Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος & Εικόνας

Μάθημα 16ο

Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier (συνέχεια…)

Α. Μπακλέζος

abaklezos@hmu.gr

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

- ***Υπολογισμός διακριτού μετασχηματισμού Fourier*:**

  Από ορισμό :

Παράδειγμα : Να υπολογιστεί ο DFT N-σημείων του $x[n] = u[n] - u[n-n_0]$, $(0 \le n_0 \le N-1)$.

$$\sum_{n=0}^{M-1} a^n = \frac{1-a^M}{1-a}$$

Απάντηση: Ο DFT του δοθέντος παλμού υπολογίζεται από τον ορισμό, ως εξής:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{n_0-1} W_N^{nk} = \frac{1-W_N^{kn_0}}{1-W_N^{k}}, \qquad k = 0,1,\dots,N-1$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα τον όρο $W_N^{kn_0/2}$ στον αριθμητή και τον όρο $W_N^{k/2}$ στον παρονομαστή, ο DFT γράφεται:

$$X[k] = \frac{W_N^{kn_0/2}\left(W_N^{-kn_0/2} - W_N^{kn_0/2}\right)}{W_N^{k/2}\left(W_N^{-k/2} - W_N^{k/2}\right)} = W_N^{k(n_0-1)/2}\frac{\left(W_N^{-kn_0/2} - W_N^{kn_0/2}\right)}{\left(W_N^{-k/2} - W_N^{k/2}\right)}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση Euler, έχουμε:

$$X[k] = e^{-j\frac{2\pi k}{N}\left(\frac{n_0-1}{2}\right)}\frac{sin(n_0\pi k/N)}{sin(\pi k/N)}, \qquad k = 0,1,\dots,N-1$$

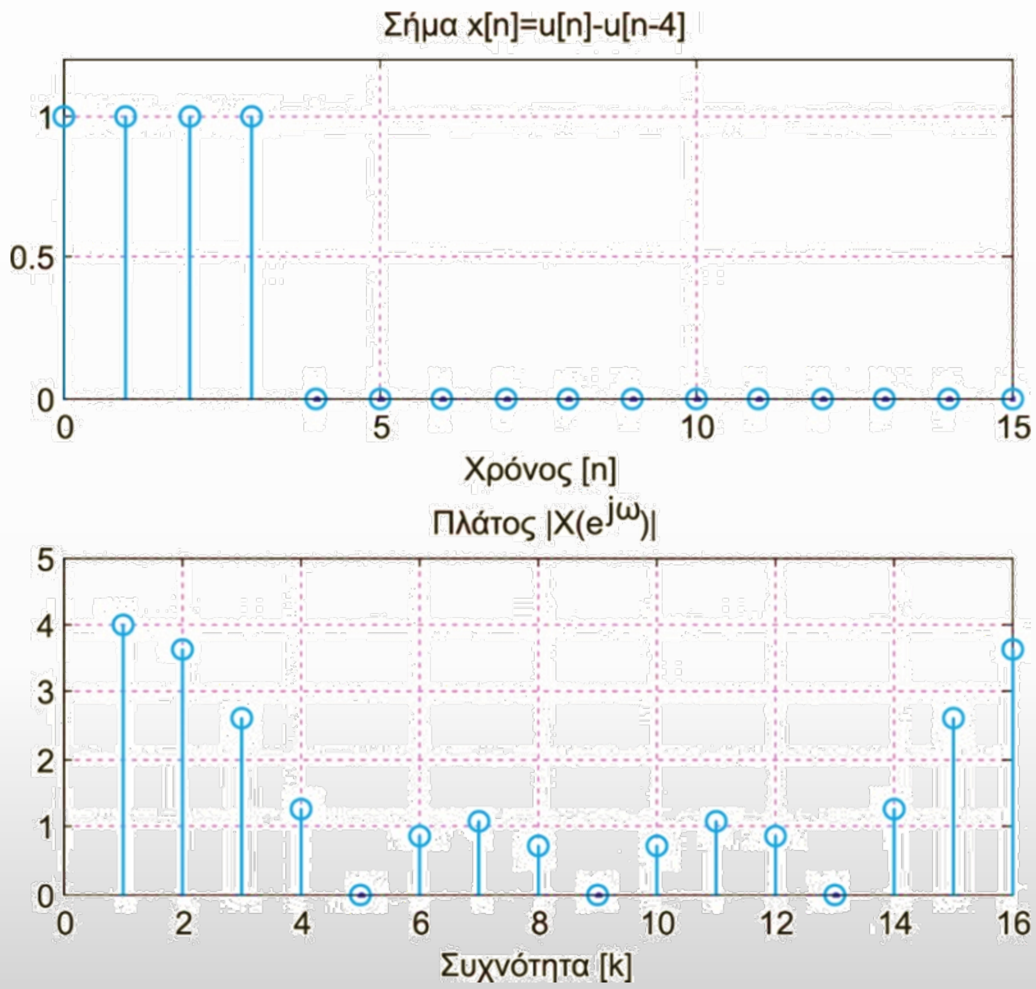
Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Παράδειγμα :

Να υπολογιστεί ο DFT N-σημείων του $x[n] = u[n] - u[n-4]$,

(α) Παλμός $x[n] = u[n] - u[n-4]$,

(β) Φάσμα πλάτους DFT 16-σημείων



Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

- *Υπολογισμός διακριτού μετασχηματισμού Fourier*:

  Από ορισμό :

- **Παράδειγμα :** DFT 10 σημείων N=10 για $x[n] = u[n] - u[n-2] = \{1,1,0,0,0,0,0,0,0,0\}$

$$\sum_{n=0}^{M-1} a^n = \frac{1-a^M}{1-a}$$

$$X_{10}[k] = \sum_{n=0}^{9} x[n] \cdot W_{10}^{nk}, k \in [0,9], \boxed{W_{10} = e^{-j\frac{2\pi}{10}} = e^{-j\frac{\pi}{5}}}$$

$$X_{10}[k] = \sum_{n=0}^{9} (u[n] - u[n-2]) \cdot (W_{10})^{nk} = \sum_{n=0}^{1} 1 \cdot (W_{10})^{nk} = \sum_{n=0}^{1} \left(W_{10}^{k}\right)^n = \frac{1-\left(W_{10}^{k}\right)^2}{1-W_{10}^{k}}, k \in [0,9]$$

$$\rightarrow X_{10}[k] = \frac{1-e^{-jk\frac{2\pi}{5}}}{1-e^{-jk\frac{\pi}{5}}} = \frac{\left(1-e^{-jk\frac{\pi}{5}}\right)\left(1+e^{-jk\frac{\pi}{5}}\right)}{1-e^{-jk\frac{\pi}{5}}} = 1 + e^{-jk\frac{\pi}{5}}, k \in [0,9]$$

Εναλλακτικά απλά το άθροισμα:

$$\sum_{n=0}^{1} \left(W_{10}^{k}\right)^n = \left(e^{-j\frac{\pi}{5}}\right)^0 + \left(e^{-j\frac{\pi}{5}}\right)^1 = 1 + e^{-jk\frac{\pi}{5}}, k \in [0,9]$$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

