdot n}$



Ενέργεια & Ισχύς Σημάτων Διακριτού Χρόνου

- Η ενέργεια E ενός σήματος διακριτού χρόνου x$[n]$ είναι :

$$\mathrm{E} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x[n]\cdot x^*[n] = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |x[n]|^2$$

Εάν το σήμα είναι πραγματικό :

$$\mathrm{E} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x^2[n]$$

- Η μέση ισχύς P ενός σήματος διακριτού χρόνου x$[n]$ είναι :

$$\mathrm{P} = \lim_{\mathrm{N}\to\infty}\left[\frac{1}{2\cdot \mathrm{N}+1}\cdot\sum_{n=-\mathrm{N}}^{n=+\mathrm{N}} x[n]\cdot x^*[n]\right] = \lim_{\mathrm{N}\to\infty}\left[\frac{1}{2\cdot \mathrm{N}+1}\cdot\sum_{n=-\mathrm{N}}^{n=+\mathrm{N}} |x[n]|^2\right]$$

Εάν το σήμα είναι πραγματικό :

$$\mathrm{P} = \lim_{\mathrm{N}\to\infty}\left[\frac{1}{2\cdot \mathrm{N}+1}\cdot\sum_{n=-\mathrm{N}}^{n=+\mathrm{N}} x^2[n]\right]$$

Ενέργεια & Ισχύς Σημάτων Διακριτού Χρόνου

- Εάν το σήμα $x[n]$ είναι περιοδικό με περίοδο N τότε η μέση ισχύς P είναι :

$$\mathrm{P}_N = \frac{1}{N} \cdot \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \sum_{n=0}^{n=\mathrm{N}-1} x[n] \cdot x^*[n] = \frac{1}{N} \cdot \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \sum_{n=0}^{n=\mathrm{N}-1} |x[n]|^2$$

Εάν το σήμα είναι πραγματικό :

$$\mathrm{P}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{n=\mathrm{N}-1} x^2[n]$$

Ενέργεια & Ισχύς Σημάτων Διακριτού Χρόνου

- Παράδειγμα : Το σήμα $x[n] = \delta[n] + 8\delta[n-5]$ έχει ενέργεια

$$E = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (\delta[n] + 8\delta[n-5])^2 = 1^2 + 8^2 = 65$$

- Παράδειγμα : Το σήμα $x[n] = 1/2$ έχει ισχύ

$$P = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{2\cdot N+1}\cdot\sum_{n=-N}^{n=+N} x^2[n]\right]$$

Υπολογίζουμε πρώτα το άθροισμα

$$\sum_{n=-N}^{n=+N} x^2[n] = \sum_{n=-N}^{n=+N}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \sum_{n=-N}^{n=+N}\frac{1}{4} = (2\cdot N+1)\cdot\frac{1}{4}$$

Άρα το σήμα $x[n] = 1/2$ έχει ισχύ

$$P = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{2\cdot N+1}\cdot\sum_{n=-N}^{n=+N} x^2[n]\right] = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{2\cdot N+1}\cdot(2\cdot N+1)\cdot\frac{1}{4}\right] = \frac{1}{4}$$

Ενέργεια & Ισχύς Σημάτων Διακριτού Χρόνου

- Ένα σήμα λέγεται σήμα ενέργειας, εάν έχει πεπερασμένη ενέργεια $\mathrm{E} < +\infty$ και μηδενική ισχύ $P = 0$
    - Σήμα με πεπερασμένη διάρκεια και πεπερασμένο πλάτος → σήμα ενέργειας
    - Σήμα με άπειρη διάρκεια και πεπερασμένο πλάτος που φθίνει στο μηδέν για $n \to \pm\infty$ → μάλλον σήμα ενέργειας
    - Τα πρακτικά σήματα είναι σήματα ενέργειας

- Ένα σήμα λέγεται σήμα ισχύος, εάν έχει πεπερασμένη ισχύ $P < +\infty$ και άπειρη ενέργεια $\mathrm{E} = +\infty$
    - Σήμα με άπειρη διάρκεια και πεπερασμένο πλάτος που δεν φθίνει στο μηδέν για $n \to \pm\infty$ → σήμα ισχύος
    - Περιοδικό σήμα με πεπερασμένο πλάτος → σήμα ισχύος

Ενέργεια & Ισχύς Σημάτων Διακριτού Χρόνου

- Παράδειγμα : Το σήμα $u[n]$ έχει ενέργεια

$$\mathrm{E} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} [u[n]]^2 = \sum_{n=-\infty}^{n=-1} 0^2 + \sum_{n=0}^{n=+\infty} 1^2 = \sum_{n=0}^{n=+\infty} 1 = +\infty$$

- Επίσης

$$\sum_{n=-\mathrm{N}}^{n=+\mathrm{N}} x^2[n] = \sum_{n=-\mathrm{N}}^{n=+\mathrm{N}} [u[n]]^2 = \sum_{n=-\mathrm{N}}^{n=-1} 0^2 + \sum_{n=0}^{n=+\mathrm{N}} 1^2 = \sum_{n=0}^{n=+\mathrm{N}} 1^2 = \mathrm{N}+1$$

Άρα το σήμα $u[n]$ έχει ισχύ

$$\mathrm{P} = \lim_{\mathrm{N}\to\infty}\left[\frac{1}{2\cdot\mathrm{N}+1}\cdot\sum_{n=-\mathrm{N}}^{n=+\mathrm{N}} x^2[n]\right] = \mathrm{P} = \lim_{\mathrm{N}\to\infty}\left[\frac{1}{2\cdot\mathrm{N}+1}\cdot\sum_{n=-\mathrm{N}}^{n=+\mathrm{N}} [u[n]]^2\right] = \lim_{\mathrm{N}\to\infty}\left[\frac{1}{2\cdot\mathrm{N}+1}\cdot(\mathrm{N}+1)\right]$$

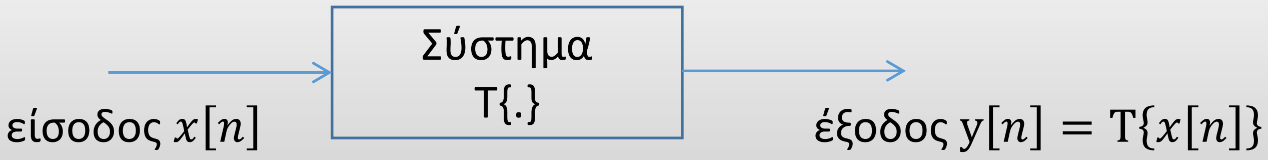
$$\to \mathrm{P} = \lim_{\mathrm{N}\to\infty}\left[\frac{1+\frac{1}{\mathrm{N}}}{2+\frac{1}{\mathrm{N}}}\right] = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} E = +\infty \\ P = \frac{1}{2} \\ u[n] \text{ σήμα ισχύος} \end{array}}$$

Πράξεις Σημάτων Διακριτού Χρόνου

- διακρίνονται σε :
  - πράξεις μετασχηματισμού πλάτους (μετασχηματισμοί της εξαρτημένης μεταβλητής y=$x[n]$)
    - Πρόσθεση
    - Πολλαπλασιασμός
    - Κλιμάκωση στο πλάτος
  - πράξεις μετασχηματισμού χρόνου (μετασχηματισμοί της ανεξάρτητης μεταβλητής $\boldsymbol{n}$)
    - Μετατόπιση ή ολίσθηση
    - Αναδίπλωση ή ανάκλαση
    - Κλιμάκωση στο χρόνο
  - **Συνέλιξη** (μεταβάλλεται τόσο το πλάτος, όσο και ο χρόνος)

- Οι πράξεις εφαρμόζονται στα σήματα από συστήματα διακριτού χρόνου με σκοπό να εξαχθεί πληροφορία



Πράξεις μετασχηματισμού πλάτους - Πρόσθεση

- Πρόσθεση δύο σημάτων διακριτού χρόνου

$\boldsymbol{x_1[n]}$ με διάρκεια $[\mathbf{A_1}, \mathbf{T_1}], \mathbf{A_1} \leq \mathbf{T_1}, \mathbf{A_1}, \mathbf{T_1} \in \mathbf{Z}$
$\boldsymbol{x_2[n]}$ με διάρκεια $[\mathbf{A_2}, \mathbf{T_2}], \mathbf{A_2} \leq \mathbf{T_2}, \mathbf{A_2}, \mathbf{T_2} \in \mathbf{Z}$

παράγει ένα νέο σήμα $\mathrm{x}[n]$ με πλάτος το άθροισμα των πλατών των σημάτων που προστίθενται:

