Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος & Εικόνας

Μάθημα 5ο

Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών

Συστήματα Διακριτού Χρόνου – Εξισώσεις Διαφορών

Α. Μπακλέζος

abaklezos@hmu.gr

Συστήματα Διακριτού Χρόνου

- *Αναπαράσταση LTI συστημάτων με γραμμικές εξισώσεις διαφορών*

Κάθε γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα (LTI) περιγράφεται από μία **γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές** (ΓΕΔΣΣ)

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

σχέση εισόδου – εξόδου

με **αρχικές συνθήκες εξόδου** $y[-1], y[-2], \dots, y[-\mathrm{N}]$ και **αρχικές συνθήκες εισόδου** $\mathrm{x}[0], \mathrm{x}[-1], x[-2], \dots, x[-\mathrm{M}]$

και **σταθερούς συντελεστές** (ανεξάρτητους του n) $a_k, k = 1,2, \dots, N$ και $b_k, k = 0,1,, \dots, M$

❖ Η γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές είναι ένας ανοικτός τύπος υπολογισμού της απόκρισης του συστήματος, με γνωστούς τους σταθερούς συντελεστές

→ επαναληπτικός τρόπος υπολογισμού της εξόδου (**αναδρομικός - recursive**).

❖ Αν το σύστημα είναι **αιτιατό** οι **αρχικές συνθήκες εισόδου είναι μηδενικές**. Τότε για να υπολογιστεί η έξοδος απαιτούνται μόνον οι αρχικές συνθήκες εξόδου

❖ εξίσωση διαφορών είναι το ανάλογο της διαφορικής εξίσωσης για τα συστήματα συνεχούς χρόνου

Συστήματα Διακριτού Χρόνου

Αναδρομικός υπολογισμός της εξόδου:

Παράδειγμα : Να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος με σχέση εισόδου – εξόδου όταν στην είσοδο εφαρμοσθεί η μοναδιαία ώση $\delta[n]$ (δηλαδή να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση):

$$y[n] = x[n] + x[n-1] + 3x[n-2]$$

Πριν τον υπολογισμό ας δούμε λίγο την εξίσωση διαφορών που περιγράφει το σύστημα και ας προσέξουμε τις αντιστοιχίες με την γενική μορφή της εξίσωσης διαφορών με σταθερούς συντελεστές:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \cdots + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + \cdots$$

$$y[n] = x[n] + x[n-1] + 3x[n-2] \quad \vdots \quad y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$$

Υπάρχουν μόνο όροι εισόδου $(\boldsymbol{x[n], x[n-k]})$, άρα **σταθεροί συντελεστές** $a_k = 0, k = 1,2,\dots,N$

Σχετικά με τους σταθερούς συντελεστές εισόδου $b_k, k = 0,1,,\dots,M$.

Το M είναι η μεγαλύτερη καθυστέρηση στο σήμα εισόδου που συμμετέχει στον υπολογισμό της εξόδου, άρα $M = 2$.

Δηλαδή μπορώ να «διαβάσω» τους $b_k, k = 0,1,2 \rightarrow b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 3$

Συστήματα Διακριτού Χρόνου

Αναδρομικός υπολογισμός της εξόδου:

Παράδειγμα(συνέχεια) : Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος με σχέση εισόδου – εξόδου:

$$y[n] = x[n] + x[n-1] + 3x[n-2]$$

Θέτουμε είσοδο $x[n] = \delta[n]$ στη σχέση εισόδου – εξόδου, έτσι η κρουστική απόκριση είναι

$$h[n] = y[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + 3\delta[n-2]$$

Θέτουμε τιμές στο n και βρίσκουμε:

$$h[-2] = y[-2] = \delta[n] + \delta[n-1] + 3\delta[n-2] = \delta[-2] + \delta[-2-1] + 3\delta[-2-2] = 0$$

$$h[-1] = y[-1] = \delta[n] + \delta[n-1] + 3\delta[n-2] = \delta[-1] + \delta[-1-1] + 3\delta[-1-2] = 0$$

$$h[0] = y[0] = \delta[n] + \delta[n-1] + 3\delta[n-2] = \delta[0] + \delta[0-1] + 3\delta[0-2] = 1$$

$$h[1] = y[1] = \delta[n] + \delta[n-1] + 3\delta[n-2] = \delta[1] + \delta[1-1] + 3\delta[1-2] = 1$$

$$h[2] = y[2] = \delta[n] + \delta[n-1] + 3\delta[n-2] = \delta[2] + \delta[2-1] + 3\delta[2-2] = 3$$

$$h[3] = y[3] = \delta[n] + \delta[n-1] + 3\delta[n-2] = \delta[3] + \delta[3-1] + 3\delta[3-2] = 0$$

....

❖ Έτσι η κρουστική απόκριση (έξοδος) είναι $h[n] = \{\underline{1}, 1, 1, 3, \}, \quad 0 \le n \le 2$

Συστήματα Διακριτού Χρόνου

- *Αναπαράσταση LTI συστημάτων με γραμμικές εξισώσεις διαφορών*

Κάθε γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα (LTI) περιγράφεται από μία γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

με **αρχικές συνθήκες εξόδου** $y[-1], y[-2], \dots, y[-\mathrm{N}]$ και **αρχικές συνθήκες εισόδου** $\mathrm{x}[0], \mathrm{x}[-1], x[-2], \dots, x[-\mathrm{M}]$

και **σταθερούς συντελεστές** (ανεξάρτητους του n) $a_k, k = 1,2, \dots, N$ και $b_k, k = 0,1,, \dots, M$

❖ Οι αρχικές συνθήκες περιγράφουν την αρχική κατάσταση του συστήματος, καθορίζουν τη λύση της εξίσωσης διαφορών

❖ Αν αρχικές συνθήκες εξόδου μηδενικές, το σύστημα βρίσκεται σε **αρχική ηρεμία** $y[-1] = y[-2] = \cdots = y[-\mathrm{N}] = 0$

$\boxed{y[n] = 0, n < 0}$

→Δηλαδή μηδενική έξοδος αν δεν εισάγουμε κάποια είσοδο

→Αν δεν βρίσκεται σε αρχική ηρεμία μπορεί να παράγει έξοδο χωρίς είσοδο.......

