Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος & Εικόνας

Μάθημα 7ο

Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών

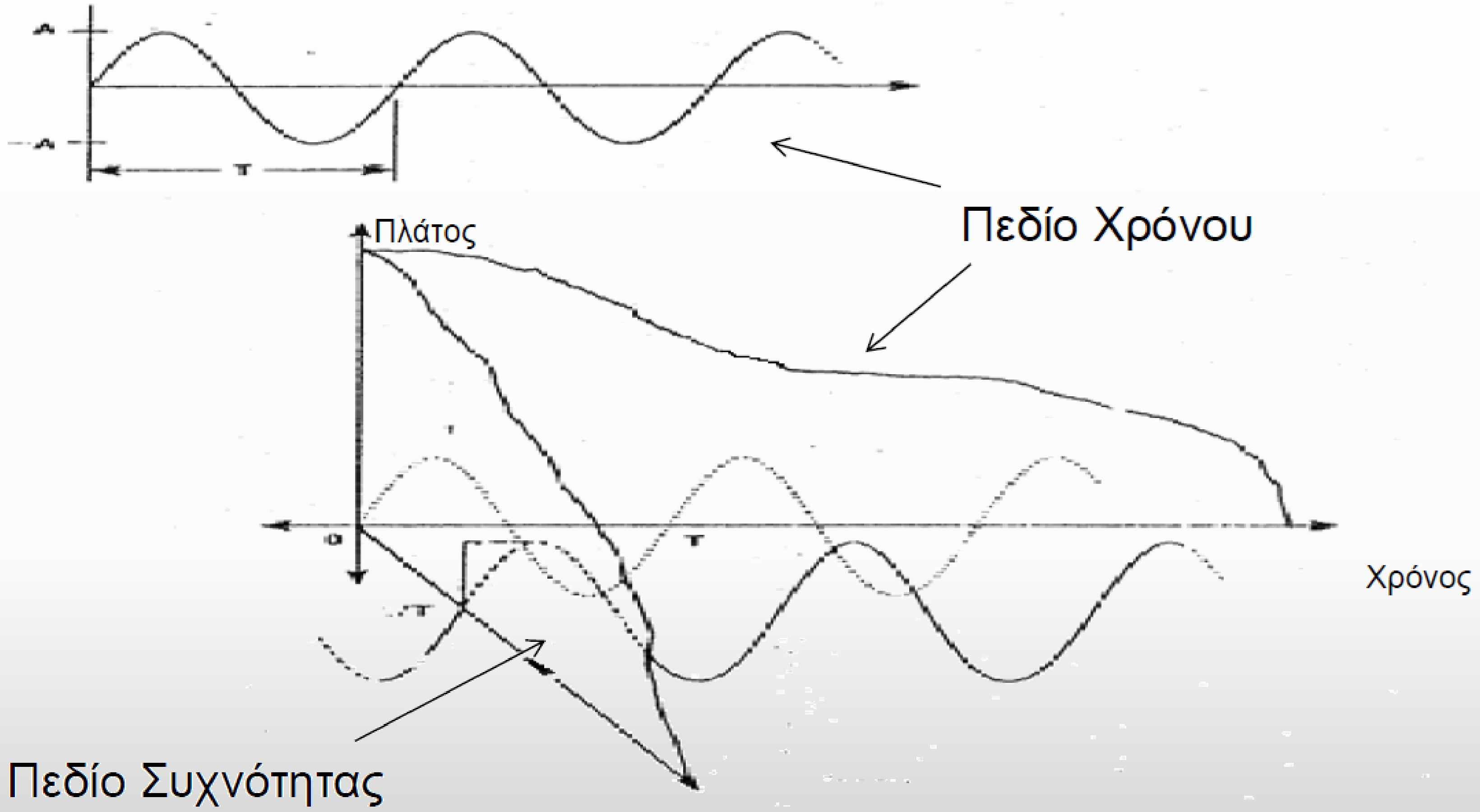
(Περίληψη)
Σειρές Fourier
Μετασχηματισμός Fourier Συνεχούς Χρόνου

Α. Μπακλέζος

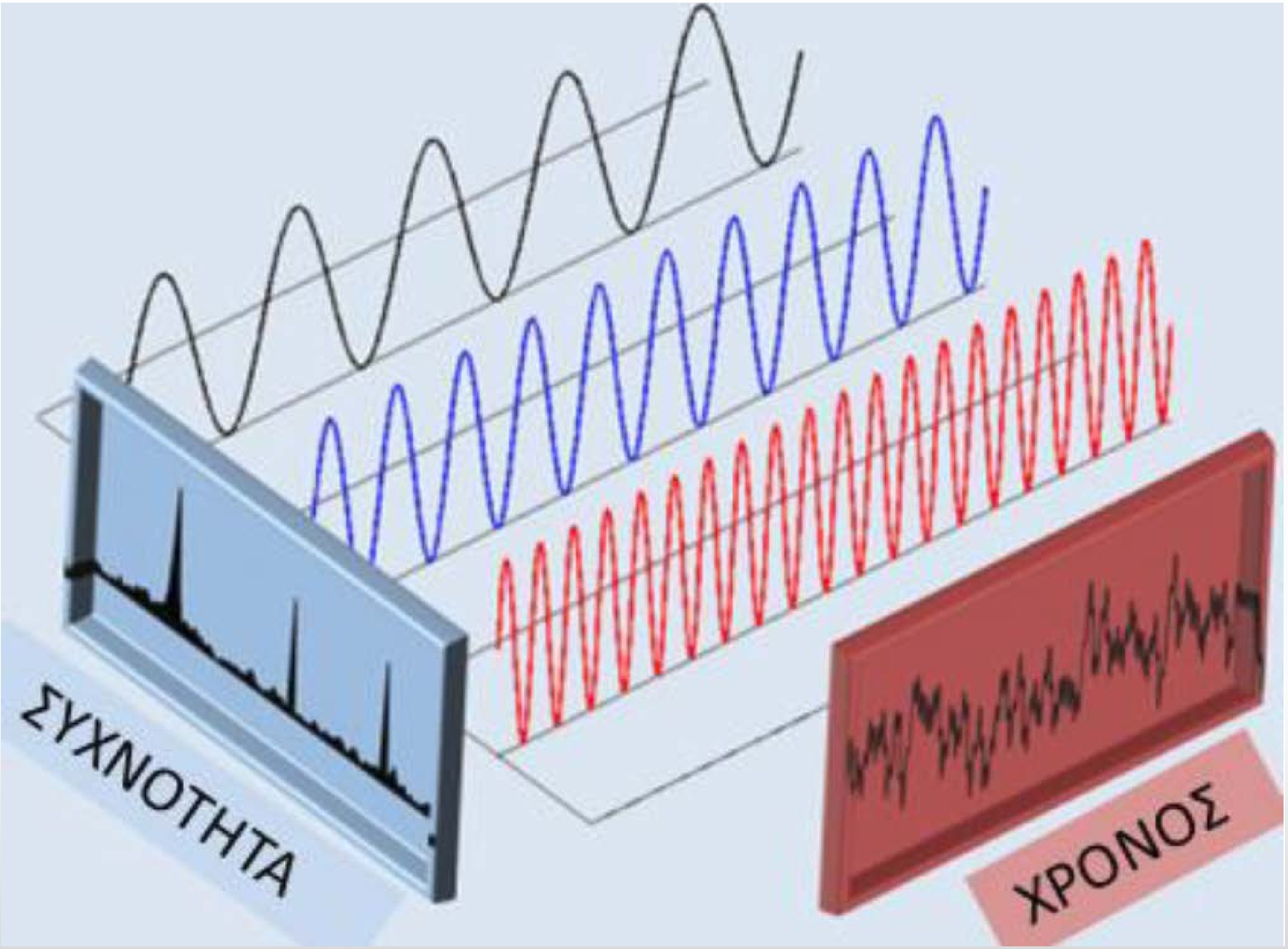
abaklezos@hmu.gr

Ανάλυση Σημάτων σε Ανάπτυγμα Σειράς Fourier (Επανάληψη)

Χρόνος & Συχνότητα: δύο βάσεις περιγραφής



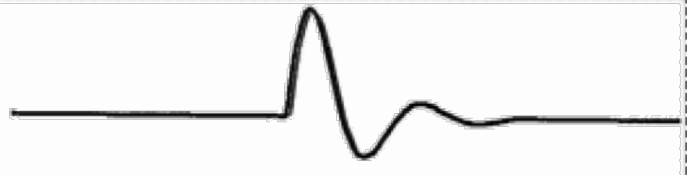
Ανάλυση Σημάτων σε Ανάπτυγμα Σειράς Fourier (Επανάληψη)



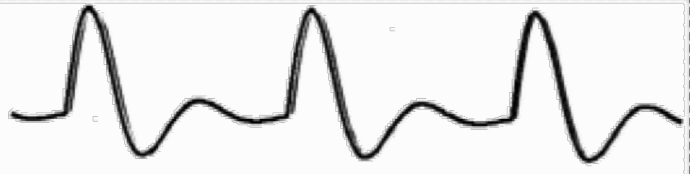
Ανάλυση Σημάτων σε Ανάπτυγμα Σειράς Fourier (Επανάληψη)

Κατηγορίες Σημάτων & Μετασχηματισμών Fourier

Μετασχηματισμός Fourier
Σήματα συνεχή και μη περιοδικά



Σειρές Fourier
Σήματα συνεχή και περιοδικά



Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου
Σήματα διακριτά και μη περιοδικά

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier
Σήματα διακριτά και περιοδικά

Ανάλυση Σημάτων σε Ανάπτυγμα Σειράς Fourier (Επανάληψη)

- Η ανάλυση των σημάτων και των γραμμικών συστημάτων σε **αναπτύγματα σειρών Fourier** ή/και **μετασχηματισμών Fourier** οδηγεί στην αναπαράσταση των σημάτων με τη **συχνότητα** ως μεταβλητή (αντί του χρόνου).
- Με την ανάλυση κατά Fourier αναπαριστούμε ένα σήμα σε άθροισμα απλών τριγωνομετρικών συναρτήσεων συγκεκριμένης συχνότητας.
- Όταν ένα τέτοιο σήμα διεγείρει ένα γραμμικό σύστημα θα μπορούμε να προσδιορίζουμε την έξοδο του συστήματος ως άθροισμα σημάτων που έχουν τις ίδιες συχνότητες με του σήματος εισόδου, των οποίων όμως το πλάτος και η φάση έχει υποστεί κάποια αλλαγή, που προκαλεί το σύστημα.
- **Σειρές Fourier**: είναι χρήσιμες στην περιγραφή των **περιοδικών σημάτων** και οδηγούν στην έννοια των **φασμάτων**, τα οποία απεικονίζουν πληροφορίες όπως το πλάτος και η φάση, που αφορούν το συχνοτικό περιεχόμενο ενός σήματος.
- **Μετασχηματισμός Fourier**: εφαρμόζεται τόσο σε περιοδικά όσο και σε μη περιοδικά (απεριοδικά) σήματα.
- Ο μετασχηματισμός Fourier μπορεί να θεωρηθεί ως το όριο ενός αναπτύγματος σε σειρά Fourier, όταν η περίοδος του σήματος τείνει στο άπειρο.

Συνθήκες Ύπαρξης Σειράς Fourier

Αν για ένα **περιοδικό σήμα** $x(t)$ με περίοδο T_0 ικανοποιούνται οι τρεις ακόλουθες **συνθήκες Dirichlet**:

1. Η συνάρτηση $x(t)$ να είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη σε μία περίοδο, δηλαδή:

$$\int_0^{T_0} |x(t)|\, dt < +\infty$$

   (δηλ. πρέπει να είναι σήμα ενέργειας).

2. Η συνάρτηση $x(t)$ είναι συνεχής ή ο αριθμός των ασυνεχειών της σε κάθε περίοδο είναι πεπερασμένος.
3. Το πλήθος των μεγίστων και των ελαχίστων της συνάρτησης $x(t)$ σε κάθε περίοδο είναι πεπερασμένο.

τότε το σήμα $x(t)$ μπορεί να αναπαρασταθεί σε **ανάπτυγμα σειράς Fourier**, με τις τρεις ισοδύναμες μορφές που παρουσιάζονται στη συνέχεια.

➢ Οι συνθήκες Dirichlet ικανοποιούνται από όλα τα φυσικά σήματα.

Εκθετική μορφή σειράς Fourier

➢ Για ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ με συχνότητα Ω_0, το ανάπτυγμα του ως προς την εκθετική μορφή της σειράς Fourier είναι:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(X_k\, e^{jk\Omega_0 t} + X_{-k}\, e^{-jk\Omega_0 t})$$

ή ισοδύναμα:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k\, e^{jk\Omega_0 t}$$

Οι συντελεστές X_k της εκθετικής σειράς Fourier υπολογίζονται από:

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, e^{-jk\Omega_0 t}\, dt$$

Ειδικά για $k = 0$ ισχύει:

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t) dt$$

όπου T_0 είναι η **θεμελιώδης περίοδος** του περιοδικού σήματος ($T_0 = \Omega_0/2\pi$)

Ω_0 είναι η θεμελιώδης κυκλική συχνότητα ($\Omega_0 = 2\pi/T_0$)

Εκθετική μορφή σειράς Fourier

Από την ανάπτυξη της εκθετικής μορφής ορίζεται:

- **φάσμα πλάτους διπλής πλευράς** (double sided amplitude spectrum) με άρτια συμμετρία

$$|X_k| = |X_k(\Omega_k)|, k \in (-\infty, +\infty)$$

- και το **φάσμα φάσης** (phase spectrum) διπλής πλευράς με περιττή συμμετρία,

$$\varphi_k = \varphi_k(\Omega_k), k \in (-\infty, +\infty)$$

Επειδή η ανεξάρτητη μεταβλητή Ω λαμβάνει διακριτές τιμές Ω_k, η γραφική αναπαράσταση των μιγαδικών συντελεστών σε μέτρο και φάση ονομάζεται **διακριτό φάσμα** (discrete spectrum) του περιοδικού σήματος $x(t)$.

Η ποσότητα $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\Omega_0}{2\pi}$ ονομάζεται **θεμελιώδης συχνότητα** του σήματος $x(t)$.

Οι συχνότητες των μιγαδικών όρων είναι πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας.

Το k −στο πολλαπλάσιο της θεμελιώδους συχνότητας καλείται $\boldsymbol{k}$ **−στη αρμονική**.

Εκθετική μορφή σειράς Fourier

Η ανάπτυξη της εκθετικής σειράς Fourier γίνεται στις συνιστώσες $e^{jk\Omega_0 t}$ για $k \in Z$. Οι συνιστώσες αυτές ονομάζονται **διανύσματα βάσης** ή ιδιοτιμές Fourier.

Επειδή $\cos(k\Omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{jk\Omega_0 t} + e^{-jk\Omega_0 t}\right)$, κάθε όρος $\cos(k\Omega_0 t)$ αποτελείται από τους όρους $e^{jk\Omega_0 t}$ και το $e^{-jk\omega\Omega_0 t}$, το ημιάθροισμα των οποίων δίνει την τιμή του αρμονικού.

Τα διανύσματα βάσης Fourier είναι **περιοδικά** με περίοδο T_0.

Επίσης, είναι ορθοκανονικά σε μια περίοδο, δηλαδή ικανοποιούν τη σχέση:

$$\frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{jn\Omega_0 t}\left[e^{jm\Omega_0 t}\right]^* dt = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

Κάθε σήμα συνεχούς χρόνου μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός ορθοκανονικών συναρτήσεων, δηλαδή να «αποσυντεθεί» σε επιμέρους στοιχειώδη σήματα.

Οι τιμές των συντελεστών X_k είναι τέτοιες που οδηγούν το μέσο τετραγωνικό σφάλμα στο μηδέν, δηλαδή είναι οι βέλτιστες και οδηγούν τη σειρά σε σύγκλιση.

Τριγωνομετρική Α’ μορφή σειράς Fourier

- Κάθε περιοδικό σήμα $x(t)$ που ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet, μπορεί να αναπαρασταθεί από μία συγκλίνουσα τριγωνομετρική σειρά άπειρων όρων ημιτόνων και συνημιτόνων:

$$\boxed{x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \, cos(k\Omega_0 t) + b_k \, sin(k\Omega_0 t)]}$$

όπου $\boldsymbol{\Omega_0}$ **είναι η θεμελιώδης κυκλική συχνότητα** ($\boldsymbol{\Omega_0 = 2\pi/T_0}$) του σήματος $x(t)$, και οι συντελεστές α_0, α_n και b_k δίνονται από τις σχέσεις:

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, dt$$

$$a_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, cos(k\Omega_0 t)\, dt$$

$$b_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, sin(k\Omega_0 t)\, dt$$

Τριγωνομετρική Α’ μορφή σειράς Fourier

Αν το περιοδικό σήμα είναι πραγματικό, τότε το ανάπτυγμα στην Α’ τριγωνομετρική μορφή είναι:

$$\boxed{x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\Omega_0 t + \theta_k)}$$

όπου $A_0 = X_0$, $A_k = 2|X_k|$ και $\theta_k = \measuredangle X_k = \varphi_k$.

Τα διανύσματα βάσης της Α’ τριγωνομετρικής μορφής είναι οι συναρτήσεις $\cos(k\Omega_0 t)$ και $\sin(k\Omega_0 t)$.

Οι συναρτήσεις αυτές είναι **ορθοκανονικές** σε μια περίοδο, δηλαδή ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} \cos(k\Omega_0 t)\,[\cos(m\Omega_0 t)]^* dt = \begin{cases} 1 & m = k \\ 0 & m \neq k \end{cases}$$

$$\frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0} \sin(k\Omega_0 t)\,[\sin(m\Omega_0 t)]^* dt = \begin{cases} 1 & m = k \\ 0 & m \neq k \end{cases}$$

Τριγωνομετρική Α’ μορφή σειράς Fourier

- Αν το περιοδικό σήμα $x(t)$ έχει **άρτια συμμετρία** τότε το γινόμενο $x(t)\cos(k\Omega_0 t)$ έχει επίσης άρτια συμμετρία, ενώ το γινόμενο $x(t)\,sin(k\Omega_0 t)$ έχει περιττή συμμετρία.
  - Συνεπώς οι συντελεστές α_0 και α_k μπορούν να υπολογιστούν στη μισή περίοδο διπλασιάζοντας το εμβαδόν, ενώ όλοι οι συντελεστές b_k έχουν τιμή μηδέν.
  - Άρα το ανάπτυγμα του **άρτιου σήματος** αποτελείται μόνο από **συνημιτονοειδείς** όρους.

- Αν το περιοδικό σήμα $x(t)$ έχει **περιττή συμμετρία** τότε το γινόμενο $x(t)\cos(k\Omega_0 t)$ έχει περιττή συμμετρία, ενώ το γινόμενο $x(t)\,sin(k\Omega_0 t)$ έχει άρτια συμμετρία.
  - Συνεπώς οι συντελεστές α_0 και α_k έχουν τιμή μηδέν, ενώ οι συντελεστές b_k μπορούν να υπολογιστούν στη μισή περίοδο διπλασιάζοντας το εμβαδόν.
  - Άρα το ανάπτυγμα του **περιττού σήματος** αποτελείται μόνο από **ημιτονοειδείς** όρους.