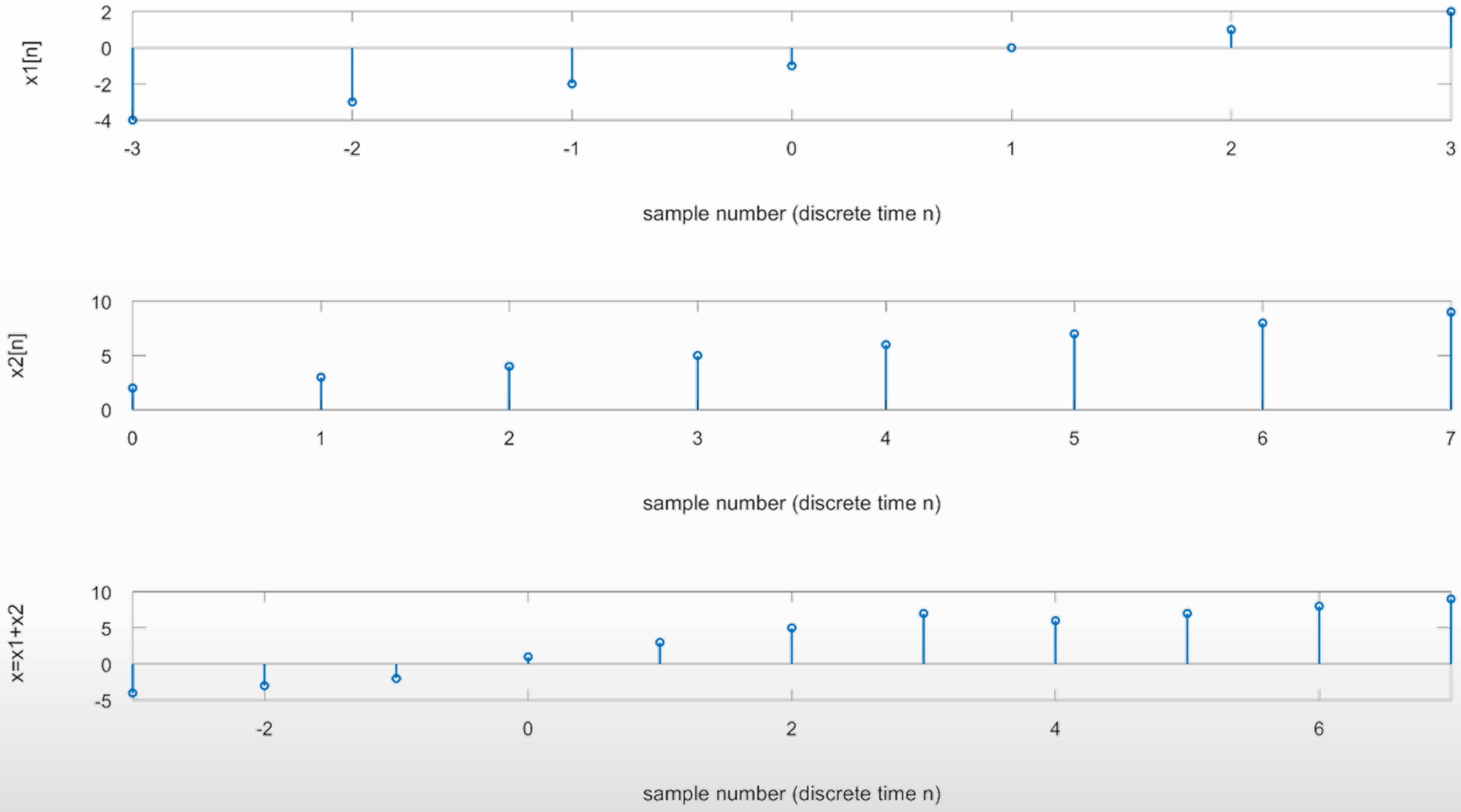
$$x[n] = x_1[n] + x_2[n]$$

και διάρκεια το διάστημα $[\mathbf{A}, \mathbf{T}] = [\boldsymbol{min}(\mathbf{A_1}, \boldsymbol{A_2}), \boldsymbol{max}(\boldsymbol{T_1}, \mathbf{T_2})]$

Το άθροισμα υπάρχει στην **ένωση** των διαστημάτων χρόνου των σημάτων που αθροίζονται.

- ❖ Αν τα διαστήματα χρόνου των σημάτων που αθροίζονται είναι **ξένα** μεταξύ τους (**η τομή τους είναι κενό**), τότε το άθροισμα στο διάστημα χρόνου ανάμεσα σε αυτά τα διαστήματα χρόνου είναι **μηδέν**

Πράξεις μετασχηματισμού πλάτους - Πρόσθεση

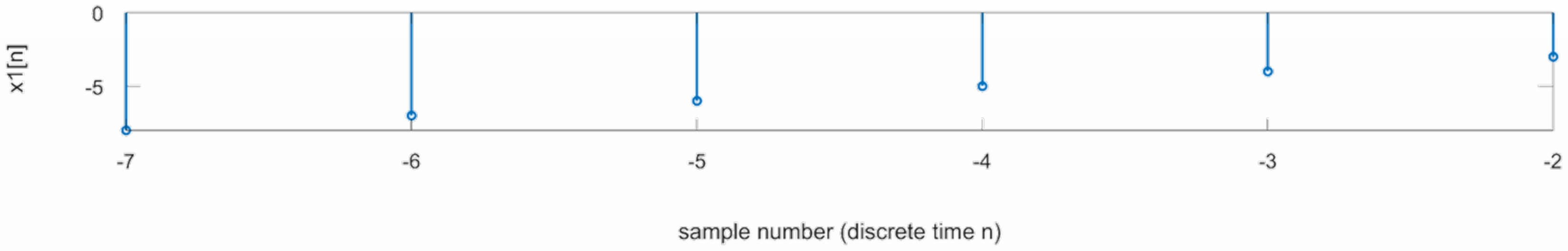


$$x_1[n] = \mathrm{n} - 1, \mathrm{n} \in [-3,3]$$

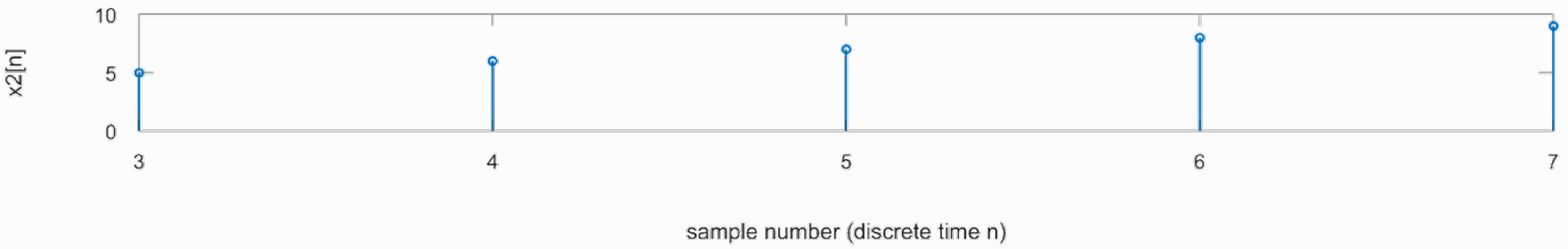
$$x_2[n] = \mathrm{n} + 2, \mathrm{n} \in [0,7]$$

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n],$$
$$\mathrm{n} \in [-3,7]$$

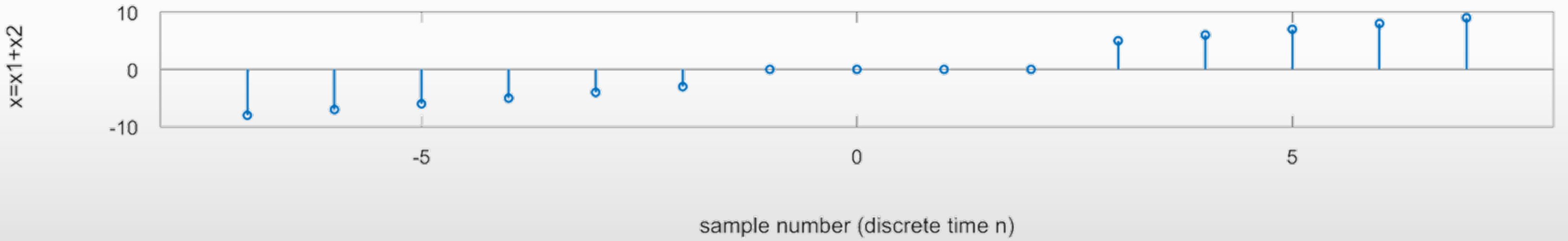
Πράξεις μετασχηματισμού πλάτους - Πρόσθεση



$$x_1[n] = \mathrm{n} - 1, \mathrm{n} \in [-7, -2]$$



$$x_2[n] = \mathrm{n} + 2, \mathrm{n} \in [3,7]$$



$$x[n] = x_1[n] + x_2[n],$$
$$\mathrm{n} \in [-7,7]$$

Πράξεις μετασχηματισμού πλάτους - Πολλαπλασιασμός

- **Πολλαπλασιασμός** δύο σημάτων διακριτού χρόνου

$\boldsymbol{x_1[n]}$ με διάρκεια $[\mathbf{A_1}, \mathbf{T_1}], \mathbf{A_1} \leq \mathbf{T_1}, \mathbf{A_1}, \mathbf{T_1} \in \mathbf{Z}$
$\boldsymbol{x_2[n]}$ με διάρκεια $[\mathbf{A_2}, \mathbf{T_2}], \mathbf{A_2} \leq \mathbf{T_2}, \mathbf{A_2}, \mathbf{T_2} \in \mathbf{Z}$