Συστήματα Διακριτού Χρόνου

<u>Σύστημα που δεν βρίσκεται σε αρχική ηρεμία μπορεί να παράγει έξοδο χωρίς είσοδο</u>

Παράδειγμα : το σύστημα $y[n] = y[n-1] + y[n-2]$ με αρχικές συνθήκες $y[-1] = 0, y[-2] = 1$

$$y[0] = y[0-1] + y[0-2] = y[-1] + y[-2] = 1$$
$$y[1] = y[1-1] + y[1-2] = y[0] + y[-1] = 1$$
$$y[2] = y[2-1] + y[2-2] = y[1] + y[0] = 2$$
$$y[3] = y[3-1] + y[3-2] = y[2] + y[1] = 3$$
$$y[4] = y[4-1] + y[4-2] = y[3] + y[2] = 5$$
$$y[5] = y[5-1] + y[5-2] = y[4] + y[3] = 8$$

....

....

Η απόκριση μεγαλώνει διαρκώς με μηδενική διέγερση!

Συστήματα Διακριτού Χρόνου

- *Αναπαράσταση LTI συστημάτων με γραμμικές εξισώσεις διαφορών*

Κάθε γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα (LTI) περιγράφεται από μία γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

με αρχικές συνθήκες εξόδου $y[-1], y[-2], \ldots, y[-\mathrm{N}]$ και με αρχικές συνθήκες εισόδου $\mathrm{x}[0], \mathrm{x}[-1], x[-2], \ldots, x[-\mathrm{N}]$

και σταθερούς (ανεξάρτητους του n) συντελεστές $a_k, k = 1,2, \ldots, N$ και $b_k, k = 0,1,, \ldots, M$

❖ Εναλλακτικά η περιγραφή δίνεται και ως

$$\sum_{k=0}^{N} c_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} d_k x[n-k]\,, c_0 \neq 0 \rightarrow$$

$$c_0 y[n-0] + \sum_{k=1}^{N} c_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} d_k x[n-k]\,, c_0 \neq 0 \xrightarrow{\text{διαιρώ με } c_0}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

Συστήματα Διακριτού Χρόνου

- *Παράδειγμα :* δίνεται η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές, που περιγράφει ένα LTI σύστημα

$$y[n] = 2x[n] + 3x[n-1] - 4y[n-1] + 5y[n-2]$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

αρχικές συνθήκες εξόδου $y[-1], y[-2], \dots, y[-\mathrm{N}]$
αρχικές συνθήκες εισόδου $\mathrm{x}[0], \mathrm{x}[-1], x[-2], \dots, x[-\mathrm{M}]$
σταθεροί συντελεστές $a_k, k = 1,2, \dots, N$ και
$b_k, k = 0,1, \dots, M$

Η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές

$$y[n] = 2x[n] + 3x[n-1] - (4y[n-1] - 5y[n-2])$$

Άρα

$\mathrm{M} = 1$ (η μεγαλύτερη τιμή του k για την είσοδο)

$\mathrm{N} = 2$ (η μεγαλύτερη τιμή του k για την έξοδο)

$b_0 = 2, b_1 = 3,$ (συντελεστές τιμών εισόδου)

$a_1 = 4, a_2 = -5,$ (συντελεστές τιμών εξόδου)

επαναληπτικός τρόπο υπολογισμού της εξόδου : για να υπολογιστεί η έξοδος $y[n]$ σε μία χρονική στιγμή n πρέπει να έχει υπολογιστεί η έξοδος τις δύο προηγούμενες χρονικές στιγμές $y[n-1], y[n-2]$

Συστήματα Διακριτού Χρόνου

- *Παράδειγμα :* δίνεται η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές, που περιγράφει ένα LTI σύστημα

$$4y[n] = 3x[n] + 2x[n-2] - 4y[n-1] + 5y[n-2]$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

αρχικές συνθήκες εξόδου $y[-1], y[-2], \dots, y[-\mathrm{N}]$
αρχικές συνθήκες εισόδου $\mathrm{x}[0], \mathrm{x}[-1], x[-2], \dots, x[-\mathrm{M}]$
σταθεροί συντελεστές $a_k, k = 1,2, \dots, N$ και
$b_k, k = 0,1, \dots, M$

Η εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές

$$4y[n] = 3x[n] + 2x[n-2] - (4y[n-1] - 5y[n-2])$$

$$y[n] = \frac{3}{4}x[n] + \frac{1}{2}x[n-2] - (y[n-1] - \frac{5}{4}y[n-2])$$

Άρα

M =2 (η μεγαλύτερη τιμή του k για την είσοδο)

$\mathrm{N} = 2$ (η μεγαλύτερη τιμή του k για την έξοδο)

$b_0 = \frac{3}{4}, b_1 = 0, b_2 = \frac{1}{2}$ (συντελεστές τιμών εισόδου)

$a_1 = 1, a_2 = -\frac{5}{4}$ (συντελεστές τιμών εξόδου)

επαναληπτικός τρόπο υπολογισμού της εξόδου : για να υπολογιστεί η έξοδος $y[n]$ σε μία χρονική στιγμή n πρέπει να έχει υπολογιστεί η έξοδος τις δύο προηγούμενες χρονικές στιγμές $y[n-1], y[n-2]$

Ψηφιακά Φίλτρα

- *Ψηφιακό φίλτρο η απλά φίλτρο :* ένα σύστημα διακριτού χρόνου ή υπολογιστική διαδικασία ή αλγόριθμος μέσω του οποίου μια ακολουθία εισόδου μετασχηματίζεται σε μία ακολουθία εξόδου (*J.F. Kaiser*)

- Τα γραμμικά χρονικά αμετάβλητα (LTI) συστήματα (φίλτρα) διακρίνονται σε δύο κατηγορίες ανάλογα με τη διάρκεια της κρουστικής τους απόκρισης:

  - τα φίλτρα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης FIR (Finite duration Impulse Response)

  - τα φίλτρα άπειρης κρουστικής απόκρισης IIR (Infinite duration Impulse Response)

Ψηφιακά Φίλτρα

- <u>Φίλτρο πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης FIR</u> ή φίλτρα κινητού μέσου όρου (Moving Average – MA) ή μη-αναδρομικό (non-recursive) τάξης $\mathbf{M}$:

Περιγράφονται από την εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \cancel{\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]}$$

αρχικές συνθήκες εισόδου $\mathrm{x}[0], \mathrm{x}[-1], x[-2], \ldots, x[-\mathrm{M}]$
σταθεροί συντελεστές $b_k, k = 0,1, \ldots, M$

❖ Η **έξοδος** σε κάθε χρονική στιγμή ενός FIR φίλτρου εξαρτάται από **εισόδους του συστήματος** την ίδια και προηγούμενες χρονικές στιγμές.