- *Υπολογισμός αντίστροφου διακριτού μετασχηματισμού Fourier*:

  Από ορισμό IDFT ή μέσω DFT N σημείων (με δύο τρόπους)

- Ο αντίστροφος διακριτός μετασχηματισμός Fourier(Inverse Discrete Fourier Transform – IDFT) N σημείων ορίζεται :

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot W_N^{-nk}, n \in [0, N-1]$$

με $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}}$ (παράγοντας φάσης ή στροβιλισμού – phase/twiddle factor)

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

- *Υπολογισμός αντίστροφου διακριτού μετασχηματισμού Fourier*:

  Από ορισμό IDFT ή μέσω DFT N σημείων (με δύο τρόπους)

- 1ος τρόπος : μέσω DFT N σημείων της συζυγούς ακολουθίας $\mathbf{X}^*[\boldsymbol{k}]$

$$x[n] = \frac{1}{N}\left(\sum_{n=0}^{N-1} X^*[k] \cdot W_N^{nk}\right)^*, n \in [0, N-1]$$

Απόδειξη :

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot W_N^{-nk} \rightarrow x^*[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X^*[k] \cdot W_N^{nk} \rightarrow$$

$$x[n] = \left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X^*[k] \cdot W_N^{nk}\right)^* = \frac{1}{N}\left(\sum_{n=0}^{N-1} X^*[k] \cdot W_N^{nk}\right)^*$$

❖ πρώτα υπολογίζεται η συζυγής ακολουθία $X^*[k]$ της ακολουθίας $X[k]$, μετά υπολογισμός DFT N σημείων της ακολουθίας $X^*[k]$, μετά υπολογίζεται η συζυγής ακολουθία του DFT N σημείων της ακολουθίας και τέλος γίνεται διαίρεση με το N

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

- *Υπολογισμός αντίστροφου διακριτού μετασχηματισμού Fourier*:
- 2ος τρόπος : μέσω DFT N σημείων της ακολουθίας $X[k]$

$$x[n] = \frac{1}{N} f[N-n], n \in [0, N-1] \text{ με } f[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\cdot W_N^{nk}$$

Απόδειξη :

Θεωρούμε την ακολουθία $f[n]$

$$f[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\cdot W_N^{nk}$$

Όμως $W_N^{\mathrm{N}} = \left(e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}}\right)^{\mathrm{N}} = e^{-j2\pi} = \cos(-2\pi) + \mathrm{j}\sin(-2\pi) = \cos(2\pi) - \mathrm{j}\sin(2\pi) = 1$

και $W_N^{\mathrm{Nk}} = \left(W_N^{\mathrm{N}}\right)^k = 1^k = 1,$ και $W_N^{(\mathrm{N-n})k} = W_N^{\mathrm{Nk}}\cdot W_N^{-\mathrm{nk}} = 1\cdot W_N^{-\mathrm{nk}} = W_N^{-\mathrm{nk}}$

Έτσι ισχύει :

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\cdot W_N^{-nk}} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\cdot W_N^{(\mathrm{N}-n)k} = \frac{1}{N} f[\mathrm{N}-n]$$

- ❖ πρώτα υπολογίζεται η ακολουθία $f[n]$ (DFT N σημείων της $X[k]$, μετά υπολογίζεται η ακολουθία $f[\mathrm{N}-n]$ και τέλος γίνεται διαίρεση με το N.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

- <u>Σχέση του DFT με DTFT :</u>

μια ακολουθία $x[n]$ πεπερασμένου μήκους N που μηδενίζεται εκτός του διαστήματος $[0, N-1]$έχει DTFT :

$$\mathrm{DTFT}\{x[n]\} = \mathrm{X}\left(e^{-j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} x[n]e^{-j\omega n}}_{0} + \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n} + \underbrace{\sum_{n=N}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}}_{0} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n}$$

- DTFT Συνεχής συνάρτηση της συνεχούς μεταβλητής ω

Τότε, ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier (DFT) N σημείων προκύπτει από τον μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου (DTFT) για τις ισαπέχουσες συχνότητες (DFT δειγματοληψία του DTFT) $\omega_k = k\frac{2\pi}{\mathrm{N}}, k \in [0, N-1]$:

$$\mathrm{DFT}\{x[n]\} = X[k] = \mathrm{X}\left(e^{-j\omega}\right)\Big|_{\omega_k = k\frac{2\pi}{\mathrm{N}}} = \mathrm{X}\left(e^{-jk\frac{2\pi}{\mathrm{N}}}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{\mathrm{N}}n}$$

- DFT Διακριτή ακολουθία που αντιστοιχεί στα δείγματα του DTFT

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Η ποσότητα $\Delta\omega_k = 2\pi/N$ είναι η απόσταση ανάμεσα σε διαδοχικά δείγματα του DTFT και ονομάζεται **πυκνότητα** του DFT στο πεδίο της συχνότητας.

Η πυκνότητα βελτιώνεται όσο αυξάνεται το πλήθος N των συντελεστών του DFT δηλαδή το το πλήθος των δειγμάτων του σήματος

Προσοχή: Δεν πρέπει να συγχέεται η **πυκνότητα** του φάσματος με την **ευκρίνεια** του φάσματος

- Zero padding:

  Αυξάνεται το N, άρα ελαττώνεται το βήμα $\omega_k = k\frac{2\pi}{\mathrm{N}}, k \in [0, N-1]$

  Με το zero padding ουσιαστικά αυξάνεται η συχνότητα δειγματοληψίας του DTFT

  Βελτιώνεται η πυκνότητα στο φάσμα (συχνότητες)

❖ Αν η ακολουθία είναι περιοδική, τότε η ευκρίνεια του DFT αυξάνει εφόσον περιληφθούν στον υπολογισμό του DFT περισσότερες από μία περιόδους της ακολουθίας.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

<u>Παράδειγμα:</u> (α) Να υπολογιστεί ο DFT 4-σημείων του παλμού $x[n] = u[n] - u[n-4]$
Ισχύει: $x[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3]$.

O DFT 4-σημείων είναι:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{3} x[n]\, W_4^{nk} = x[0]W_4^{0k} + x[1]W_4^{1k} + x[2]W_4^{2k} + x[3]W_4^{3k}, \qquad 0 \le k \le 3$$

Υπολογίζουμε τα σημεία $X[k]$ για $0 \le k \le 3$.

$$X[0] = W_4^0 + W_4^0 + W_4^0 + W_4^0 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$
$$X[1] = W_4^0 + W_4^1 + W_4^2 + W_4^3 = 1 - j - 1 + j = 0$$
$$X[2] = W_4^0 + W_4^2 + W_4^4 + W_4^6 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$$
$$X[3] = W_4^0 + W_4^3 + W_4^6 + W_4^9 = 1 + j - 1 - j = 0$$