παράγει ένα νέο σήμα $\mathrm{x}[n]$ με πλάτος το γινόμενο των πλατών των σημάτων που πολλαπλασιάζονται:

$$x[n] = x_1[n] \cdot x_2[n]$$

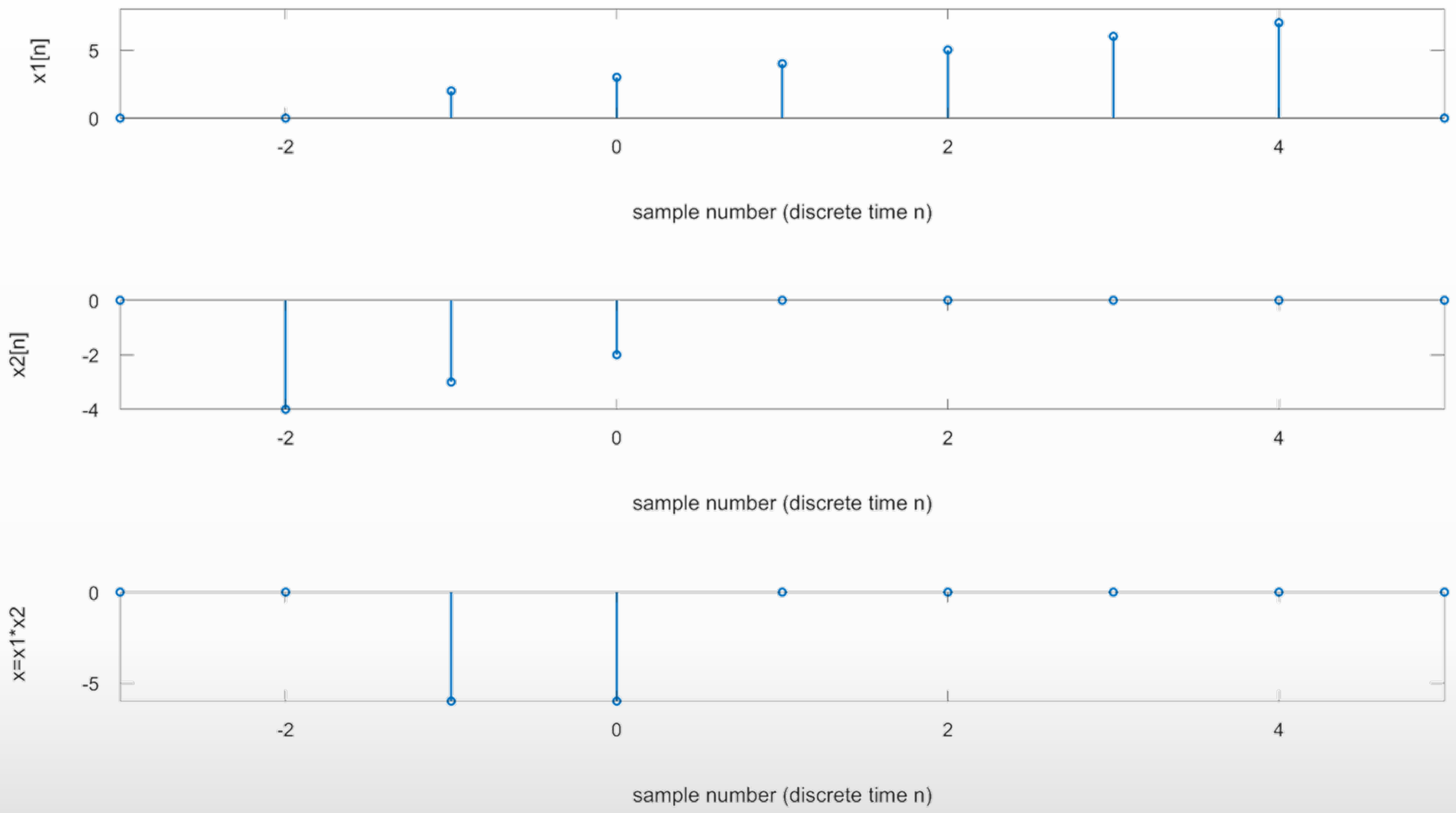
και διάρκεια το διάστημα $[\mathbf{A}, \mathbf{T}] = [\boldsymbol{max}(\mathbf{A_1}, \boldsymbol{A_2}), \boldsymbol{min}(\boldsymbol{T_1}, \mathbf{T_2})]$

Το γινόμενο υπάρχει στην **τομή** των διαστημάτων χρόνου των σημάτων που πολλαπλασιάζονται.

- Αν τα διαστήματα χρόνου των σημάτων που πολλαπλασιάζονται είναι ξένα μεταξύ τους, τότε το γινόμενο είναι μηδέν ($\delta[\mathrm{n} - \kappa] \cdot \delta[\mathrm{n} - \lambda] \neq 0 \ \text{οταν}\ \kappa = \lambda$)

- Ο πολλαπλασιασμός ενός αμφίπλευρου σήματος $x[n]$ επί τη βηματική $\mathrm{u}[n]$ παράγει ένα σήμα που αποτελείται από τις τιμές του σήματος $x[n]$ για $n \geq 0$.

Πράξεις μετασχηματισμού πλάτους - Πολλαπλασιασμός



$$x_1[n] = \mathrm{n} + 3, \mathrm{n} \in [-1,4]$$

$$x_2[n] = \mathrm{n} - 2, \mathrm{n} \in [-2,0]$$

$$x[n] = x_1[n] \cdot x_2[n],$$
$$\mathrm{n} \in [-1,0]$$

Πράξεις μετασχηματισμού πλάτους - Κλιμάκωση

- **κλιμάκωση** ενός σήματος διακριτού χρόνου

$\boldsymbol{x[n]}$ με διάρκεια $[\mathbf{A_1}, \mathbf{T_1}], \mathbf{A_1} \leq \mathbf{T_1}, \mathbf{A_1}, \mathbf{T_1} \in \boldsymbol{Z}$

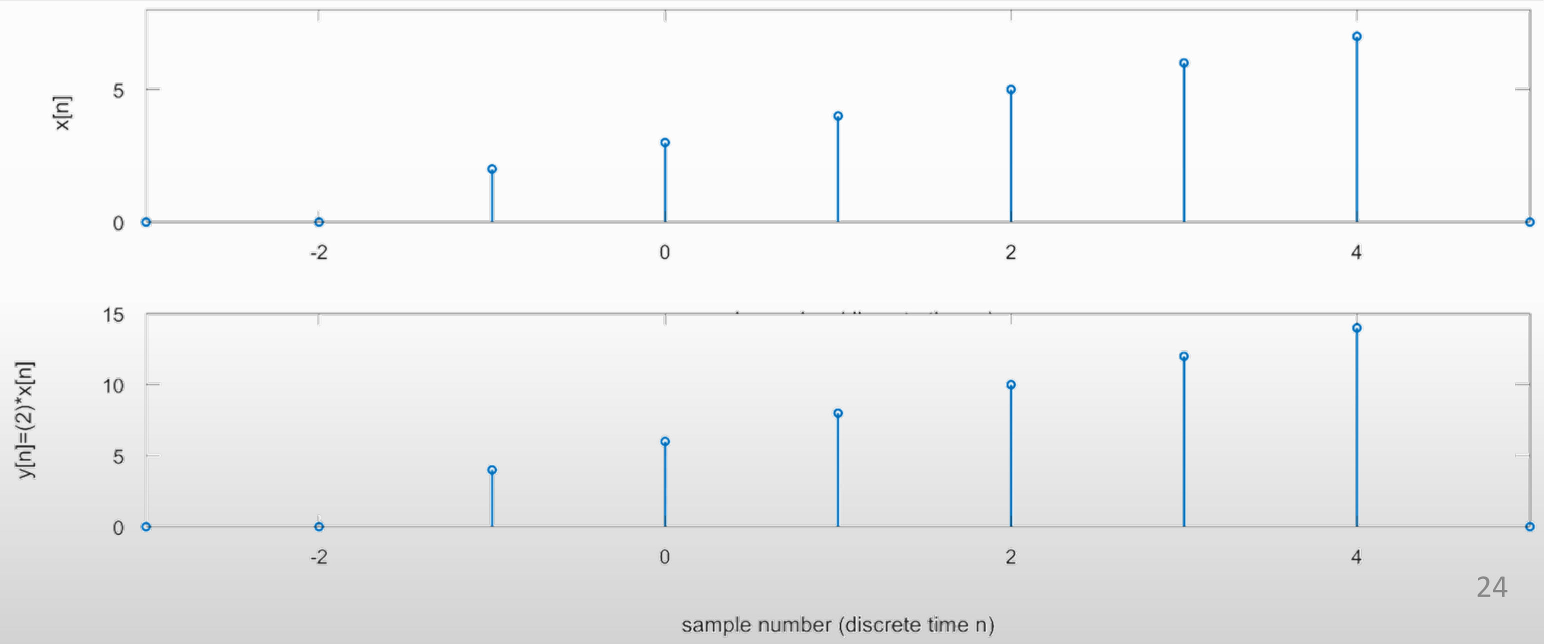
παράγει ένα νέο σήμα $\mathrm{y}[n]$ με πλάτος το πλάτος του σήματος $\boldsymbol{x[n]}$ πολλαπλασιασμένο επί έναν πραγματικό συντελεστή $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}$:

$$y[n] = c \cdot x[n]$$

και διάρκεια το διάστημα $[\mathbf{A_1}, \mathbf{T_1}]$ (ίδια διάρκεια με το σήμα $\boldsymbol{x[n]}$).

$x[n] = \mathrm{n} + 3, \mathrm{n} \in [-1,4]$

$y[n] = 2 \cdot x[n], \mathrm{n} \in [-1,4]$



Πράξεις μετασχηματισμού χρόνου - Ολίσθηση

- Ολίσθηση ή μετατόπιση ενός σήματος διακριτού χρόνου

  $\boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}]$ με διάρκεια $[\mathbf{A_1}, \mathbf{T_1}], \mathbf{A_1} \leq \mathbf{T_1}, \mathbf{A_1}, \mathbf{T_1} \in \boldsymbol{Z}$

  παράγει ένα νέο σήμα $\mathrm{y}[n]$ με πλάτος το πλάτος του σήματος $\boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}]$ μετατοπισμένο δεξιά ή αριστερά κατά $\boldsymbol{n_o}$ χρονικές στιγμές

$$y[n] = x[n - n_o]$$

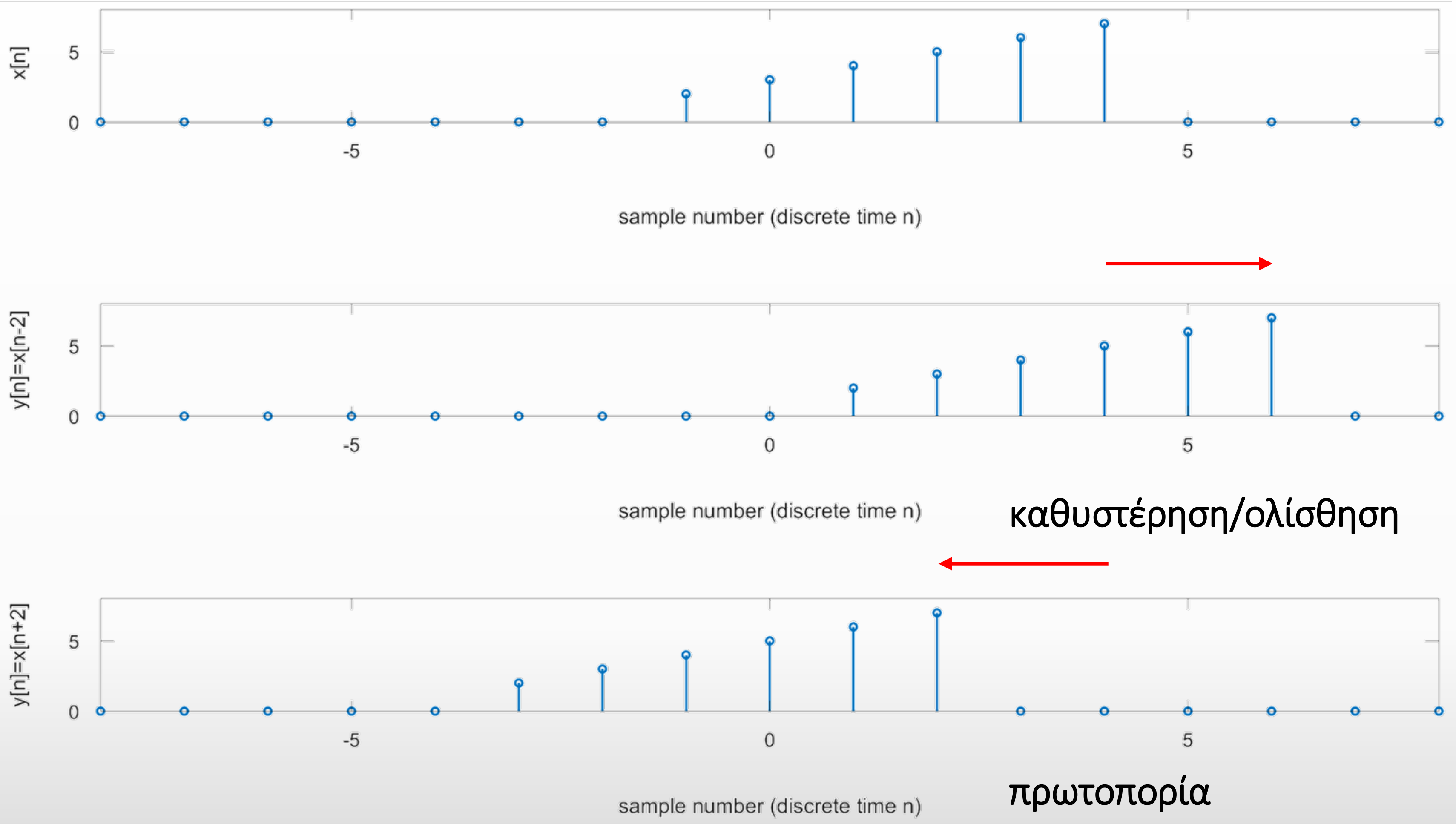
  και διάρκεια το διάστημα $[\mathbf{A_1} + \boldsymbol{n_o}, \mathbf{T_1} + \boldsymbol{n_o}]$.

❖ $\boldsymbol{n_o} > \mathbf{0}$, μετατόπιση προς τα δεξιά → καθυστέρηση

❖ $\boldsymbol{n_o} < \mathbf{0}$, μετατόπιση προς τα αριστερά → πρωτοπορία

❖ $\boldsymbol{n_o} = \mathbf{0}$, το σήμα δεν μετατοπίζεται.

Πράξεις μετασχηματισμού χρόνου - Ολίσθηση



$x[n] = \mathrm{n} + 3, \mathrm{n} \in [-1,4]$

$y[n] = \mathrm{x}[\mathrm{n} - 2]$

καθυστέρηση/ολίσθηση

$y[n] = \mathrm{x}[\mathrm{n} + 2]$

πρωτοπορία

Πράξεις μετασχηματισμού χρόνου - Ανάκλαση

- **Ανάκλαση ή αναδίπλωση (fold ή time reversal)** είναι η πράξη με την οποία παράγεται το συμμετρικό σήμα ως προς τον άξονα των τεταγμένων (άξονα πλάτους) ενός σήματος διακριτού χρόνου

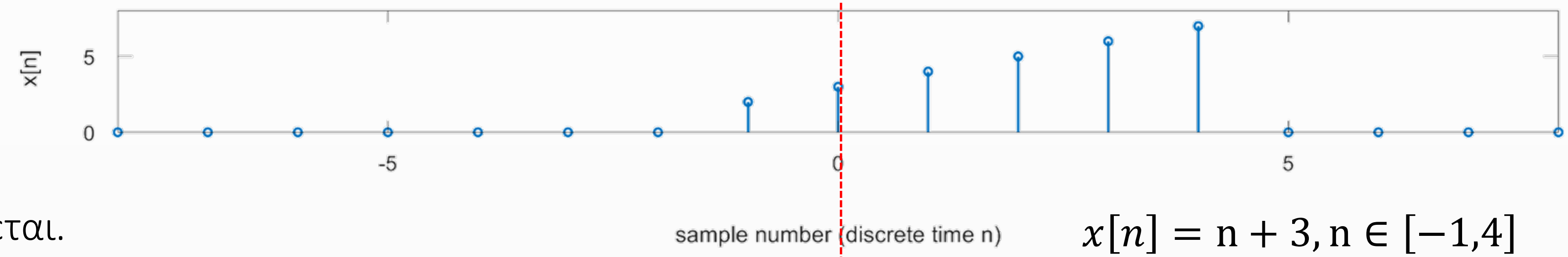
  $\boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}]$ με διάρκεια $[\mathbf{A_1}, \mathbf{T_1}], \mathbf{A_1} \leq \mathbf{T_1}, \mathbf{A_1}, \mathbf{T_1} \in \boldsymbol{Z}$