❖ Κρουστική απόκριση $\mathrm{h}[n]$ ενός φίλτρου πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης :

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k]$$

❖ **Οι συντελεστές της εξίσωσης διαφορών που περιγράφει ένα FIR φίλτρο είναι ίδιοι με τους συντελεστές της κρουστικής απόκρισης του FIR φίλτρου.**

❖ Η κρουστική απόκριση ενός FIR φίλτρου είναι ένα σήμα πεπερασμένης διάρκειας. Αν η είσοδος στο φίλτρο είναι άπειρης διάρκειας, τότε και η απόκριση του φίλτρου είναι άπειρης διάρκειας.

Ψηφιακά Φίλτρα

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \cancel{\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]}$$

αρχικές συνθήκες εισόδου $\mathrm{x}[0], \mathrm{x}[-1], x[-2], \ldots, x[-\mathrm{M}]$
σταθεροί συντελεστές $b_k, k = 0,1, \ldots, M$

- Παράδειγμα : Εξίσωση διαφορών $y[n] = x[n] - x[n-2]$

Φίλτρο FIR (εξάρτηση από εισόδους της ίδιας και προηγουμένων χρονικών στιγμών)

$$y[n] = b_0 x[n-0] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$$

Τάξη M=2 και σταθεροί συντελεστές $b_0 = 1, b_1 = 0, b_2 = -1$ (συντελεστές τιμών εισόδου)

κρουστική απόκριση του FIR φίλτρου $\mathrm{h}[n] = [\underline{1}, 0, -1]$

- Παράδειγμα : Εξίσωση διαφορών $y[n] = 8x[n] + 3x[n-1] - 2x[n-3]$

Φίλτρο FIR (εξάρτηση από εισόδους της ίδιας και προηγουμένων χρονικών στιγμών)

Τάξη M=3 και σταθεροί συντελεστές $b_0 = 8, b_1 = 3, b_2 = 0, b_3 = -2$ (συντελεστές τιμών εισόδου)

κρουστική απόκριση του FIR φίλτρου $\mathrm{h}[n] = [\underline{8}, 3, 0, -2]$

Ψηφιακά Φίλτρα

- Φίλτρο άπειρης κρουστικής απόκρισης IIR ή αυτοπαλινδρομούμενα φίλτρα κινητού μέσου όρου (Auto Regressive Moving Average –ARMA) ή αναδρομικό (recursive) τάξης $(\mathbf{N},\mathbf{M})$:

Περιγράφονται από την εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές:

$$y[n]=\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]-\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

❖ Στην **ειδική** περίπτωση όπου $\mathrm{M}=0$ και $b_0=1$ τα IIR φίλτρα ονομάζονται **αυτοπαλινδρομούμενα φίλτρα** (Auto Regressive – AR) τάξης $\mathbf{N}$

$$y[n]=x[n]-\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

❖ η έξοδος ενός IIR φίλτρου σε κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται από εξόδους του συστήματος τις προηγούμενες χρονικές στιγμές

❖ η εξίσωση διαφορών παρέχει τη δυνατότητα να περιγραφεί ένα σύστημα με κρουστική απόκριση άπειρης διάρκειας χρησιμοποιώντας ένα πεπερασμένο πλήθος συντελεστών

Ψηφιακά Φίλτρα

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

αρχικές συνθήκες εξόδου $y[-1], y[-2], \dots, y[-\mathrm{N}]$
αρχικές συνθήκες εισόδου $\mathrm{x}[0], \mathrm{x}[-1], x[-2], \dots, x[-\mathrm{M}]$
σταθεροί συντελεστές $a_k, k = 1,2, \dots, N$ και
$b_k, k = 0,1, \dots, M$

- Παράδειγμα : Εξίσωση διαφορών $y[n] = x[n] + 8y[n-1] - 3y[n-2]$

Φίλτρο IIR (AR)

(εξάρτηση από εξόδους των δύο προηγουμένων χρονικών στιγμών και την είσοδο της ίδιας)

$$y[n] = b_0 x[n-0] - (a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2])$$

Προσοχή!! $y[n] = x[n] + 8y[n-1] - 3y[n-2] = x[n] - (-8y[n-1] + 3y[n-2])$

Τάξη N=2 (M=0) και σταθεροί συντελεστές $b_0 = 1, \alpha_1 = -8, \alpha_2 = 3$ (συντελεστές τιμών εξόδου)

- Παράδειγμα : Εξίσωση διαφορών $y[n] = x[n] - x[n-1] + 8y[n-1] - 3y[n-2] - y[n-3]$

Φίλτρο IIR (ARMA)

(εξάρτηση από εισόδους της ίδιας και της προηγουμένης χρονικής στιγμής και εξόδους των τριών προηγουμένων χρονικών στιγμών) $y[n] = (x[n] - x[n-1]) - (-8y[n-1] + 3y[n-2] + 1y[n-3])$

Τάξη (N, M)=(3,1) και σταθεροί συντελεστές $b_0 = 1, b_1 = -1, \alpha_1 = -8, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 1$

Ψηφιακά Φίλτρα

- <u>Φίλτρο άπειρης κρουστικής απόκρισης IIR τάξης $(\mathbf{N}, \mathbf{M})$</u>:

Περιγράφονται από την εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

❖ Κρουστική απόκριση $\mathrm{h}[n]$ ενός φίλτρου άπειρης κρουστικής απόκρισης :

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k] - \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} a_k h[n-k]$$

❖ **Η κρουστική απόκριση ενός IIR φίλτρου είναι ένα σήμα άπειρης διάρκειας**. Αν η είσοδος στο φίλτρο είναι άπειρης διάρκειας, τότε και η απόκριση του φίλτρου είναι άπειρης διάρκειας.

