Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος & Εικόνας

Μάθημα 12ο

Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών

Μετασχηματισμός Ζ

Α. Μπακλέζος

abaklezos@hmu.gr

Μετασχηματισμός Z

- Ο <u>ευθύς αμφίπλευρος μετασχηματισμός Z</u> (bilateral z–transform) μίας ακολουθίας διακριτού χρόνου ορίζεται

$$\mathrm{X}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot z^{-n}$$

Η μιγαδική μεταβλητή $z = \mathrm{r} \cdot e^{j\omega}, z \in C$ ονομάζεται μιγαδική συχνότητα με r το μέτρο του z και ω το όρισμα του z.
$z = |z|\, e^{j\omega}$, όπου $|z|$ είναι η **απόσβεση** και ω είναι η **ψηφιακή συχνότητα**

Οι τιμές της z για τις οποίες συγκλίνει το άθροισμα ορίζουν στο επίπεδο-z την **Περιοχή Σύγκλισης** (Region of Convergence - ROC) που συμβολίζεται με R_x.

Ο αμφίπλευρος μετασχηματισμός Z μετατρέπει την ακολουθία $x[n]$ σε ένα πολυώνυμο $X(z)$ με (πιθανά) άπειρους όρους θετικών και αρνητικών δυνάμεων του z, όπου κάθε δείγμα $x[n_0]$ αντιστοιχεί στο μονώνυμο z^{-n_0}.

- Ο ευθύς μετασχηματισμός Z είναι μοναδικός, αν είναι γνωστή η Περιοχή Σύγκλισης.

Μετασχηματισμός Z

- Ο <u>αντίστροφος μετασχηματισμός Z</u> ορίζεται ως το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z) \cdot z^{n-1} dz$$

όπου είναι μία αριστερόστροφη κλειστή καμπύλη ολοκλήρωσης γύρω από την αρχή των αξόνων ($z = 0$)και εντός της Περιοχής Σύγκλισης (ROC).

- Αν λοιπόν είναι γνωστή η Περιοχή Σύγκλισης, τότε ο ευθύς και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z αποτελούν ένα μοναδικό ζεύγος και χρησιμοποιείται ο συμβολισμός:

$$x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z)$$

Μετασχηματισμός Z

- Αν αντικαταστήσουμε $z = \mathrm{r} \cdot e^{j\omega}$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot z^{-n} \rightarrow X(z)\Big|_{z=\mathrm{r}\cdot e^{j\omega}} = X\left(\mathrm{r} \cdot e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot \left(\mathrm{r} \cdot e^{j\omega}\right)^{-n} \rightarrow$$

$$X(z)\Big|_{z=\mathrm{r}\cdot e^{j\omega}} = X\left(\mathrm{r} \cdot e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(x[n] \cdot r^{-n}\right) \cdot e^{-j\omega n}$$

ο μετασχηματισμός Z είναι ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου της ακολουθίας $x[n] \cdot r^{-n}$ στο σημείο $\mathrm{r} \cdot e^{j\omega}$ δηλαδή ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) αποτελεί ειδική περίπτωση του μετασχηματισμού Z και υπάρχει εφόσον ο μοναδιαίος κύκλος ($|z| = 1$)ανήκει στο ROC του $X(z)$.

- Η σχέση $|z| = \alpha, 0 < \alpha < \infty$ ορίζει ένα κύκλο ακτίνας α στο μιγαδικό επίπεδο.
- Η σχέση $|z| = 1$ ορίζει το Μοναδιαίο Κύκλο (Unit Circle) στο μιγαδικό επίπεδο $z = e^{j\omega}$.

Μετασχηματισμός Ζ

- Περιοχή Σύγκλισης (ROC) :

Ο μετασχηματισμός Ζ μίας ακολουθίας διακριτού χρόνου πρέπει **πάντα** να συνοδεύεται από την Περιοχή Σύγκλισης, δηλαδή από την περιοχή του μιγαδικού επιπέδου, για την οποία υπάρχει ο μετασχηματισμός Ζ.

τιμές της z για τις οποίες συγκλίνει το άθροισμα, ορίζουν στο επίπεδο-z την **Περιοχή Σύγκλισης** (Region of Convergence - ROC) που συμβολίζεται με R_x:

$$R_x = \left\{ z \in C : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]\, z^{-n}| < \infty \right\}$$

ή ισοδύναμα $R_{x-} < |z| < R_{x+}$

Μετασχηματισμός Z

- Περιοχή Σύγκλισης (ROC) :

Ο μετασχηματισμός Z μίας ακολουθίας διακριτού χρόνου πρέπει **πάντα** να συνοδεύεται από την Περιοχή Σύγκλισης, δηλαδή από την περιοχή του μιγαδικού επιπέδου, για την οποία υπάρχει ο μετασχηματισμός Z.

- Αν το σήμα $x[n]$ είναι ακολουθία δεξιάς πλευράς δηλαδή $x[n] = 0, n < n_o$ τότε η περιοχή σύγκλισης είναι η εξωτερική επιφάνεια ενός κύκλου στο μιγαδικό επίπεδο δηλαδή της μορφής $|z| > a$
  - Τα αιτιατά σήματα ($x[n] = 0, n < 0$) έχουν μετασχηματισμό με **περιοχή σύγκλισης την εξωτερική επιφάνεια ενός κύκλου**

- Αν το σήμα $x[n]$ είναι ακολουθία αριστερής πλευράς δηλαδή $x[n] = 0, n > n_o$ τότε η περιοχή σύγκλισης είναι η εσωτερική επιφάνεια ενός κύκλου στο μιγαδικό επίπεδο δηλαδή της μορφής $|z| <$α
  - Τα αναιτιατά σήματα ($x[n] = 0, n > 0$) έχουν μετασχηματισμό με **περιοχή σύγκλισης την εσωτερική επιφάνεια ενός κύκλου**