Τριγωνομετρική Β' μορφή σειράς Fourier

- Κάθε περιοδικό σήμα $x(t)$ που ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet, μπορεί να αναπαρασταθεί από μία συγκλίνουσα τριγωνομετρική σειρά άπειρων όρων συνημιτόνων:

$$\boxed{x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \, cos(k\Omega_0 t + \theta_k)}$$

όπου:

$$c_0 = a_0, \qquad c_k = \frac{|X_k|}{2} = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$$\theta_k = \measuredangle X_k = -\tan^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right), \qquad \theta_k \in (-\pi, \pi]$$

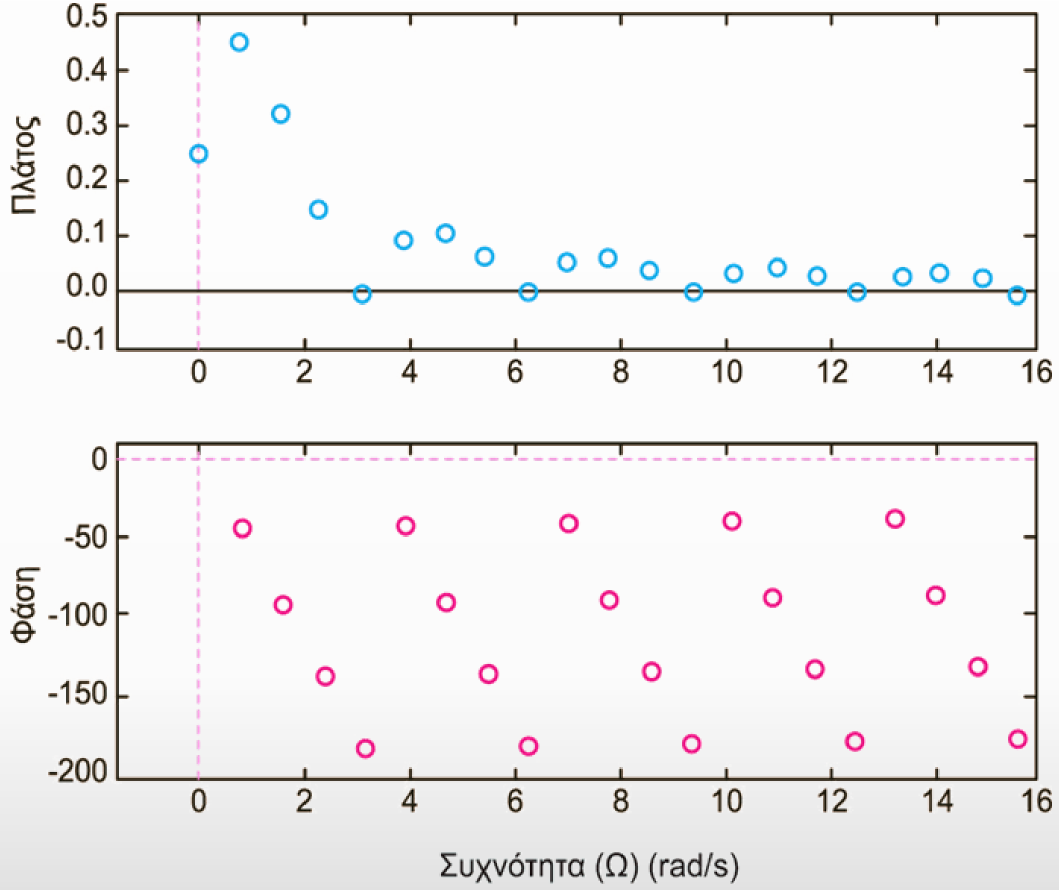
Ο συντελεστής α_0 καλείται **συνεχής συνιστώσα** (DC component), ενώ οι συντελεστές α_k και b_k ονομάζονται **αρμονικές k-στής τάξης**.

Όπως ισχύει και στις άλλες δύο μορφές σειρών Fourier, εφόσον λάβουμε **άπειρους όρους**, τότε η συνάρτηση $x(t)$ περιγράφεται με **μηδενικό σφάλμα**.

Η δυνατότητα του ισοδύναμου προσδιορισμού ενός σήματος $x(t)$ από τους συντελεστές c_k και φ_k και από τη συχνότητα Ω_0 είναι εξόχως σημαντική επειδή μας επιτρέπει να ορίσουμε τα ακόλουθα φάσματα.

Τριγωνομετρική Β' μορφή σειράς Fourier

Σχεδιάζοντας σε διάγραμμα τους συντελεστές c_k και φ_k ως προς τη συχνότητα Ω, ορίζουμε το **φάσμα πλάτους μονής πλευράς** (single sided amplitude spectrum) $c_k = c_k(\Omega_k)$ και το **φάσμα φάσης** (phase spectrum) $\varphi_k = \varphi_k(\Omega_k)$, αντίστοιχα.



Γενικό παράδειγμα φάσματος πλάτους μονής πλευράς και φάσματος φάσης

Σύνοψη Ανάλυσης σε Σειρές Fourier

- Τα διανύσματα βάσης Fourier όλων των μορφών σειράς Fourier (εκθετική και τριγωνομετρικές) είναι **περιοδικά** με περίοδο T_0.
- **Το ανάπτυγμα ενός περιοδικού σήματος σε σειρά Fourier εκφράζει ότι το περιοδικό σήμα μπορεί να περιγραφεί από την περίοδό του $\boldsymbol{T_0}$ και από την ακολουθία των συντελεστών:**
  - $\{\boldsymbol{a_k}, \boldsymbol{b_k}\}$ **για την Α' τριγωνομετρική μορφή**
  - $\{\boldsymbol{c_k}, \boldsymbol{\theta_k}\}$ **για την Β' τριγωνομετρική μορφή**
  - $\{\boldsymbol{X_k}\}$ **για την εκθετική μορφή**
- **Το πλάτος των συντελεστών $\{\boldsymbol{a_k}, \boldsymbol{b_k}\}$, $\{\boldsymbol{c_k}\}$ και $\{|\boldsymbol{X_k}|\}$ τείνει στο μηδέν καθώς το $\boldsymbol{k}$ τείνει στο άπειρο**. Άρα, αν λάβουμε πεπερασμένο - και όχι άπειρο - πλήθος συντελεστών τότε το ανάπτυγμα αποτελεί μία **προσέγγιση** του σήματος $x(t)$, η οποία βελτιώνεται με την αύξηση του πλήθους των όρων που περιλαμβάνονται στο ανάπτυγμα. Η βέλτιστη τιμή του πλήθους των συντελεστών εξαρτάται από το εκάστοτε σήμα $x(t)$.
- Οι σειρές Fourier επιτρέπουν να προσεγγίσουμε (με κάποια ελεγχόμενη μικρή ποσότητα σφάλματος) ένα **μη αριθμήσιμο σύνολο** (σημεία του $x(t)$) με ένα **αριθμήσιμο σύνολο** αριθμών, γεγονός που μειώνει την πολυπλοκότητα περιγραφής του σήματος $x(t)$.
- Σε όλες τις μορφές σειρών Fourier, εφόσον λάβουμε άπειρους όρους στο ανάπτυγμα της σειράς, τότε το σήμα $x(t)$ περιγράφεται επακριβώς από το ανάπτυγμα Fourier με μηδενικό σφάλμα.

Ιδιότητες Σειρών Fourier

Γραμμικότητα:

$$\text{Αν } x(t) \xrightarrow{FS} X_k \text{ και } y(t) \xrightarrow{FS} Y_k \text{ τότε } Ax(t) + By(t) \xrightarrow{FS} AX_k + BY_k$$

Μετατόπιση στο χρόνο: Η μετατόπιση στο χρόνο ενός περιοδικού σήματος δεν αλλάζει τους συντελεστές πλάτους της σειράς Fourier, αλλά μόνο τους συντελεστές φάσης:

$$x(t \pm t_0) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k\, e^{jk\Omega_0(t \pm t_0)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[X_k\, e^{\pm jk\Omega_0 t_0}\right] e^{jk\Omega_0 t}$$

$$x(t \pm t_0) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\Omega_0 t + \theta_k \pm k\Omega_0 t_0)$$

Μετατόπιση στη συχνότητα: Η μετατόπιση στη συχνότητα ενός περιοδικού σήματος μετατοπίζει τους συντελεστές κατά την ποσότητα της μετατόπισης συχνότητας:

$$\text{Αν } x(t) \xrightarrow{FS} X_k \text{ τότε } e^{jM\Omega_0 t} x(t) \xrightarrow{FS} X_{k-M}$$

Παραγώγιση:

$$\text{Αν } x(t) \xrightarrow{FS} X_k \text{ τότε } \frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{FS} jk\Omega_0 X_k$$

Ολοκλήρωση:

$$\text{Αν } x(t) \xrightarrow{FS} X_k \text{ τότε } \int_{-\infty}^{t} x(t)\, dt \xrightarrow{FS} \frac{1}{jk\Omega_0} X_k$$

Ιδιότητες Σειρών Fourier

Συμμετρία: Κάθε (περιοδικό) σήμα μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ενός άρτιου $x_e(t)$ και ενός περιττού $x_o(t)$ σήματος. Για τους συντελεστές X_n ισχύει:

$$X_k = X_{ek} + X_{ok}, \text{ όπου } X_{ek} = \frac{1}{2}(X_k + X_{-k}) \text{ και } X_{ek} = \frac{1}{2}(X_k - X_{-k})$$

Αν το περιοδικό σήμα έχει **άρτια συμμετρία**, τότε οι συντελεστές X_k είναι πραγματικοί αριθμοί, οπότε ισχύει $X_k = X_{-k}$ και το ανάπτυγμα γίνεται:

$$x(t) = X_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} X_k \cos(k\Omega_0 t)$$

Αν το περιοδικό σήμα έχει **περιττή συμμετρία**, τότε οι συντελεστές X_k είναι φανταστικοί αριθμοί και $X_0 = 0$. Το ανάπτυγμα γίνεται:

$$x(t) = 2\sum_{k=1}^{\infty} X_k \sin(k\Omega_0 t)$$

Για περιοδικό σήμα $x(t)$ που λαμβάνει μόνο πραγματικές τιμές, π.χ. οι ημιτονοειδείς συναρτήσεις, ισχύει:

$$X_k = X_{-k}^*$$

Η σχέση αυτή μειώνει το πλήθος υπολογισμών και υποδηλώνει ότι το **πλάτος είναι μια άρτια συνάρτηση** ενώ η **φάση είναι μια περιττή συνάρτηση**, δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις:

$$|X_k| = |X_{-k}| \quad \text{και } \measuredangle X_k = -\measuredangle X_{-k}$$

Ιδιότητες Σειρών Fourier

Εξαιτίας της συμμετρίας των συντελεστών X_k για τα πραγματικά σήματα, απαιτείται να απεικονίζουμε τα **φάσματα πλάτους** και **φάσης** μόνο για τιμές $k \geq 0$.

Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν μόνο για πραγματικά σήματα και όχι για μιγαδικά σήματα.

Οι **αρνητικές συχνότητες** που εμφανίζονται στα φάσματα (πλάτους και φάσης) διπλής πλευράς οφείλονται στην ύπαρξη του μιγαδικού εκθέτη στον ορισμό του συντελεστή X_k.

Καθώς η συχνότητα είναι ένα μέγεθος που εκφράζει το πλήθος των επαναλήψεων κάποιου φαινομένου στη μονάδα του χρόνου, η αρνητική συχνότητα δεν έχει κάποια άμεση φυσική σημασία, τουλάχιστον διαισθητικά.

Ωστόσο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι μια αρνητική τιμή συχνότητας υποδηλώνει τη δεξιόστροφη φορά περιστροφής του διανύσματος βάσης $e^{-jk\Omega_0 t}$ με ταχύτητα $k\Omega_0$.

Αντίθετα, ο όρος $e^{jk\Omega_0 t}$ περιγράφει ένα διάνυσμα που περιστρέφεται αριστερόστροφα με ταχύτητα $k\Omega_0$ και εκφράζει τις θετικές συχνότητες.

Το **πραγματικό μέρος** των συντελεστών X_k **είναι άρτια συνάρτηση** ενώ το φανταστικό μέρος **είναι περιττή συνάρτηση**, δηλαδή ισχύει:

$$Re\{X_k\} = Re\{X_{-k}\} \quad \text{και} \quad Im\{X_k\} = -Im\{X_{-k}\}$$

Κανονικοποιημένη Ισχύς Αναπτύγματος Fourier

Η κανονικοποιημένη ισχύς ενός σήματος $x(t)$στο πεδίο του χρόνου, δίνεται από:

$$S_x = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x^2(t)dt$$

Η κανονικοποιημένη ισχύς για κάθε μορφή ανάπτυξης σειρών Fourier, είναι:

Τριγωνομετρική Α':

$$S_x = a_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{a_k^2}{2} + \frac{b_k^2}{2}\right)$$

Τριγωνομετρική Β':

$$S_x = c_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{c_k^2}{2}\right)$$

Εκθετική:

$$S_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2$$

Κανονικοποιημένη Ισχύς Αναπτύγματος Fourier

- Η ακολουθία $\{|X_k|^2\}$ ονομάζεται **πυκνότητα φασματικής ισχύος** ή απλά **φάσμα ισχύος** του περιοδικού σήματος και περιγράφει την κατανομή της ισχύος του σήματος στις αρμονικές συχνότητες $k\Omega_0, k = 0, \pm1, \pm2, \dots$
- Λόγω της διακριτής μορφή των αρμονικών συχνοτήτων, το γράφημα αυτό αποτελείται από μια γραμμή σε κάθε συχνότητα, και γι' αυτό αποκαλείται **γραμμικό διάγραμμα ισχύος** (power line spectrum).
- Αν για κάποια τιμή του n το $|X_k|^2$ είναι «μεγάλο», τότε η συγκεκριμένη συχνότητα κατέχει «σημαντικό» ποσοστό από τη συνολική ισχύ του σήματος.
- Ένα περιοδικό σήμα έχει συγκεντρωμένη όλη την ισχύ του μόνο στις αρμονικές συχνότητες. Σε μη αρμονικές συχνότητες η ισχύς είναι μηδενική.
- Εφόσον οι συντελεστές X_k είναι μιγαδικοί, μπορούμε να ορίσουμε δύο επιμέρους φάσματα.
  - Το πρώτο απεικονίζει το πλάτος $|X_k|$ και ονομάζεται **γραμμικό φάσμα πλάτους** και το δεύτερο απεικονίζει τη γωνία (φάση) $\measuredangle X_k$ και ονομάζεται **γραμμικό διάγραμμα φάσης**.
- Το φάσμα ισχύος $|X_k|^2,\ k = 0, \pm1, \pm2, \dots$ προκύπτει με τον τετραγωνισμό του φάσματος πλάτους $|X_k|$.

Θεώρημα Parseval για περιοδικές συναρτήσεις

Οι σειρές Fourier δίνουν έναν εύκολο τρόπο περιγραφής της κατανομής της ισχύος του σήματος ανά συγκεκριμένη περιοχή συχνοτήτων, μέσω του θεωρήματος Parseval:

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x^2(t)\,dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2$$

Το αριστερό μέλος υπολογίζει την ισχύ στο πεδίο του χρόνου στη διάρκεια μίας περιόδου. Το δεξί μέλος υπολογίζει την ισχύ στο πεδίο της συχνότητας.

Το ανάπτυγμα μίας περιοδικής συνάρτησης $x(t)$ σε σειρά Fourier δεν μεταβάλει την ισχύ (και την ενέργεια) του σήματος.

Για περιοδικό σήμα $x(t)$ που λαμβάνει μόνο πραγματικές τιμές, ισχύει η σχέση:

$$X_k = X_{-k}^*$$

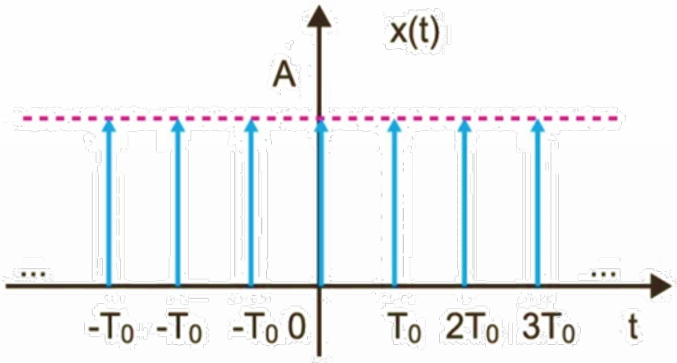
Επομένως το πλάτος είναι άρτια συνάρτηση και η φάση είναι περιττή συνάρτηση, δηλαδή ισχύει:

$$|X_k| = |X_{-k}| \quad \text{και} \quad \measuredangle X_k = -\measuredangle X_k$$

Εξαιτίας της συμμετρίας, για πραγματικά σήματα απαιτείται να απεικονίζουμε τα παραπάνω φάσματα πλάτους και φάσης, μόνο για $k \geq 0$.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1: Να βρεθεί η ανάπτυξη Fourier του συρμού κρουστικών συναρτήσεων.



Ο συρμός κρουστικών συναρτήσεων εκφράζεται μαθηματικά από τη σχέση:

$$x(t) = A\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_0)$$

Συντελεστές τριγωνομετρικής Α' μορφής:

$$\alpha_0 = \frac{A}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\delta(t)\,dt = \frac{A}{T_0}$$

$$\alpha_k = \frac{A}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\delta(t)\cos\left(\frac{2\pi kt}{T_0}\right)dt = \frac{A}{T_0}$$

$$b_k = \frac{A}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\delta(t)\sin\left(\frac{2\pi kt}{T_0}\right)dt = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}x(t)\,dt$$

$$a_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0}x(t)\cos(k\Omega_0 t)\,dt$$

$$b_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0}x(t)\sin(k\Omega_0 t)\,dt$$

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1(συνέχεια): Να βρεθεί η ανάπτυξη Fourier του συρμού κρουστικών συναρτήσεων.

Συντελεστές τριγωνομετρικής Β' μορφής:

$$c_0 = a_0 = \frac{A}{T_0}, \qquad c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \frac{A}{T_0}, \qquad \theta_k = -\,tan^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right) = 0$$

Συντελεστές εκθετικής μορφής:

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, e^{-jk\Omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} A\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_0)\, e^{-jk\Omega_0 t}\, dt = \frac{A}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_0^{T_0}\delta(t-kT_0)\, e^{-jk\Omega_0 t}\, dt$$

$$= \frac{A}{T_0}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-jk\Omega_0 t}\right]_{t=kT_0} = \frac{A}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-jk^2\pi} = \frac{A}{T_0}$$

$$\boxed{\begin{gathered} X_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\, e^{-jk\Omega_0 t}\, dt \\ X_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt \end{gathered}}$$

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1(συνέχεια): Να βρεθεί η ανάπτυξη Fourier του συρμού κρουστικών συναρτήσεων.