Ψηφιακά Φίλτρα

- Επίλυση εξισώσεων διαφορών IIR φίλτρων:

εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

❖ **Επίλυση των εξισώσεων διαφορών** για IIR φίλτρα ονομάζεται ο υπολογισμός κλειστής μορφής των IIR φίλτρων, δηλαδή η εύρεση **μη επαναληπτικών τύπων για τον υπολογισμό της εξόδου του φίλτρου**, οπότε η έξοδος σε κάθε χρονική στιγμή υπολογίζεται απευθείας **γνωρίζοντας μόνο τον χρόνο, χωρίς να απαιτείται η γνώση προηγούμενων εξόδων.**

Ψηφιακά Φίλτρα

- Επίλυση εξισώσεων διαφορών IIR φίλτρων:

Για την επίλυση πρέπει να γνωρίζουμε την εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

και τις αρχικές συνθήκες $y[-1], y[-2], \ldots, y[-\mathrm{N}]$.

Η **γενική λύση $\boldsymbol{y[n]}$** της εξίσωσης διαφορών (η κλειστή μορφή της εξόδου) είναι το :

άθροισμα της ομογενούς λύσης $\boldsymbol{y_h[n]}$ και της ειδικής (μερικής) λύσης $\boldsymbol{y_p[n]}$

$$\boxed{y[n] = y_h[n] + y_p[n]}$$

Ψηφιακά Φίλτρα

- Επίλυση εξισώσεων διαφορών IIR φίλτρων:

Η ομογενής λύση $\boldsymbol{y_h[n]}$ (homogeneous solution) αντιστοιχεί στην **απόκριση** του συστήματος στις αρχικές συνθήκες για **μηδενική είσοδο** (**απόκριση μηδενικής εισόδου** $y_{zi}[n]$ ή φυσική απόκριση)

Υπολογίζεται λύνοντας την ομογενή εξίσωση διαφορών

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] \xrightarrow{\textit{zero input}:\ x[n]=0}$$

$$y_h[n] + \sum_{k=1}^{N} a_k y_h[n-k] = 0 \xrightarrow{\text{"θετω"}\ y_h[n]=z^n\text{, προσοχη στον εκθετη!}}$$

$$z^n + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{(n-k)} = 0 \rightarrow z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{N-1} z^{n-N-1} + a_N z^{n-N} = 0 \rightarrow$$

$$z^{n-N}\underline{(z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \cdots + a_{N-1} z + a_N)} = 0 \rightarrow$$

$$z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \cdots + a_{N-1} z + a_N = 0 \text{ χαρακτηριστική εξίσωση } f(z) = 0$$

με $f(z) = z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \cdots + a_{N-1} z + a_N$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο με N ρίζες

Ψηφιακά Φίλτρα

- <u>Επίλυση εξισώσεων διαφορών IIR φίλτρων</u>:

$$f(z) = z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \cdots + a_{N-1} z + a_N$$

χαρακτηριστικό πολυώνυμο

χαρακτηριστική εξίσωση $(f(z) = 0)$

$$z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \cdots + a_{N-1} z + a_N = 0 \rightarrow \text{N ρίζες } \boldsymbol{z_k, k = 1, 2, \ldots, N}$$

Η μορφή της ομογενούς λύσης $y_h[n]$ εξαρτάται από το είδος των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης (φυσικές συχνότητες)

❖ αν η χαρακτηριστική εξίσωση έχει απλές (διακεκριμένες) ρίζες, τότε η ομογενής λύση

$$y_h[n] = \sum_{k=1}^{N} A_k \cdot z_k^n \,, n \geq 0$$

❖ αν η χαρακτηριστική εξίσωση έχει κάποια πολλαπλή ρίζα z_1,με πολλαπλότητα m τότε η ομογενής λύση

$$y_h[n] = [A_1 + A_2 \cdot n + \cdots + A_m \cdot n^{m-1}] \cdot z_1^n + \sum_{k=m+1}^{N} A_k \cdot z_k^n \,, n \geq 0$$

❖ *Σε κάθε περίπτωση ο προσδιορισμός των συντελεστών A_k γίνεται λύνοντας ένα σύστημα N εξισώσεων με N αγνώστους (τους συντελεστές).*

❖ *Οι N εξισώσεις προκύπτουν από την εξίσωση της αρχικής εξίσωσης διαφορών με τη γενική λύση, αντικαθιστώντας σε αυτή την ισότητα τις αρχικές συνθήκες για n=0,1,…,N-1*

Ψηφιακά Φίλτρα

- Επίλυση εξισώσεων διαφορών IIR φίλτρων:

Η ειδική (ή μερική) λύση $y_p[n]$ (partial solution) αντιστοιχεί στην απόκριση του συστήματος στη συγκεκριμένη είσοδο για μηδενικές αρχικές συνθήκες (**απόκριση μηδενικής κατάσταση** $y_{zs}[n]$ ή εξαναγκασμένη απόκριση).

Η μερική λύση για δεδομένη είσοδο φαίνεται στον πίνακα :

Είσοδος	Μερική Λύση
c	c_1
$\boldsymbol{c \cdot \delta[n]}$	$\mathbf{0}$
$cu[n]$	c_1
$c \cdot n$	$c_1 \cdot n + c_2$
$c \cdot a^n$	$c_1 \cdot a^n$
$c \cdot \cos(\omega n)$	$c_1 \cdot \sin(\omega n) + c_2 \cdot \cos(\omega n)$
$c \cdot \sin(\omega n)$	$c_1 \cdot \sin(\omega n) + c_2 \cdot \cos(\omega n)$
$c \cdot a^n \cdot \cos(\omega n)$	$c_1 \cdot a^n \cdot \sin(\omega n) + c_2 \cdot a^n \cdot \cos(\omega n)$

❖ Όταν η είσοδος αποτελείται από άθροισμα τέτοιων εισόδων, τότε η μερική λύση αποτελείται από άθροισμα τέτοιων μερικών λύσεων.

Ψηφιακά Φίλτρα

- Επίλυση εξισώσεων διαφορών IIR φίλτρων:

❖ Στη περίπτωση που αναζητάμε την κρουστική απόκριση $h[n]$ θέτουμε στη ΓΕΔΣΣ ως είσοδο $x[n] = \delta[n]$ και

➢ εάν δίνονται αρχικές συνθήκες προχωράμε στην επίλυση σύμφωνα με τα γνωστά

➢ Εάν δεν δίνονται θα πρέπει να θεωρούνται μηδενικές οι αρχικές συνθήκες $y[n]$, δηλαδή το σύστημα είναι σε **κατάσταση αρχικής ηρεμίας**.

Όμως η εμφάνιση στην είσοδο μιας τόσο δραστικής ακολουθίας όπως η $\delta[n]$ δημιουργεί νέες αρχικές συνθήκες (ψευδο-αρχικές) στο σύστημα.