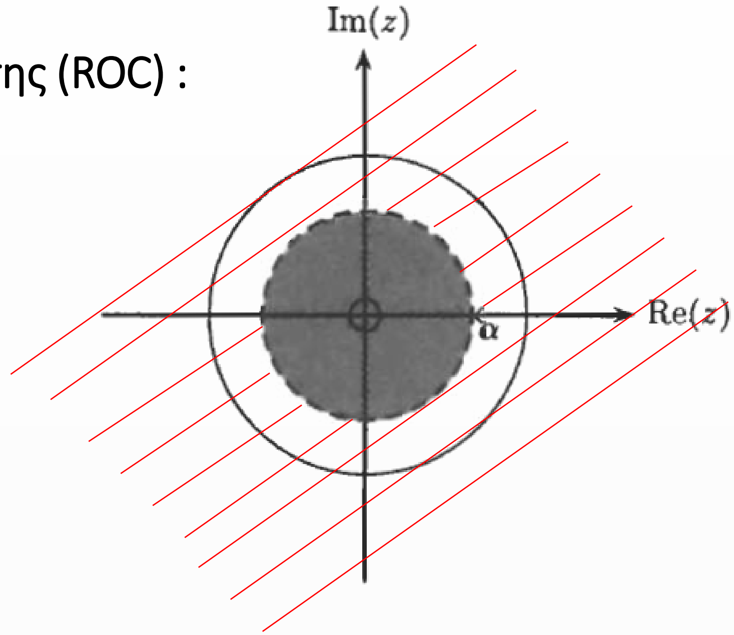
- Αν το σήμα $x[n]$ είναι αμφίπλευρη ακολουθία τότε η περιοχή σύγκλισης είναι ένας δακτύλιος της μορφής $\alpha < |z| < b$, όπου μπορεί $\alpha = 0$ ή $b = +\infty$

- Αν το σήμα $x[n]$ είναι ακολουθία πεπερασμένης διάρκειας, δηλαδή $x[n] \neq 0, n \in [n_1, n_2]$ τότε η περιοχή σύγκλισης είναι ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο με εκτός **ίσως** τα σημεία $\mathrm{z} = 0$ ή $\mathrm{z} = +\infty$.
  - Αν $n_2 > 0$ τότε το $\mathrm{z} = 0$ δεν ανήκει στο ROC.
  - Αν $n_1 < 0$ τότε το $\mathrm{z} = +\infty$ δεν ανήκει στο ROC. (‘Αρα το ∞ ανήκει στο ROC μόνο για αιτιατά σήματα)

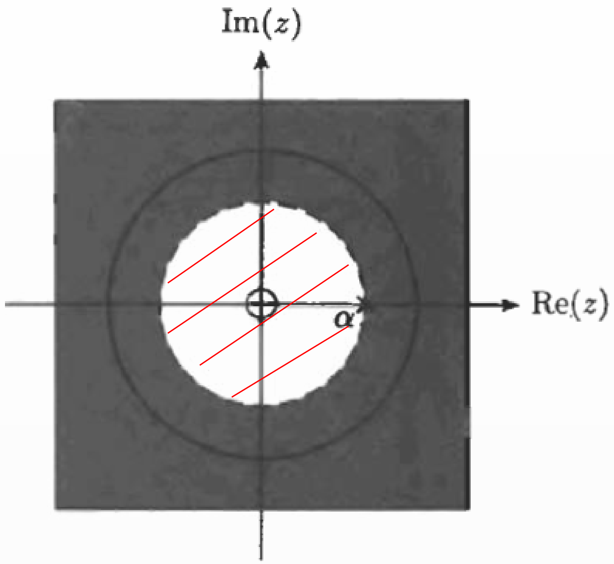
Μετασχηματισμός Ζ

- Περιοχή Σύγκλισης (ROC) :