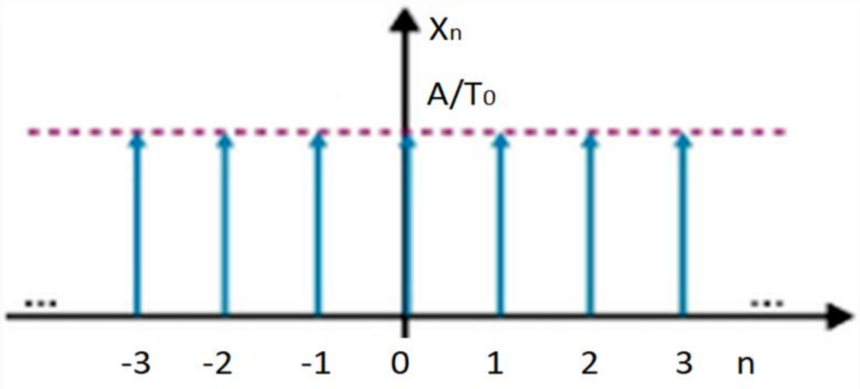
Επομένως τα αναπτύγματα σε σειρές Fourier του τραίνου κρουστικών, είναι:

Τριγωνομετρική Β':

$$x(t) = \frac{A}{T_0} + \frac{2A}{T_0}\sum_{k=1}^{+\infty} cos\left(\frac{2k\pi}{T_0}t\right)$$

Εκθετική:

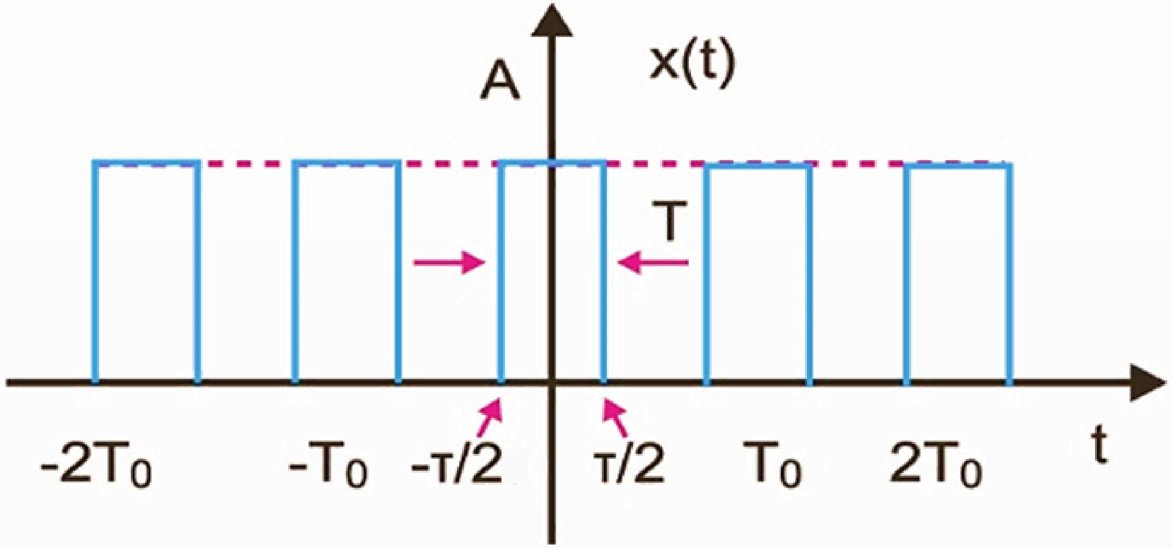
$$x(t) = \frac{A}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j\frac{2k\pi}{T_0}t}$$



Φάσμα πλάτους

Παραδείγματα

Παράδειγμα 2: Να βρεθεί το ανάπτυγμα σειράς Fourier σε όλες τις μορφές, του συρμού παλμών που εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα, όπου T_0 είναι η περίοδος και τ είναι η διάρκεια του παλμού. Εφαρμογή για $\tau = T_0/2$ και $T_0 = 2\pi$ και $A = 1$.



Απάντηση: Επιλέγουμε ως περίοδο το διάστημα $[-T_0/2, T_0/2]$ και υπολογίζουμε τους συντελεστές των σειρών Fourier από τις αντίστοιχες σχέσεις ορισμού τους.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 2(συνέχεια): Να βρεθεί το ανάπτυγμα σειράς Fourier σε όλες τις μορφές, του συρμού παλμών που εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα, όπου T_0 είναι η περίοδος και τ είναι η διάρκεια του παλμού. Εφαρμογή για $\tau = T_0/2$ και $T_0 = 2\pi$ και $A = 1$.

(Α) Εκθετική μορφή:

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} A\,dt = \frac{A}{T_0}\,t\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{A\tau}{T_0}$$

$$X_k = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\,e^{-jk\Omega_0 t}dt = \frac{A}{T_0}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-jk\Omega_0 t}dt = -\frac{A}{jk\Omega_0 T_0}e^{-jk\Omega_0 t}\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{2A}{k\Omega_0 T_0}\frac{1}{2j}\left[e^{\frac{jk\Omega_0\tau}{2}} - e^{-\frac{jk\Omega_0\tau}{2}}\right]$$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{k\Omega_0\tau}{2}\right)}{k\Omega_0 T_0} = \frac{\sin\left(\frac{k\Omega_0\tau}{2}\right)}{k\pi}$$

Οι συντελεστές Fourier είναι πραγματικοί αριθμοί όπως αναμενόταν, επειδή το σήμα έχει άρτια συμμετρία. Ο λόγος της διάρκειας του παλμού (τ) ως προς την περίοδο (T_0) ονομάζεται **κύκλος εργασίας** (**duty cycle**).

Παραδείγματα

<u>Παράδειγμα 2(συνέχεια):</u> Να βρεθεί το ανάπτυγμα σειράς Fourier σε όλες τις μορφές, του συρμού παλμών που εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα, όπου T_0 είναι η περίοδος και τ είναι η διάρκεια του παλμού. Εφαρμογή για $\tau = T_0/2$ και $T_0 = 2\pi$ και $A = 1$.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε πως επηρεάζει το φάσμα συχνοτήτων η μεταβολή της διάρκειας του παλμού σε σχέση με την περίοδό του, για διάφορες τιμές του τ διατηρώντας την περίοδο T_0 σταθερή:

(α) Για $\tau = T_0/2$ έχουμε:

$$X_0 = \frac{A}{2} \qquad \text{και} \qquad X_k = \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi} \text{ για } k \neq 0$$

Παρατηρούμε ότι για άρτιες τιμές του k το ημίτονο μηδενίζεται άρα και οι συντελεστές της σειράς μηδενίζονται, δηλ. $X_k = 0$ για k άρτιο, ενώ για περιττές τιμές του k το ημίτονο λαμβάνει εναλλάξ τιμές $+1$ και -1. Δηλαδή έχουμε:

$$X_1 = X_{-1} = \frac{1}{\pi}, \qquad X_2 = X_{-2} = 0, \qquad X_3 = X_{-3} = -\frac{1}{3\pi},$$
$$X_4 = X_{-4} = 0, \qquad X_5 = X_{-5} = \frac{1}{5\pi}, \qquad X_6 = X_{-6} = 0, \ldots$$

Παραδείγματα

<u>Παράδειγμα 2(συνέχεια):</u> Να βρεθεί το ανάπτυγμα σειράς Fourier σε όλες τις μορφές, του συρμού παλμών που εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα, όπου T_0 είναι η περίοδος και τ είναι η διάρκεια του παλμού. Εφαρμογή για $\tau = T_0/2$ και $T_0 = 2\pi$ και $A = 1$.

(β) Για $\tau = T_0/4$ έχουμε:

$$X_0 = \frac{A}{4} \qquad \text{και} \qquad X_k = \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)}{k\pi} \text{ για } k \neq 0$$

Παρατηρούμε ότι για τιμές του k που είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 4 το ημίτονο μηδενίζεται, δηλαδή $X_k = 0$ για $k = 4r, r = 1,2,3, \ldots$ Γενικά οι συντελεστές X_k είναι:

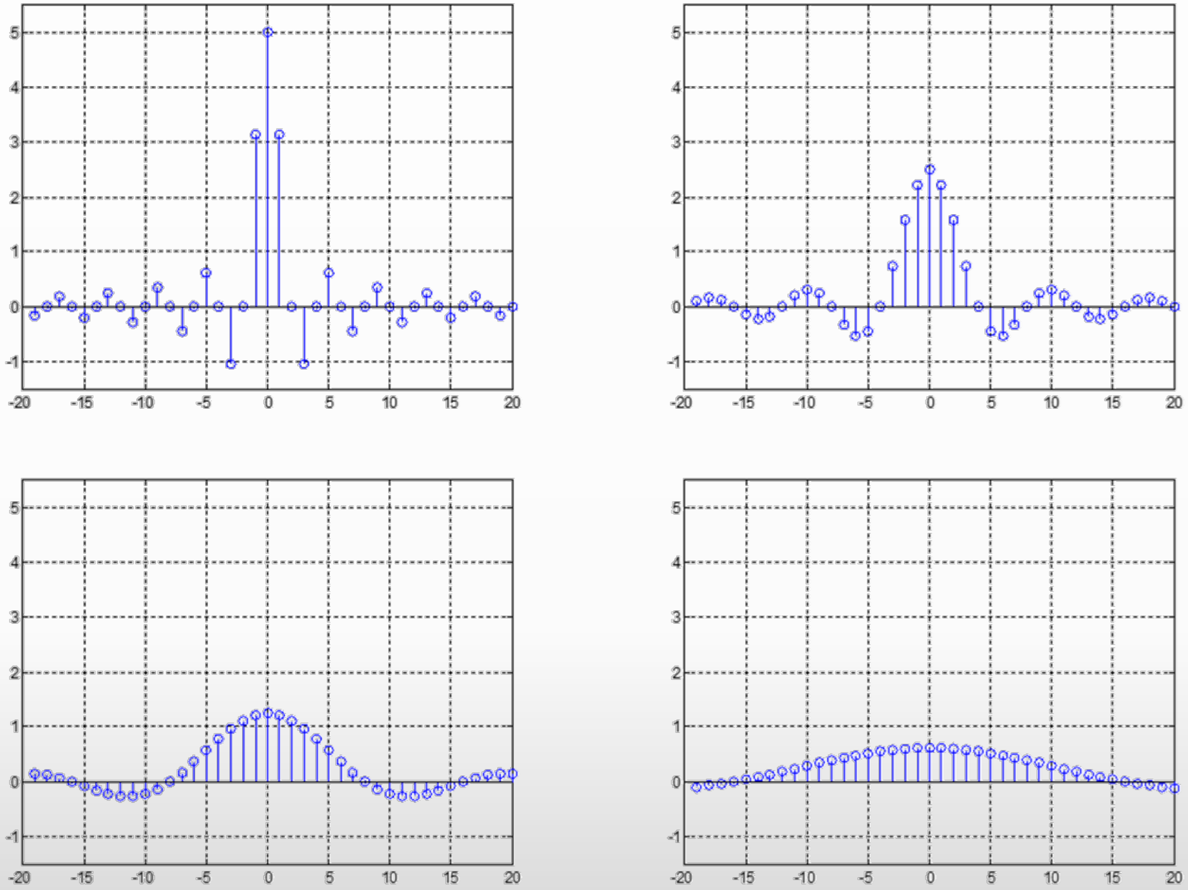
$$X_1 = X_{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}, \quad X_2 = X_{-2} = \frac{1}{2\pi}, \quad X_3 = X_{-3} = \frac{\sqrt{2}}{3\pi}, \quad X_4 = X_{-4} = 0,$$

$$X_5 = X_{-5} = -\frac{\sqrt{2}}{5\pi}, \quad X_6 = X_{-6} = -\frac{1}{6\pi}, \quad X_7 = X_{-7} = -\frac{\sqrt{2}}{7\pi}, \quad X_8 = X_{-8} = 0, \ldots$$

Αντίστοιχα μπορούμε να συνεχίσουμε τον υπολογισμό των συντελεστών εκθετικής σειράς Fourier και για άλλες τιμές του (τ).

Παραδείγματα

Παράδειγμα 2 (συνέχεια) : Να βρεθεί το ανάπτυγμα σειράς Fourier σε όλες τις μορφές, του συρμού παλμών που εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα, όπου T_0 είναι η περίοδος και τ είναι η διάρκεια του παλμού. Εφαρμογή για $\tau = T_0/2$ και $T_0 = 2\pi$ και $A = 1$.



Φάσμα πλάτους παλμοσειράς για τιμές του τ: (α) $\tau = T_0/2$, (β) $\tau = T_0/4$, (γ) $\tau = T_0/8$, (δ) $\tau = T_0/16$

Παραδείγματα

<u>Παράδειγμα 2 **(συνέχεια)** :</u> Να βρεθεί το ανάπτυγμα σειράς Fourier σε όλες τις μορφές, του συρμού παλμών που εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα, όπου T_0 είναι η περίοδος και τ είναι η διάρκεια του παλμού. Εφαρμογή για $\tau = T_0/2$ και $T_0 = 2\pi$ και $A = 1$.

Θεωρώντας ότι $\tau = T_0/\alpha,\ \alpha \in Z$, προκύπτει ότι τα σημεία μηδενισμού των φασματικών συντελεστών προκύπτουν για τιμές του k που ικανοποιούν τη σχέση:

$$sin\left(\frac{k\Omega_0\tau}{2}\right) = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow sin\left(k\frac{\pi}{\alpha}\right) = 0 \Rightarrow k\frac{\pi}{\alpha} = \lambda\pi \Rightarrow k = \lambda\alpha, \lambda = \pm1, \pm2, \dots$$

είναι δηλαδή ακέραια πολλαπλάσια του συντελεστή α. Το γεγονός αυτό επαληθεύεται από τα διαγράμματα. Οι αντίστοιχες συχνότητες μηδενισμού των φασματικών συντελεστών δίνονται από τη σχέση:

$$\Omega = k\Omega_0, \qquad \text{όπου } \Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Παρατηρούμε ότι παλμοί βραχύτερης διάρκειας προκαλούν επέκταση του φάσματος σε πιο υψηλές συχνότητες.

Σε όλες τις περιπτώσεις οι συντελεστές Fourier αποτελούν ισαπέχοντα δείγματα (κατά $2\pi/T_0$) της περιβάλλουσας $2sin(\Omega\tau/2)/\Omega$ όπου $\Omega = k\Omega_0,\ \Omega_0 = 2\pi/T_0$.

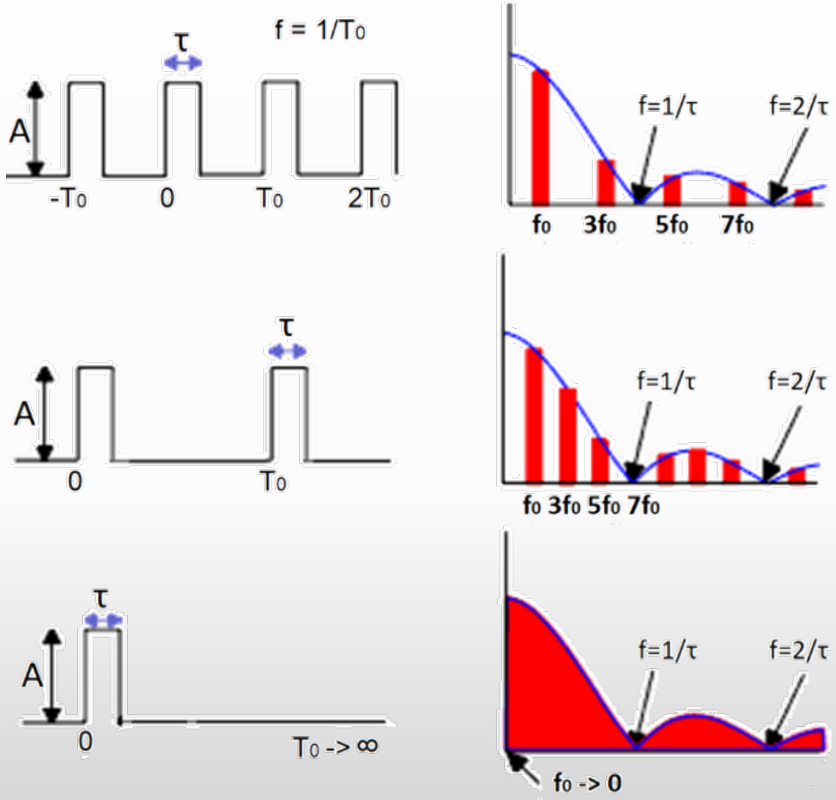
Επομένως, αύξηση της περιόδου T_0 του περιοδικού σήματος και διατήρηση σταθερής της διάρκειας του παλμού τ ως προς την περίοδό του T_0, δεν θα αλλοιώσει την περιβάλλουσα αλλά θα φέρει πιο κοντά τους φασματικούς συντελεστές, καθώς μειώνεται η θεμελιώδης συχνότητα των συνιστωσών της σειράς Fourier.

Έτσι, οι αρμονικές πλησιάζουν συχνοτικά η μία την άλλη και το φάσμα γίνεται πιο πυκνό.

Παραδείγματα

<u>Παράδειγμα 2 **(συνέχεια)** :</u> Να βρεθεί το ανάπτυγμα σειράς Fourier σε όλες τις μορφές, του συρμού παλμών που εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα, όπου T_0 είναι η περίοδος και τ είναι η διάρκεια του παλμού. Εφαρμογή για $\tau = T_0/2$ και $T_0 = 2\pi$ και $A = 1$.

Όταν ο χρόνος μεταξύ των παλμών ή αλλιώς η περίοδος του περιοδικού σήματος τείνει στο άπειρο, τότε η απόσταση ανάμεσα σε διαδοχικούς φασματικούς συντελεστές τείνει στο μηδέν, άρα το διακριτό φάσμα γίνεται πλέον συνεχές, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Φαινόμενο Gibbs

- Αν η συνάρτηση $x(t)$ που θέλουμε να αναπτύξουμε είτε σε σειρά είτε σε μετασχηματισμό Fourier παρουσιάζει ασυνέχειες, τότε στο ανάπτυγμα θα εμφανιστούν **κυματισμοί**, το πλάτος των οποίων κορυφώνεται στα σημεία ασυνέχειας της συνάρτησης.
- Πρόκειται για ένα ανεπιθύμητο φαινόμενο, που ονομάζεται **φαινόμενο Gibbs**.
- Το μέγιστο πλάτος των κυματισμών μένει **σταθερό** και δεν μειώνεται ακόμα και όταν αυξάνεται το πλήθος των όρων του αναπτύγματος, όπως θα περίμενε κανείς.
- Οφείλεται στο γεγονός ότι το ανάπτυγμα Fourier συγκλίνει στην πραγματική τιμή της περιοδικής συνάρτησης $x(t)$ σε κάθε χρονική στιγμή t, εκτός από τα **σημεία ασυνέχειας**, στα οποία το ανάπτυγμα Fourier συγκλίνει στον μέσο όρο των τιμών του $x(t)$ στις δύο πλευρές της χρονικής ασυνέχειας :

$$\frac{x(t_0^-) + x(t_0^+)}{2}$$

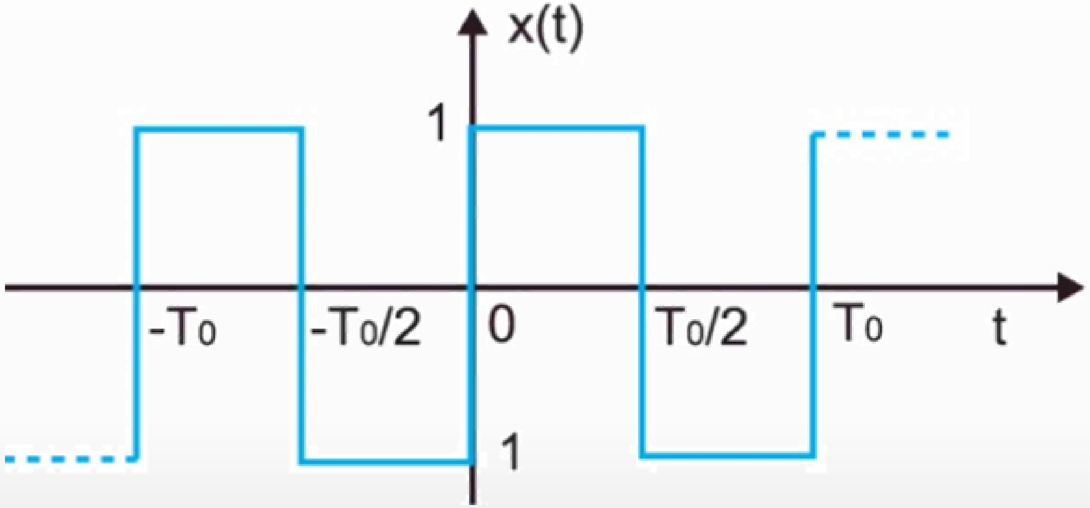
- Καθώς η μεταβλητή t τείνει προς τα σημεία της ασυνέχειας, το πλήθος N των όρων του αναπτύγματος πρέπει να αυξάνεται συνεχώς, έτσι ώστε το σφάλμα προσέγγισης του $x(t)$ από το ανάπτυγμά του κατά Fourier να είναι μικρότερο από κάποιο όριο.
- Αυτό με τη σειρά του σημαίνει ότι το πλήθος των ταλαντώσεων θα αυξάνει και αυτό, όμως το μέγιστο πλάτος των ταλαντώσεων θα παραμένει σταθερό και περίπου ίσο με 18%.