Η έξοδος στην περίπτωση αυτή, δηλαδή η **κρουστική απόκριση**, θα προκύψει από τη λύση της ομογενούς εξίσωσης (απόκριση μηδενικής εισόδου, δεν αναζητούμε $y_{zs}[n]$) για τις νέες αρχικές συνθήκες.

Επομένως, το πρόβλημα της εύρεσης της κρουστικής απόκρισης από τη ΓΕΔΣΣ ανάγεται

❖ στην εύρεση των νέων αρχικών συνθηκών για την h[n] εξαιτίας της ακολουθίας $\delta[n]$ και κατόπιν

❖ στην επίλυση της ομογενούς λύσης ώστε να βρεθεί η απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$, δηλαδή η τελική κρουστική απόκριση .

Ψηφιακά Φίλτρα

- Επίλυση εξισώσεων διαφορών IIR φίλτρων:

Παράδειγμα 1: Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του φίλτρου που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = x[n] + 2y[n-1] \text{ με αρχική συνθήκη } y[-1] = 0$$

- *Η γενική λύση* $y[n] = y_h[n] + y_p[n]$ του IIR-AR φίλτρο τάξης $\mathrm{N} = 1$

❖ κρουστική απόκριση φίλτρου είναι η απόκριση όταν η είσοδος $\boldsymbol{x[n] = \delta[n]}$. Άρα η μερική λύση (από τον πίνακα)

$$y_p[n] = 0$$

❖ Για την ομογενή λύση σχηματίζω την ομογενή εξίσωση διαφορών $y[n] - 2y[n-1] = 0$

και θέτω $y[n] = z^n$ *δηλαδή* $z^n - 2z^{n-1} = 0 \rightarrow z^{n-1}(z-2) = 0$

Η χαρακτηριστική εξίσωση $z - 2 = 0 \rightarrow 1$ *ριζα* $z_1 = 2$. *Άρα η ομογενής γράφεται* $y_h[n] = \mathrm{A} \cdot z_1^n = \mathrm{A} \cdot (2)^n$.

Άρα η γενική λύση $y[n] = y_h[n] + y_p[n] = \mathrm{A} \cdot (2)^n + 0 = \mathrm{A} \cdot (2)^n$

Ο συντελεστής A υπολογίζεται από την εξίσωση της αρχικής εξίσωσης διαφορών με τη γενική λύση.

Για $\mathrm{n} = 0$ $y[0] = x[0] + 2y[-1] = \delta[0] + 2 \cdot 0 = 1$ *Όμως από τη γενική λύση* $y[0] = \mathrm{A} \cdot (2)^0 = \mathrm{A}$

Άρα $\mathrm{A} = 1 \rightarrow$ *η γενική λύση* $y[n] = (2)^n, n \geq 0 \rightarrow$ ***κρουστικη αποκριση*** $\boldsymbol{h[n] = (2)^n \cdot u[n]}$

Ψηφιακά Φίλτρα

- Επίλυση εξισώσεων διαφορών IIR φίλτρων:

Παράδειγμα 1 (συνέχεια): Αν είχαμε διαφορετική αρχική συνθήκη $y[-1] = 2$ *τότε*

❖ *δεν αλλάζει τίποτα στην διαδικασία επίλυσης, εκτός από το συντελεστή A*

Ο συντελεστής A υπολογίζεται από την εξίσωση της αρχικής εξίσωσης διαφορών με τη γενική λύση.

Για $\mathrm{n} = 0$ $y[0] = x[0] + 2y[-1] = \delta[0] + 2 \cdot 2 = 5$ *Όμως από τη γενική λύση* $y[0] = \mathrm{A} \cdot (2)^0 = \mathrm{A}$

Άρα $\mathrm{A} = 5$ *η γενική λύση* $y[n] = 5(2)^n, n \geq 0 \rightarrow$ $\boldsymbol{\kappa\rho o\upsilon\sigma\tau\iota\kappa\eta\ \alpha\pi o\kappa\rho\iota\sigma\eta}$ $y[n] = 5(2)^n \cdot u[n]$

❖ η μεταβολή στην αρχική συνθήκη, δεν προκαλεί μεταβολή στη μορφή της λύσης (παραμένει εκθετική), αλλά προκαλεί μεταβολή μόνο στο πλάτος

Ψηφιακά Φίλτρα

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0 \to x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

- <u>Επίλυση εξισώσεων διαφορών IIR φίλτρων</u>:

<u>Παράδειγμα 2:</u> Να υπολογιστεί η βηματική απόκριση του φίλτρου που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{9}y[n-2] \text{ με αρχικές συνθήκες } y[-1] = 0, y[-2] = 0$$

- *Η γενική λύση* $y[n] = y_h[n] + y_p[n]$ του IIR-AR φίλτρο τάξης N =2

❖ **<u>βηματική απόκριση φίλτρου είναι η απόκριση όταν η είσοδος</u>** $\boldsymbol{x[n] = u[n]}$. Άρα η μερική λύση (από τον πίνακα)

$$y_p[n] = \mathrm{c}$$

Αντικαθιστώντας τη μερική λύση στην εξίσωσης διαφορών έχουμε

$$y_p[n] = x[n] + \frac{1}{9}y_p[n-2] \to c = 1 + \frac{1}{9}c \to \frac{8}{9}c = 1 \to c = \frac{9}{8} \to y_p[n] = \frac{9}{8}$$

❖ Για την ομογενή λύση σχηματίζω την ομογενή εξίσωση διαφορών $y[n] - \frac{1}{9}y[y-2] = 0$

και θέτω $y[n] = z^n$ *δηλαδή* $z^n - \frac{1}{9}z^{n-2} = 0 \to z^{n-2}\left(z^2 - \frac{1}{9}\right) = 0$

Η χαρακτηριστική εξίσωση $z^2 - \frac{1}{9} = 0$ →έχει 2 *διακεκριμενες ριζες* $z_1 = \frac{1}{3}, z_2 = -\frac{1}{3}$.