Επομένως ο DFT 4-σημείων είναι:

$$X[k] = \begin{cases} 4, & n = 0 \\ 0, & n = 1,2,\ldots \end{cases}$$

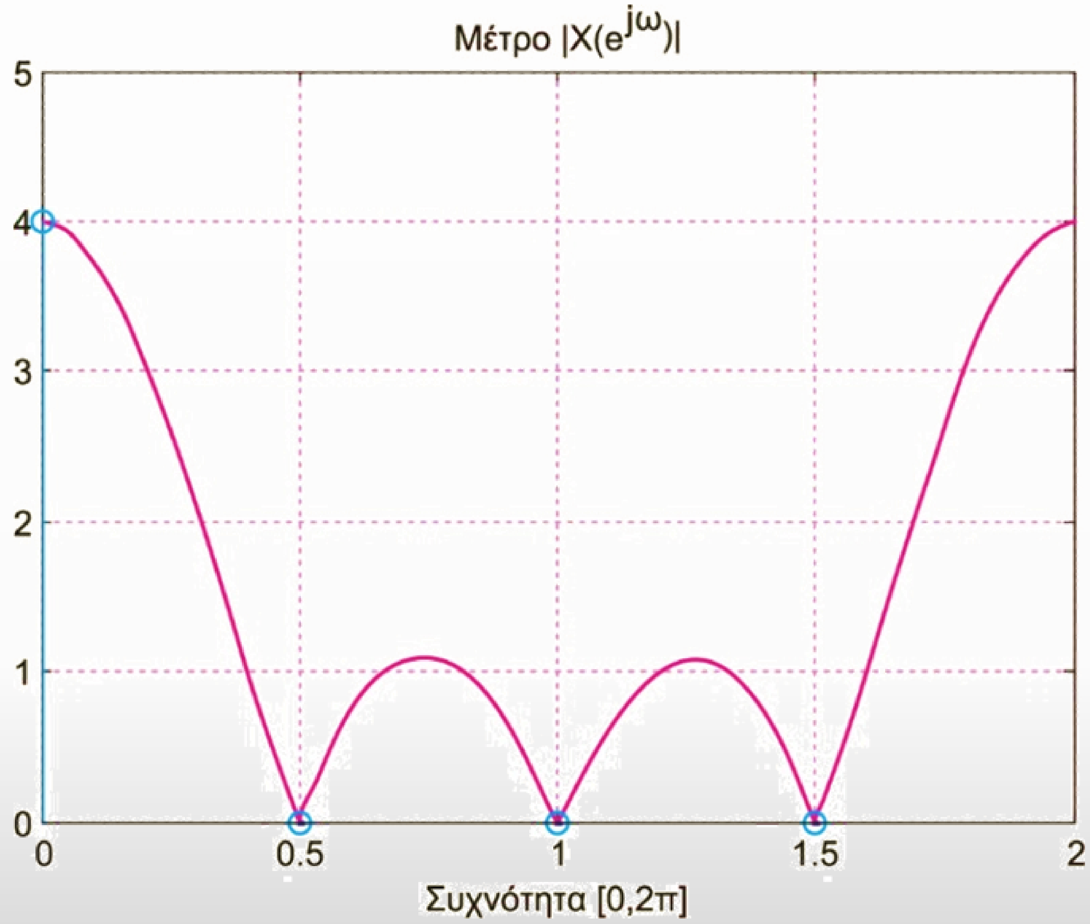
O DTFT είναι:

$$X(e^{j\omega}) = e^{-\frac{j3\omega}{2}} \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}$$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

<u>Παράδειγμα(συνέχεια):</u> (α) Να υπολογιστεί ο DFT 4-σημείων του παλμού $x[n] = u[n] - u[n-4]$

Φάσμα πλάτους DTFT και DFT 4-σημείων
του παλμού $x[n] = u[n] - u[n-4]$
στην περιοχή συχνοτήτων $[0,2\pi)$



Τα σημεία του DFT προκύπτουν με δειγματοληψία στον DTFT,

$$X[k] = X\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\pi k/2}, \quad k = 0,1,2,3$$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Παράδειγμα: (β) Να επαναληφθεί η επίλυση για DFT 8-σημείων $(N = 8)$, αφού εφαρμοστεί η διαδικασία προσθήκης μηδενικών (zero padding) στην ακολουθία $x[n]$.

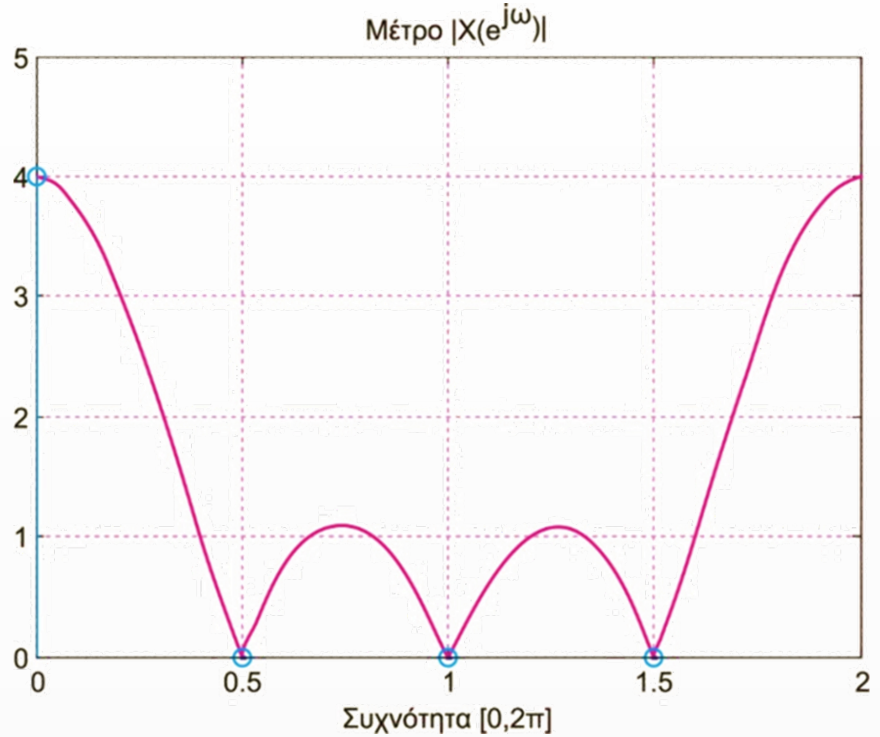
Απάντηση: Ο DFT 8-σημείων του παλμού $x[n] = u[n] - u[n-4]$ είναι:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{7} x[n]\, W_8^{nk}, \qquad 0 \le k \le 7$$