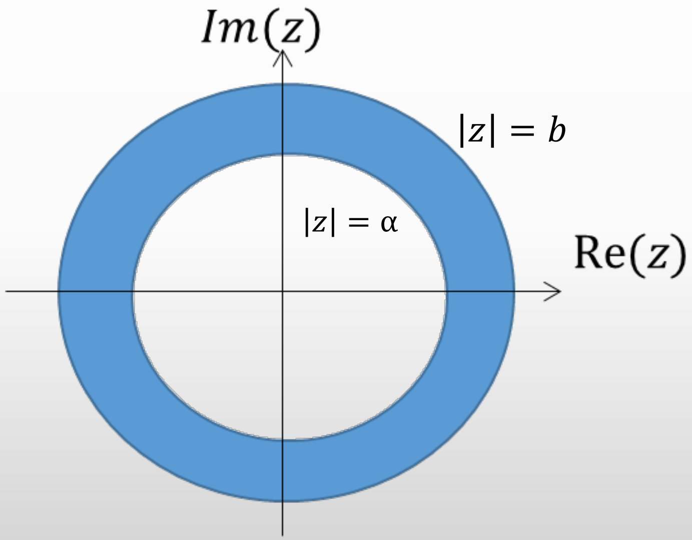
- $|z| > a$



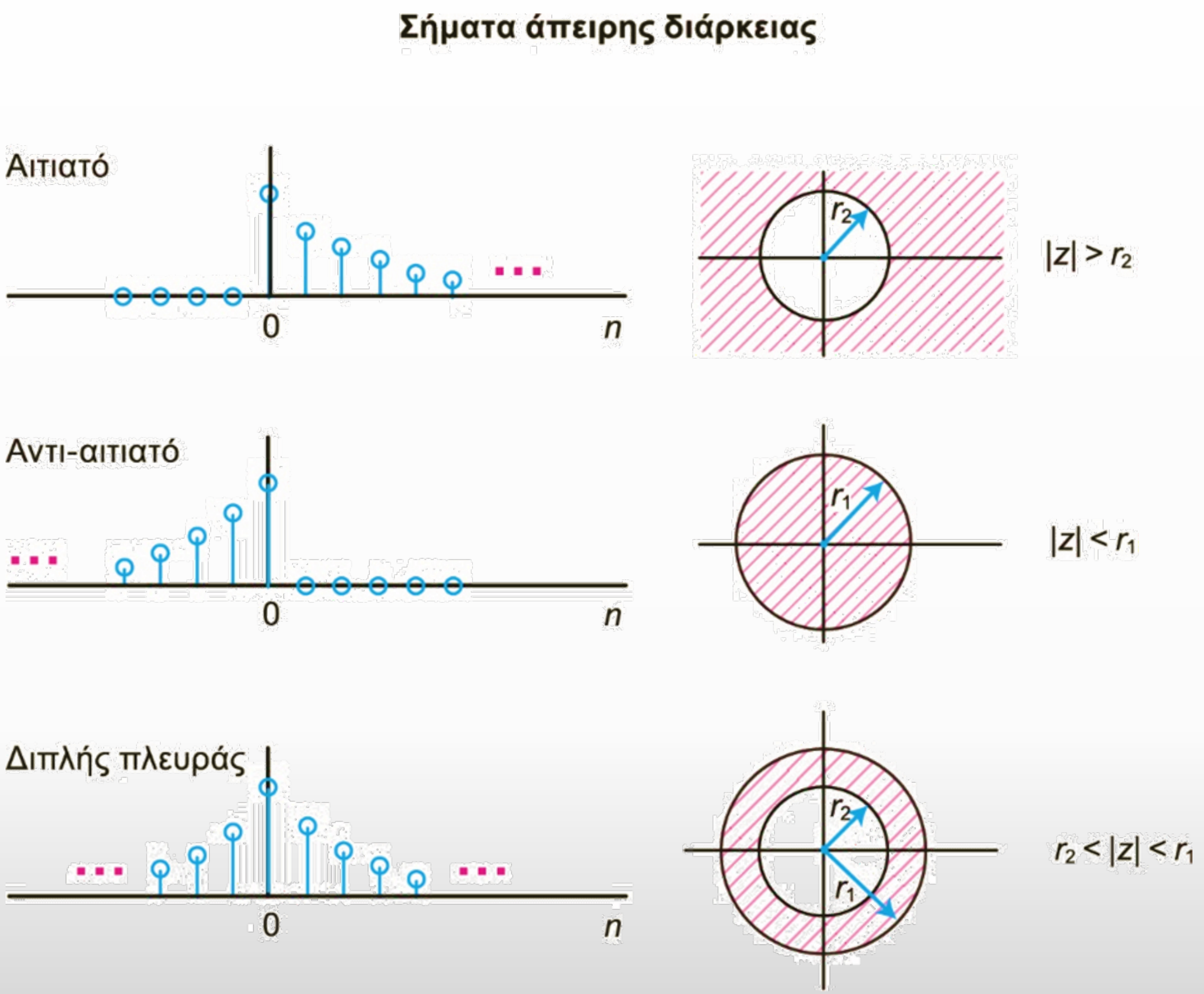
$|z| < \alpha$



- $\alpha < |z| < b$, όπου μπορεί $\alpha = 0$ ή $b = +\infty$



Μετασχηματισμός Z



Μετασχηματισμός Ζ

συνήθως $\mathrm{A}(z), \mathrm{B}(z)$ πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές, άρα ρίζες πραγματικές ή/και μιγαδικές. Αν z_o **πόλος ή μηδενικό τότε και ο συζυγής z_o^* είναι πόλος η μηδενικό**.

- **Πόλοι και μηδενικά:**

Αν ο μετασχηματισμός Ζ μίας ακολουθίας διακριτού χρόνου είναι **ρητή** συνάρτηση του z :

$$\boxed{X(z) = \frac{\mathrm{B}(z)}{\mathrm{A}(z)}}$$

Τότε οι ρίζες του αριθμητή καλούνται μηδενικά (zeros z_k) της $X(z)$ και οι ρίζες του παρονομαστή καλούνται πόλοι (poles p_k) της $X(z)$.

- Οι τιμές του z για τις οποίες η συνάρτηση $X(z)$ απειρίζεται ονομάζονται **πόλοι** $\{p_k\}$ και βρίσκονται πάντα εκτός της περιοχής σύγκλισης. Ισχύει $X(p_k) \rightarrow \infty$. Οι πόλοι υπολογίζονται από τη σχέση: $A(z) = 0$.
- Οι τιμές του z για τις οποίες η συνάρτηση $X(z)$ μηδενίζεται ονομάζονται **μηδενικά** $\{z_k\}$. Ισχύει $X(z_k) = 0$. Τα μηδενικά υπολογίζονται από: $B(z) = 0$.

Η Περιοχή Σύγκλισης δεν περιλαμβάνει τους πόλους!

Μετασχηματισμός Z

συνήθως $A(z), B(z)$ πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές, άρα ρίζες πραγματικές ή/και μιγαδικές. Αν z_o **πόλος ή μηδενικό τότε και ο συζυγής z_o^* είναι πόλος η μηδενικό**.

- Πόλοι και μηδενικά:

Αν ο μετασχηματισμός Z μίας ακολουθίας διακριτού χρόνου είναι **ρητή** συνάρτηση του z :

$$\boxed{X(z) = \frac{B(z)}{A(z)}}$$

Τότε οι ρίζες του αριθμητή καλούνται μηδενικά (zeros z_k) της $X(z)$ και οι ρίζες του παρονομαστή καλούνται πόλοι (poles p_k) της $X(z)$.
Η Περιοχή Σύγκλισης δεν περιλαμβάνει τους πόλους!

Παράδειγμα : Δίνεται ο μετασχηματισμός z

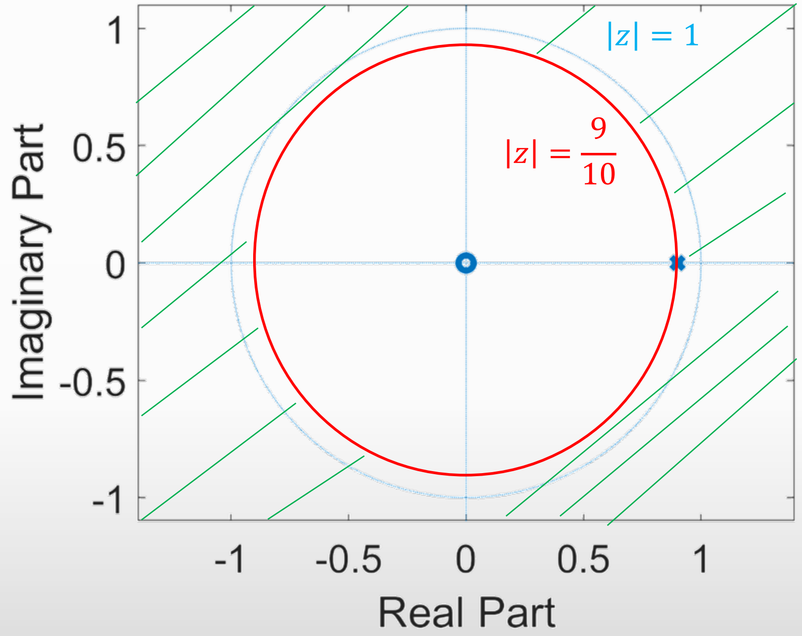
ROC

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{9}{10} z^{-1}}, |z| > \frac{9}{10}$$

Μπορεί να γραφτεί

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{1}{1 - \frac{9}{10} z^{-1}} = \frac{z}{z - \frac{9}{10}}$$

Υπάρχει ένα μηδενικό στο $z = 0$ και ένας πόλος στο $z = \frac{9}{10} + j \cdot 0$.