  Δηλαδή παράγεται ένα νέο σήμα $\mathbf{y}[n]$

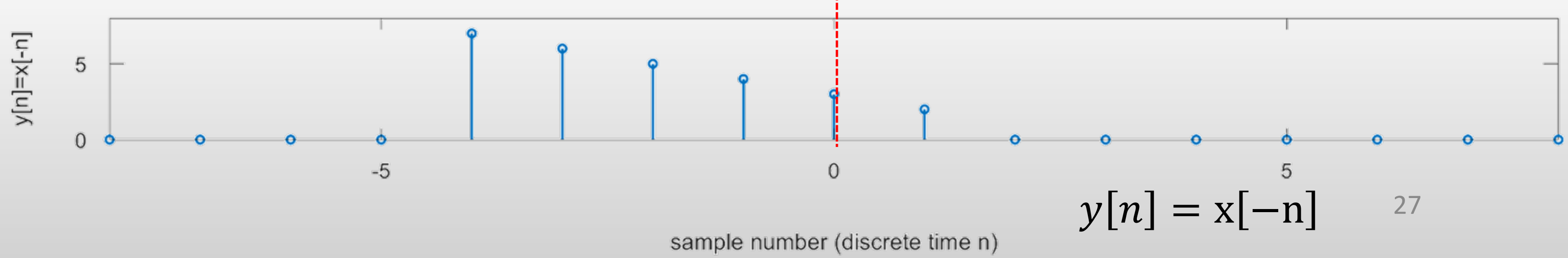
$$y[n] = x[-n]$$

  και διάρκεια το διάστημα $[-\mathbf{T_1}, -\mathbf{A_1}]$.

❖ $x[0]$, αν υπάρχει, δεν μεταβάλλεται.



$x[n] = \mathrm{n} + 3, \mathrm{n} \in [-1,4]$



$y[n] = \mathrm{x}[-\mathrm{n}]$

Πράξεις μετασχηματισμού χρόνου - Κλιμάκωση

- **Κλιμάκωση στο χρόνο** είναι ενός σήματος διακριτού χρόνου $\boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}]$ είναι η πράξη με την οποία παράγεται ένα νέο σήμα $y[n]$:

$$y[n] = x[c \cdot n]$$

❖ Αν $c = \mathrm{M}, \mathrm{M} \in \mathrm{N}, \mathrm{M} \neq 0$: **διαίρεση συχνότητας (downsampling) «**δειγματοληψία» του σήματος κάθε M χρονικές στιγμές.

❖ Αν $c = \frac{1}{M}, \mathrm{M} \in \mathrm{N}, \mathrm{M} \neq 0,$: **πολλαπλασιασμό συχνότητας (upsampling)** «άπλωμα» του σήματος κάθε M χρονικές στιγμές.

- ❖ $\boxed{Εάν \frac{n}{M} \notin Z \rightarrow y[n] = x\left[\frac{n}{M}\right] = 0}$

❖ $x[0]$,αν υπάρχει, δεν μεταβάλλεται.

❖ Αν $\mathrm{c} = 1 \rightarrow y[n] = x[n]$.

Πράξεις μετασχηματισμού χρόνου - Κλιμάκωση

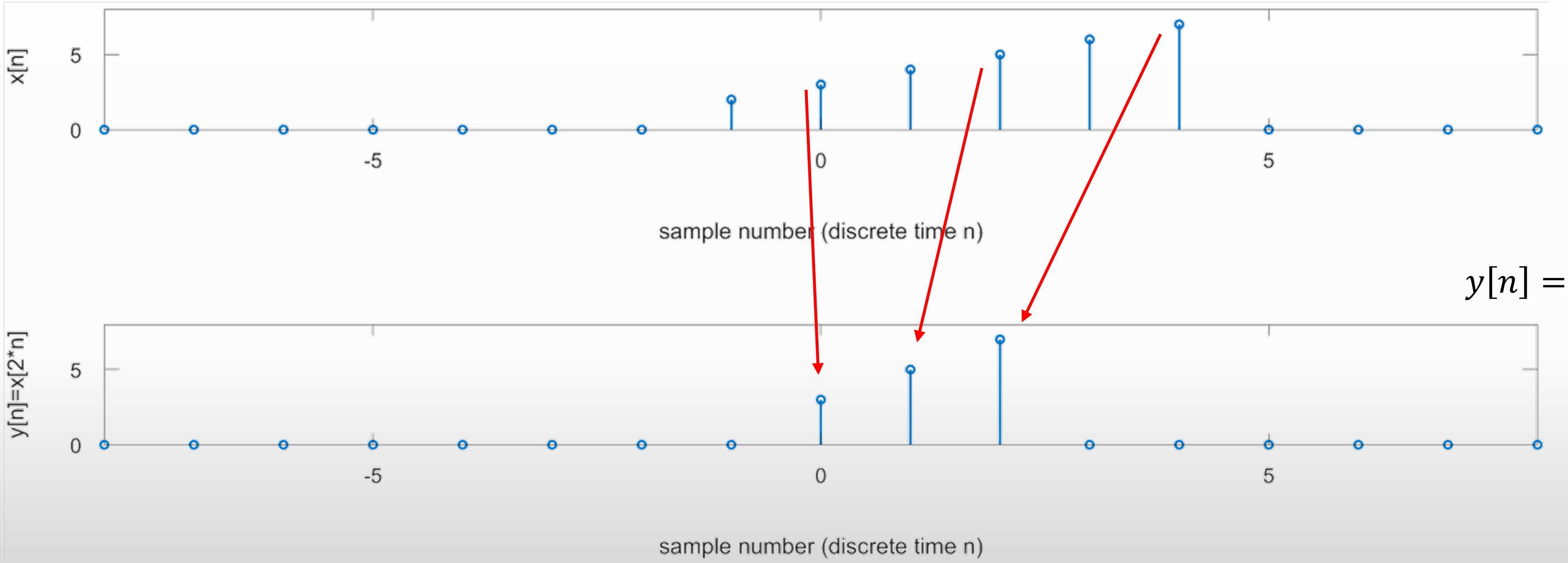
- Αν $c = \mathrm{M}, \mathrm{M} \in \mathrm{N}, \mathrm{M} \neq 0$: διαίρεση συχνότητας (downsampling) «δειγματοληψία» του σήματος κάθε Μ χρονικές στιγμές.

- $x[0]$,αν υπάρχει, δεν μεταβάλλεται.

$$x[n] = \mathrm{n} + 3, \mathrm{n} \in [-1,4]$$

$$M = 2$$

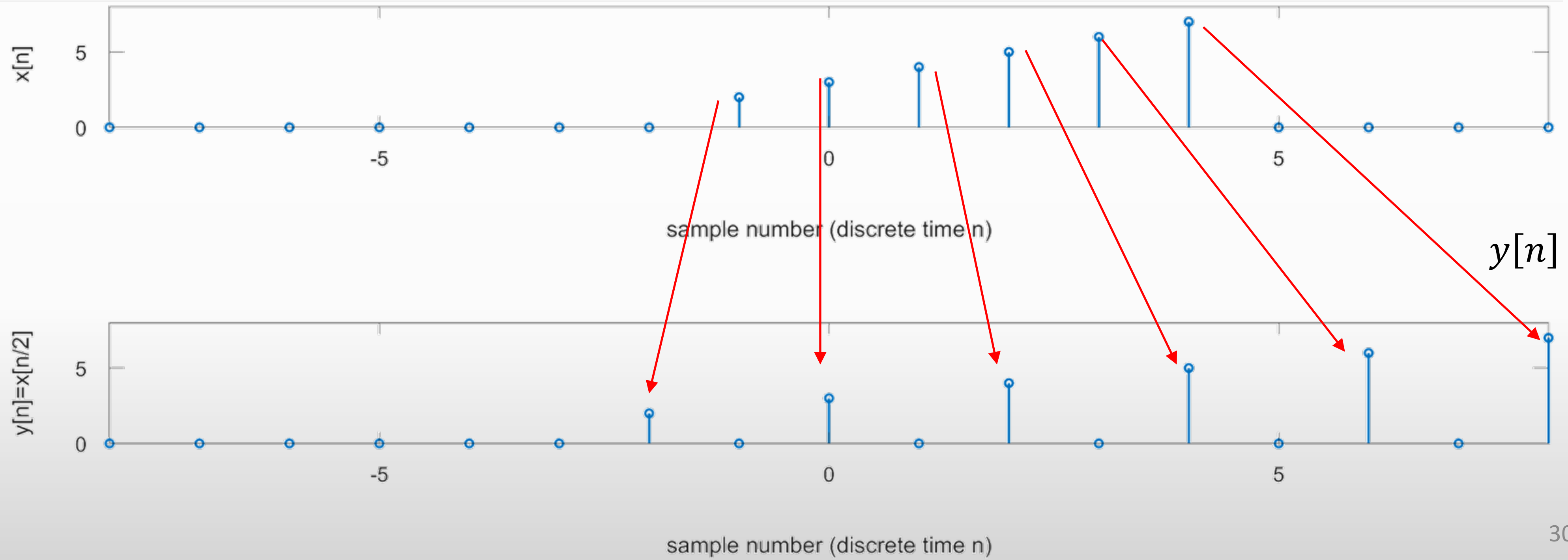
$$y[n] = \mathrm{x}[2 \cdot \mathrm{n}]$$