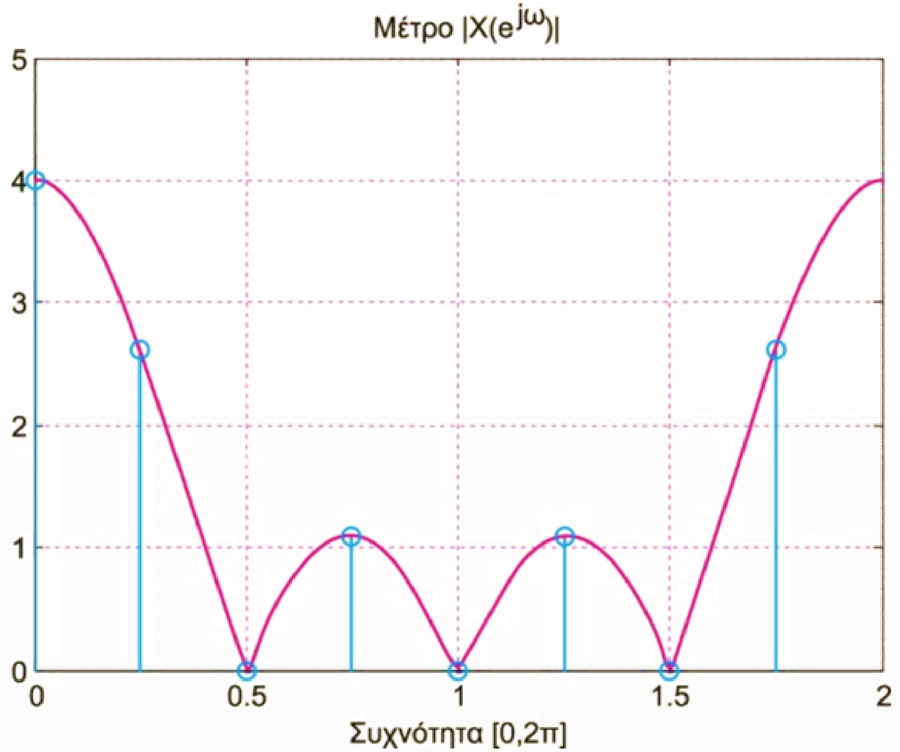
Υπολογίζουμε τα σημεία $X[k]$ για $0 \le k \le 7$. Είναι:

$$X[0] = 1W_8^0 + 1W_8^0 + 1W_8^0 + 1W_8^0 + 0W_8^0 + 0W_8^0 + 0W_8^0 + 0W_8^0 = 4$$
$$X[1] = 1W_8^0 + 1W_8^1 + 1W_8^2 + 1W_8^3 + 0W_8^4 + 0W_8^5 + 0W_8^6 + 0W_8^7 = 1 - 2.41j$$
$$X[2] = 1W_8^0 + 1W_8^2 + 1W_8^4 + 1W_8^6 + 0W_8^8 + 0W_8^{10} + 0W_8^{12} + 0W_8^{14} = 0$$
$$X[3] = 1W_8^0 + 1W_8^3 + 1W_8^6 + 1W_8^9 + 0W_8^{12} + 0W_8^{15} + 0W_8^{18} + 0W_8^{21} = 1 - 0.41j$$
$$X[4] = 1W_8^0 + 1W_8^4 + 1W_8^8 + 1W_8^{12} + 0W_8^{16} + 0W_8^{20} + 0W_8^{24} + 0W_8^{28} = 0$$
$$X[5] = 1W_8^0 + 1W_8^5 + 1W_8^{10} + 1W_8^{15} + 0W_8^{20} + 0W_8^{25} + 0W_8^{30} + 0W_8^{35} = 1 + 0.41j$$
$$X[6] = 1W_8^0 + 1W_8^6 + 1W_8^{12} + 1W_8^{18} + 0W_8^{24} + 0W_8^{30} + 0W_8^{36} + 0W_8^{42} = 0$$
$$X[7] = 1W_8^0 + 1W_8^7 + 1W_8^{14} + 1W_8^{21} + 0W_8^{28} + 0W_8^{35} + 0W_8^{42} + 0W_8^{49} = 1 + 2.41j$$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier



DFT 4-σημείων



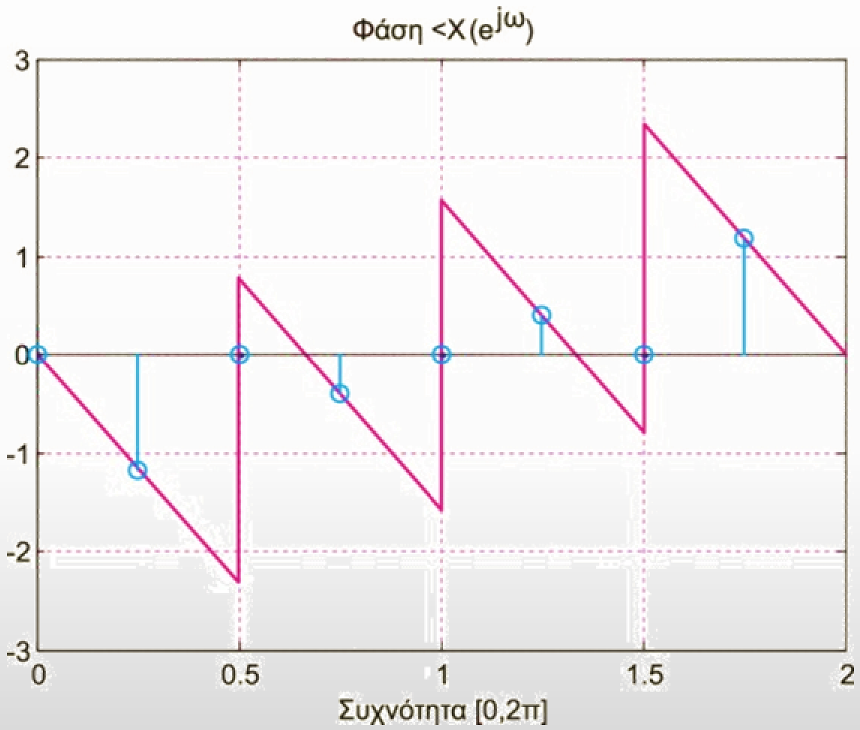
DFT 8-σημείων

Φάσμα πλάτους

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

- Το πλάτος και η φάση του DFT έχουν άρτια και περιττή συμμετρία, αντίστοιχα. Επομένως, κρατάμε μόνο το τμήμα $[0, \pi)$, δηλαδή

$$X[k], k = 0,1, \dots, (N/2) - 1$$



DFT 8-σημείων

Φάσμα φάσης

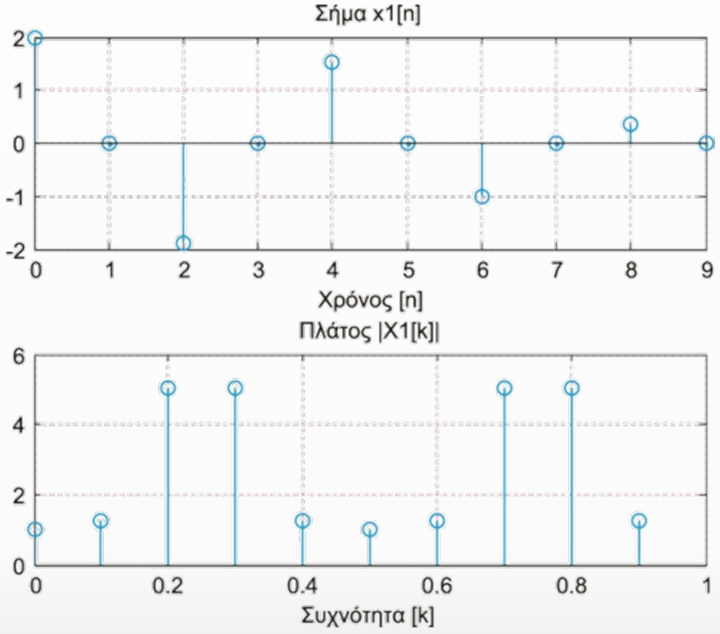
Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