Διάγραμμα πόλων-μηδενικών του μετασχηματισμού z στο μιγαδικό επίπεδο →τα μηδενικά «o» και οι πόλοι «×»

Μετασχηματισμός Ζ

- Πόλοι και μηδενικά:

Αν ο μετασχηματισμός Ζ μίας ακολουθίας διακριτού χρόνου είναι **ρητή** συνάρτηση του z :

$$X(z) = \frac{\mathrm{B}(z)}{\mathrm{A}(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $a_0, b_0 \neq 0$ άρα

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{z^{-\mathrm{M}}}{z^{-\mathrm{N}}} \cdot \frac{z^{\mathrm{M}} + \frac{b_1}{b_o} z^{\mathrm{M}-1} + \cdots + \frac{b_{\mathrm{M}}}{b_o}}{z^{\mathrm{N}} + \frac{\alpha_1}{\alpha_o} z^{\mathrm{N}-1} + \cdots + \frac{\alpha_{\mathrm{N}}}{\alpha_o}} \triangleq \frac{b_0}{a_0} \cdot z^{\mathrm{N}-\mathrm{M}} \cdot \frac{\mathrm{N}'(z)}{\mathrm{D}'(z)}$$

Η $\mathrm{N}'(z)$ έχει Μ πεπερασμένες ρίζες (μηδενικά της X) $z_1, z_2, \ldots, z_{\mathrm{M}}$, και η $\mathrm{D}'(z)$ έχει Ν πεπερασμένες ρίζες (πόλους **της** X) $p_1, p_2, \ldots, p_{\mathrm{N}}$
Άρα :

$$X(z) = G \cdot z^{\mathrm{N}-\mathrm{M}} \frac{\prod_{k=1}^{M}(z - z_k)}{\prod_{k=1}^{N}(z - p_k)}, G \triangleq \frac{b_0}{a_0}$$

Αν $\mathrm{N} > \mathrm{M}$, η $X(z)$ έχει $\mathrm{N} - \mathrm{M}$ μηδενικά στο $z = 0$
Αν $\mathrm{N} < \mathrm{M}$, η $X(z)$ έχει $\mathrm{M} - \mathrm{N}$ πόλους στο $z = 0$
Μπορούν να υπάρχουν πόλοι ή μηδενικά στο $z = \infty$ εάν $\mathrm{X}(\infty) = \infty$ ή $\mathrm{X}(\infty) = 0$
Συνολικά ίδιο πλήθος πόλων και μηδενικών εάν συμπεριληφθούν οι πολοι/μηδενικά στα $z = 0, \infty$.
(G = κέρδος)

Μετασχηματισμός Ζ

- Πόλοι και μηδενικά:

Ο μετασχηματισμός παρουσιάζεται ως συνάρτηση της μεταβλητής z^{-1}.
Αν παρουσιαστεί ως συνάρτηση της μεταβλητής z , τότε μπορεί να μετατραπεί σε συνάρτηση της μεταβλητής z^{-1} «διαιρώντας» αριθμητή και παρονομαστή με την μεγαλύτερη δύναμη του z , που υπάρχει σε αυτούς.

Παράδειγμα : Δίνεται ο μετασχηματισμός z

$$X(z) = \frac{z-3}{z(z-1)(z-2)}, |z| > 2$$

Μπορεί να γραφτεί

$$X(z) = \frac{z-3}{z(z-1)(z-2)} = \frac{z-3}{(z^2-z)(z-2)} = \frac{z-3}{z^3-3z^2+2z} = \frac{\frac{z-3}{z^3}}{\frac{z^3-3z^2+2z}{z^3}} = \frac{z^{-2}-3z^{-3}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}$$

❖ Για την εύρεση των πόλων και μηδενικών όμως χρειαζόμαστε τη μορφή $X(z) = \frac{\mathrm{B}(z)}{\mathrm{A}(z)}$ (ρητη συνάρτηση της μεταβλητής z)

$$X(z) = \frac{z-3}{z(z-1)(z-2)}$$

Μηδενικά $\mathrm{B}(z) = 0 \rightarrow z-3 = 0 \rightarrow z = 3$
Πόλοι $\mathrm{A}(z) = 0 \rightarrow z(z-1)(z-2) \rightarrow z = 0, z = 1, z = 2$

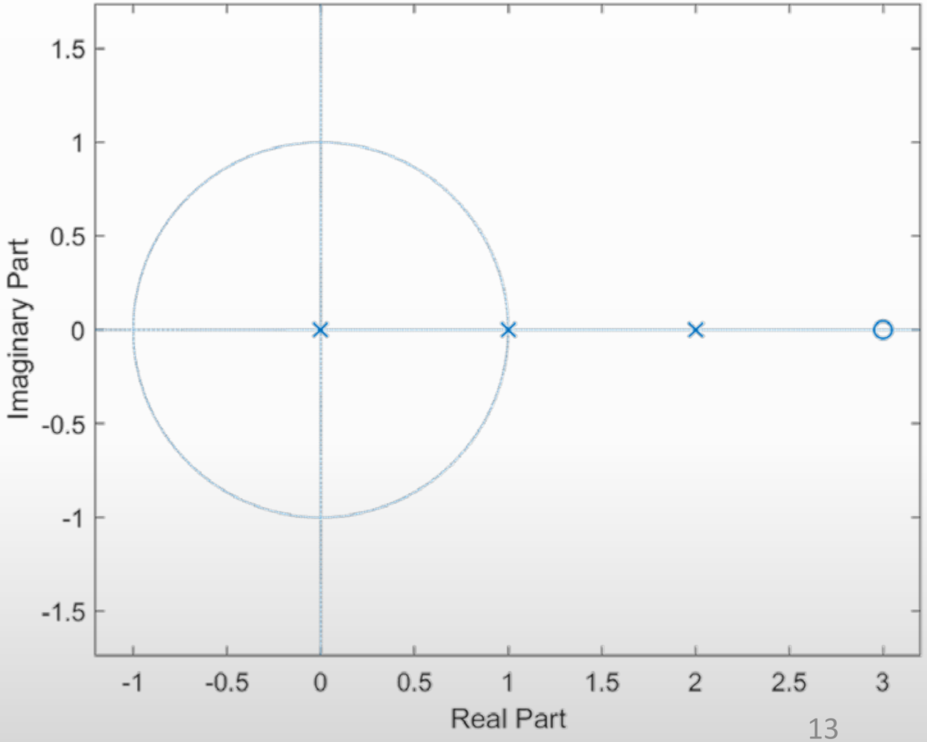
Μετασχηματισμός Ζ

- Πόλοι και μηδενικά:

Παράδειγμα : Δίνεται ο μετασχηματισμός z

$$X(z) = \frac{z-3}{z(z-1)(z-2)}, |z| > 2$$

Μηδενικά $\mathrm{B}(z) = 0 \rightarrow z - 3 = 0 \rightarrow z = 3$
Πόλοι $\mathrm{A}(z) = 0 \rightarrow z(z-1)(z-2) \rightarrow z = 0, z = 1, z = 2$