Φαινόμενο Gibbs

Να υπολογιστεί η τριγωνομετρική Α' μορφή σειράς Fourier της περιοδικής παλμοσειράς:

$$x(t) = \begin{cases} -1, & -T_0/2 < t < 0 \\ 1, & 0 < t < T_0/2 \end{cases} \quad \text{και} \quad x(t) = x(t+T_0)$$

Απάντηση: Η γραφική παράσταση της περιοδικής συνάρτησης $x(t)$ δίνεται στο σχήμα:



Οι συντελεστές a_0, a_k, b_k υπολογίζονται από τις σχέσεις:

Φαινόμενο Gibbs

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\,dt = \frac{1}{T_0}\left[\int_{-T_0/2}^{0}(-1)dt + \int_{0}^{T_0/2}(1)\,dt\right] = \frac{1}{T_0}\left[-\frac{T_0}{2}+\frac{T_0}{2}\right] = 0$$

$$a_k = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\cos(k\Omega_0 t)\,dt = \frac{2}{T_0}\left[\int_{-T_0/2}^{0}(-1)\cos(k\Omega_0 t)\,dt + \int_{0}^{T_0/2}(1)\cos(k\Omega_0 t)\,dt\right]$$
$$= \frac{2}{T_0}\left[-\frac{1}{k\Omega_0}\sin(k\Omega_0 t)\Big|_{-T_0/2}^{0} + \frac{1}{k\Omega_0}\sin(k\Omega_0 t)\Big|_{0}^{T_0/2}\right] = 0$$

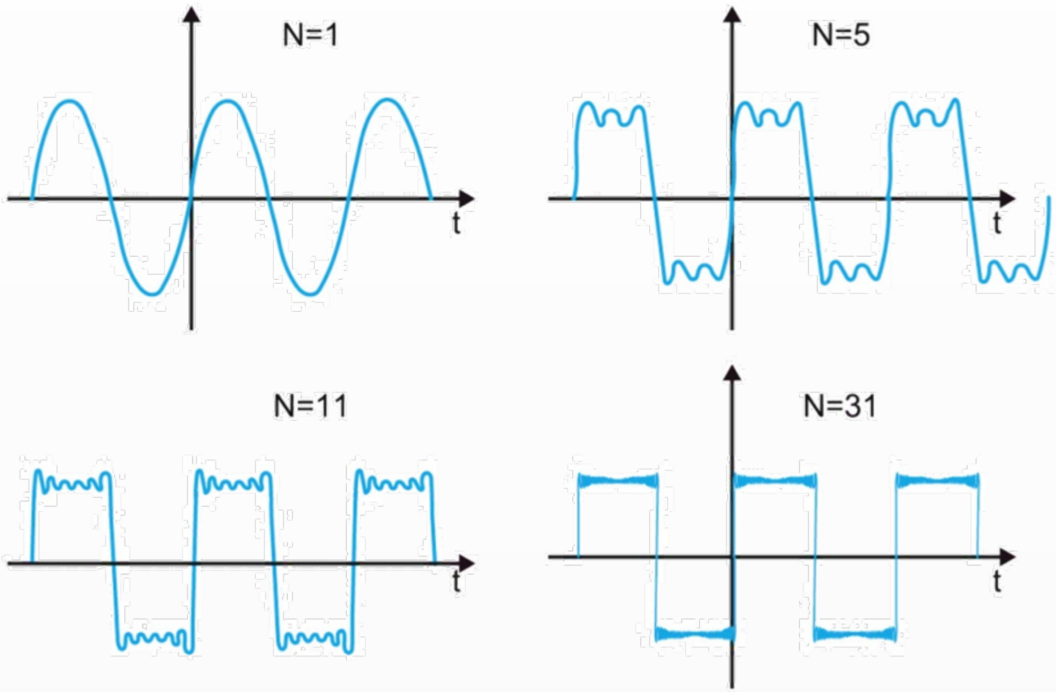
$$b_k = \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\sin(k\Omega_0 t)\,dt = \frac{2}{T_0}\left[\int_{-T_0/2}^{0}(-1)\sin(k\Omega_0 t)\,dt + \int_{0}^{T_0/2}(1)\sin(k\Omega_0 t)\,dt\right]$$
$$= \frac{2}{k\Omega_0 T_0}\left[\cos(k\Omega_0 t)\Big|_{-T_0/2}^{0} - \cos(k\Omega_0 t)\Big|_{0}^{T_0/2}\right] = \frac{2}{k\pi}(1-\cos(k\pi)) = \begin{cases} 0, & k \text{ άρτιος} \\ 4/k\pi, & k \text{ περιττός} \end{cases}$$

Το ανάπτυγμα της $x(t)$ σε σειρά Fourier είναι:

$$x(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin k\Omega_0 t + \frac{1}{3}\sin 3k\Omega_0 t + \frac{1}{5}\sin 5k\Omega_0 t + \cdots\right)$$

Φαινόμενο Gibbs

Στο επόμενο σχήμα απεικονίζονται διαδοχικοί υπολογισμοί του αναπτύγματος της $x(t)$ για $N = 1, 5, 11, 31$ πρώτων αρμονικών.



- Παρατηρούμε ότι η προσέγγιση βελτιώνεται καθώς αυξάνεται η τιμή του N.
- Ωστόσο οι ταλαντώσεις παραμένουν στα σημεία ασυνέχειας $k(T_0/2),\ k = \pm1, \pm2, \ldots$ ως αποτέλεσμα του φαινομένου Gibbs.
- Αυτές θα πάψουν να εμφανίζονται όταν το N πάρει την τιμή άπειρο.

Μετασχηματισμός Fourier

- Στην πράξη δεν υπάρχουν περιοδικά σήματα επειδή δεν ικανοποιείται η προϋπόθεση της άπειρης διάρκειάς τους. Ο μετασχηματισμός Fourier αποτελεί επέκταση των σειρών Fourier σε **περιοδικά** και **μη-περιοδικά σήματα**.
- Αποδεικνύεται ότι ένα οποιοδήποτε σήμα (περιοδικό ή μη-περιοδικό) μπορεί να αναπτυχθεί στο χρονικό διάστημα $(-\infty, +\infty)$ μέσω του μετασχηματισμού Fourier ως ένας **γραμμικός συνδυασμός απείρων αρμονικών εκθετικών σημάτων**.
- Όπως και στις σειρές Fourier, τα σήματα εκφράζονται με τη βοήθεια μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων διαφόρων συχνοτήτων, όμως στον μετασχηματισμό Fourier οι συχνότητες είναι **συνεχείς** και όχι διακριτές όπως στις σειρές Fourier.

Μετασχηματισμός Fourier

Ευθύς Μετασχηματισμός Fourier (Fourier Transform, FT)

Ορίζουμε ως **μετασχηματισμό Fourier** μίας συνάρτησης $x(t)$ τη μιγαδική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής $X(\Omega)$, που δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{X(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t} dt}$$

με την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα υπάρχει, δηλαδή δεν απειρίζεται.

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier

Επιτρέπει τον υπολογισμό της χρονικής συνάρτησης $x(t)$ όταν είναι γνωστός ο μετασχηματισμός Fourier $X(\Omega)$**:**

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega)\, e^{j\Omega t} d\Omega}$$

Μετασχηματισμός Fourier

Ευθύς Μετασχηματισμός Fourier (Fourier Transform, FT)

Αν αντί της κυκλικής συχνότητας Ω, χρησιμοποιήσουμε τη **γραμμική συχνότητα $\boldsymbol{f}$** $(\text{όπου } f = \Omega/2\pi)$, οι ορισμοί του ευθύ και του αντίστροφου Μετασχηματισμού Fourier είναι:

Ευθύς μετασχηματισμός Fourier:

$$\boxed{X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt}$$

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier:

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df}$$

Μετασχηματισμός Fourier

Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση $X(\Omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της $x(t)$, χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό:

$$X(\Omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

Για να δηλώσουμε ότι η $x(t)$ είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της $X(\Omega)$, χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\}$$

Μερικές φορές χρησιμοποιείται ο ακόλουθος συμβολισμός ως συντομογραφία των δύο συμβολισμών:

Ευθύς μετασχηματισμός Fourier $\quad x(t) \xrightarrow{F} X(\Omega)$

Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier $\quad X(\Omega) \xrightarrow{F^{-1}} x(t)$

ή απλά $x(t) \xleftrightarrow{F} X(\Omega)$

Φυσική Σημασία Μετασχηματισμού Fourier

Ο μετασχηματισμός Fourier είναι γενικά μιγαδική συνάρτηση, άρα γράφεται ως:

$$\mathrm{X}(\Omega) = R(\Omega) + jI(\Omega)$$

όπου $R(\Omega)$ το πραγματικό μέρος και $I(\Omega)$ το φανταστικό μέρος του $X(\Omega)$.

Αν το σήμα $x(t)$ είναι πραγματική συνάρτηση αποδεικνύεται ότι η $R(\Omega)$ είναι **άρτια** συνάρτηση, ενώ η $\mathrm{I}(\Omega)$ είναι **περιττή** συνάρτηση και δίνονται από:

$$R(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(\Omega t)\, d\omega$$

$$I(\Omega) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(\Omega t)\, d\omega$$

Φυσική Σημασία Μετασχηματισμού Fourier

Ο μετασχηματισμός Fourier $\mathrm{X}(\Omega)$ ως μιγαδική συνάρτηση, γράφεται ως:

$$X(\Omega) = |X(\Omega)|\ e^{j\varphi_X(\Omega)}$$

όπου $|X(\Omega)|$: **φάσμα πλάτους** (amplitude spectrum)

και $\varphi_X(\Omega)$: **φάσμα φάσης** (phase spectrum)

Το φάσμα του FT είναι **συνεχές**, σε αντίθεση με το φάσμα των σειρών Fourier, το οποίο είναι διακριτό.

Το πλάτος $|\mathrm{X}(\Omega)|$ και η φάση $\varphi_X(\Omega)$ υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$|X(\Omega)| = \sqrt{R^2(\Omega) + I^2(\Omega)}$$

$$\varphi_X(\Omega) = \tan^{-1}\left[\frac{I(\Omega)}{R(\Omega)}\right]$$

Φυσική Σημασία Μετασχηματισμού Fourier

Αν το σήμα $x(t)$ είναι **πραγματική συνάρτηση** τότε η ανάπτυξη μέσω του μετασχηματισμού Fourier γίνεται στις συνιστώσες $e^{j\Omega t}$.

Από τον τύπο του Euler $e^{j\Omega t} = \frac{1}{2}[\cos \Omega t + j \sin\Omega t]$ είναι προφανές ότι ο όρος $e^{j\Omega t}$ αναλύεται σε δύο τμήματα (διανύσματα), το $\cos\Omega t$ και το $\sin\Omega t$, τα οποία μάλιστα είναι μεταξύ τους κάθετα.

Αποδεικνύεται ότι το σήμα $x(t)$ μπορεί να γραφεί:

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega)\cos\big(\Omega t + \varphi_X(\Omega)\big)\, d\Omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} X(\Omega)\cos\big(\Omega t + \varphi_X(\Omega)\big)\, d\Omega}$$

Με άλλα λόγια,

ο μετασχηματισμός Fourier ενός πραγματικού σήματος ισοδυναμεί με ένα ανάπτυγμα του σήματος σε ένα άπειρο πλήθος ημιτονοειδών σημάτων.

Κάθε μία από αυτές τις συχνότητες υπεισέρχεται στον υπολογισμό με πλάτος $\frac{1}{\pi}X(\Omega)\, d\Omega$ και φάση $\varphi_X(\Omega)$.

Φάσμα Μετασχηματισμού Fourier

- Ο μετασχηματισμός Fourier αναλύει ένα (περιοδικό ή μη περιοδικό) σήμα $x(t)$ στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ σε ένα **συνεχές φάσμα περιοδικών εκθετικών σημάτων**. Με τον τρόπο αυτό αναδεικνύεται το **φασματικό περιεχόμενο** των σημάτων.
- Το φασματικό περιεχόμενο στο απειροστό διάστημα συχνοτήτων $[\Omega, \Omega + d\Omega]$ είναι $X(\Omega)$ και έχει «πλάτος»:

$$dE = \frac{1}{2\pi} X(\Omega)\, d\Omega$$

<u>Επομένως, ο μετασχηματισμός Fourier δεν είναι ένα φάσμα πλάτους αλλά η **φασματική πυκνότητα πλάτους**</u>.

Δηλαδή το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier περιγράφει το συχνοτικό περιεχόμενο ενός σήματος και μας δίνει πληροφορίες για τα σχετικά μεγέθη των μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων που συγκροτούν το συνεχές σήμα $x(t)$ που μελετάμε.

Η **φάση** του μετασχηματισμού Fourier δεν δίνει πληροφορίες για τα μέτρα των μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων, αλλά για τις μεταξύ τους σχετικές φάσεις.

Η φάση έχει **μεγάλη επίδραση** στα χαρακτηριστικά του σήματος στο πεδίο του χρόνου και όπως μπορεί να αποδειχθεί δύο σήματα με μετασχηματισμούς Fourier που έχουν το ίδιο ακριβώς μέτρο αλλά διαφορετική φάση, είναι πολύ διαφορετικά μεταξύ τους.

Γενικά, οι συναρτήσεις $|X(\Omega)|$ και $\varphi_X(\Omega)$ περιγράφουν πλήρως την επίδραση ενός Γραμμικού και Χρονικά Αμετάβλητου (ΓΧΑ) συστήματος συνεχούς χρόνου επάνω στο σήμα εισόδου που εισέρχεται σε αυτό.

Συνθήκες Ύπαρξης του Μετασχηματισμού Fourier

Τα ολοκληρώματα ορισμού του ευθύ και του αντίστροφου FT δεν υπάρχουν πάντα.

Οι ικανές συνθήκες για να υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος είναι οι **συνθήκες Dirichlet.**

Ικανή Συνθήκη 1. Η συνάρτηση $x(t)$ να είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη, δηλαδή να ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt < +\infty$$

ή με άλλα λόγια, το σήμα $x(t)$ να είναι χρονικώς πεπερασμένο δηλ. να είναι σήμα ενέργειας. Η συνθήκη αυτή είναι ικανή αλλά όχι αναγκαία.

Ικανή Συνθήκη 2. Η συνάρτηση $x(t)$ να είναι συνεχής ή να περιέχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών, καθεμιά από τις οποίες να είναι πεπερασμένου ύψους.

Ικανή Συνθήκη 3. Η συνάρτηση $x(t)$ να είναι φραγμένης κύμανσης, δηλαδή να μπορεί να παρασταθεί με καμπύλη πεπερασμένου μήκους σε οποιοδήποτε πεπερασμένο χρονικό διάστημα.

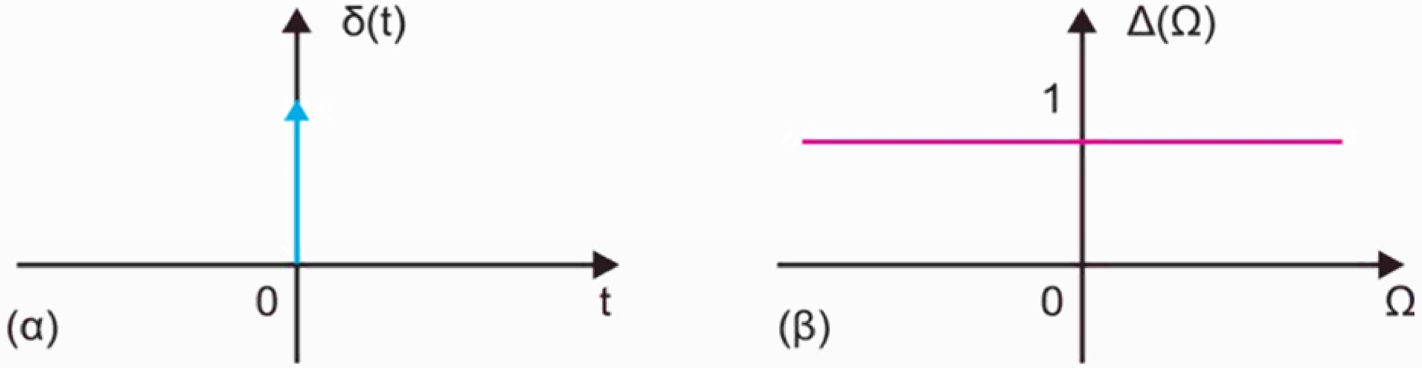
Παραδείγματα

Παράδειγμα 1: Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier (FT) του κρουστικού παλμού $\delta(t)$.