Πράξεις μετασχηματισμού χρόνου - Κλιμάκωση

- Αν $c = \frac{1}{M}, \mathrm{M} \in \mathrm{N}, \mathrm{M} \neq 0,$: **πολλαπλασιασμό συχνότητας (upsampling)** «άπλωμα» του σήματος κάθε M χρονικές στιγμές.
  - $E\acute{\alpha}\nu\ \frac{n}{M} \notin Z \rightarrow y[n] = x\left[\frac{n}{M}\right] = 0$
- $x[0]$,αν υπάρχει, δεν μεταβάλλεται.

$x[n] = \mathrm{n} + 3, \mathrm{n} \in [-1,4]$



$M = 2$

$y[n] = \mathrm{x}\left[\frac{n}{2}\right]$

Πράξεις μετασχηματισμού χρόνου – ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΤΗ ΣΕΙΡΑ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ

- Οι πράξεις μετασχηματισμού χρόνου (**μετασχηματισμοί της ανεξάρτητης μεταβλητής**) γενικά δεν αντιμετατίθενται

→Η σειρά με την οποία εφαρμόζονται οι πράξεις καθορίζει το τελικό αποτέλεσμα!

Για παράδειγμα, θεωρώ σήμα διακριτού χρόνου $\mathrm{x}[n]$.

Εκτελώ ολίσθηση στο σήμα κατά n_oκαι αναδίπλωση.

$$x[n] \xrightarrow{ολισθηση} x[n-n_o] \xrightarrow{αναδιπλωση} x[(-n)-n_o] = x[-n-n_o]$$

$$x[n] \xrightarrow{αναδιπλωση} x[-n] \xrightarrow{ολισθηση} x[-(n-n_o)] = x[-n+n_o]$$

Οι δύο σειρές πράξεων δεν δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα → άρα οι πράξεις δεν αντιμετατίθενται!

Πράξεις μετασχηματισμού χρόνου

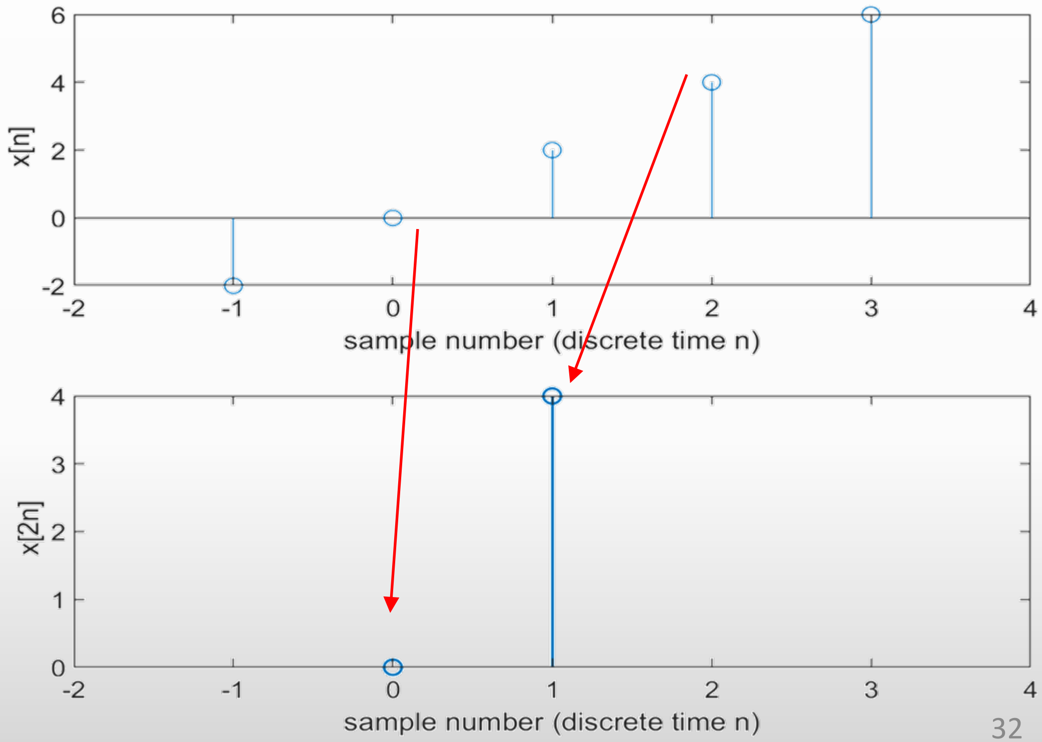
- **Παράδειγμα**: Έστω η $x[n] = 2\mathrm{n}, \mathrm{n} \in [-1{,}3]$. Να βρεθεί η $\mathrm{x}[2n]$

❖ $x[n] = \begin{cases} 2\mathrm{n},, -1 \leq n \leq 3\ , n \in Z \\ 0, \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases} \rightarrow$

$$x[2n] = \begin{cases} 2(2\mathrm{n}), -1 \leq 2n \leq 3\ , n \in Z \\ 0, \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases} \rightarrow$$

$$x[2n] = \begin{cases} 4\mathrm{n}, -\frac{1}{2} \leq n \leq \frac{3}{2}\ , n \in Z \\ 0, \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases} \rightarrow$$

$$x[2n] = \begin{cases} 4\mathrm{n}, 0 \leq n \leq 1\ , n \in Z \\ 0, \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases} \rightarrow x[2n] = 4\mathrm{n}, \mathrm{n} \in [0{,}1]$$



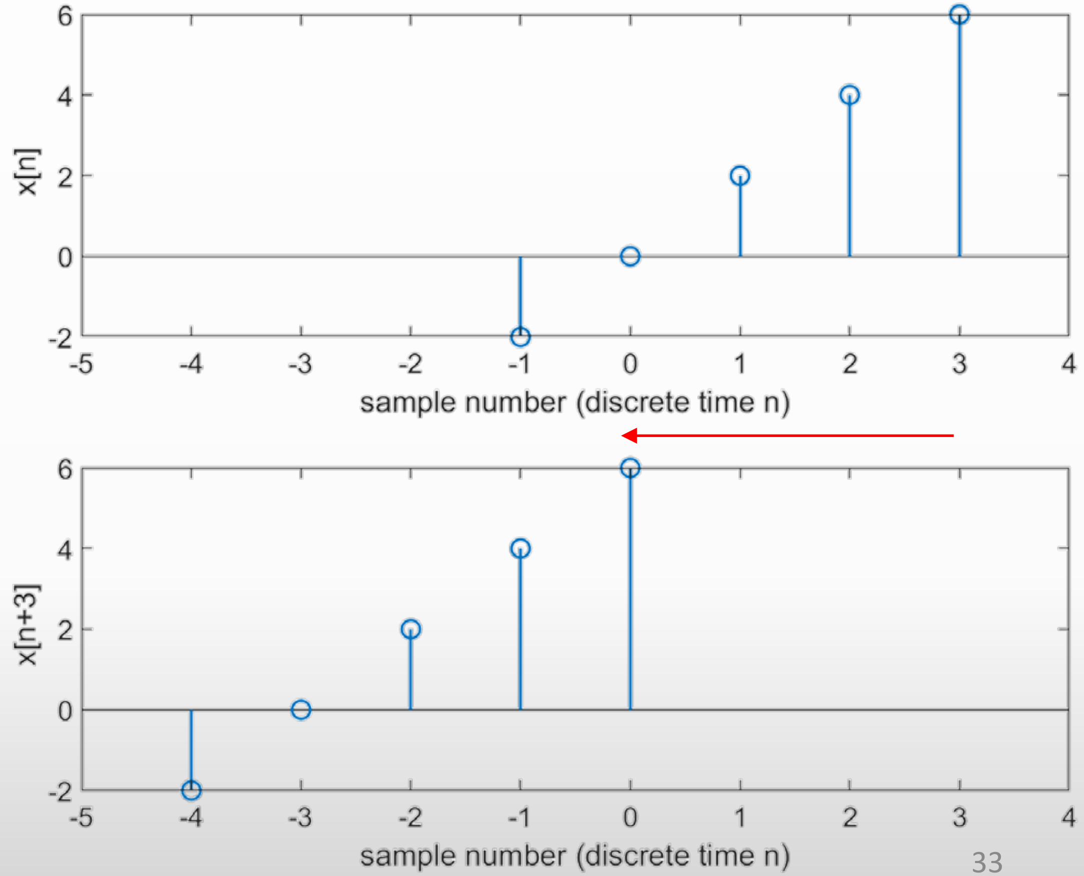
Πράξεις μετασχηματισμού χρόνου

- **Παράδειγμα**: Έστω η $x[n] = 2\mathrm{n}, \mathrm{n} \in [-1,3]$. Να βρεθεί η $\mathrm{x}[\mathrm{n}+3]$