Μετασχηματισμός Ζ

$$\mathrm{X}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot z^{-n}$$

- Υπολογισμός μετασχηματισμού Ζ

Για σήματα πεπερασμένης διάρκειας υπολογίζεται με χρήση του ορισμού

Παράδειγμα :

$$\mathrm{x[n]} = \delta[n] + 4\delta[n-1] - 2\delta[n-3] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\delta[n] + 4\delta[n-1] - 2\delta[n-3]) \cdot z^{-n} \rightarrow$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] \cdot z^{-n} + 4\delta[n-1] \cdot z^{-n} - 2\delta[n-3] \cdot z^{-n} = z^{-0} + 4 \cdot z^{-1} - 2 \cdot z^{-3} \rightarrow$$

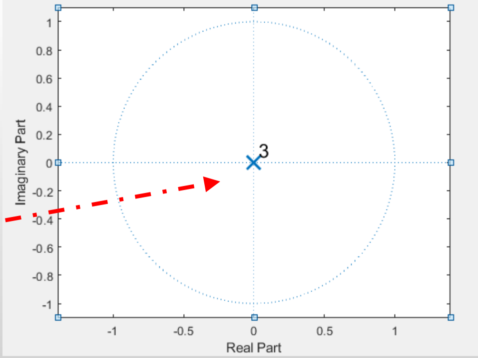
$$X(z) = 1 + 4 \cdot z^{-1} - 2 \cdot z^{-3}$$, με ROC $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{C} - \{\mathbf{0}\}$

❖ Για τους **πόλους** (και μηδενικά) άρα και για το ROC χρειαζόμαστε τη μορφή $X(z) = \frac{\mathrm{B}(z)}{\mathrm{A}(z)}$ (ρητη συνάρτηση της z)

3 πόλοι, 3 μηδενικά

$$X(z) = \frac{z^3 + 4z^2 - 2}{z^3}$$

$$\mathrm{A}(z) = 0 \rightarrow z^3 = 0 \rightarrow z = 0$$ τριπλός πόλος



Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας
«κάθε πολυωνυμική εξίσωση ν βαθμού έχει στο σύνολο των μιγαδικών ν ακριβώς ρίζες»

Μετασχηματισμός Ζ

$$\boxed{\mathrm{X}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot z^{-n}}$$

Παράδειγμα :

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Ζ του σήματος $x[n] = 3\delta[n] + \delta[n-2] + \delta[n+2]$.

Απάντηση: Ο μετ/σμός Ζ του σήματος πεπερασμένης διάρκειας $x[n]$ είναι:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{3\delta[n] + \delta[n-2] + \delta[+2]\}\, z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 3\delta[n]\, z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-2]\, z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n+2]\, z^{-n}$$

Επομένως:

$$X(z) = 3 + z^{-2} + z^{2}$$

Η περιοχή σύγκλισης είναι:

$$\text{ROC: } 0 < |z| < \infty$$

Επειδή $x[n] \neq 0$ για $n < 0$, η ROC δεν περιλαμβάνει τα σημεία με $|z| = \infty$.

Επειδή $x[n] \neq 0$ για $n > 0$, η ROC δεν περιλαμβάνει το σημείο $z = 0$.

Μετασχηματισμός Ζ

$$\boxed{\mathrm{X}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot z^{-n}}$$

νιοστές ρίζες της μονάδας

$$\boxed{z^{\nu} = 1, \nu \in N \to z = e^{j2\pi k/\nu}, k = 0,1, \dots, \nu - 1}$$

Παράδειγμα :

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Ζ του σήματος $x[n] = u[n] - u[n-5]$.

Απάντηση: Το σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας. Ο μετασχηματισμός Ζ είναι:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{5} z^{-n} = \frac{1 - z^{-5}}{1 - z^{-1}} = \frac{z^5 - 1}{z^4(z-1)}$$

και η ROC είναι: R_x: $|z| > 0$. Τα μηδενικά είναι ο λύσεις της $z^5 - 1 = 0$.

Οι ρίζες είναι $z = e^{j2\pi k/5}$, $k = 0,1, \dots, 4$ και είναι τοποθετημένες σε 5 ισαπέχοντα σημεία επάνω στον μοναδιαίο κύκλο.

Από τη μορφή της $X(z)$ φαίνεται ότι υπάρχει πόλος στο $z = 1$. Όμως ο πόλος αυτός εξουδετερώνεται από το μηδενικό στο $z = 1$ και συγκεκριμένα για $k = 0$. Πράγματι, παραγοντοποιώντας τον αριθμητή, έχουμε:

$$X(z) = \frac{(z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)}{z^4(z-1)} = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^4}$$

Έτσι, δεν υπάρχει πλέον ανάγκη να εξαιρέσουμε από την περιοχή σύγκλισης το $z = 1$.

Μετασχηματισμός Z

$$\mathrm{X}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot z^{-n}$$

Παράδειγμα :

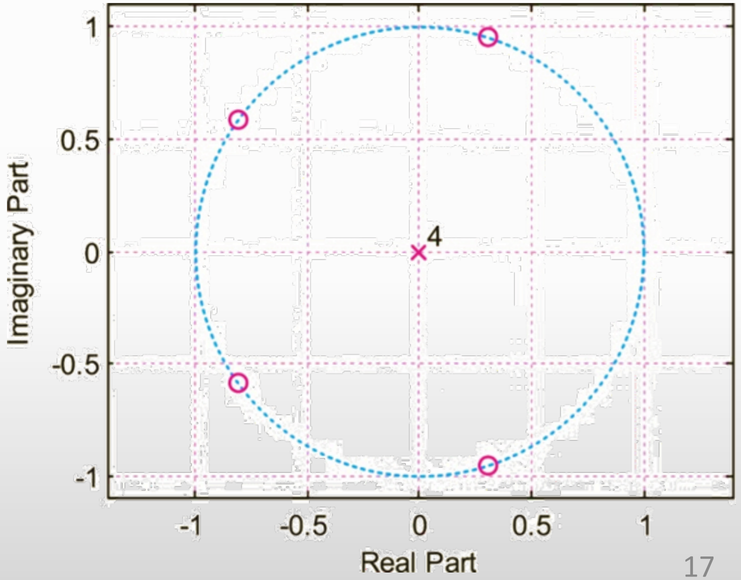
Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Z του σήματος $x[n] = u[n] - u[n-5]$.

Απάντηση: Τελικά, ο μετασχηματισμός Z μπορεί να εκφραστεί στη μορφή:

$$X(z) = \frac{\prod_{k=1}^{4}\left(z - e^{jk\pi/5}\right)}{z^4}$$

και έχει τέσσερα μηδενικά τοποθετημένα επάνω στον μοναδιαίο κύκλο εκτός από τη θέση $z = 1$, καθώς επίσης και τέσσερις πόλους τοποθετημένους στο σημείο $z = 0$.