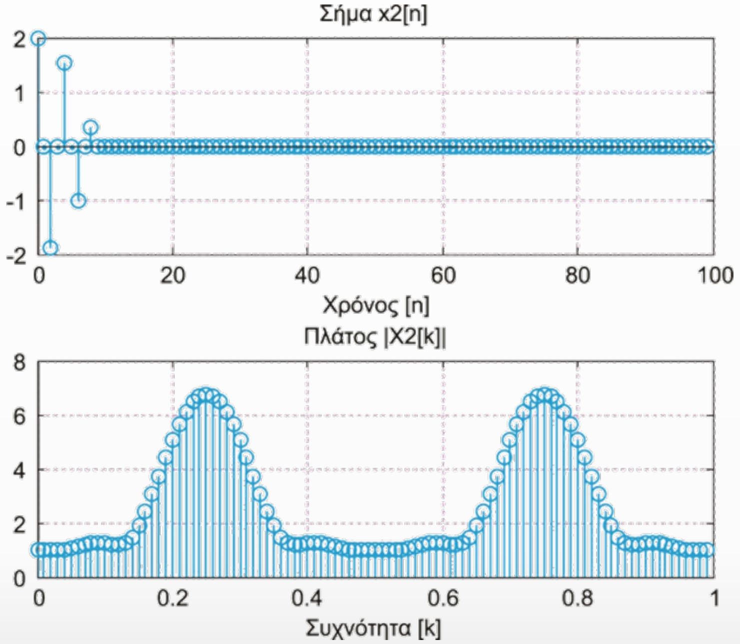
Παράδειγμα: Περιοδικό σήμα $x[n] = cos\left(\frac{4\pi n}{9}\right) + \ cos\left(\frac{5\pi n}{9}\right)$

(α) DFT 10-σημείων για $0 \leq n \leq 9$

(β) DFT 100-σημείων για $0 \leq n \leq 9$ και τα υπόλοιπα 90 σημεία μηδενικά. (γ) DFT 100-σημείων για $0 \leq n \leq 99$.

Σήμα μήκους 10 σημείων και φάσμα πλάτους DFT 10 σημείων.





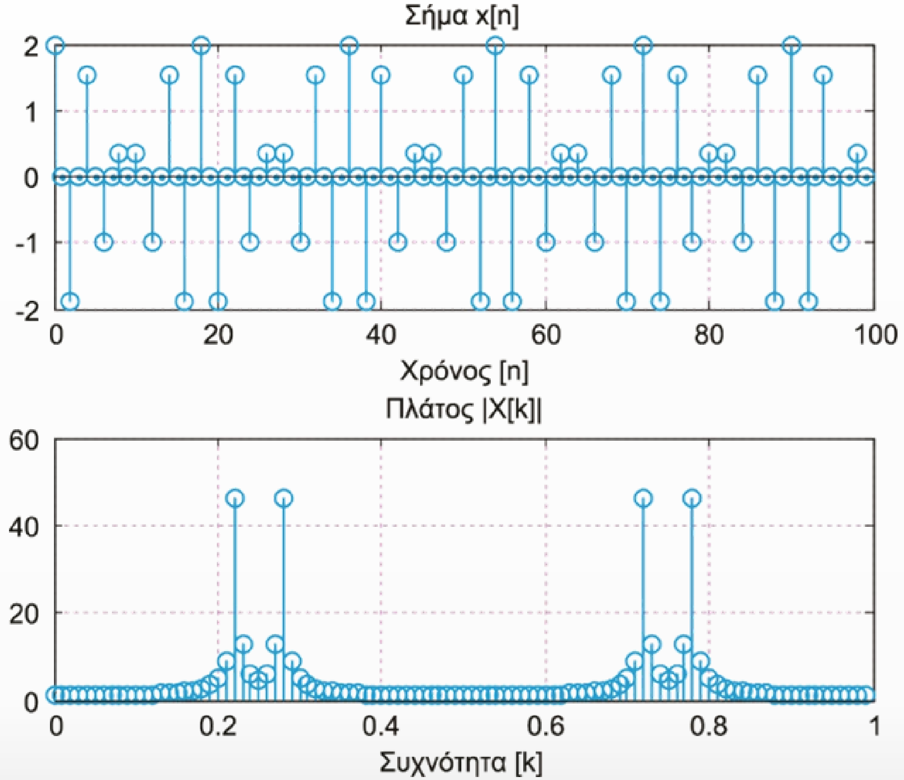
Σήμα μήκους 10 σημείων και 90 μηδενικών και φάσμα πλάτους DFT 100 σημείων.

Η προσθήκη μηδενικών και ο υπολογισμός DFT μεγαλύτερου μήκους, αύξησε την πυκνότητα του φάσματος, αλλά δεν κατάφερε όμως να εντοπίσει τις δύο διαφορετικές συχνότητες που περιέχει το σήμα $x[n]$, καθώς αποδίδονται ως μία κορυφή.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Παράδειγμα: Ακολουθία $x[n] = cos\left(\frac{4\pi n}{9}\right) +\ cos\left(\frac{5\pi n}{9}\right)$

(γ) DFT 100-σημείων για $0 \leq n \leq 99.$



Σήμα μήκους 100 σημείων και φάσμα πλάτους DFT 100 σημείων

Η προσθήκη περισσότερων περιόδων του σήματος και ο υπολογισμός DFT μεγαλύτερου μήκους, **αύξησε την ευκρίνεια** του φάσματος και εντοπίστηκαν με ακρίβεια οι δύο διαφορετικές συχνότητες που περιέχει το σήμα $x[n]$.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier με Πίνακες

- Ο υπολογισμός του DFT N σημείων ενός σήματος x[n] μήκους N $\boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}] = [x[0], x[1], \dots, x[N-1]]$

μπορεί να γίνει με την χρήση πινάκων ως εξής:

$$\boldsymbol{X}^T = \boldsymbol{W_N}\, \boldsymbol{x}^T$$

$\boldsymbol{x}^T = \{ x[0], x[1], \dots, x[N-1]\}$ ανάστροφος πίνακας (στήλη) ακολουθίας εισόδου

$\boldsymbol{X}^T = \{ X[0], X[1], \dots, X[N-1]\}$ ανάστροφος πίνακας (στήλη) της ακολουθίας συντελεστών του DFT

$\boldsymbol{W_N}$ συμμετρικός πίνακας διαστάσεων NxN που δημιουργείται από τους παράγοντες φάσης:

$$\boldsymbol{W_N} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier **με Πίνακες**