Ψηφιακά Φίλτρα

- Επίλυση εξισώσεων διαφορών IIR φίλτρων:

Παράδειγμα 2(συνέχεια):

Άρα η ομογενής γράφεται $y_h[n] = \mathrm{A}_1 \cdot z_1^n + \mathrm{A}_2 \cdot z_2^n = \mathrm{A}_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + \mathrm{A}_2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

Άρα η γενική λύση $y[n] = y_h[n] + y_p[n] = \mathrm{A}_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + \mathrm{A}_2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{9}{8}$

εξίσωση της αρχικής εξίσωσης διαφορών με τη γενική λύση και τις αρχικές συνθήκες → σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους → τους συντελεστές A_1 και A_2

- Για $\mathrm{n} = 0$ $y[0] = x[0] + \frac{1}{9} y[-2] = u[0] + \frac{1}{9} \cdot 0 = 1$

Όμως από τη γενική λύση $y[0] = \mathrm{A}_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 + \mathrm{A}_2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^0 + \frac{9}{8} = \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \frac{9}{8}$

Άρα $\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \frac{9}{8} = 1 \rightarrow \boxed{\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 = -\frac{1}{8}}$ (1)

Ψηφιακά Φίλτρα

- <u>Επίλυση εξισώσεων διαφορών IIR φίλτρων</u>:

<u>Παράδειγμα 2(συνέχεια):</u>

➢ Για $n=1\ \ y[1]=x[1]+\frac{1}{9}y[-1]=u[1]+\frac{1}{9}\cdot 0=1$

Όμως από τη γενική λύση $y[1]=A_1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1+A_2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^1+\frac{9}{8}=\frac{1}{3}A_1-\frac{1}{3}A_2+\frac{9}{8}$

Άρα $\frac{1}{3}A_1-\frac{1}{3}A_2+\frac{9}{8}=1\rightarrow\boxed{\frac{1}{3}A_1-\frac{1}{3}A_2=-\frac{1}{8}}$ (2)

(1),(2) σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους

$\begin{Bmatrix} A_1+A_2=-\frac{1}{8} \\ \frac{1}{3}A_1-\frac{1}{3}A_2=-\frac{1}{8}\end{Bmatrix}$ έχει λύση $\begin{Bmatrix} A_1=-\frac{1}{4} \\ A_2=\frac{1}{8}\end{Bmatrix}$ αρά η γενική λύση $y[n]$

$$y[n]=A_1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+A_2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{9}{8}=\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{8}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{9}{8},n\geq 0$$

$$y[n]=\left(\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{8}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{9}{8}\right)\cdot\mathrm{u}[n]$$

Ψηφιακά Φίλτρα

- Επίλυση εξισώσεων διαφορών IIR φίλτρων:

Παράδειγμα 3: Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του φίλτρου που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = x[n] - x[n-1] + \frac{3}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] \textit{με αρχικές συνθήκες } y[-1] = 0, y[-2] = 0$$

- *Η γενική λύση* $y[n] = y_h[n] + y_p[n]$ του IIR-ARMA φίλτρο τάξης $(\mathrm{N}, \mathrm{M}) = (2,1)$

κρουστική απόκριση φίλτρου είναι η απόκριση όταν η είσοδος $x[n] = \delta[n]$. Άρα η μερική λύση (από τον πίνακα)

$$y_p[n] = 0$$

Για την ομογενή λύση σχηματίζω την ομογενή εξίσωση διαφορών $y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 0$

και θέτω $y[n] = z^n$ *δηλαδή* $z^n - \frac{3}{4}z^{n-1} + \frac{1}{8}z^{n-2} = 0 \rightarrow z^{n-2}\left(z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}\right) = 0$

Η χαρακτηριστική εξίσωση $z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8} = 0 \rightarrow 2 \textit{ διακεκριμενες ριζες } z_1 = \frac{1}{2}, z_2 = \frac{1}{4}.$

Άρα η ομογενής γράφεται $y_h[n] = \mathrm{A}_1 \cdot z_1^n + \mathrm{A}_2 \cdot z_2^n = \mathrm{A}_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + \mathrm{A}_2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n.$

Ψηφιακά Φίλτρα

- Επίλυση εξισώσεων διαφορών IIR φίλτρων:

Παράδειγμα 3(συνέχεια):

Άρα η γενική λύση $y[n] = y_h[n] + y_p[n] = \mathrm{A}_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + \mathrm{A}_2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$

εξίσωση της αρχικής εξίσωσης διαφορών με τη γενική λύση και τις αρχικές συνθήκες → σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους → τους συντελεστές A_1 και A_2

- Για $\mathrm{n} = 0$ $y[0] = x[0] - x[-1] + \frac{3}{4}y[-1] - \frac{1}{8}y[-2] = \delta[0] - \delta[-1] + \frac{3}{4} \cdot 0 - \frac{1}{8} \cdot 0 = 1$

Όμως από τη γενική λύση $y[0] = \mathrm{A}_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \mathrm{A}_2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 = \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2$

Άρα $\boxed{\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 = 1}$ (1)

Ψηφιακά Φίλτρα

- Επίλυση εξισώσεων διαφορών IIR φίλτρων:

Παράδειγμα 3(συνέχεια):

➢ Για $n = 1$ $\quad y[1] = x[1] - x[0] + \frac{3}{4}y[0] - \frac{1}{8}y[-1] = \delta[1] - \delta[0] + \frac{3}{4}\cdot 1 - \frac{1}{8}\cdot 0 = -1 + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$

Όμως από τη γενική λύση $y[1] = \mathrm{A}_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \mathrm{A}_2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{1}{2}\mathrm{A}_1 + \frac{1}{4}\mathrm{A}_2$

Άρα $\boxed{\frac{1}{2}\mathrm{A}_1 + \frac{1}{4}\mathrm{A}_2 = -\frac{1}{4}}$ **(2)**

(1),(2) σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους

$\begin{cases} \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 = 1 \\ \frac{1}{2}\mathrm{A}_1 + \frac{1}{4}\mathrm{A}_2 = -\frac{1}{4} \end{cases}$ με λύση $\begin{cases} A_1 = -2 \\ A_2 = 3 \end{cases}$ αρά η γενική λύση $y[n]$

$$y[n] = A_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + A_2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n = (-2)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n, n \geq 0$$

$$y[n] = \left((-2)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)\cdot \mathrm{u}[n]$$

Ψηφιακά Φίλτρα

- Επίλυση εξισώσεων διαφορών IIR φίλτρων:

Παράδειγμα 4: Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του φίλτρου που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = x[n] - \frac{3}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2]$$