Διάγραμμα πόλων - μηδενικών



Μετασχηματισμός Ζ

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot z^{-n}}$$

- Υπολογισμός μετασχηματισμού Ζ

Για σήματα άπειρης διάρκειας υπολογίζεται με χρήση αθροισμάτων και απαιτεί τον καθορισμό της Περιοχής Σύγκλισης (ROC).

Παράδειγμα :

$$\mathrm{x[n]} = a^n \cdot u[n]$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n \cdot u[n] \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n \cdot u[n] \cdot z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cdot u[n] \cdot z^{-n} \rightarrow$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n \cdot 0 \cdot z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cdot 1 \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cdot z^{-n} \rightarrow$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a \cdot z^{-1})^n$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}, |a| < 1}$$

$$\rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - a \cdot z^{-1}},$$

με $|a \cdot z^{-1}| < 1$ δηλαδή $|z| > |a|$, αιτιατό (ακολουθία δεξιάς πλευράς)

Μετασχηματισμός Z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot z^{-n}$$

- Υπολογισμός μετασχηματισμού Z

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}, |a| < 1$$

Παράδειγμα :

$$x[n] = -a^n \cdot u[-n-1]$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -a^n \cdot u[-n-1] \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n \cdot u[-n-1] \cdot z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} -a^n \cdot u[-n-1] \cdot z^{-n} \rightarrow$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n \cdot 1 \cdot z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} -a^n \cdot 0 \cdot z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n \cdot z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} (az^{-1})^n = -\sum_{n=-\infty}^{-1} (a^{-1}z)^{-n} \rightarrow$$

$$X(z) = -\{(a^{-1}z)^1 + (a^{-1}z)^2 + \cdots\} = -(a^{-1}z) \cdot \{(a^{-1}z)^0 + (a^{-1}z)^1 + \cdots\} = -(a^{-1}z) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (\underline{a^{-1}z})^n$$

$$\rightarrow X(z) = -(a^{-1}z)\frac{1}{1-a^{-1}z} = -\frac{z}{a}\frac{1}{1-\frac{z}{a}} = -\frac{z}{a}\frac{a}{a-z} = -\frac{z}{a-z} = -\frac{z}{z\left(\frac{a}{z}-1\right)} = \frac{1}{-\left(\frac{a}{z}-1\right)} = \frac{1}{\left(1-\frac{a}{z}\right)} \rightarrow$$

$X(z) = \frac{1}{1-a \cdot z^{-1}}$ με $\underline{|a^{-1}z| < 1}$ δηλαδή $|z| < |a|$, αναιτιατό (ακολουθία αριστερής πλευράς).

Μετασχηματισμός Z

- Υπολογισμός μετασχηματισμού Z

Τα σήματα των δύο παραδειγμάτων έχουν την ίδια συνάρτηση ως μετασχηματισμό z, αλλά έχουν διαφορετική Περιοχή Σύγκλισης.

Οι Περιοχές Σύγκλισης είναι συμπληρωματικές, αφού η ένωσή τους είναι ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο χωρίς τα σημεία του κύκλου $|z| = |a|$ αφού ο Μ/Τ Z έχει ένα πόλο $z = a$.

Διαφορετικά σήματα μπορούν να έχουν τον ίδιο μετασχηματισμό z, αλλά με διαφορετική Περιοχή Σύγκλισης.

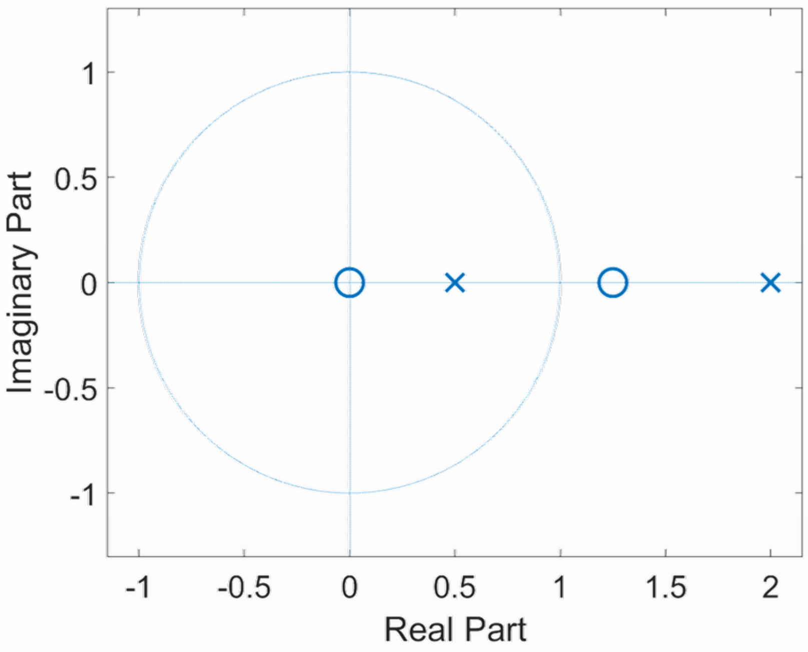
Συγκεκριμένα, αν ο μετασχηματισμός Z έχει δύο πόλους, τότε υπάρχουν τρία σήματα με τον ίδιο μετασχηματισμό Z, με διαφορετικές Περιοχές Σύγκλισης. Το ένα είναι ακολουθία δεξιάς πλευράς, το άλλο ακολουθία αριστερής πλευράς και το τρίτο είναι αμφίπλευρη ακολουθία.

Γενικεύοντας, αν ο μετασχηματισμός Z έχει N πόλους, τότε υπάρχουν $\mathrm{N}+1$ σήματα με τον ίδιο μετασχηματισμό Z.

Μετασχηματισμός Ζ

- Υπολογισμός μετασχηματισμού Ζ

Παράδειγμα :



$$\mathrm{X}(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}\cdot z^{-1}} + \frac{1}{1-2\cdot z^{-1}} \rightarrow \mathrm{X}(z) = \frac{2-\frac{5}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}\cdot z^{-1}\right)\cdot(1-2\cdot z^{-1})}$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\cdot z^{-1}\right)\cdot(1-2\cdot z^{-1}) = 0 \rightarrow \text{πόλοι } z = 2 \; \kappa\alpha\iota \; z = \frac{1}{2}$$

Έτσι έχουμε 4 πιθανά ROC :

Α) $|\boldsymbol{z}| > \mathbf{2}$ και $|\boldsymbol{z}| > \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \rightarrow |\boldsymbol{z}| > \mathbf{2}$ εξωτερική επιφάνεια του κύκλου → $\mathrm{x[n]} = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + (2)^n u[n]$ αιτιατό σήμα (δεξιάς πλευράς).