Ο $\boldsymbol{W_N}$ συμμετρικός πίνακας διαστάσεων NxN που δημιουργείται από τους παράγοντες φάσης νως εξής:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} j=1 & j=2 & j=3 & j=\ldots & j=N \end{array} \\
\begin{array}{c} i=1 \\ i=2 \\ i=3 \\ i=\ldots \\ i=N \end{array} &
\begin{bmatrix}
W_N^{(i-1)(j-1)} & W_N^{(i-1)(j-1)} & W_N^{(i-1)(j-1)} & \ldots & W_N^{(i-1)(j-1)} \\
W_N^{(i-1)(j-1)} & W_N^{(i-1)(j-1)} & W_N^{(i-1)(j-1)} & \ldots & W_N^{(i-1)(j-1)} \\
W_N^{(i-1)(j-1)} & W_N^{(i-1)(j-1)} & W_N^{(i-1)(j-1)} & \ldots & W_N^{(i-1)(j-1)} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
W_N^{(i-1)(j-1)} & W_N^{(i-1)(j-1)} & W_N^{(i-1)(j-1)} & \ldots & W_N^{(i-1)(j-1)}
\end{bmatrix}
\end{array}
=
\begin{bmatrix}
W_N^{(0)(0)} & W_N^{(0)(1)} & W_N^{(0)(2)} & \ldots & W_N^{(0)(N-1)} \\
W_N^{(1)(0)} & W_N^{(1)(1)} & W_N^{(1)(2)} & \ldots & W_N^{(1)(N-1)} \\
W_N^{(2)(0)} & W_N^{(2)(1)} & W_N^{(2)(2)} & \ldots & W_N^{(2)(N-1)} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
W_N^{(N-1)(0)} & W_N^{(N-1)(1)} & W_N^{(N-1)(2)} & \ldots & W_N^{(N-1)(N-1)}
\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\
1 & W_N^1 & W_N^2 & \ldots & W_N^{(N-1)} \\
1 & W_N^2 & W_N^4 & \ldots & W_N^{2(N-1)} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
1 & W_N^{(N-1)} & W_N^{2(N-1)} & \ldots & W_N^{(N-1)(N-1)}
\end{bmatrix}$$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier με Πίνακες

Κάθε στήλη $\boldsymbol{W_i}$ του πίνακα $\boldsymbol{W_N}$ ονομάζεται **διάνυσμα βάσης** του DFT:

$$\boldsymbol{W_i} = \begin{bmatrix} W_N^{0i} \\ W_N^{1i} \\ W_N^{2i} \\ \vdots \\ W_N^{(N-1)i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ W_N^{i} \\ W_N^{2i} \\ \vdots \\ W_N^{(N-1)i} \end{bmatrix}$$

Αν υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας $\boldsymbol{W_N^{-1}}$, τότε ο αντίστροφος DFT δίνεται από:

$$\boldsymbol{x}^T = \boldsymbol{W_N^{-1}}\, \boldsymbol{X}^T$$

Επειδή ισχύει $\boldsymbol{W_N^{-1}} = (1/N)\boldsymbol{W_N^*}$, όπου $\boldsymbol{W_N^*}$ είναι ο συζυγής μιγαδικός πίνακας του $\boldsymbol{W_N}$, προκύπτει ότι ο αντίστροφος DFT είναι:

$$\boldsymbol{x}^T = \frac{1}{N}\boldsymbol{W_N^*}\, \boldsymbol{X}^T$$

Στην συνέχεια θα δούμε έναν πιο αποδοτικό τρόπο υπολογισμού του DFT, ο οποίος αξιοποιεί τις ιδιότητες συμμετρίας του DFT και του παράγοντα φάσης και μειώνει πολύ το πλήθος των απαιτούμενων πράξεων.

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier με Πίνακες

<u>Παράδειγμα:</u> Να υπολογιστεί ο DFT 4-σημείων της ακολουθίας $x[n] = [1, 3, 5, 7]$

Ο πίνακας $\boldsymbol{W_4}$ είναι:

$$\boldsymbol{W_4} = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

Οι τιμές του DFT υπολογίζονται από:

$$\boldsymbol{X}^T = \boldsymbol{W_N}\, \boldsymbol{x}^T \Rightarrow \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier με Πίνακες

Παράδειγμα(συνέχεια): Να υπολογιστεί ο DFT 4-σημείων της ακολουθίας $x[n] = [1, 3, 5, 7]$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{X}^T = \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -4+4j \\ -4 \\ -4-4j \end{bmatrix}$$

Επομένως ο DFT είναι: $X[k] = [16,\ -4+4j,\ -4,\ -4-4j]$

Διακριτός μετασχηματισμός Fourier με Πίνακες

Παράδειγμα(συνέχεια): Και ο υπολογισμός του αντιστρόφου

$$\boldsymbol{x}^T = \frac{1}{N}\boldsymbol{W}_N^* \boldsymbol{X}^T \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{x}^T = \frac{1}{4}\boldsymbol{W}_4^* \boldsymbol{X}^T = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 16 \\ -4+4j \\ -4 \\ -4-4j \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{x}^T = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & +j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ -4+4j \\ -4 \\ -4-4j \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{x}^T = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 20 \\ 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

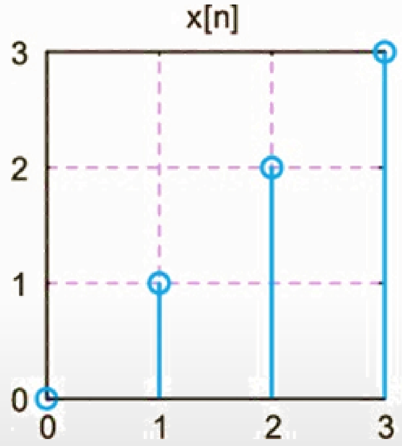
Άρα ο IDFT είναι η $\boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}] = [\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{5}, \mathbf{7}]$

Κυκλική Συνέλιξη

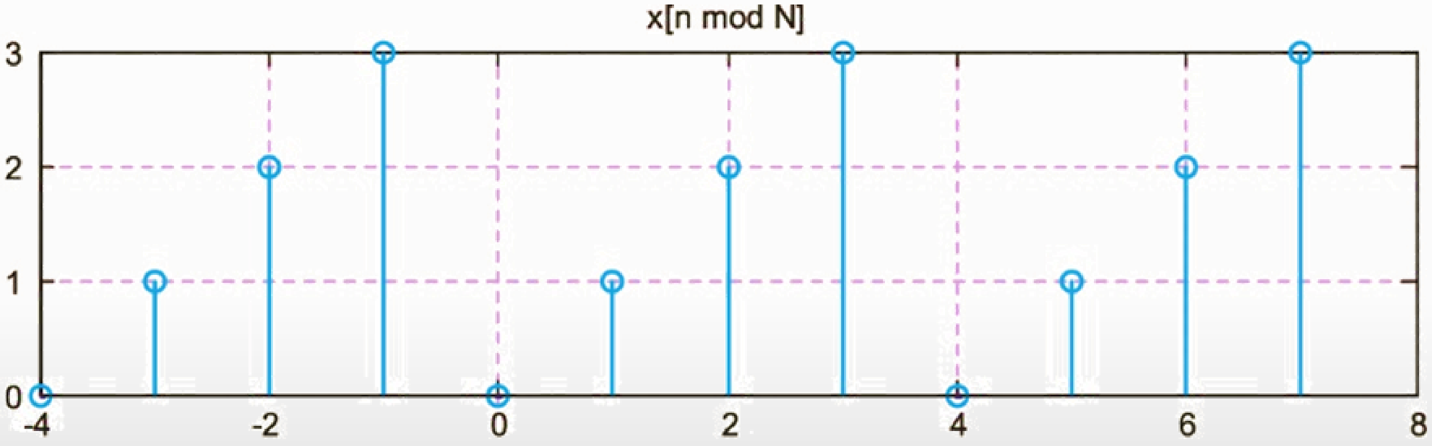
- <u>*Περιοδική επέκταση*</u> *της ακολουθίας πεπερασμένου μήκους* $x[n], n \in [0, N-1]$ ανά N δείγματα είναι η περιοδική ακολουθία με θεμελιώδη περίοδο N