ιδιότητα ολίσθησης $\delta(t)$:
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)$$

Απάντηση: Από τον ορισμό του FT έχουμε:

$$\Delta(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\Omega t} dt = e^{-j\Omega t}\Big|_{t=0} = e^{-j\Omega 0} = e^{0} = 1\measuredangle 0^{o}$$



Στο φάσμα $\Delta(\Omega)$ υπάρχουν άπειρες συχνότητες με μοναδιαίο πλάτος και μηδενική φάση. Αυτό εξηγεί την σπουδαία αξία της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ στην ανάλυση ΓΧΑ συστημάτων.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 2: Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier των σημάτων:

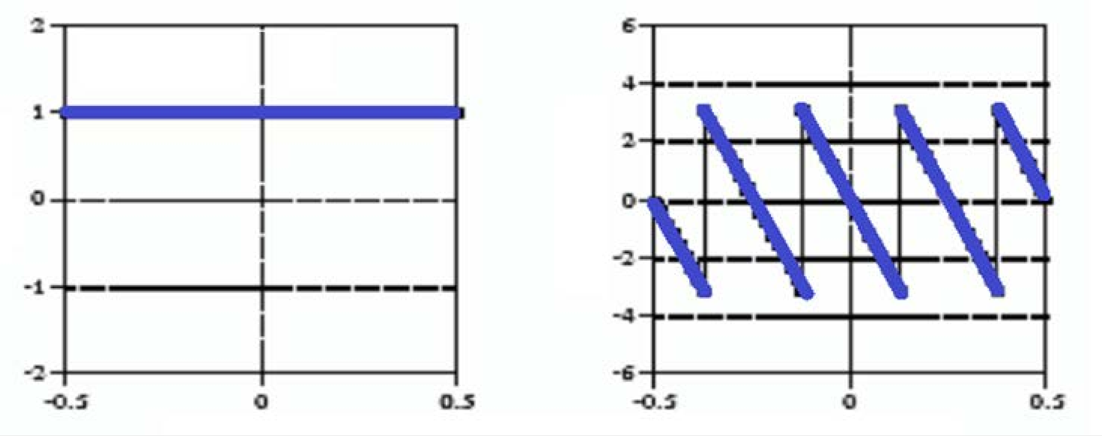
(α) $x(t) = \delta(t - t_0)$ (β) $x_2(t) = \delta(t + \alpha) + \delta(t - \alpha)$

ιδιότητα ολίσθησης $\delta(t)$:
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)\, dt = x(t_0)$$

Απάντηση: (α) Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier έχουμε:

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)e^{-j\Omega t}dt = e^{-j\Omega t}\Big|_{t = t_0} = e^{-j\Omega t_0} = 1\measuredangle - \Omega t_0$$

Το πλάτος παραμένει 1, όπως για $x(t) = \delta(t)$. Η φάση είναι πλέον γραμμική ως προς τη συχνότητα με κλίση $-t_0$. Επομένως, μια χρονική μετατόπιση του $\delta(t)$ διατηρεί αναλλοίωτο το πλάτος του μετασχηματισμού, αλλά μεταβάλλει γραμμικά τη φάση.



- Αυτό ισχύει για όλα τα σήματα και είναι μία βασική ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier, η ιδιότητα της **μετατόπισης στο χρόνο**.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 2 (συνέχεια) : Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier των σημάτων:

(α) $x(t) = \delta(t - t_0)$ (β) $x_2(t) = \delta(t + \alpha) + \delta(t - \alpha)$

$\boxed{\text{ιδιότητα ολίσθησης } \delta(t)\text{: } \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)\, dt = x(t_0)}$

Απάντηση: (β) Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier έχουμε:

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t + \alpha)e^{-j\Omega t}dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \alpha)e^{-j\Omega t}dt = e^{-j\Omega t}\Big|_{t=-\alpha} + e^{-j\Omega t}\Big|_{t=\alpha}$$

$$= e^{j\alpha\Omega} + e^{-j\alpha\Omega} = 2\cos(\alpha\Omega)$$

Παρατηρούμε ότι το πλάτος του μετασχηματισμού Fourier δύο συμμετρικών (στο χρόνο) κρουστικών συναρτήσεων είναι ένα συνημίτονο με συχνότητα $\boldsymbol{\alpha\Omega}$ που καθορίζεται από τη χρονική θέση α των δύο κρουστικών συναρτήσεων.

Η συνάρτηση Fourier είναι πραγματική, οπότε η φάση της είναι μηδενική.

Παραδείγματα

$$\boxed{e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \;\text{ και }\; e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta}$$

<u>Παράδειγμα 3:</u> Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του μοναδιαίου τετραγωνικού παλμού $\Pi_{T/2}(t)$ διάρκειας T, δηλαδή:

$$x(t) \equiv \Pi_{T/2}(t) \equiv A\,rect\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} A, & |t| \leq T/2 \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases}$$

<u>Απάντηση</u>: Επειδή το σήμα είναι μηδέν για $t < -T/2$ και $t > T/2$, ο μετασχηματισμός Fourier είναι:

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt = A\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\Omega t}dt = \frac{A}{-j\Omega}e^{-j\Omega t}\Bigg|_{-T/2}^{T/2} = \frac{A}{-j\Omega}\left[e^{-j\Omega T/2} - e^{-j\Omega(-T/2)}\right]$$

$$= \frac{A}{j\Omega}\left[e^{j\Omega T/2} - e^{-j\Omega T/2}\right] = \frac{2A}{\Omega}sin(\Omega T/2) = AT\frac{sin(\Omega T/2)}{\Omega T/2}$$

Αντικαθιστώντας $\Omega = 2\pi f$ εκφράζουμε το αποτέλεσμα στη γραμμική συχνότητα f:

$$X(f) = \frac{A}{\pi f}\sin(\pi f T)$$

Παραδείγματα

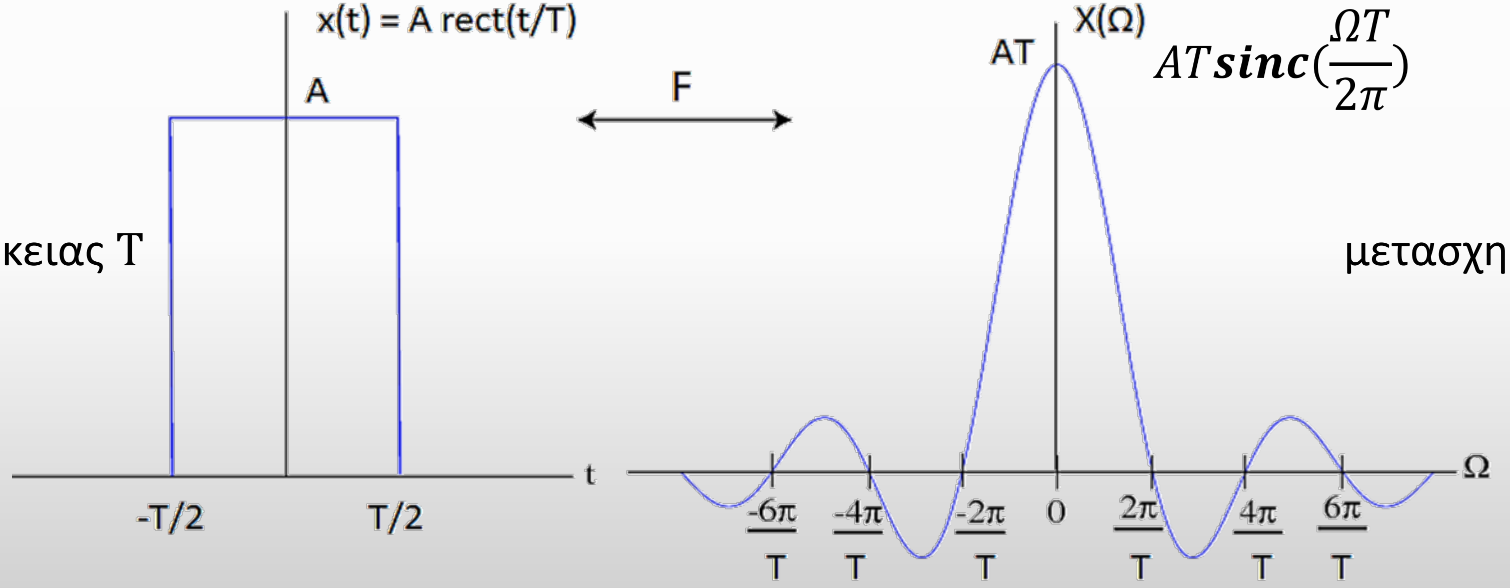
<u>Παράδειγμα 3 (συνέχεια) :</u> Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του μοναδιαίου τετραγωνικού παλμού $\Pi_{T/2}(t)$ διάρκειας T,

<u>Απάντηση</u>: Μια πιο απλοποιημένη μορφή είναι:

$$X(\Omega) = AT\,sinc\left(\frac{\Omega T}{2\pi}\right)$$

$$X(f) = AT\,sinc(fT)$$

όπου $sinc(x)$είναι η κανονικοποιημένη συνάρτηση δειγματοληψίας.



τετραγωνικός παλμός διάρκειας T

μετασχηματισμός Fourier

Παραδείγματα

Παράδειγμα 3 (συνέχεια) : Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του μοναδιαίου τετραγωνικού παλμού $\Pi_{T/2}(t)$ διάρκειας T,

Παρατηρήσεις:

1. Ο μετασχηματισμός Fourier $X(\Omega)$ γενικά είναι μία μιγαδική συνάρτηση, όμως στην περίπτωση του τετραγωνικού παλμού είναι μια πραγματική συνάρτηση.

2. Η τιμή του μετασχηματισμού Fourier στη συχνότητα μηδέν υπολογίζεται από το όριο:

$$X(0) = \lim_{\Omega \to 0} \frac{2\sin(\Omega T)}{\Omega} = \lim_{\Omega \to 0} 2\, T \cos(\Omega T) = 2T$$

3. Οι τιμές στις οποίες μηδενίζεται το $X(\Omega)$ είναι τα **φασματικά μηδενικά**, δίνονται από την εξίσωση $\sin(\Omega T) = 0$ και είναι οι συχνότητες $\Omega = k\pi/T$, όπου $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$

4. Η γραφική παράσταση του μετασχηματισμού Fourier διέρχεται περιοδικά από το μηδέν και το ύψος των δευτερευόντων λοβών μειώνεται ασυμπτωτικά στο μηδέν.

5. Το φάσμα τείνει στο μηδέν καθώς περνάμε σε υψηλές συχνότητες, δηλαδή όταν $|\Omega| \to \infty$.

Παραδείγματα

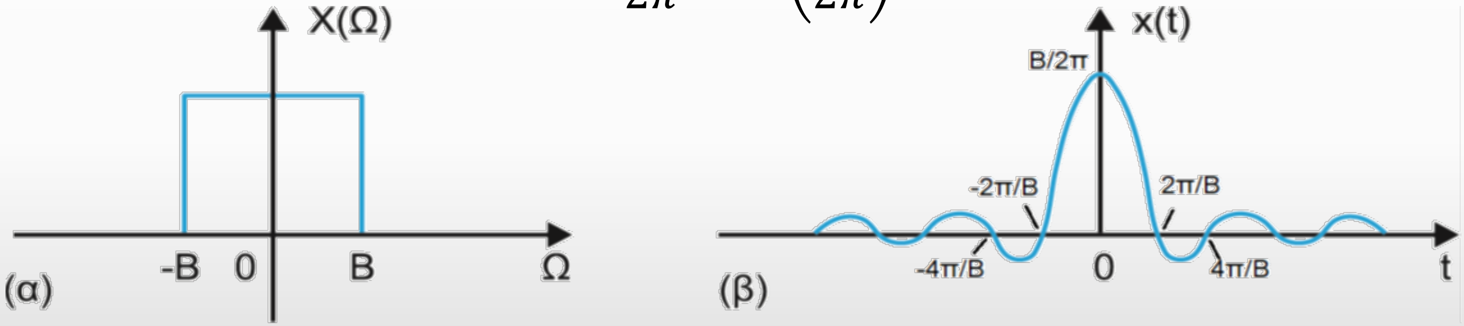
Παράδειγμα 4: Να βρεθεί το σήμα του οποίου ο μετασχηματισμός Fourier είναι ορθογώνιο παράθυρο συχνοτήτων με πλάτος B, δηλαδή ισχύει:

$$X(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < B/2 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

Απάντηση: Επειδή ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος είναι ίσος με μηδέν για $\Omega < -B/2$ και $\Omega > B/2$, το σήμα θα είναι:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-B/2}^{B/2} e^{j\Omega t}\, d\Omega = \frac{1}{2\pi j t} e^{j\Omega t}\Big|_{-B/2}^{B/2} = \frac{1}{2\pi j t}\left(e^{jBt/2} - e^{-jBt/2}\right) = \frac{1}{2\pi j t} 2j\, sin(Bt/2) = \frac{1}{\pi t} sin(Bt/2)$$

$$= \frac{B}{2\pi} sinc\left(\frac{Bt}{2\pi}\right)$$



Περιγραφή του $x(t)$ στα πεδία: (α) συχνότητας και (β) χρόνου, αντίστοιχα.

Παραδείγματα

<u>**Παράδειγμα 4** (συνέχεια) **:**</u> Να βρεθεί το σήμα του οποίου ο μετασχηματισμός Fourier είναι ορθογώνιο παράθυρο συχνοτήτων με πλάτος Β, δηλαδή ισχύει:

$$X(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < B/2 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

<u>Παρατηρήσεις</u>:

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, η λύση περιγράφεται από τη συνάρτηση δειγματοληψίας.

Συγκρίνοντας με το προηγούμενο παράδειγμα παρατηρούμε μια μορφής **συμμετρία**, δηλ. ο μετασχηματισμός Fourier του ορθογώνιου παλμού (στο χρόνο) είναι η συνάρτηση δειγματοληψίας (στη συχνότητα) και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του ορθογώνιου παλμού (στη συχνότητα) είναι πάλι η συνάρτηση δειγματοληψίας (στο χρόνο).

Θα επιβεβαιώσουμε αυτή την παρατήρηση με την ιδιότητα της συμμετρίας του μετασχηματισμού Fourier.

Παραδείγματα

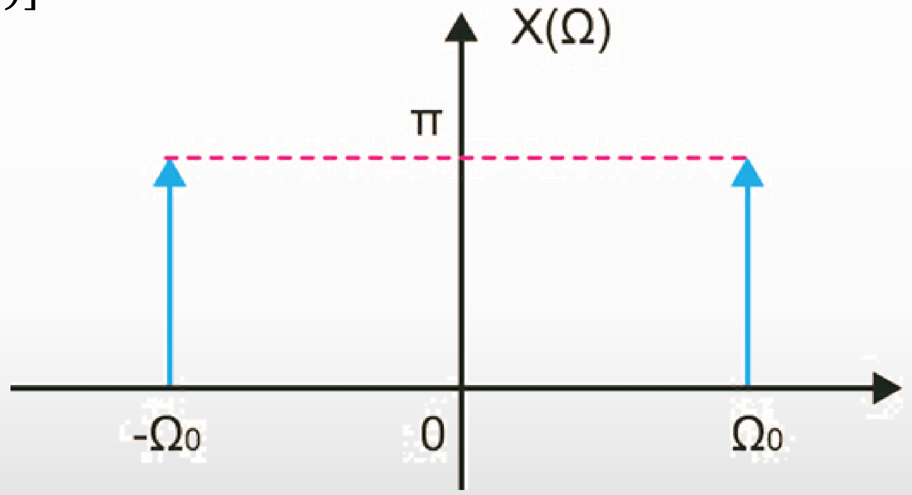
<u>Παράδειγμα 5:</u> Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = cos(\Omega_0 t)$.

<u>Απάντηση</u>: Από τη σχέση Euler έχουμε $x(t) = \frac{1}{2}\, e^{j\Omega_0 t} + \frac{1}{2}\, e^{-j\Omega_0 t}$. Επίσης ισχύει:

$$e^{j\Omega_0 t} \xleftrightarrow{F} 2\pi\, \delta(\Omega - \Omega_0)$$

Επομένως:

$$F\{x(t)\} = F\left\{\frac{1}{2}\, e^{j\Omega_0 t} + \frac{1}{2}\, e^{-j\Omega_0 t}\right\} = \frac{1}{2} F\{e^{j\Omega_0 t}\} + \frac{1}{2}\, F\{e^{-j\Omega_0 t}\} = \frac{1}{2} 2\pi\, \delta(\Omega - \Omega_0) + \frac{1}{2} 2\pi\, \delta(\Omega + \Omega_0)$$
$$= \pi[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)]$$



Φάσμα πλάτους του $x(t) = cos(\Omega_0 t)$. Το φάσμα φάσης είναι μηδενικό.

Μετασχηματισμοί Fourier **Βασικών Συναρτήσεων**

Πεδίο του χρόνου	Πεδίο συχνοτήτων
$\delta(t)$	**1**
1	$2\pi\delta(\Omega)$
A	$2\pi A\delta(\Omega)$
$u(t)$	$\frac{1}{j\Omega}+\pi\delta(\Omega)$
$\|t\|$	$-\frac{2}{\Omega^2}$
$sgn(t)$	$\frac{2}{j\Omega}$
$A\,\delta(t\pm t_0)$	$A\,e^{\pm j\Omega t_0}$
$e^{\pm j\Omega_0 t}$	$2\pi\delta(\Omega\mp\Omega_0)$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\Omega_0 t}$	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\delta(\Omega-k\Omega_0)$

Μετασχηματισμοί Fourier Βασικών Συναρτήσεων

Πεδίο του χρόνου	Πεδίο συχνοτήτων
$cos(\Omega_0 t)$	$\pi[\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)]$
$sin(\Omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}\,[\delta(\Omega-\Omega_0)-\delta(\Omega+\Omega_0)]$
$cos(\Omega_0 t)\,u(t)$	$\frac{\pi}{2}[\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)]+\frac{j\Omega}{\Omega_0^2-\Omega^2}$
$sin(\Omega_0 t)\,u(t)$	$\frac{\pi}{2j}\,[\delta(\Omega-\Omega_0)-\delta(\Omega+\Omega_0)]+\frac{\Omega}{\Omega_0^2-\Omega^2}$
$e^{-at}cos(\Omega_0 t)u(t), \qquad Re(a)>0$	$\frac{\alpha+j\Omega}{(\alpha+j\Omega)^2+\Omega_0^2}$
$e^{-at}sin(\Omega_0 t)u(t), \qquad Re(a)>0$	$\frac{\Omega_0}{(\alpha+j\Omega)^2+\Omega_0^2}$
$\Pi_{T/2}(t)\equiv rect\left(\frac{t}{T}\right)=\begin{cases}1, & \lvert t\rvert<T/2\\ 0, & \lvert t\rvert>T/2\end{cases}$	$T\,sinc\left(\frac{\Omega T}{2\pi}\right)$

Μετασχηματισμοί Fourier Βασικών Συναρτήσεων

Πεδίο του χρόνου	Πεδίο συχνοτήτων
$\frac{B}{2\pi} sinc\left(\frac{Bt}{2\pi}\right)$	$\Pi_{B/2}(t) \equiv rect\left(\frac{\Omega}{B}\right)$
$\Lambda_T(t) = tri\left(\frac{t}{T}\right)$	$Tsinc^2\left(\frac{\Omega T}{2\pi}\right)$
$\frac{B}{2\pi} sinc^2\left(\frac{Bt}{2\pi}\right)$	$\Lambda_B(\Omega) = tri\left(\frac{\Omega}{B}\right)$
$e^{-at}u(t), \qquad Re(a) > 0$	$\frac{1}{\alpha + j\Omega}$
$e^{-at}u(-t), \qquad Re(a) > 0$	$\frac{1}{\alpha - j\Omega}$
$te^{-at}u(t), \qquad Re(a) > 0$	$\frac{1}{(\alpha + j\Omega)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}u(t), \qquad Re(a) > 0$	$\frac{1}{(\alpha + j\Omega)^n}$
$e^{-a\|t\|}u(t), \qquad Re(a) > 0$	$\frac{2a}{\alpha^2 + \Omega^2}$

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier

1. Γραμμικότητα

Αν $x_i(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_i(\Omega)$ και c_i αυθαίρετη (πραγματική ή μιγαδική) σταθερά και $i = 1,2, \ldots n$, τότε ισχύει:

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} c_1 X_1(\Omega) + c_2 X_2(\Omega) + \cdots + c_n X_n(\Omega)$$

Η σχέση δηλώνει ότι ο FT ενός γραμμικού συνδυασμού συναρτήσεων ισούται με τον γραμμικό συνδυασμό των αντίστοιχων επιμέρους FT για κάθε συνάρτηση.