- Είναι IIR-ARMA φίλτρο τάξης $(\mathrm{N}, \mathrm{M}) = (2,1)$
- Στην εκφώνηση δεν υπάρχει αναφορά σε αρχικές συνθήκες.
- *Η γενική λύση* $y[n] = y_h[n] = h[n]$ της **κρουστικής** απόκρισης του φίλτρου είναι η απόκριση όταν η είσοδος $x[n] = \delta[n]$.
- Για την ομογενή λύση σχηματίζω την ομογενή εξίσωση διαφορών $y[n] + \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 0$

και θέτω $y[n] = z^n$ *δηλαδή* $z^n + \frac{3}{4}z^{n-1} + \frac{1}{8}z^{n-2} = 0 \rightarrow z^{n-2}\left(z^2 + \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}\right) = 0$

Η χαρακτηριστική εξίσωση $z^2 + \frac{3}{4}z + \frac{1}{8} = 0 \rightarrow 2\ \delta\iota\alpha\kappa\varepsilon\kappa\rho\iota\mu\varepsilon\nu\varepsilon\varsigma\ \rho\iota\zeta\varepsilon\varsigma\ z_1 = -\frac{1}{2}, z_2 = -\frac{1}{4}$.

Άρα η ομογενής γράφεται $y_h[n] = \mathrm{A}_1 \cdot z_1^n + \mathrm{A}_2 \cdot z_2^n = \mathrm{A}_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \mathrm{A}_2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^n$.

Ψηφιακά Φίλτρα

- Επίλυση εξισώσεων διαφορών IIR φίλτρων:

Παράδειγμα 4 (συνέχεια):

Άρα η γενική λύση $y[n] = h[n] = y_h[n] = A_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n + A_2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^n$

εξίσωση της αρχικής εξίσωσης διαφορών με τη γενική λύση και τις αρχικές συνθήκες → σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους → **τους συντελεστές** A_1 **και** A_2

Θεωρούμε συνθήκες **αρχικής ηρεμίας** δηλαδή $y[n] = h[n] = 0, n < 0$ και υπολογίζω αρχικές συνθήκες για την $h[n]$

- Για $n = 0$ $\quad y[n] + \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] \rightarrow h[n] + \frac{3}{4}h[n-1] + \frac{1}{8}h[n-2] = \delta[n] \rightarrow$

$$h[0] + \frac{3}{4}h[0-1] + \frac{1}{8}h[0-2] = \delta[0] \rightarrow h[0] + \cancelto{0}{\frac{3}{4}h[-1]} + \cancelto{0}{\frac{1}{8}h[-2]} = \delta[0] \rightarrow h[0] = 1$$

Όμως από τη γενική λύση $y[0] = h[0] = A_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^0 + A_2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^0 = A_1 + A_2$

Άρα $\boxed{A_1 + A_2 = 1}$ (1)

Ψηφιακά Φίλτρα

- <u>Επίλυση εξισώσεων διαφορών IIR φίλτρων</u>:

<u>Παράδειγμα 4 (συνέχεια):</u>

➢ Για $n = 1$ $\quad y[n] + \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] \rightarrow h[n] + \frac{3}{4}h[n-1] + \frac{1}{8}h[n-2] = \delta[n] \rightarrow$

$$h[1] + \frac{3}{4}h[1-1] + \frac{1}{8}h[1-2] = \delta[1] \rightarrow h[1] + \cancelto{1}{\frac{3}{4}h[0]} + \cancelto{0}{\frac{1}{8}h[-1]} = \cancelto{0}{\delta[1]} \rightarrow h[1] + \frac{3}{4} = 0 \rightarrow h[1] = -\frac{3}{4}$$

Όμως από τη γενική λύση $y[1] = \mathrm{A}_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^1 + \mathrm{A}_2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^1 = -\frac{1}{2}\mathrm{A}_1 - \frac{1}{4}\mathrm{A}_2$

Άρα $\boxed{-\frac{1}{2}\mathrm{A}_1 - \frac{1}{4}\mathrm{A}_2 = -\frac{3}{4}}$ **(2)**

(1),(2) σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους

$$\begin{Bmatrix} \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 = 1 \\ -\frac{1}{2}\mathrm{A}_1 - \frac{1}{4}\mathrm{A}_2 = -\frac{3}{4} \end{Bmatrix} \quad \text{με λύση} \begin{Bmatrix} A_1 = 2 \\ A_2 = -1 \end{Bmatrix}$$

αρά η γενική λύση $y[n]$ δηλαδή η κρουστική απόκριση $h[n]$

$$y[n] = A_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n + A_2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^n = (2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n + (-1) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^n, n \geq 0 \rightarrow y[n] = \left((2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n + (-1) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right) \cdot \mathrm{u}[n]$$

Ψηφιακά Φίλτρα

- Επίλυση εξισώσεων διαφορών IIR φίλτρων:

Παράδειγμα 5: Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του φίλτρου που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n]+5y[n-1]+6y[n-2]=x[n]+x[n-1]+x[n-2]$$

- IIR-ARMA φίλτρο τάξης $(\mathrm{N},\mathrm{M})=(2,2)$
- *Η γενική λύση* $y[n]=y_h[n]$ της **κρουστικής** απόκρισης του φίλτρου είναι η απόκριση όταν η είσοδος $x[n]=\delta[n]$.
- Για την ομογενή λύση σχηματίζω την ομογενή εξίσωση διαφορών $y[n]+5y[n-1]+6y[n-2]=0$

και θέτω $y[n]=z^n$ *δηλαδή* $z^n+5z^{n-1}+6z^{n-2}=0 \rightarrow z^{n-2}(z^2+5z+6)=0$

Η χαρακτηριστική εξίσωση $z^2+5z+6=0$ →έχει 2 διακεκριμένες ρίζες $z_1=-2, z_2=-3$.