❖ $x[n] = \begin{cases} 2\mathrm{n}, -1 \leq n \leq 3\,, n \in Z \\ 0, \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases} \rightarrow x[n+3] = \begin{cases} 2(\mathrm{n}+3), -1 \leq n+3 \leq 3\,, n \in Z \\ 0, \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases} \rightarrow$

$$x[n+3] = \begin{cases} 2\mathrm{n}+6, -1-3 \leq n \leq 3-3\,, n \in Z \\ 0, \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases} \rightarrow$$

$$x[n+3] = \begin{cases} 2\mathrm{n}+6, -4 \leq n \leq 0\,, n \in Z \\ 0, \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$



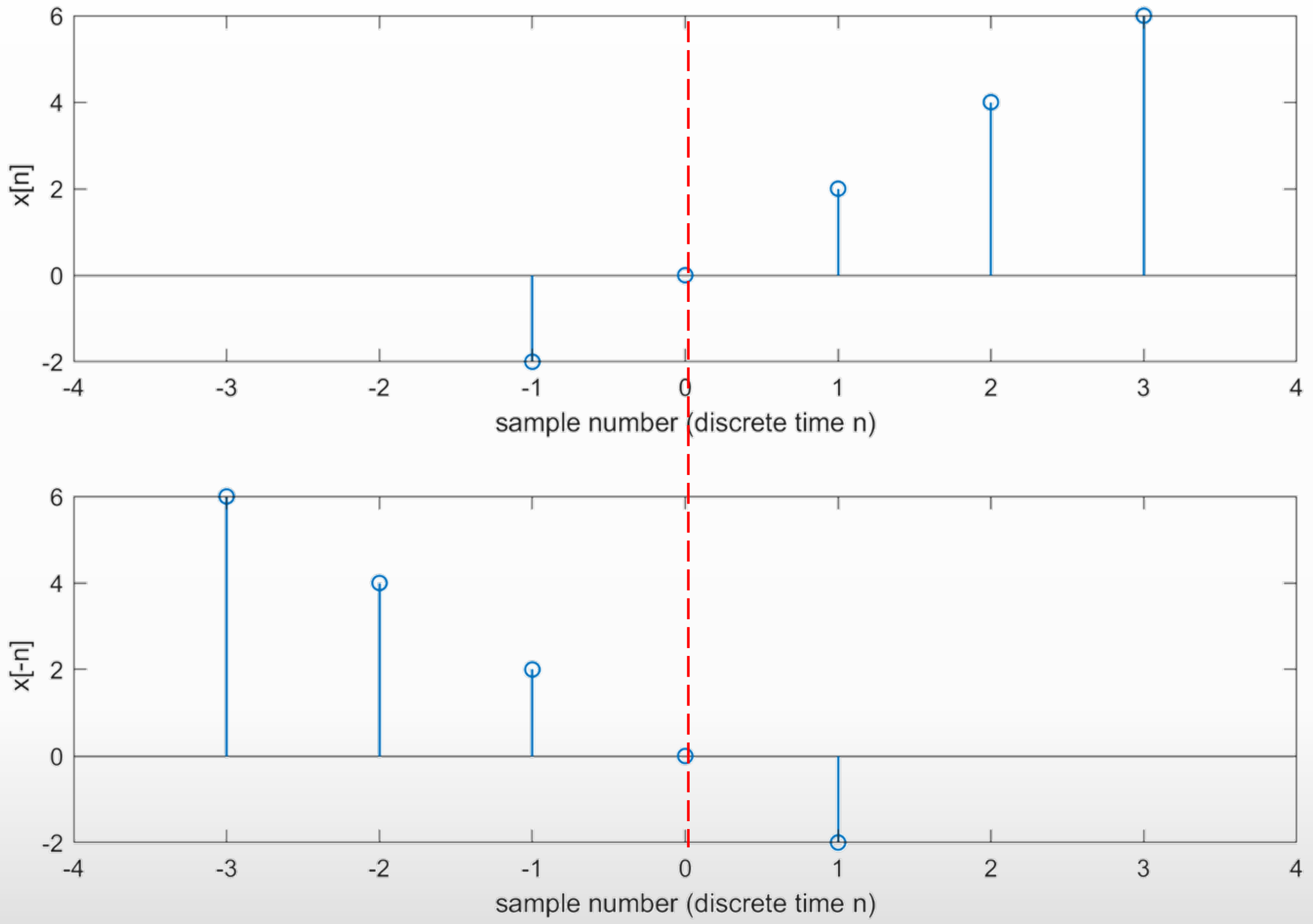
Πράξεις μετασχηματισμού χρόνου

- **Παράδειγμα**: Έστω η $x[n] = 2\mathrm{n}, \mathrm{n} \in [-1,3]$. Να βρεθεί η $\mathrm{x}[-\mathrm{n}]$

❖ $x[n] = \begin{cases} 2\mathrm{n}, -1 \leq n \leq 3 \,, n \in Z \\ 0, \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases} \rightarrow$

$x[-n] = \begin{cases} 2(-\mathrm{n}), -1 \leq -n \leq 3 \,, n \in Z \\ 0, \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases} \rightarrow$

$x[-n] = \begin{cases} -2\mathrm{n}, -3 \leq n \leq 1 \,, n \in Z \\ 0, \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$



Πράξεις μετασχηματισμού χρόνου

- Παράδειγμα (<u>συνέχεια</u>): Έστω η $x[n] = 2\mathrm{n}, \mathrm{n} \in [-1{,}3]$. Να βρεθεί η $\mathrm{x}\left[\frac{n}{2}\right]$

❖ $x[n] = \begin{cases} 2\mathrm{n}, -1 \le n \le 3\,, n \in Z \\ 0, \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases} \rightarrow$

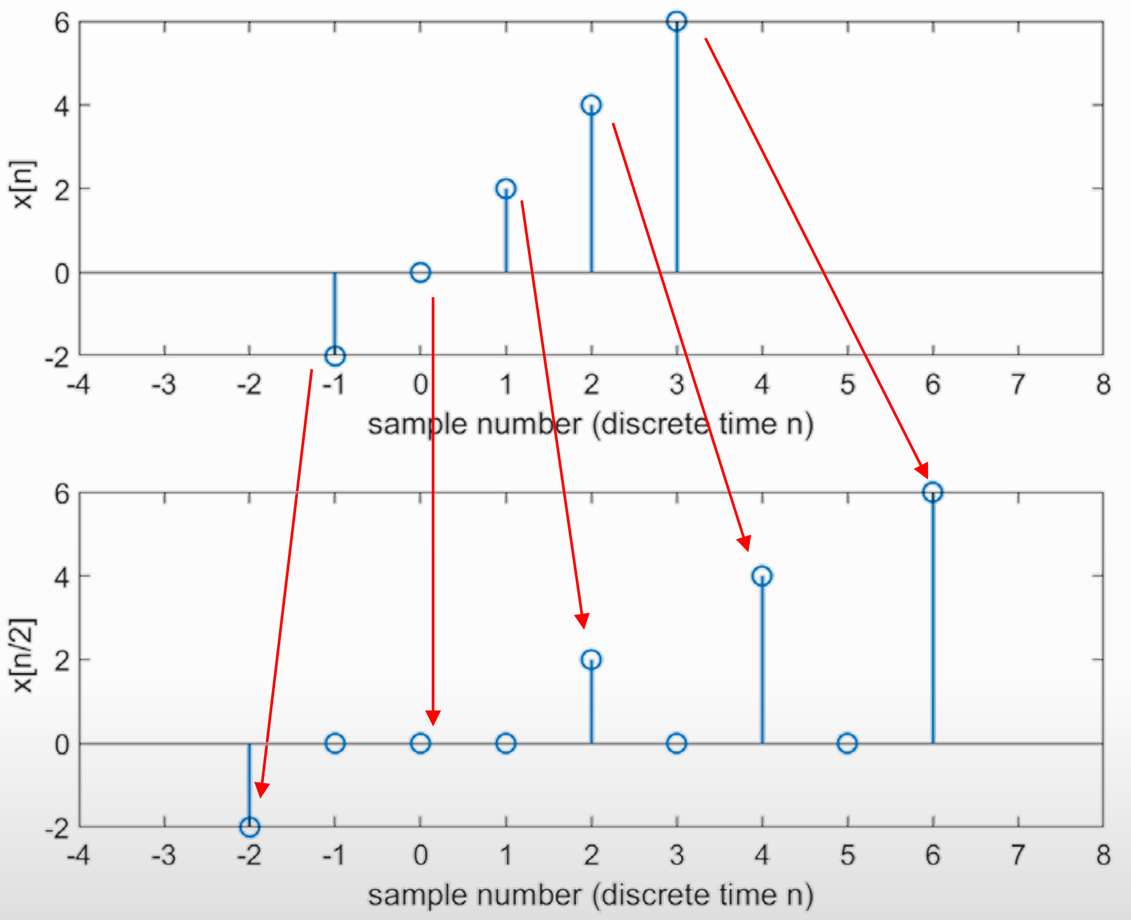
$$x\left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} 2\left(\frac{n}{2}\right), -1 \le \frac{n}{2} \le 3\,, n \in Z, \boxed{\frac{n}{2} \in Z} \\ 0, \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases} \rightarrow$$