2. Μετατόπιση στο Χρόνο

Αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$, τότε για κάθε πραγματικό αριθμό t_0 ισχύει:

$$x(t - t_0) \overset{F}{\longleftrightarrow} e^{-j\Omega t_0}\, X(\Omega) = |X(\Omega)|\, e^{j\varphi(\Omega) - \Omega t_0}$$

Η σχέση δείχνει πως αν το σήμα μετατοπιστεί στο χρόνο κατά t_0, τότε το φάσμα του πολλαπλασιάζεται με τον παράγοντα $e^{-j\Omega t_0}$. Έτσι το φάσμα ενός σήματος μετατοπισμένου στο χρόνο έχει το ίδιο μέτρο με το αρχικό σήμα, ενώ η φάση του αλλάζει γραμμικά.

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier

Παράδειγμα 6: Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα μετατόπισης στο χρόνο να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = \delta(t - t_0)$.

Απάντηση:
Γνωρίζουμε ότι μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης Δέλτα είναι $\Delta(\Omega) = 1$. Αυτό σημαίνει ότι για να συνθέσουμε το σήμα χρειαζόμαστε ημίτονα όλων των δυνατών συχνοτήτων $(-\infty < \Omega < \infty)$ με σταθερό μοναδιαίο πλάτος και **μηδενική φάση**.

Από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης προκύπτει:

$$X(\Omega) = e^{-j\Omega t_0}\, \Delta(\Omega) = e^{-j\Omega t_0}$$

Επομένως, για να συνθέσουμε το σήμα $x(t) = \delta(t - t_0)$ χρειαζόμαστε ημίτονα όλων των δυνατών συχνοτήτων $(-\infty < \Omega < \infty)$ με σταθερό μοναδιαίο πλάτος και **γραμμική φάση**.
Καταλήξαμε στο ίδιο αποτέλεσμα με το παράδειγμα 2 (σελ. 45) αλλά με διαφορετικό τρόπο.

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier

3. Μετατόπιση στη Συχνότητα

Αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$, τότε για κάθε πραγματικό αριθμό Ω_0 ισχύει:

$$e^{j\Omega_0 t}\, x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\Omega - \Omega_0)$$

Παρατηρούμε πως ο πολλαπλασιασμός ενός σήματος $x(t)$ με τον όρο $e^{j\Omega_0 t}$ μετατοπίζει το φάσμα του σήματος κατά Ω_0.

Η ιδιότητα αυτή είναι πολύ σημαντική για τις τηλεπικοινωνίες, επειδή ορίζει μαθηματικά τη διαδικασία της **διαμόρφωσης**.

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier

Παράδειγμα 7: Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $y(t) = x(t)\cos(\Omega_0 t)$.

Απάντηση: Χρησιμοποιώντας τη σχέση Euler, το σήμα $y(t)$ γράφεται:

$$y(t) = x(t)\cos(\Omega_0 t) = x(t)\frac{1}{2}\left[e^{j\Omega_0 t} + e^{-j\Omega_0 t}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\, x(t)\, e^{j\Omega_0 t} + \frac{1}{2} x(t) e^{-j\Omega_0 t}$$

Με βάση τις ιδιότητες της γραμμικότητας και της ολίσθησης συχνότητας, ο FT του $y(t)$ είναι:

$$Y(\Omega) = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\, x(t)\, e^{j\Omega_0 t}\right\} + \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} x(t) e^{-j\Omega_0 t}\right\} =$$

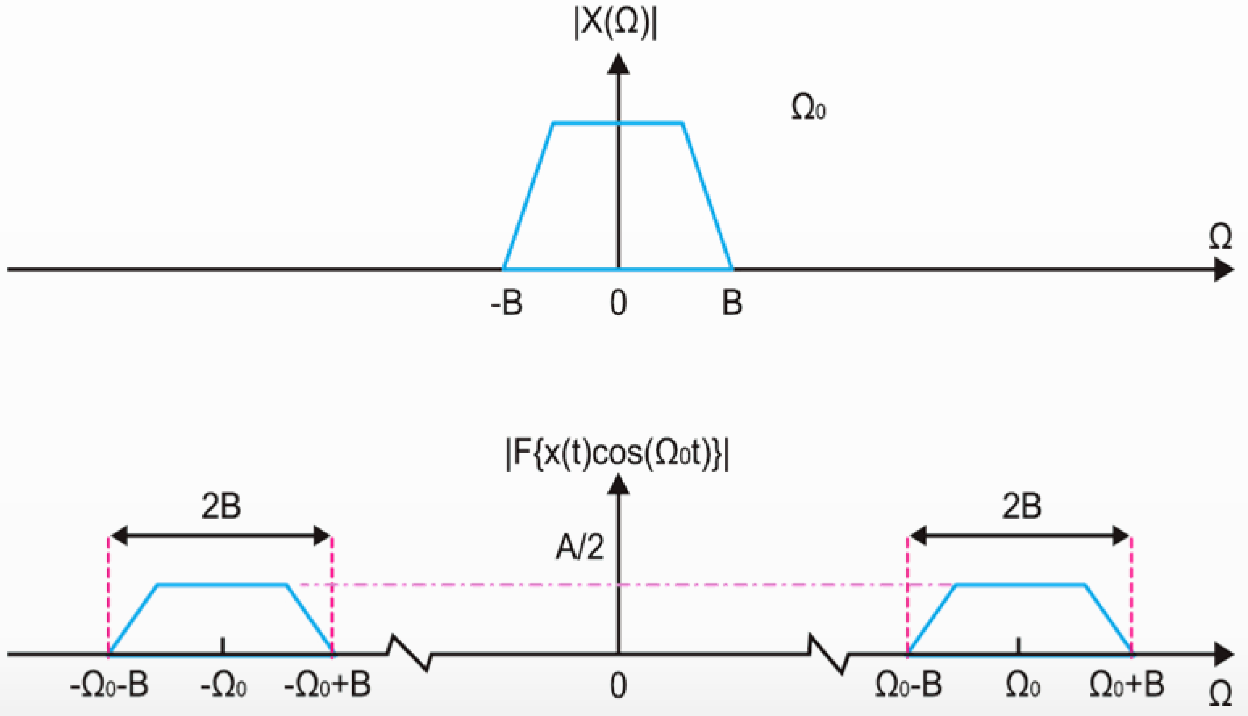
$$= \frac{1}{2}\left[X(\Omega - \Omega_0) + X(\Omega + \Omega_0)\right]$$

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier

Παράδειγμα 7(συνέχεια): Παρατηρούμε ότι πολλαπλασιασμός του σήματος $x(t)$ με το $\cos(\Omega_0 t)$ δεν αλλοιώνει τη μορφή του $X(\Omega)$, απλά το φάσμα $X(\Omega)$ του σήματος **μεταφέρεται** στη περιοχή των συχνοτήτων $\pm\Omega_0$. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται **διαμόρφωση**.

Φάσμα αρχικού σήματος

Φάσμα διαμορφωμένου σήματος



Κατά τη διαμόρφωση ένα σήμα $x(t)$ που μεταφέρει χρήσιμη πληροφορία πολλαπλασιάζεται με ένα σήμα απλής συχνότητας $\cos(\Omega_0 t)$, που ονομάζεται **φέρον σήμα**, με σκοπό τη μετάδοσή του μέσα από ένα κανάλι μετάδοσης.

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier

Παράδειγμα 7(συνέχεια):

Παρατηρήσεις:

Ο πολλαπλασιασμός του σήματος $x(t)$ με τη ένα συνημίτονο $\cos(\Omega_0 t)$ δεν αλλοιώνει τη μορφή του $X(\Omega)$, απλά το φάσμα $X(\Omega)$ του σήματος «μεταφέρεται» στις περιοχές των συχνοτήτων $\pm\Omega_0$. Δηλαδή, το παραγόμενο σήμα $y(t)$ έχει το ίδιο φάσμα, άρα μεταφέρει την ίδια πληροφορία, αλλά είναι μετατοπισμένο σε μία συχνότητα $\pm\Omega_0$. Το γεγονός αυτό επιτρέπει την εύκολη εκπομπή του.

Η ιδιότητα αυτή έχει μεγάλη πρακτική αξία στις τηλεπικοινωνίες και αποτελεί τη θεωρητική βάση της **διαμόρφωσης**. Κατά τη διαμόρφωση ένα σήμα $x(t)$ που μεταφέρει χρήσιμη πληροφορία, πολλαπλασιάζεται με ένα σήμα απλής συχνότητας $\cos(\Omega_0 t)$, που ονομάζεται **φέρον σήμα**, προκειμένου να μεταδοθεί μέσα από ένα κανάλι επικοινωνίας.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση που $y(t) = x(t)\cos(\Omega_0 t)$ έχουμε διαμόρφωση πλάτους διπλής πλευρικής ζώνης (Amplitude Modulation/Double Side Band – AM/ DSB) και είναι η απλούστερη περίπτωση διαμόρφωσης.

Προϋπόθεση για την επιτυχία της διαμόρφωσης είναι η συχνότητα του φέροντος σήματος να είναι αρκετά μεγαλύτερη από τη μέγιστη συχνότητα του πληροφοριακού σήματος, δηλαδή να ισχύει η σχέση $\Omega_0 \gg B$.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η διαμόρφωση πλάτους δεν είναι γραμμική, ούτε χρονικά αμετάβλητη. Επομένως, τα συστήματα διαμόρφωσης πλάτους δεν είναι ΓΧΑ συστήματα.

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier

Παράδειγμα 8: Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = cos(\Omega_0 t)\Pi_T(t)$.

Απάντηση: Το παράδειγμα διαφοροποιείται από το παρ. 5(σελ. 52) στο ότι η διάρκεια του συνημιτόνου $cos(\Omega_0 t)$ δεν είναι πλέον άπειρη αλλά πεπερασμένη και ίση με τη διάρκεια $2T$ του τετραγωνικού παλμού. Πολλαπλασιάζοντας δηλαδή το συνημίτονο, αλλά και κάθε σήμα, με έναν παλμό συγκεκριμένης διάρκειας λαμβάνουμε ένα τμήμα του αρχικού σήματος $cos(\Omega_0 t)$ (**διαδικασία παραθύρωσης**).

Θα εξετάσουμε αν η πεπερασμένη διάρκεια του σήματος επηρεάζει το φάσμα του σήματος.

Με βάση τη σχέση Euler $cos(\Omega_0 t) = \frac{1}{2}e^{j\Omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\Omega_0 t}$ το δοθέν σήμα $x(t)$ γράφεται:

$$x(t) = \Pi_T(t)\left[\frac{1}{2}e^{j\Omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\Omega_0 t}\right] = \frac{1}{2}e^{j\Omega_0 t}\Pi_T(t) + \frac{1}{2}e^{-j\Omega_0 t}\Pi_T(t)$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι :

$$\Pi_T(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{2\,sin(\Omega T)}{\Omega}$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ολίσθησης στη συχνότητα, βρίσκουμε:

$$x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{sin(\Omega - \Omega_0)T}{(\Omega - \Omega_0)} + \frac{sin(\Omega + \Omega_0)T}{(\Omega + \Omega_0)}$$

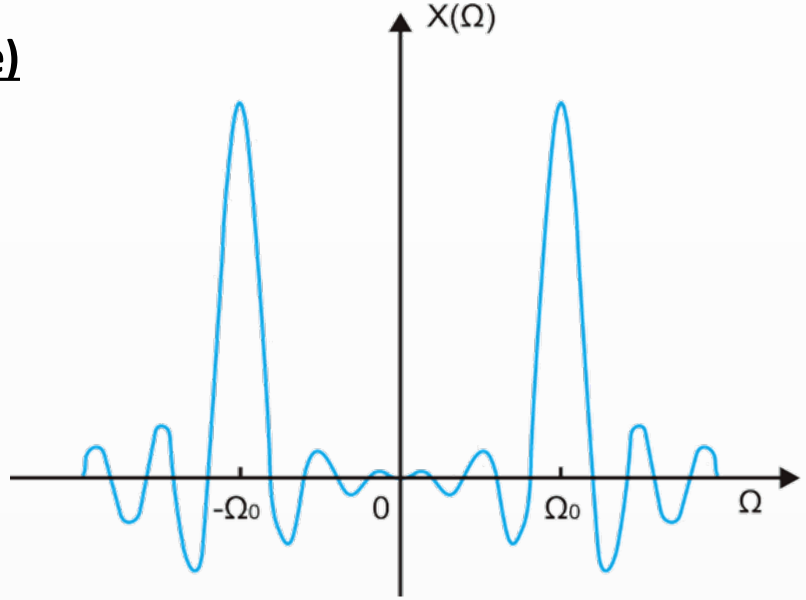
Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier

Παράδειγμα 8(συνέχεια):

Παρατηρήσεις: Ο FT αποτελείται από δύο **συναρτήσεις δειγματοληψίας**, τοποθετημένες στις συχνότητες $-\Omega_0$ και Ω_0.

Παρατηρείται **διάχυση ή διαρροή φάσματος (spectral leakage)** του σήματος σε συχνότητες εκατέρωθεν της συχνότητας $\pm\Omega_0$ του συνημιτόνου.

Το φαινόμενο αυτό είναι ανεπιθύμητο, ειδικά στην περίπτωση που θέλουμε να εντοπίσουμε την ακριβή θέση της συχνότητας περισσοτέρων του ενός συνημιτόνων.



Η διαπίστωση ότι η **παραθύρωση προκαλεί παραμόρφωση στο φάσμα** είναι πολύ σημαντική, επειδή η παραθύρωση είναι μία συχνά χρησιμοποιούμενη διαδικασία στην επεξεργασία των σημάτων, προκειμένου να λάβουμε και να επεξεργαστούμε τμήματα των σημάτων.

Η ελαχιστοποίηση της επίδρασης του παραθύρου επιτυγχάνεται με αύξηση της διάρκειας T του παραθύρου, επειδή αυτό οδηγεί στη μείωση της διάρκειας των λοβών της συνάρτησης δειγματοληψίας.

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier

4. Αλλαγή Κλίμακας στο Χρόνο

Αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$ τότε για κάθε πραγματικό αριθμό α $(\alpha \neq 0)$, ισχύει:

$$x(at) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\Omega}{a}\right)$$

5. Αλλαγή Κλίμακας στη Συχνότητα

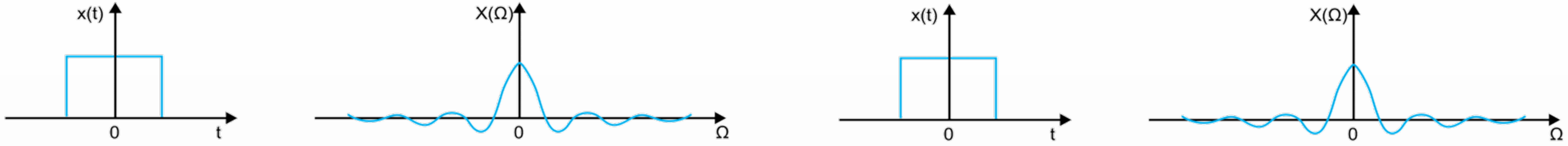
Αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$, τότε για κάθε πραγματικό αριθμό α $(\alpha \neq 0)$, ισχύει:

$$\frac{1}{|a|} x\left(\frac{t}{a}\right) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(a\Omega)$$

Το σπουδαίο συμπέρασμα των παραπάνω δύο ιδιοτήτων είναι ότι η αλλαγή της κλίμακας του χρόνου επηρεάζει αντιστρόφως ανάλογα την έκταση του μετασχηματισμού Fourier.

Έτσι μπορούμε να «στενεύουμε» ή να «πλατύνουμε» το φάσμα του σήματος με διεύρυνση ή στένευση του χρόνου αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας την κατάλληλη κλίμακα.

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier



(α) Σήμα *x(t)* και το φάσμα του $X_1(\Omega)$

(α) Σήμα *x(t)* και το φάσμα του $X_1(\Omega)$

(β) Σήμα $x_1(t) = x(at)$ με α > 1 και το φάσμα του $X_1(\Omega)$

(γ) Σήμα $x_2(t) = x(at)$ με α < 1 και το φάσμα του $X_2(\Omega)$

- Αν $\alpha > 1$, το σήμα μεταβάλλεται πιο γρήγορα στο χρόνο, γεγονός που αντιστοιχεί σε υψηλότερες συχνότητες στο πεδίο συχνοτήτων, άρα, το φάσμα του διαστέλλεται (σχήμα β).

- Αντίθετα, όταν $0 < \alpha < 1$, το σήμα μεταβάλλεται πιο αργά στο χρόνο, γεγονός που αντιστοιχεί σε σήμα χαμηλής συχνότητας, άρα το φάσμα του συμπιέζεται (σχήμα γ).

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier

6. Ανάκλαση

Αν στην ιδιότητα αλλαγής κλίμακας στο χρόνο θέσουμε $\alpha = -1$, προκύπτει η ιδιότητα της ανάκλασης:

$$x(-t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(-\Omega)$$

7. Συζυγία

Αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$ τότε ισχύει:

$$x^*(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X^*(-\Omega) \text{ και } x^*(-t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X^*(\Omega)$$

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier

8. Συμμετρία (δυϊσμός)

Αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$, τότε το σήμα $y(t) = X(t)$ έχει FT: $Y(\Omega) = 2\pi x(-\Omega)$

Ο συμβολισμός $X(t)$ σημαίνει ότι δημιουργούμε μία συνάρτηση με ανεξάρτητη μεταβλητή t, η οποία όμως δίνεται από τη μαθηματική έκφραση της $X(\Omega)$.

Η έκφραση $2\pi x(-\Omega)$ σημαίνει ότι έχουμε μία συνάρτηση με ανεξάρτητη μεταβλητή Ω, η οποία έχει όμως τη μορφή της $x(t)$.