Γ) $|z| > 2$ και $|z| < \frac{1}{2} \rightarrow \mathrm{ROC} = \emptyset$, δεν υπάρχει μετασχηματισμός

Β) $|\boldsymbol{z}| < \mathbf{2}$ και $|\boldsymbol{z}| > \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \rightarrow \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} < |\boldsymbol{z}| < \mathbf{2}$ δακτύλιος → $\mathrm{x[n]} = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - (2)^n u[-n-1]$ **αμφίπλευρη ακολουθία.**

Γ) $|\boldsymbol{z}| < \mathbf{2}$ και $|\boldsymbol{z}| < \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \rightarrow |\boldsymbol{z}| < \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ εσωτερική επιφάνεια του κύκλου → $\mathrm{x[n]} = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - (2)^n u[-n-1]$ **αναιτιατό σήμα (αριστερής πλευράς)**

Μετασχηματισμός Ζ

- Ζεύγη μετασχηματισμού Ζ

Ακολουθία Διακριτού Χρόνου	Μετασχ. Ζ	Περιοχή Σύγκλισης ROC
$\delta[n]$	1	$\forall z \in C$
$\delta[n-n_o]$	z^{-n_o}	$\forall z \in C$ Εκτός $z=0, n_o>0$ ή $z=\infty, n_o<0$
$a^n \cdot u[n]$	$\frac{1}{1-a\cdot z^{-1}}$	$\|z\|>\|a\|$
$-a^n \cdot u[-n-1]$	$\frac{1}{1-a\cdot z^{-1}}$	$\|z\|<\|a\|$
$\mathrm{n}\cdot a^n \cdot u[n]$	$\frac{a\cdot z^{-1}}{(1-a\cdot z^{-1})^2}$	$\|z\|>\|a\|$
$-\mathrm{n}\cdot a^n \cdot u[-n-1]$	$\frac{a\cdot z^{-1}}{(1-a\cdot z^{-1})^2}$	$\|z\|<\|a\|$
$(\mathrm{n}+1)\cdot a^{n+1} \cdot u[n]$	$\frac{a}{(1-a\cdot z^{-1})^2}$	$\|z\|>\|a\|$

Μετασχηματισμός Ζ

- Ζεύγη μετασχηματισμού Ζ(συνέχεια)

Ακολουθία Διακριτού Χρόνου	Μετασχ. Ζ	Περιοχή Σύγκλισης ROC
$\sin(\omega_o n) \cdot u[n]$	$\frac{\sin(\omega_o) \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cdot \cos(\omega_o) \cdot z^{-1} + z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
$\cos(\omega_o n) \cdot u[n]$	$\frac{1 - cos(\omega_o) \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cdot \cos(\omega_o) \cdot z^{-1} + z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
$a^n \cdot \sin(\omega_o n) \cdot u[n]$	$\frac{a \cdot \sin(\omega_o) \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cdot a \cdot \cos(\omega_o) \cdot z^{-1} + a^2 \cdot z^{-2}}$	$\|z\| > \|a\|$
$a^n \cdot \cos(\omega_o n) \cdot u[n]$	$\frac{1 - a \cdot cos(\omega_o) \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cdot a \cdot \cos(\omega_o) \cdot z^{-1} + a^2 \cdot z^{-2}}$	$\|z\| > \|a\|$

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Z

- <u>Γραμμικότητα:</u>
  Αν $x_1[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X_1(z), ROC_1$ και $x_2[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X_2(z), ROC_2$ τότε
  $c_1x_1[n] + c_2x_2[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} c_1X_1(z) + c_2X_2(z)$, ROC θα <u>περιέχει</u> τουλάχιστον $ROC_1 \cap ROC_2$

  →Περιέχει : στην περίπτωση όπου ο γραμμικός συνδυασμός είναι τέτοιος, που κάποια μηδενικά εξουδετερώνουν κάποιους πόλους, τότε η Περιοχή Σύγκλισης του γραμμικού συνδυασμού είναι μεγαλύτερη από την τομή των επί μέρους Περιοχών Σύγκλισης

<u>Απόδειξη :</u>

$$\mathrm{y[n]} = c_1x_1[n] + c_2x_2[n] \rightarrow Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]\cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_1x_1[n] + c_2x_2[n])\cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_1x_1[n]\cdot z^{-n} + c_2x_2[n]\cdot z^{-n})$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_1x_1[n]\cdot z^{-n}) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_2x_2[n]\cdot z^{-n}) = c_1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n]\cdot z^{-n} + c_2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n]\cdot z^{-n} = c_1X_1(z) + c_2X_2(z)$$

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Ζ

- Μετατόπιση στο χρόνο :

Αν $x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z), ROC$ τότε $x[n-n_o] \overset{Z}{\leftrightarrow} z^{-n_o} \cdot X(z), ROC$ εκτός $z=0, n_o>0, \eta\ z=\infty, n_o<0$

Απόδειξη :

$$y[n] = x[n-n_o] \rightarrow Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n-n_o] \cdot z^{-n} \xLeftrightarrow{\theta\varepsilon\tau\omega\ m=n-n_o} Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n-n_o] \cdot z^{-n} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] \cdot z^{-(m+n_o)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] \cdot z^{-m} \cdot z^{-n_o} = z^{-n_o} \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] \cdot z^{-m} = z^{-n_o} \cdot X(z)$$

Παράδειγμα :

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{4}$$

Τότε

$$y[n] = x[n-1] = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1] \overset{Z}{\leftrightarrow} Y(z) = z^{-1} \cdot X(z) = \frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{4}$$

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Ζ

- Αναδίπλωση :

Αν $x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z), ROC = (\mathrm{D}_1 < |z| < D_2)$ τότε $x[-n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z^{-1}), 1/ROC = \left(\frac{1}{D_2} < |z| < \frac{1}{\mathrm{D}_1}\right)$

Απόδειξη :

$$\mathrm{y[n]} = x[-n] \rightarrow Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n] \cdot z^{-n} \overset{\theta\varepsilon\tau\omega\ m=-n}{\Longleftrightarrow} Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n] \cdot z^{-n}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] \cdot z^{m} = X(z^{-1})$$

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Z

- <u>Πολλαπλασιασμός με εκθετικό - Μετατόπιση στη συχνότητα :</u>

  Αν $x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z), ROC = (D_1 < |z| < D_2)$ τότε $\alpha^n x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(a^{-1}z), |a| \cdot ROC = (|a| \cdot D_1 < |z| < |a| \cdot D_2)$