$$\tilde{x}[n] = x[nmodN] = x[[n]]_N$$

Ακολουθία πεπερασμένου μήκους $x[n]$



Η περιοδική επέκτασή της $\tilde{x}[n] = x[n\ mod\ 4] = x[[n]]_4$



Κυκλική Συνέλιξη

- Η <u>περιοδική συνέλιξη</u> δύο περιοδικών σημάτων διακριτού χρόνου με την ίδια θεμελιώδη περίοδο N ορίζεται :

$$\tilde{x}[n] \,\widetilde{\circledast}_N\, \tilde{y}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}[k] \cdot \tilde{y}[n-k] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{y}[k] \cdot \tilde{x}[n-k]$$

- Παρατηρούμε ότι η μοναδική διαφορά μεταξύ των δύο ειδών συνέλιξης είναι ότι στην περιοδική συνέλιξη το άθροισμα υπολογίζεται σε μια **απλή περίοδο**, ενώ στη γραμμική συνέλιξη υπολογίζεται για **όλες τις τιμές του $\boldsymbol{k}$**.

- Για τον υπολογισμό της περιοδικής συνέλιξης μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι ίδιοι τρόποι που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες ενότητες για τον υπολογισμό της γραμμικής συνέλιξης.

Κυκλική Συνέλιξη

Επομένως, η περιοδική συνέλιξη είναι:

$$\tilde{y}[n] = \{\ldots, -1, 1, 7, 5, -\hat{1}, 1, 7, 5, -1, 1, 7, 5, \ldots\}$$

<u>Παράδειγμα:</u> Να υπολογιστεί η **περιοδική συνέλιξη** μεταξύ των ακολουθιών $x[n] = \{\hat{0}, 1, 2, 3\}$ και $h[n] = \{1, \hat{2}, 0, -1\}$.

Απάντηση: Χρησιμοποιούμε το sliding rule τρόπο υπολογισμού του αθροίσματος:

$$\tilde{y}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}[k]\, \tilde{h}[n-k]$$

k	**-4**	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**	
$x[k]$					0	1	2	3	
$h[k]$				1	2	0	-1		
$\tilde{h}[k]$	2	0	-1	1	2	0	-1	1	Περιοδική επέκταση
$\tilde{h}[-k]$	2	1	-1	0	2	1	-1	0	Αναδίπλωση
$\tilde{h}[0-k]$	2	1	-1	0	2	1	-1	0	$\tilde{y}[0] = 2\cdot 0 + 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 0 = -1$
$\tilde{h}[1-k]$	0	2	1	-1	0	2	1	-1	$\tilde{y}[1] = 0\cdot 0 + 2\cdot 1 + 1\cdot 2 + (-1)\cdot 3 = 1$
$\tilde{h}[2-k]$	-1	0	2	1	-1	0	2	1	$\tilde{y}[2] = (-1)\cdot 0 + 0\cdot 1 + 2\cdot 2 + 1\cdot 3 = 7$
$\tilde{h}[3-k]$	1	-1	0	2	1	-1	0	2	$\tilde{y}[3] = 1\cdot 0 + (-1)\cdot 1 + 0\cdot 2 + 2\cdot 3 = 5$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{περίοδος } N = 4}$

Κυκλική Συνέλιξη

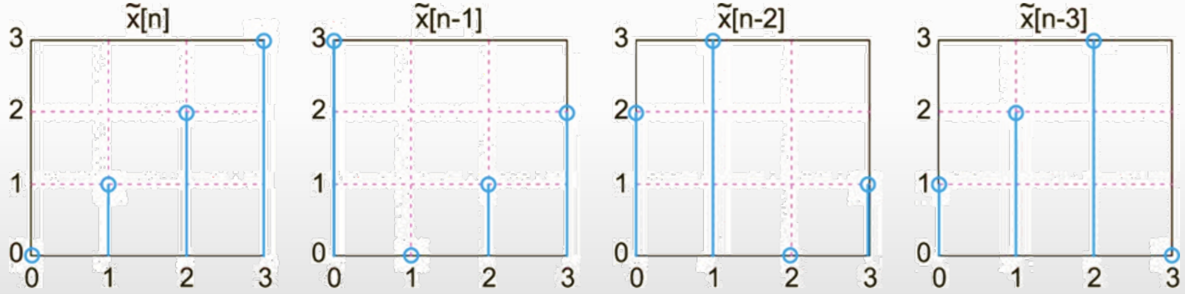
Η **κυκλική μετατόπιση** της περιοδικής επέκτασης $\tilde{x}[n]$ μιας ακολουθίας $x[n]$, κατά μία ποσότητα χρόνου n_0, ορίζεται από τη σχέση:

$$\tilde{x}[n-n_0] = x\big[[n-n_0]\big]_N R_N[n]$$

όπου το ορθογώνιο παράθυρο $R_N[n]$ ορίζεται από την παρακάτω σχέση και πολλαπλασιαζόμενο με το σήμα εξάγει μία περίοδο του σήματος:

$$R_N[n] = \begin{cases} 1, 0 \leq n < N \\ 0, \qquad αλλού \end{cases}$$

Η κυκλική μετατόπιση πραγματοποιείται με την ολίσθηση της ακολουθίας $\tilde{x}[n]$ κατά n_0 σημεία (προς τα αριστερά αν $n_0 < 0$ ή προς τα δεξιά αν $n_0 > 0$) και τη διατήρηση μόνο του τμήματος που βρίσκεται μέσα στη θεμελιώδη περίοδο N. Η διαδικασία δείχνεται στο σχήμα:



Κυκλική μετατόπιση της περιοδικής επέκτασης $\tilde{x}[n]$, σε μία περίοδο.