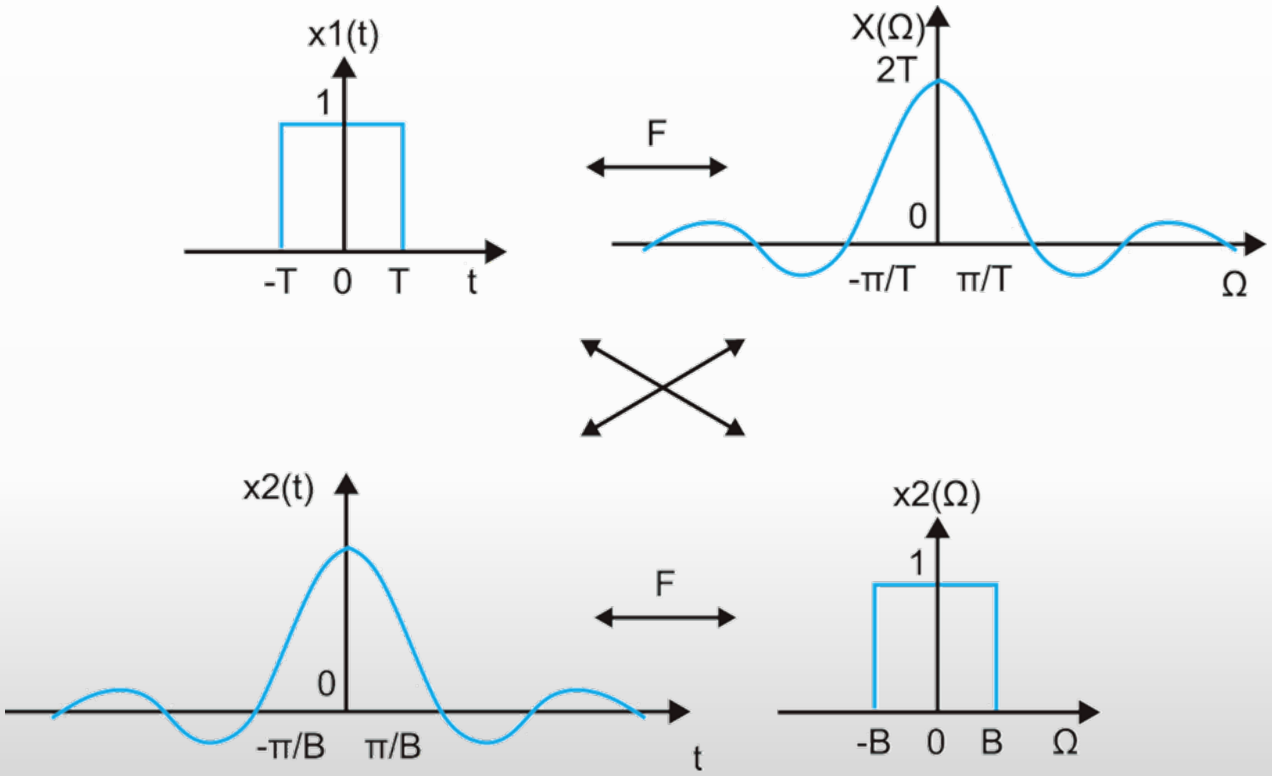
Η ιδιότητα της συμμετρίας (δυϊσμού) μας επιτρέπει να υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier σημάτων για τα οποία έχουμε ήδη υπολογίσει τον Fourier του ζευγαριού τους και είναι δύσκολο να υπολογίσουμε τα ίδια απευθείας από τον ορισμό. Στην ουσία πρόκειται για μία ακόμα μέθοδο υπολογισμού του μετασχηματισμού Fourier, μαζί με τον ορισμό και τον υπολογισμό μέσω του μετασχηματισμού Laplace.

Σύμφωνα με την ανάλυση κατά Fourier, αν ένα σήμα συνεχούς χρόνου διαθέτει κάποια συγκεκριμένα χαρακτηριστικά στο πεδίο της συχνότητας, τότε λόγω της ιδιότητας της συμμετρίας τα ίδια χαρακτηριστικά θα εμφανίζονται και στη συνάρτηση $X(\Omega)$ στο πεδίο του χρόνου.

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier

Ο μετασχηματισμός Fourier του τετραγωνικού παλμού $x(t) = \Pi_{T/2}\,(t) = rect(t/T)$ δίνεται από τη συνάρτηση δειγματοληψίας ως $X(\Omega) = Tsinc(\Omega T/2\pi)$.

Ένα σήμα χρόνου με μορφή της συνάρτησης δειγματοληψίας $x(t) = B/2\pi\ sinc(Bt/2\pi)$ έχει μετασχηματισμό Fourier έναν ορθογώνιο παλμό στο πεδίο της συχνότητας, αφού ισχύει $X(\Omega) = \Pi_{B/2}\,(t) = rect(t/B)$.



Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier

Παράδειγμα 9: Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $x(t) = 1$

Απάντηση:

Γνωρίζουμε ότι $\delta(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} 1$. Κάνοντας χρήση της ιδιότητας του δυϊσμού, βρίσκουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t) = 1$ είναι:

$$X(\omega) = 2\pi\, \delta(-\Omega) = 2\pi\, \delta(\Omega)$$

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier

9. Παραγώγιση στο χρόνο

Αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$ και ο FT της παραγώγου $d^n x(t)/dt^n$ υπάρχει, τότε αυτός υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{dx(t)}{dt} \overset{F}{\longleftrightarrow} j\Omega X(\Omega)$$

ή γενικότερα:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \overset{F}{\longleftrightarrow} (j\Omega)^n X(\Omega)$$

και για το πεδίο συχνοτήτων:

$$(-jt)^k x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{d^k X(\Omega)}{d\Omega^k}$$

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier

<u>Παράδειγμα 10:</u> Να υπολογιστεί η έξοδος $y(t)$ ενός ΓΧΑ συστήματος που βρίσκεται σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας, περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση και δέχεται ως είσοδο $x(t) = \delta(t)$

$$6y(t) + 5\frac{dy(t)}{dt} + \frac{d^2y(t)}{dt^2} = x(t)$$

<u>Απάντηση</u>: Εφαρμόζουμε την ιδιότητα της παραγώγισης και στα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης και λαμβάνουμε:

$$6Y(\Omega) + 5j\Omega\, Y(\Omega) + (j\Omega)^2 Y(\Omega) = \Delta(\Omega) \Rightarrow Y(\Omega)[6 + 5j\Omega + (j\Omega)^2] = 1 \Rightarrow Y(\Omega) = \frac{1}{6 + 5j\Omega + (j\Omega)^2} \Rightarrow Y(\Omega) = \frac{1}{(3 + j\Omega)}\frac{1}{(2 + j\Omega)} = \cdots$$

$$= -\frac{1}{3 + j\Omega} + \frac{1}{2 + j\Omega}$$

Με αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier λαμβάνουμε:

$$y(t) = [-e^{-3t} + e^{-2t}]\, u(t)$$

Η ιδιότητα της παραγώγισης στο χρόνο είναι χρήσιμη για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν συστήματα συνεχούς χρόνου που βρίσκονται σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας. Αν αυτό δεν συμβαίνει, τότε αντί του μετασχηματισμού Fourier χρησιμοποιούμε τον μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace.

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier

10. Ολοκλήρωση στο χρόνο

Αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$ τότε:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)d\tau \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\Omega}\,\mathrm{X}(\Omega) + \pi\, X(0)\, \delta(\Omega)$$

11. Συνέλιξη

Ο FT της συνέλιξης δύο ΓΧΑ σημάτων ισούται με το γινόμενο των επιμέρους FT των σημάτων. Συγκεκριμένα, αν $x_1(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_1(\Omega)$ και $x_1(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_1(\Omega)$, τότε:

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_1(\Omega)\, X_2(\Omega)$$

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier

Σε ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$, το οποίο διεγείρεται από είσοδο $x(t)$, η έξοδος $y(t)$ δίνεται από το ολοκλήρωμα της συνέλιξης:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\, d\tau$$

Αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$ και $h(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} H(\Omega)$, τότε από την ιδιότητα της συνέλιξης έχουμε:

$$\boxed{y(t) = h(t) * x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} Y(\Omega) = H(\Omega)\, X(\Omega)}$$

Άρα μπορούμε να υπολογίσουμε το φάσμα της απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος όταν γνωρίζουμε το φάσμα του σήματος εισόδου $X(\Omega)$ και το φάσμα $H(\Omega)$ της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ του συστήματος.

Επομένως, η υπολογιστικά δύσκολη σχέση της συνέλιξης μετασχηματιζόμενη κατά Fourier καταλήγει σε ένα απλό **γινόμενο** συναρτήσεων.

Επιπλέον, η ιδιότητα αυτή είναι σημαντική επειδή αποτελεί τη βάση για το σχεδιασμό ΓΧΑ συστημάτων στο πεδίο συχνοτήτων (αναλογικά φίλτρα).

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier

12. Πολλαπλασιασμός στο χρόνο

Ανάλογη ιδιότητα ισχύει και προς την αντίστροφη κατεύθυνση, δηλαδή για τη συνέλιξη των FT $X(\Omega)$ και $Y(\Omega)$ των σημάτων $x(t)$ και $y(t)$.

Συγκεκριμένα, αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$ και $y(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} Y(\Omega)$ και $Z(\Omega) = X(\Omega) * Y(\Omega)$, τότε ισχύει:

$$\boxed{x(t)\, y(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi}[X(\Omega) * Y(\Omega)]}$$

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier

13. Άρτιο/Περιττό Μέρος Σήματος - Πραγματικό/Φανταστικό Μέρος Φάσματος

Είναι γνωστό ότι κάθε σήμα $x(t)$ μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα ενός άρτιου $x_e(t)$ και ενός περιττού σήματος $x_o(t)$. Αν $x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$ τότε ισχύει:

$$x_e(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} Re\{\, X(\Omega)\,\}$$

$$x_o(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} j\ Im\{\, X(\Omega)\,\}$$

Όπου η συνάρτηση $Re\{\,\}$ επιστρέφει το πραγματικό μέρος της μιγαδικής συνάρτησης $\mathrm{X}(\Omega)$ και η συνάρτηση $Im\{\,\}$ το φανταστικό.

<u>Παρατηρήσεις</u>:

Ένα άρτιας συμμετρίας σήμα συνεχούς χρόνου έχει πραγματικό μετ. Fourier. Εναλλακτικά, το πραγματικό μέρος του μετ. Fourier προέρχεται από το άρτιο μέρος του σήματος.

Ένα περιττής συμμετρίας σήμα συνεχούς χρόνου έχει φανταστικό μετ. Fourier. Εναλλακτικά, το φανταστικό μέρος του μετ. Fourier προέρχεται από το περιττό μέρος του σήματος.

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier

14. Φασματικές Συμμετρίες

Αν το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό, περιοδικό ή απεριοδικό, το **πλάτος** $|X(\Omega)|$ και το **πραγματικό μέρος** $Re\{X(\Omega)\}$ είναι **άρτιες** συναρτήσεις της συχνότητας Ω, ενώ η **φάση** $\measuredangle X(\Omega)$ και το **φανταστικό μέρος** $Im\{X(\Omega)\}$ είναι **περιττές** συναρτήσεις:

$$|X(\Omega)| = |X(-\Omega)|$$

$$Re\{X(\Omega)\} = Re\{X(-\Omega)\}$$

$$\measuredangle X(\Omega) = -\measuredangle X(-\Omega)$$

$$Im\{X(\Omega)\} = -Im\{X(-\Omega)\}$$

<u>Παρατηρήσεις</u>:

- Σε ένα πραγματικό σήμα, το φάσμα πλάτους και το πραγματικό μέρος του μετ. Fourier είναι άρτιες συναρτήσεις.
- Σε ένα πραγματικό σήμα, το φάσμα φάσης και το φανταστικό μέρος του μετ. Fourier είναι περιττές συναρτήσεις.
- Οι παραπάνω συμμετρίες δεν ισχύουν αν το σήμα είναι μιγαδικό.
- Έχουμε εξηγήσει ότι στην πράξη δεν υπάρχουν οι αρνητικές συχνότητες, αλλά μόνο οι θετικές. Ωστόσο, χρειαζόμαστε την έννοια των αρνητικών συχνοτήτων προκειμένου να δημιουργήσουμε πραγματικά σήματα.

Θεώρημα Parseval

Το θεώρημα εκφράζει τη **διατήρηση της ενέργειας στο πεδίο των συχνοτήτων**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$

Η ολική ενέργεια ενός σήματος μπορεί να υπολογιστεί ισοδύναμα είτε στο πεδίο του χρόνου είτε στο πεδίο της συχνότητας.

Στο πεδίο του χρόνου υπολογίζουμε την ενέργεια ανά μονάδα χρονικού διαστήματος $|x(t)|^2$ και στη συνέχεια ολοκληρώνουμε για όλη τη διάρκεια του σήματος.

Στο πεδίο της συχνότητας υπολογίζουμε την ενέργεια ανά μονάδα κυκλικής συχνότητας $|X(\Omega)|^2/2\pi$ και κατόπιν ολοκληρώνουμε για όλες τις συχνότητες.

Θεώρημα Parseval

Η συνάρτηση $S_x(\Omega) = |X(\Omega)|^2$ ονομάζεται **φασματική πυκνότητα ενέργειας** (energy density spectrum) του σήματος $x(t)$ και εκφράζει την **ενέργεια ανά εύρος ζώνης ενός rad** του σήματος για διάφορες συχνότητες.

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την ενέργεια που συνεισφέρουν οι συχνότητες από f_1 έως f_2 αρκεί να ολοκληρώσουμε την $|X(\Omega)|^2$ μεταξύ αυτών των δύο συχνοτήτων, δηλαδή:

$$E_{12} = \frac{1}{2\pi} \int_{f_1}^{f_2} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$

Σύνοψη Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Πεδίο του χρόνου	Πεδίο συχνοτήτων
Γραμμικότητα	$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$	$a_1 X_1(\Omega) + a_2 X_2(\Omega)$
Μετατόπιση στο χρόνο	$x(t - t_0)$	$e^{-j\Omega t_0} X(\Omega)$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j\Omega t_0} x(t)$	$X(\Omega - \Omega_0)$
Συμμετρία: Αν $x(t) \overset{F}{\leftrightarrow} X(\Omega)$	$y(t) = X(t)$	$Y(\Omega) = 2\pi x(-\Omega)$
Πολλαπλασιασμός (Διαμόρφωση)	$x_1(t) x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}[X_1(\Omega) * X_2(\Omega)]$
Συνέλιξη	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(\Omega)\, X_2(\Omega)$

Σύνοψη Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Πεδίο του χρόνου	Πεδίο συχνοτήτων
Αλλαγή κλίμακας χρόνου	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} X\left(\frac{\Omega}{a}\right)$
Ανάκλαση	$x(-t)$	$X(-\Omega)$
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{j\Omega} X(\Omega) + \pi X(\Omega)\delta(\Omega)$
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\Omega X(\Omega)$
Παραγώγιση στη συχνότητα	$tx(t)$	$\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$
Άρτιο σήμα	$x(t) = x(-t)$	$X(\Omega) \in R$
Περιττό σήμα	$x(t) = -x(-t)$	$X(\Omega) \in I$

Σύνοψη Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Πεδίο του χρόνου	Πεδίο συχνοτήτων
Άρτιο μέρος σήματος Πραγματικό μέρος φάσματος	$x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x^*(-t)]$	$Re\{X(\Omega)\}$
Περιττό μέρος σήματος Φανταστικό μέρος φάσματος	$x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x^*(-t)]$	$jIm\{X(\Omega)\}$
Συζυγία στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(-\Omega)$
Συζυγία στη συχνότητα	$x^*(-t)$	$X^*(\Omega)$
Συζυγής συμμετρία	$x^*(t)$	$X^*(-\Omega)$
Θεώρημα Parseval	$\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert X(\Omega)\rvert^2 d\Omega$	

Παραδείγματα Αντίστροφου μετ. Fourier

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega)\, e^{j\Omega t} d\Omega}$$

Παράδειγμα 18: Να προσδιοριστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης:

$$X(\Omega) = 2\cos(2\Omega + \pi/4)$$

Απάντηση: Χρησιμοποιώντας τον τύπο Euler η δοθείσα συνάρτηση $X(\Omega)$ γράφεται:

$$X(\Omega) = 2\cos(2\Omega + \pi/4) = e^{j\,[2\Omega + (\pi/4)]} + e^{-j\,[2\Omega + (\pi/4)]} = e^{2j\Omega} e^{j\pi/4} + e^{-2j\Omega} e^{-j\pi/4}$$

Εισάγοντας τη μορφή αυτή στον ορισμό του αντίστροφου μετ. Fourier, έχουμε:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega)\, e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{e^{j\pi/4}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\Omega(t+2)}\, dt + \frac{e^{-j\pi/4}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\Omega(t-2)} dt = e^{j\pi/4}\delta(t+2) + e^{-j\pi/4}\delta(t-2)$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\delta(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} 1$ και ότι από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της μονάδας ως $\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\Omega t} d\Omega$ προκύπτει:

$$\delta(t - t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\Omega(t-t_0)} d\Omega$$

Παραδείγματα Αντίστροφου μετ. Fourier

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\Omega)\, e^{j\Omega t} d\Omega}$$

Παράδειγμα 11(συνέχεια): Να προσδιοριστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης:

$$X(\Omega) = 2\,cos(2\Omega + \pi/4)$$

Απάντηση: Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε κάνοντας χρήση της ιδιότητας ολίσθησης στο χρόνο:

$$x(t-t_0) \overset{F}{\longleftrightarrow} e^{-j\Omega t_0}\, X(\Omega)$$

Θέτοντας $x(t) = \delta(t)$ και $X(\Omega) = 1$ έχουμε:

$$\delta(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} 1$$

$$\delta(t-t_0) \overset{F}{\longleftrightarrow} e^{-j\Omega t_0}\, 1 = \; e^{-j\Omega t_0}$$

$$\delta(t-2) \overset{F}{\longleftrightarrow} e^{-2j\Omega} \text{ και } \delta(t+2) \overset{F}{\longleftrightarrow} e^{2j\Omega}$$

Επομένως:

$$X(\Omega) = e^{2j\Omega} e^{j\pi/4} + e^{-2j\Omega} e^{-j\pi/4} \Rightarrow x(t) = \delta(t+2)\, e^{j\pi/4} + \delta(t+2) e^{-j\pi/4}$$

Παραδείγματα Αντίστροφου μετ. Fourier

Παράδειγμα 12: Να προσδιοριστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης:

$$X(\Omega) = \frac{1}{(1+3j\Omega)(1+j\Omega)}$$

Απάντηση: Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή και χωρίζουμε το κλάσμα σε δύο επιμέρους κλάσματα:

$$X(\Omega) = \frac{1}{(1+3j\Omega)(1+j\Omega)} = \frac{A}{(1+3j\Omega)} + \frac{B}{(1+j\Omega)} = \frac{A + jA\Omega + B + j3B\Omega}{(1+3j\Omega)(1+j\Omega)}$$

Το πρώτο και το τελευταίο κλάσματα είναι ίσα και επειδή οι παρονομαστές τους είναι ίσοι προκύπτει ότι είναι ίσοι και οι αριθμητές τους. Άρα ισχύει η μιγαδική ισότητα:

$$A + jA\Omega + B + j3B\Omega = 1 \rightarrow (A+B) + j\Omega(A+3B) = 1 + j0$$

Επομένως προκύπτει ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, τα A και B.

$$A + B = 1$$

$$A + 3B = 0$$

Λύνοντας το σύστημα, βρίσκουμε $A = 3/2$ και $B = -1/2$. Επομένως ισχύει:

$$X(\Omega) = \frac{3}{2}\frac{1}{(1+3j\Omega)} - \frac{1}{2}\frac{1}{(1+j\Omega)}$$

$$x(t) = \frac{3}{2}e^{-3t}u(t) - \frac{1}{2}e^{-t}u(t) = \frac{1}{2}[3e^{-3t} - e^{-t}]u(t)$$

Μετασχηματισμός Fourier Σημάτων Ισχύος

Υπάρχουν σήματα, όπως περιοδικές, κρουστικές, βηματικές συναρτήσεις, κλπ, που δεν υπακούουν στις συνθήκες Dirichlet, αλλά έχουν μετασχηματισμό Fourier.

Τα περισσότερα από αυτά έχουν άπειρη ενέργεια αλλά συχνά η ισχύς τους $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x^2(t)dt$ είναι πεπερασμένη (σήματα ισχύος).

Τα σήματα αυτά μπορούν να έχουν μετασχηματισμό Fourier αν επιτραπεί η παρουσία κρουστικών συναρτήσεων σε αυτόν.