Άρα η ομογενής γράφεται

$$y_h[n]=\mathrm{A}_1\cdot z_1^n+\mathrm{A}_2\cdot z_2^n=\mathrm{A}_1\cdot(-2)^n+\mathrm{A}_2\cdot(-3)^n$$

Ψηφιακά Φίλτρα

Αντί για το σύστημα

$$y[n]+5y[n-1]+6y[n-2]=x[n]+x[n-1]+x[n-2]$$

Θα θεωρήσω το απλούστερο

$$y[n]+5y[n-1]+6y[n-2]=x[n]$$

- Επίλυση εξισώσεων διαφορών IIR φίλτρων:

Παράδειγμα 5(συνέχεια):

Άρα η γενική λύση $y[n]=h[n]=y_h[n]=\mathrm{A}_1\cdot(-2)^n+\mathrm{A}_2\cdot(-3)^n$

εξίσωση της αρχικής εξίσωσης διαφορών με τη γενική λύση και τις αρχικές συνθήκες

→ σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους → **τους συντελεστές** A_1 **και** A_2

Θεωρούμε συνθήκες **αρχικής ηρεμίας** δηλαδή $y[n]=h[n]=0, n<0$

➢ Για $\mathrm{n}=0$ $y[n]=-5y[n-1]-6y[n-2]+x[n]\boxed{+x[n-1]+x[n-2]}$

$$\rightarrow h[n]=-5h[n-1]-6h[n-2]+\delta[n]$$

$$h[0]=-5h[0-1]-6h[0-2]+\delta[0]$$

$$h[0]=-5\underbrace{h[-1]}_{0}-6\underbrace{h[-2]}_{0}+\delta[0]=1$$

$$\boxed{h[0]=y[0]=1}$$

Όμως από τη γενική λύση $y[0]=h[0]=\mathrm{A}_1\cdot(-2)^0+\mathrm{A}_2\cdot(-3)^0=\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2$

Άρα $\boxed{\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2=1}$ (1)

Ψηφιακά Φίλτρα

- <u>Επίλυση εξισώσεων διαφορών IIR φίλτρων</u>:

<u>Παράδειγμα 5(συνέχεια):</u>

➢ Για n = 1 $y[n] = -5y[n-1] - 6y[n-2] + x[n] \boxed{+ x[n-1] + x[n-2]}$

$$\rightarrow h[n] = -5h[n-1] - 6h[n-2] + \delta[n]$$

$$h[1] = -5h[1-1] - 6h[1-2] + \delta[1]$$

$$h[1] = -5h[0] - 6\underbrace{h[-1]}_{0} + \underbrace{\delta[1]}_{0} = -5h[0] = -5$$

➢ *Όμως από τη γενική λύση* $y[1] = \mathrm{A}_1 \cdot (-2)^1 + \mathrm{A}_2 \cdot (-3)^1 = -2\mathrm{A}_1 - 3\mathrm{A}_2$

Άρα $\boxed{-2\mathrm{A}_1 - 3\mathrm{A}_2 = -5}$ **(2)**

(1),(2) σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους

$\begin{Bmatrix} \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 = 1 \\ -2\mathrm{A}_1 - 3\mathrm{A}_2 = -5 \end{Bmatrix}$ με λύση $\begin{Bmatrix} A_1 = -2 \\ A_2 = 3 \end{Bmatrix}$ αρά η λύση $\mathrm{h}[n]$ είναι

Όμως προσοχή τώρα θα πρέπει να θυμηθώ ότι δεν έχω πραγματικά το απλό σύστημα που θεώρησα……

$$\mathrm{h}[n] = A_1 \cdot (-2)^n + A_2 \cdot (-3)^n = (-2) \cdot (-2)^n + 3 \cdot (-3)^n, n \geq 0 \rightarrow$$

$$h[n] = \left((-2) \cdot (-2)^n + 3 \cdot (-3)^n\right) u[n]$$

Ψηφιακά Φίλτρα

- Επίλυση εξισώσεων διαφορών IIR φίλτρων:

Παράδειγμα 5(συνέχεια):

➢ Επειδή η εξάρτηση από την είσοδο είναι $y[n] + 5y[n-1] + 6y[n-2] = x[n] \boxed{+ x[n-1] + x[n-2]}$

Η τελική $h'[n]$ κρουστική απόκριση είναι

$$h'[n] = h[n] + h[n-1] + h[n-2]$$

$$h'[n] = \big((-2)\cdot(-2)^n + 3\cdot(-3)^n\big)u[n] \longleftarrow h[n]$$

$$+\big((-2)\cdot(-2)^{n-1} + 3\cdot(-3)^{n-1}\big)u[n-1] \longleftarrow h[n-1]$$

$$+\big((-2)\cdot(-2)^{n-2} + 3\cdot(-3)^{n-2}\big)u[n-2] \longleftarrow h[n-2]$$

$$h'[n] = \big((-2)^{n+1} - (-3)^{n+1}\big)u[n] + \big((-2)^n - (-3)^n\big)u[n-1] + \big((-2)^{n-1} - (-3)^{n-1}\big)u[n-2]$$

Ψηφιακά Φίλτρα

- Επίλυση εξισώσεων διαφορών IIR φίλτρων:

Σε περιπτώσεις σαν το Παράδειγμα 5 :

➢ Αν η εξίσωση ηταν της μορφής $y[n] + 5y[n-1] + 6y[n-2] = \boxed{4}x[n]$

Η τελική $h'[n]$ κρουστική απόκριση θα ήταν

$$h'[n] = 4h[n] = 4\big((-2)\cdot(-2)^n + 3\cdot(-3)^n\big)u[n]$$

➢ Αν η εξίσωση ηταν της μορφής $y[n] + 5y[n-1] + 6y[n-2] = 4x[n]\boxed{+5x[n-2] - 3x[n-3]}$

Η τελική $h'[n]$ κρουστική απόκριση θα ήταν

$$h'[n] = 4h[n] + 5h[n-2] - 3h[n-3]$$
$$= 4\big((-2)\cdot(-2)^n + 3\cdot(-3)^n\big)u[n]$$
$$+5\big((-2)\cdot(-2)^{n-2} + 3\cdot(-3)^{n-2}\big)u[n-2]$$
$$-3\big((-2)\cdot(-2)^{n-3} + 3\cdot(-3)^{n-3}\big)u[n-3]$$

Ψηφιακά Φίλτρα

- Επίλυση εξισώσεων διαφορών IIR φίλτρων:

Άσκηση 1 : Σύστημα περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών $y[n] = x[n] - \frac{5}{6}y[n-1] - \frac{1}{6}y[n-2]$ *με αρχικές συνθήκες* $y[-1] = 0, y[-2] = 0$

Αφου χαρακτηρίσετε το φίλτρο να βρείτε την κρουστική απόκριση του.

Άσκηση 2 : LTI Σύστημα περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών $y[n] = x[n] + 2x[n-1] - \frac{2}{3}y[n-1] - \frac{1}{9}y[n-2]$. Βρείτε την κρουστική του απόκριση.

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος & Εικόνας

Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών

Α. Μπακλέζος

abaklezos@hmu.gr