Κυκλική Συνέλιξη

$n_0 = 1$

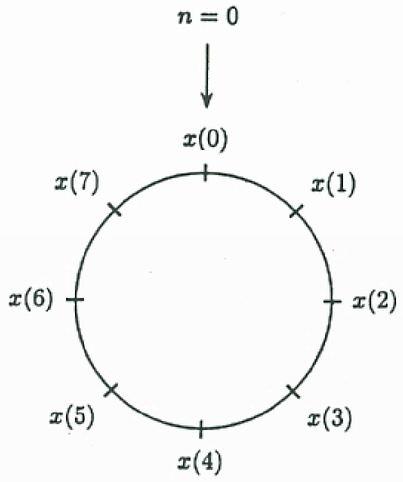
ολίσθηση της ακολουθίας $\tilde{x}[n]$ κατά n_0 σημεία προς τα δεξιά αν $n_0 > 0$)

$n_0 = 2$

Κυκλική Συνέλιξη

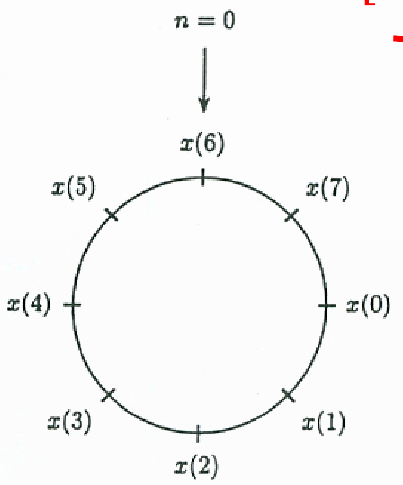
- *Κυκλική μετατόπιση*

$x[[n-n_o]]_8$ $\acute{o}\tau\alpha\nu\ n_o > 0$



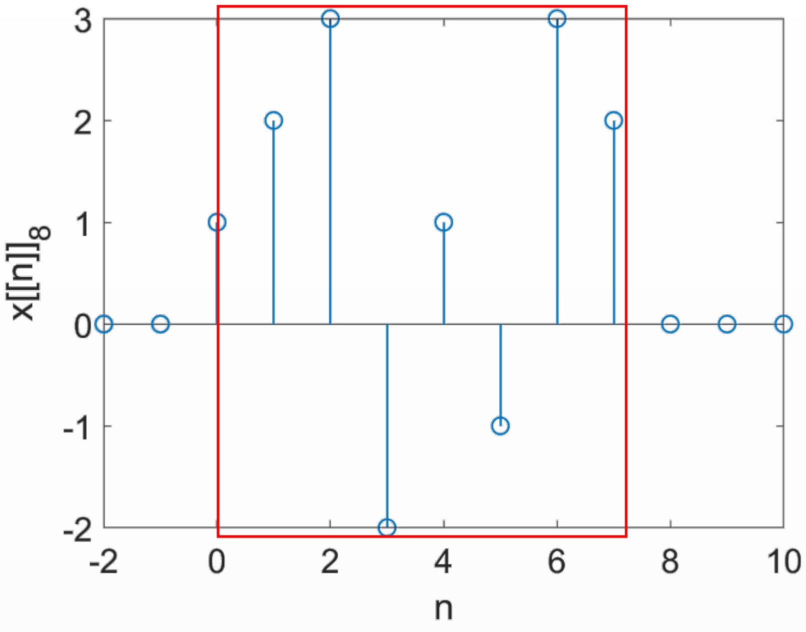
(α) Μια ακολουθία οκτώ σημείων.

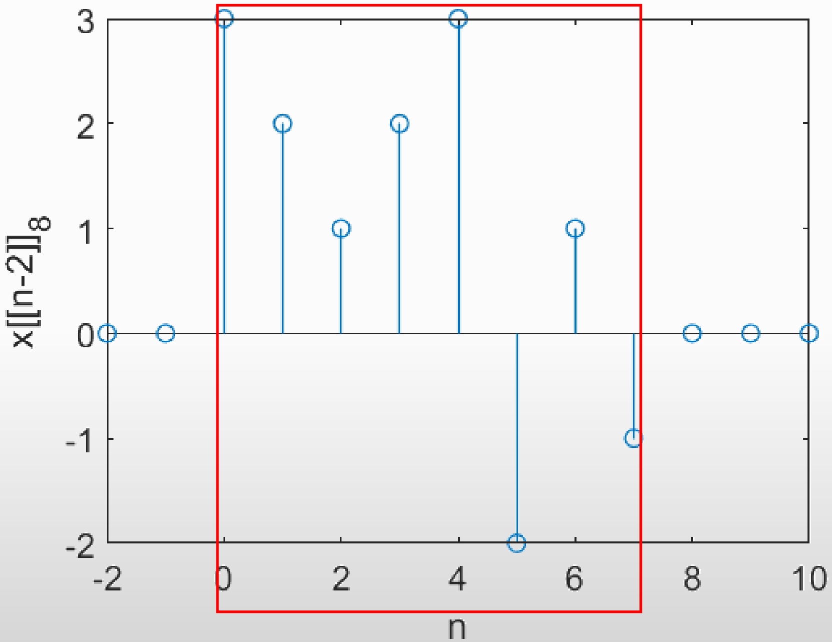
$x[[n]]_8$



(β) Κυκλική μετατόπιση κατά δύο.

$x[[n-2]]_8$





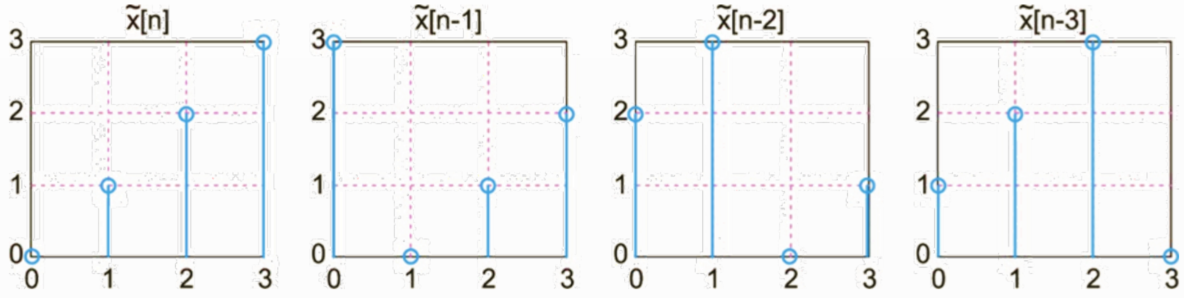
Κυκλική Συνέλιξη

Με εφαρμογή της σχέσης

$$\tilde{x}[n-n_0] = x\big[[n-n_0]\big]_N R_N[n]$$

προκύπτει ότι οι ακολουθίες που απεικονίζονται στο σχήμα περιγράφονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

- $\tilde{x}[n] = x\big[[n]\big]_4 R_4[n]$
- $\tilde{x}[n-1] = x\big[[n-1]\big]_4 R_4[n]$
- $\tilde{x}[n-2] = x\big[[n-2]\big]_4 R_4[n]$
- $\tilde{x}[n-3] = x\big[[n-3]\big]_4 R_4[n]$



- η κυκλική μετατόπιση δημιουργεί διαφορετική ακολουθία από την απλή χρονική μετατόπιση

Εξαιτίας αυτής της διαφοράς προκύπτει το διαφορετικό αποτέλεσμα μεταξύ της γραμμικής συνέλιξης και της κυκλικής συνέλιξης.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος & Εικόνας

Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών

Α. Μπακλέζος

abaklezos@hmu.gr