Άλλωστε οι FT των περιοδικών σημάτων $e^{j\Omega t}, cos(\Omega_0 t),\ sin(\Omega_0 t)$ περιέχουν κρουστικές συναρτήσεις.

Για ένα περιοδικό σήμα $x(t)$, ορίζουμε το **«αποκομμένο»** (truncated) σήμα $x_T(t)$ που προκύπτει από μία περίοδο του $x(t)$, από τη σχέση:

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & -T_0/2 < t < T_0/2 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

Μετασχηματισμός Fourier **Σημάτων Ισχύος**

Αποδεικνύεται ότι ο μετ. Fourier ενός περιοδικού σήματος $x(t)$ είναι ένα άπειρο άθροισμα **όρων**, που καθένας τους είναι το **γινόμενο** του FT του «αποκομμένου» σήματος $x_T(t)$ επί μία μετατοπισμένη στη συχνότητα κρουστική συνάρτηση $\delta(\Omega)$, σύμφωνα με τη σχέση:

$$X(\Omega) = \Omega_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_T(n\Omega_0)\, \delta(\Omega - n\Omega_0)$$

με $X_T(\Omega)$ συμβολίζεται ο FT του «αποκομμένου» (truncated) σήματος $x_T(t)$.

Επομένως, ο μετ. Fourier ενός περιοδικού σήματος είναι ένα άπειρο άθροισμα κρουστικών συναρτήσεων μετατοπισμένες σε συχνότητες πολλαπλάσιες της θεμελιώδους συχνότητας (Ω_0) του περιοδικού σήματος. Κάθε κρουστική συνάρτηση είναι σταθμισμένη (πολλαπλασιασμένη) με το γινόμενο $\Omega_0\, X_T(k\Omega_0)$.
Τα γινόμενα αυτά είναι ίσα με τους συντελεστές του αναπτύγματος σε σειρά Fourier του περιοδικού σήματος, δηλαδή:

$$X_k = \Omega_0\, X_T(k\Omega_0)$$

Μετασχηματισμός Fourier Σημάτων Ισχύος

Η $X_k = \Omega_0\, X_T(k\Omega_0)$ επιβεβαιώνει τη σχέση μεταξύ της Σειράς Fourier και του Μετασχηματισμού Fourier

Υποδεικνύει έναν απλούστερο τρόπο υπολογισμού των συντελεστών της εκθετικής σειράς Fourier μίας περιοδικής συνάρτησης $x(t)$, μέσω των βημάτων:

- Από το περιοδικό σήμα $x(t)$ υπολογίζουμε το αποκομμένο σήμα $x_T(t)$, από μία περίοδο του περιοδικού σήματος.
- Υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier του αποκομμένου σήματος $x_T(t)$ χρησιμοποιώντας είτε τον ορισμό είτε τις ιδιότητες είτε τους γνωστούς μετ.Fourier.
- Υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier στις συχνότητες $\Omega_0 = 2\pi k/T_0$ για να βρούμε τη k −στή αρμονική και στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε επί Ω_0.
- Οι συντελεστές X_k είναι τα «δείγματα» στις αρμονικές συχνότητες kΩ_0 του μετασχηματισμού Fourier του αποκομμένου σήματος, σταθμισμένα επί Ω_0.

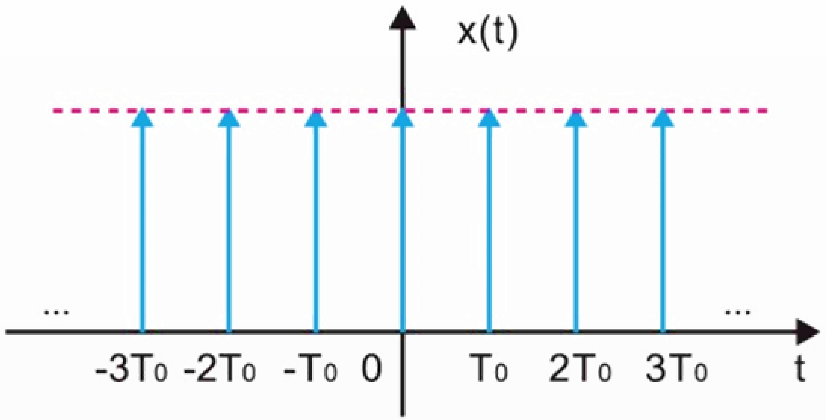
Παρατηρούμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές X_kτης σειράς Fourier **δειγματοληπτώντας** απλά τον μετασχηματισμό Fourier του αποκομμένου σήματος, αποφεύγοντας έτσι τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων.

Μετασχηματισμός Fourier Σημάτων Ισχύος

Παράδειγμα 13: Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του συρμού κρουστικών παλμών

Απάντηση: Το σήμα αυτό είναι μία περιοδική συνάρτηση και εκφράζεται μαθηματικά από τη σχέση:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$



Εφόσον το $x(t)$ είναι περιοδική συνάρτηση, το ανάπτυγμά του σε εκθετική μορφή σειράς Fourier, είναι:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \, e^{jk\Omega_0 t}, \qquad \text{όπου } \Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Οι συντελεστές X_k της εκθετικής μορφής σειράς Fourier δίνονται από:

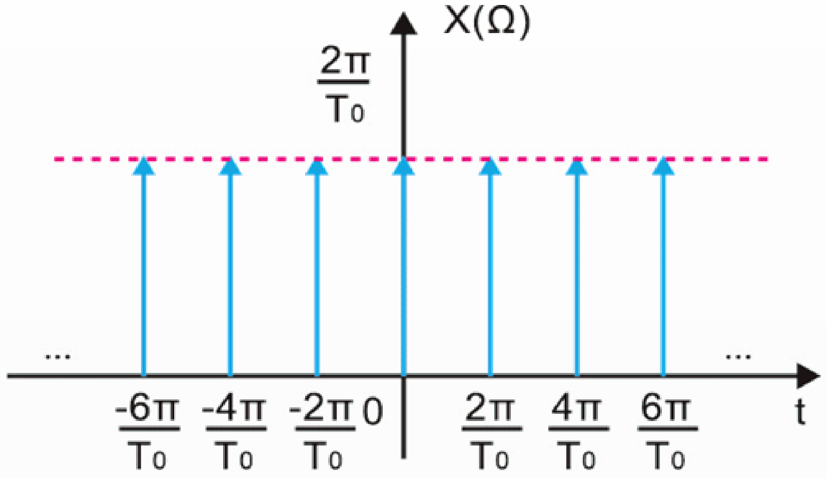
$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, e^{-jk\Omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-jk\Omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}$$

Μετασχηματισμός Fourier **Σημάτων Ισχύος**

<u>**Παράδειγμα 13(συνέχεια):**</u> Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του συρμού κρουστικών παλμών

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις βρίσκουμε ότι το $x(t)$ γράφεται ως:

$$x(t) = \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk\Omega_0 t}$$



και υπολογίζοντας τον μετασχηματισμό Fourier, έχουμε:

$$X(\Omega) = \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} F\left\{e^{jk\Omega_0 t}\right\} = \frac{2\pi}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0)$$

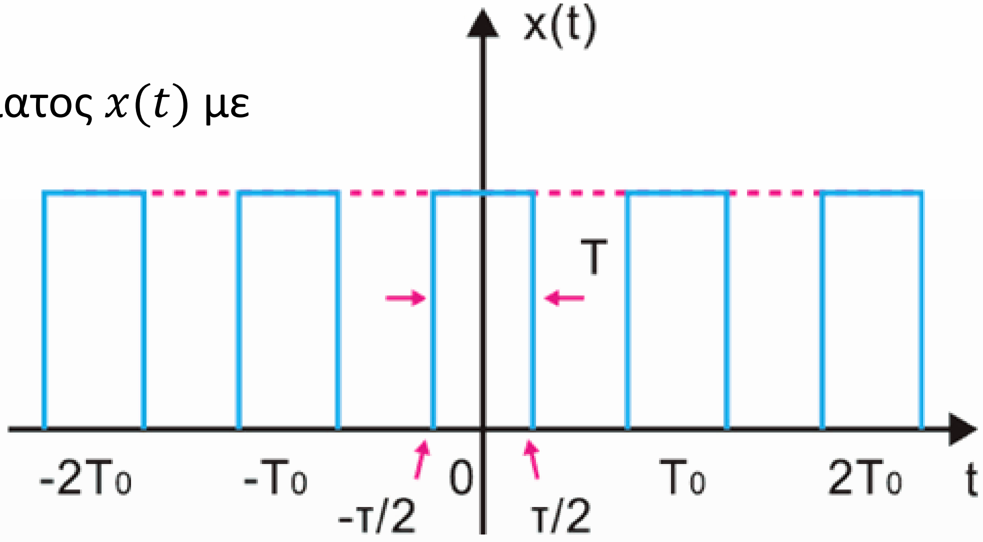
Επομένως, ο ζητούμενος FT ενός τραίνου κρουστικών συναρτήσεων είναι πάλι ένα τραίνο κρουστικών συναρτήσεων.

Μετασχηματισμός Fourier **Σημάτων Ισχύος**

Παράδειγμα 20(συνέχεια): Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του συρμού κρουστικών παλμών

- Ο μετασχηματισμός Fourier ενός περιοδικού συρμού κρουστικών συναρτήσεων στο πεδίο του χρόνου με περίοδο T_0, είναι πάλι ένας συρμός περιοδικών κρουστικών συναρτήσεων στο πεδίο της συχνότητας με περίοδο $\Omega_0 = 2\pi/T_0$. Δηλαδή το φάσμα είναι διακριτό.
- Οι περίοδοι T_0 και Ω_0 είναι αντιστρόφως ανάλογες. Άρα όσο πιο πυκνές είναι οι κρουστικές συναρτήσεις στο πεδίο του χρόνου, τόσο πιο απομακρυσμένες είναι οι κρουστικές συναρτήσεις στο πεδίο της συχνότητας και αντίστροφα.
- Αν η περίοδος του συρμού στο πεδίο του χρόνου τείνει στο άπειρο $T_0 \to \infty$, δηλαδή υπάρχει μόνο ένας κρουστικός παλμός, ο $\delta(t)$, τότε η περίοδος των κρουστικών συναρτήσεων στο πεδίο της συχνότητας τείνει στο μηδέν ($\Omega_0 \to 0$), άρα το φάσμα τείνει να γίνει γίνεται συνεχές (από διακριτό).
- Οι παραπάνω παρατηρήσεις αποτελούν μία ακόμα απόδειξη της συμμετρίας μεταξύ των πεδίων χρόνου και συχνότητας.

Μετασχηματισμός Fourier **Σημάτων Ισχύος**



Παράδειγμα 14: Να υπολογιστεί ο FT του περιοδικού τετραγωνικού σήματος $x(t)$ με διάρκεια παλμού τ και περίοδο T_0.

Απάντηση: Ακολουθούμε την ίδια μέθοδο επίλυσης με το προηγούμενο παράδειγμα.

Το δοθέν περιοδικό τετραγωνικό σήμα αναπτύσσεται στη σειρά Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \, e^{jk\Omega_0 t}$$

όπου:

$$X_k = \frac{\tau\Omega_0}{2\pi} \frac{sin\left(\frac{k\Omega_0 t}{2}\right)}{\left(\frac{k\Omega_0 t}{2}\right)} = \frac{\tau\Omega_0}{2\pi} sinc\left(\frac{k\Omega_0 t}{2}\right)$$

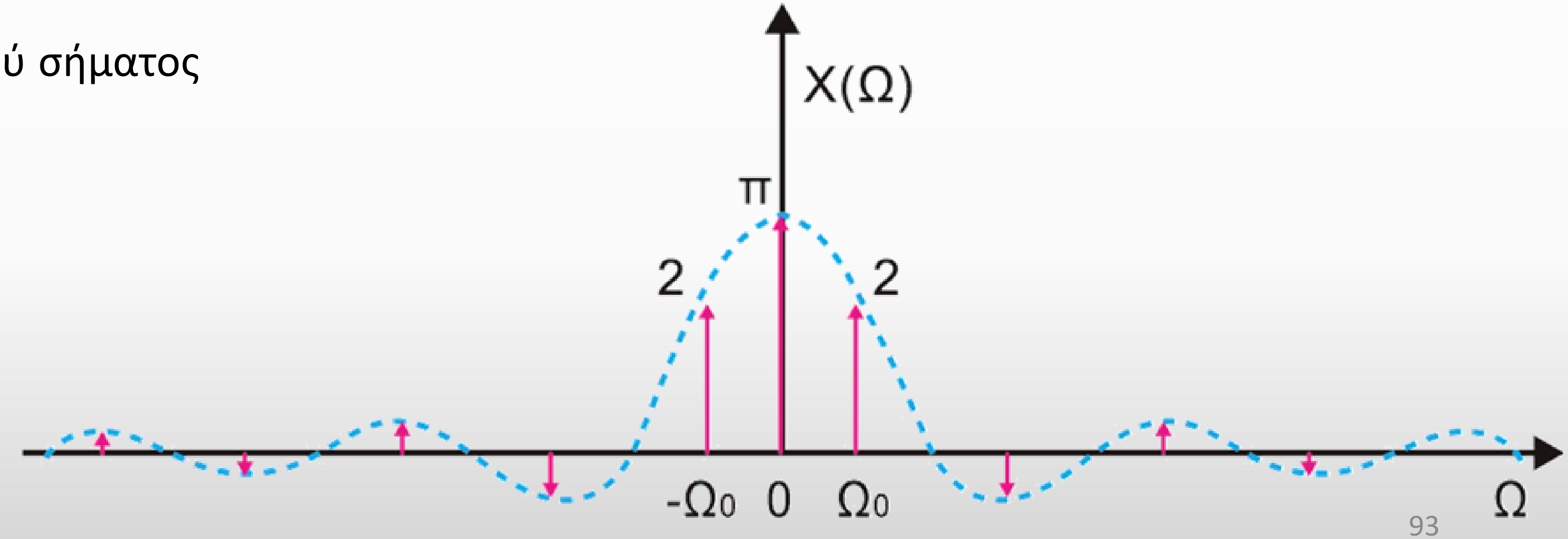
Μετασχηματισμός Fourier Σημάτων Ισχύος

Παράδειγμα 14(συνέχεια): Να υπολογιστεί ο FT του περιοδικού τετραγωνικού σήματος $x(t)$ με διάρκεια παλμού τ και περίοδο T_0.

Λόγω γραμμικότητας του FT και επειδή ισχύει $e^{j\Omega_0 t} \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$, βρίσκουμε τον FT του περιοδικού σήματος από τη σχέση:

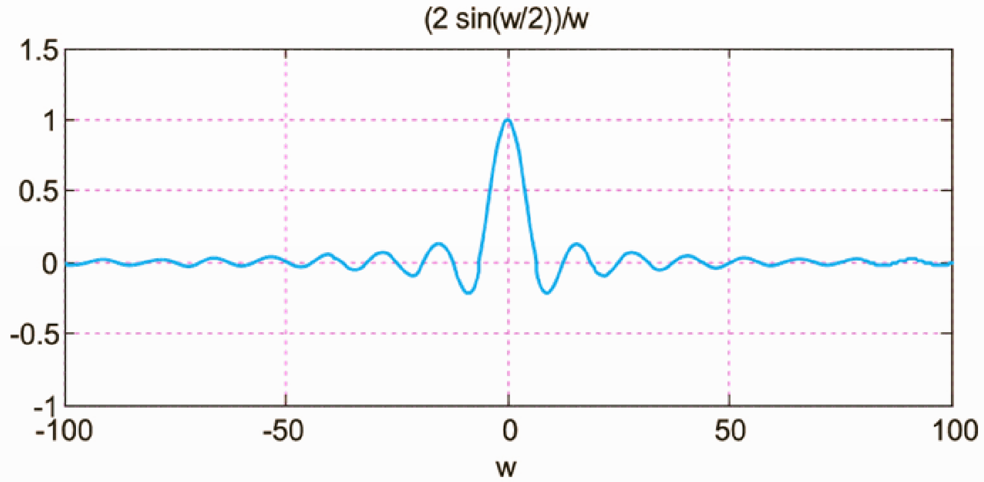
$$X(\Omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_k\, \delta(\Omega - k\Omega_0)$$

Το φάσμα του περιοδικού τετραγωνικού σήματος

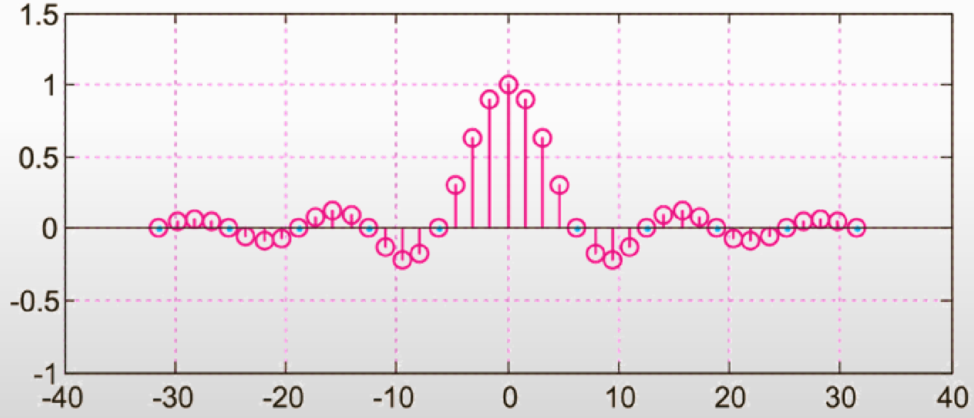


Μετασχηματισμός Fourier Σημάτων Ισχύος

Παράδειγμα 14(συνέχεια): Να υπολογιστεί ο FT του περιοδικού τετραγωνικού σήματος $x(t)$ με διάρκεια παλμού τ και περίοδο T_0.



Μετασχηματισμός Fourier «αποκομμένης» συνάρτησης $x_T(t)$



Μετασχηματισμός Fourier περιοδικού σήματος $x(t)$

Μετασχηματισμός Fourier Σημάτων Ισχύος

Παράδειγμα 14(συνέχεια): Να υπολογιστεί ο FT του περιοδικού τετραγωνικού σήματος $x(t)$ με διάρκεια παλμού τ και περίοδο T_0.

- Ο μετασχηματισμός Fourier του περιοδικού συρμού τετραγωνικών παλμών με περίοδο στο χρόνο T_0, είναι ένας συρμός περιοδικών κρουστικών συναρτήσεων με περίοδο στη συχνότητα $\Omega_0 = 2\pi/T_0$, οι οποίες είναι σταθμισμένες (πολλαπλασιασμένες) με τους συντελεστές X_n της εκθετικής σειράς Fourier.
- Εναλλακτικά, ο μετασχηματισμός Fourier του περιοδικού συρμού τετραγωνικών παλμών προκύπτει από τη δειγματοληψία στη συχνότητα με περίοδο δειγματοληψίας $\Omega_0 = 2\pi/T_0$, του μετασχηματισμού Fourier του αποκομμένου σήματος.
- Η περίοδος $\Omega_0 = 2\pi/T_0$ των κρουστικών συναρτήσεων στη συχνότητα καθορίζεται από την περίοδο T_0 του περιοδικού σήματος.
- Η περιβάλλουσα του φάσματος περιοδικού σήματος ταυτίζεται με το φάσμα του αποκομμένου σήματος (περιοδικό σήμα μίας περιόδου).

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος & Εικόνας

Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών

Α. Μπακλέζος

abaklezos@hmu.gr