$$x\left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} \mathrm{n}, -2 \le n \le 6\,, n \in Z\ \kappa\alpha\iota\ \boxed{\frac{n}{2} \in Z} \\ 0, \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases} \rightarrow$$

Προσοχή!

$$x\left[\frac{n}{2}\right] = \mathrm{n}, \mathrm{n} \in \{-2{,}0{,}2{,}4{,}6\}$$

$\frac{n}{2} \in Z \rightarrow \alpha\nu\ \theta\varepsilon\sigma\omega\ \frac{n}{2} = \kappa \in Z \rightarrow n = 2\kappa \in Z \rightarrow$
n άρτιος (πολλαπλάσιο του 2) **και** $-2 \le n \le 6 \rightarrow$
$\mathrm{n} \in \{-2{,}0{,}2{,}4{,}6\}$



Ασκήσεις στις βασικές πράξεις

- Άσκηση 1 : Να σχεδιάσετε τα σήματα διακριτού χρόνου $x_1[n] = 5\delta[\mathrm{n}-1] + 10\delta[\mathrm{n}-2]$ και $x_2[n] = 4\delta[\mathrm{n}] - \delta[\mathrm{n}-1]$. Να υπολογίσετε τις πράξεις και να σχεδιάσετε το αποτέλεσμα :

  a) $x_1[n] + 3x_2[n]$

  b) $x_1[n] \cdot x_2[n]$

  c) $x_1[-n] + 3x_2[n-3]$

- Άσκηση 2 : Δίνεται το σήμα διακριτού χρόνου $\mathrm{x}[n] = (3-\mathrm{n})(u[\mathrm{n}] - u[n-3])$. Να υπολογίσετε τις πράξεις και να σχεδιάσετε το αποτέλεσμα :

  A) $x[2-n]$ B) $x[5-2n]$

- Άσκηση 3 : Να σχεδιάσετε τα σήματα διακριτού χρόνου $x_1[n] = -3\mathrm{n} + 1, \mathrm{n} \in [0,3]$ και $x_2[n] = 4\mathrm{n}, \mathrm{n} \in [-1,1]$. Να υπολογίσετε τις πράξεις και να σχεδιάσετε το αποτέλεσμα :

  a) $x_1[n] + 3x_2[n]$ b) $x_1[n] \cdot x_2[n]$ c) $x_1[-n] + 3x_2[n-3]$

Ασκήσεις στις βασικές πράξεις

- Άσκηση 1 : Να σχεδιάσετε τα σήματα διακριτού χρόνου $x_1[n] = 5\delta[\mathrm{n}-1] + 10\delta[\mathrm{n}-2]$ και $x_2[n] = 4\delta[\mathrm{n}] - \delta[\mathrm{n}-1]$. Να υπολογίσετε τις πράξεις και να σχεδιάσετε το αποτέλεσμα :

    $a)$ $x_1[n] + 3x_2[n]$

Γραμμική συνέλιξη σημάτων διακριτού χρόνου

- Η γραμμική συνέλιξη (linear convolution) δύο σημάτων $x_1[n]$ και $x_2[n]$ διακριτού χρόνου ορίζεται ως

$$x[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k] \cdot x_2[n-k]$$

❖ Όταν τα σήματα είναι **άπειρης διάρκειας**, τότε η γραμμική συνέλιξη είναι και αυτή ένα σήμα **άπειρης διάρκειας**.

❖ Υπολογίζεται αναλυτικά ή με γραφικό τρόπο

❖ Ιδιότητες συνέλιξης :

- ❖ Ταυτοτικό στοιχείο $\boldsymbol{x[n] * \delta[n] = x[n]}$ και $\boldsymbol{x[n] * \delta[n-n_o] = x[n-n_o]}$
- ❖ Αντιμεταθετική ιδιότητα $x_1[n] * x_2[n] = x_2[n] * x_1[n]$
- ❖ Προσεταιριστική ιδιότητα $x_1[n] * (x_2[n] * x_3[n]) = (x_1[n] * x_2[n]) * x_3[n]$
- ❖ Επιμεριστική ιδιότητα $x_1[n] * (x_2[n] + x_3[n]) = x_1[n] * x_2[n] + x_1[n] * x_3[n]$

Γραμμική συνέλιξη σημάτων διακριτού χρόνου

- Παράδειγμα : Να υπολογιστεί η γραμμική συνέλιξη (linear convolution) δύο σημάτων $x_1[n] = a^n \cdot u[n], a \neq 1$ και $x_2[n] = u[n]$

$$x[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k] \cdot x_2[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k \cdot u[k] \cdot \underline{u[n-k]}$$

  - Επειδή η $u[n] = 0, n < 0$, διακρίνουμε **περιπτώσεις**

<u>Για $n < 0$</u>

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k \cdot u[k] \cdot u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{-1} a^k \cdot u[k] \cdot u[n-k] + \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cdot u[k] \cdot u[n-k] = 0 + 0 = 0$$

Γιατί :

$$k < 0 \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{-1} a^k \cdot \underbrace{u[k]}_{0} \cdot u[n-k] = 0$$

$$n < 0 \leq k \rightarrow n - k < 0 \rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cdot u[k] \cdot \underbrace{u[n-k]}_{0} = 0$$

Γραμμική συνέλιξη σημάτων διακριτού χρόνου

Για $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{0}$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k \cdot u[k] \cdot u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{-1} a^k \cdot u[k] \cdot u[n-k] + \sum_{k=0}^{n} a^k \cdot u[k] \cdot u[n-k] + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a^k \cdot u[k] \cdot u[n-k]$$

όμως :

$$k < 0 \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{-1} a^k \cdot \overbrace{u[k]}^{0} \cdot u[n-k] = 0$$

$$n+1 \leq k \rightarrow n-k \leq -1 \rightarrow n-k < 0 \rightarrow \sum_{k=n+1}^{+\infty} a^k \cdot u[k] \cdot \overbrace{u[n-k]}^{0} = 0$$

$$k \geq 0, k \leq n \rightarrow 0 \leq n-k \rightarrow \sum_{k=0}^{n} a^k \cdot \overbrace{u[k]}^{1} \cdot \overbrace{u[n-k]}^{1} = \boxed{\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}}$$

Έτσι τελικά

$$x[n] = x_1[n] * x_2[n] = \begin{cases} \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases} \rightarrow \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \cdot u[n], \forall n \in Z, \mathrm{a} \neq 1$$

Γραμμική συνέλιξη σημάτων διακριτού χρόνου

Μερικές χρήσιμες σειρές :

$$\sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} na^n = \frac{(N-1)a^{N+1} - Na^N + a}{(1-a)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{1}{2}N(N-1)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} n^2 = \frac{1}{6}N(N-1)(2N-1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}, |a| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} na^n = \frac{a}{(1-a)^2}, |a| < 1$$

Για σήματα άπειρης διάρκειας, θα δούμε παρακάτω και άλλες τεχνικές για ευκολότερο υπολογισμό της συνέλιξης……

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος & Εικόνας

Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών

Α. Μπακλέζος

abaklezos@hmu.gr