<u>Απόδειξη :</u>

$$\mathrm{y}[\mathrm{n}] = \alpha^n x[n] \rightarrow Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha^n x[n] \cdot z^{-n} \overset{\theta \varepsilon \tau \omega\ \zeta = a^{-1} z}{\Longleftrightarrow} Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha^n x[n] \cdot \alpha^{-n} \cdot \zeta^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot \zeta^{-n} = \mathrm{X}(\zeta) = \mathrm{X}(a^{-1}z)$$

❖ Στην ειδική περίπτωση του πολλαπλασιασμού στο χρόνο με μιγαδικό εκθετικό $e^{jn\omega_o}$ → στροφή στο επίπεδο z

$$e^{jn\omega_o} x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X\left(e^{-j\omega_o} z\right)$$

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Ζ

- Συνέλιξη :

Αν $x_1[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X_1(z), ROC_1$ και $x_2[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X_2(z), ROC_2$

τότε $x_1[n] * x_2[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X_1(z) \cdot X_2(z)$, ROC θα περιέχει τουλάχιστον $ROC_1 \cap ROC_2$

→Περιέχει : στην περίπτωση όπου το γινόμενο είναι τέτοιο, που κάποια μηδενικά εξουδετερώνουν κάποιους πόλους, τότε η Περιοχή Σύγκλισης του γινομένου είναι μεγαλύτερη από την τομή των επί μέρους Περιοχών Σύγκλισης

Απόδειξη :

$$\mathrm{y[n]} = x_1[n] * x_2[n] \rightarrow Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x_1[n] * x_2[n]) \cdot z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} (x_1[m] * x_2[n-m]) \right) \cdot z^{-n} \overset{\theta\epsilon\tau\omega\ n-m=k}{\Longleftrightarrow} Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[m] \cdot \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n-m] \cdot z^{-n} \right]$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[m] \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_2[k] \cdot z^{-(m+k)} \right] = \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[m] \cdot z^{-m} \right] \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_2[k] \cdot z^{-k} \right] = X_1(z) \cdot X_2(z)$$

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Z

- <u>Παράδειγμα :</u>

- Αν θεωρήσουμε τις δύο ακολουθίες $x[n] = a^n u[n]$ και $h[n] = \delta[n] - a\delta[n-1]$ τότε η συνέλιξή $y[n] = x[n] * h[n]$ έχει μετασχηματισμό Z:
$Y(z) = X(z) \cdot H(z)$ με $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| > |a|$ και $\mathrm{H}(z) = 1 - az^{-1}, |z| > 0$

- $Y(z) = X(z) \cdot H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}(1 - az^{-1}) = 1, ROC = C$ (όλο το μιγαδικό επίπεδο) λόγω εξουδετέρωσης του πόλου από το μηδενικό.

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Z

- Συζυγία :

Αν $x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z), ROC$ τότε $x^*[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X^*[z^*], ROC$

❖ Αν η $x[n] \in \mathrm{R}$ δηλαδή $x[n] = x^*[n]$ τότε $X(z) = X^*[z^*]$

- Παράγωγος :

Αν $x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z), ROC$ τότε $\mathrm{n} \cdot \mathrm{x}[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz}, ROC$

❖ Επανάληψη της ιδιότητας επιτρέπει την εύρεση του μετασχηματισμού της $n^k \cdot \mathrm{x}[n]$ για κάθε τιμή του k.

Μετασχηματισμός Z

- <u>Παράδειγμα :</u> Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Z της ακολουθίας $x[n] = (1+n)a^{n+1}u[n]$

- Γράφουμε την ακολουθία ως $x[n] = (1+n)a^{n+1}u[n] = (1+n)\underline{a^n a}u[n] = a(a^n u[n] + n a^n u[n])$
- Όμως $a^n u[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| > a$ και $na^n u[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} \frac{a \cdot z^{-1}}{(1-a \cdot z^{-1})^2}, |z| > a$

- Άρα από την ιδιότητα της γραμμικότητας
- $X(z) = a\left(\frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{a \cdot z^{-1}}{(1-a \cdot z^{-1})^2}\right), |z| > a$ δηλαδή
- $X(z) = a\left(\frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{a \cdot z^{-1}}{(1-a \cdot z^{-1})^2}\right) = \frac{a}{1-az^{-1}} + \frac{a^2 \cdot z^{-1}}{(1-a \cdot z^{-1})^2} = \frac{a(1-az^{-1}) + a^2 \cdot z^{-1}}{(1-a \cdot z^{-1})^2} \rightarrow$

$$X(z) = \frac{a}{(1 - a \cdot z^{-1})^2}, |z| > a$$

Μετασχηματισμός Z

- <u>Παράδειγμα :</u> Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Z της ακολουθίας $\mathrm{x[n] = na^n u[-n]}$

Ο μετασχηματισμός Z της ακολουθίας $\mathrm{x[n] = na^n u[-n]} = \mathrm{n}y[\mathrm{n}]$ με $\mathrm{y[n] = a^n u[-n]} = (\alpha^{-1})^{-\mathrm{n}}\mathrm{u[-n]}$ δηλαδή $\mathrm{y[n]} = w[-n]$ όπου $w[n] = (\alpha^{-1})^{\mathrm{n}}\mathrm{u[n]}$

Όμως $\mathrm{a^n u[n]} \overset{\mathrm{Z}}{\leftrightarrow} \frac{1}{1-\mathrm{az}^{-1}}, |\mathrm{z}| > \mathrm{a}$

Άρα $\mathrm{W}(z) = \frac{1}{1-\mathrm{a}^{-1}\mathrm{z}^{-1}}, |\mathrm{z}| > \frac{1}{\mathrm{a}}$

Από την ιδιότητα της αναδίπλωσης $\mathrm{Y}(z) = \mathrm{W}(z^{-1}) = \frac{1}{1-\mathrm{a}^{-1}(\mathrm{z}^{-1})^{-1}} = \frac{1}{1-\mathrm{a}^{-1}z}, |\mathrm{z}| < \mathrm{a}$

Τέλος από την ιδιότητα της παραγώγου :

$$\mathrm{x[n] = n \cdot y}[n] \overset{z}{\leftrightarrow} X(z) = -z\frac{dY(z)}{dz} = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-\mathrm{a}^{-1}z}\right) = -\frac{\mathrm{a}^{-1}z}{(1-\mathrm{a}^{-1}z)^2}, |\mathrm{z}| < \mathrm{a}$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος & Εικόνας

Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών

Α. Μπακλέζος

abaklezos@hmu.gr