

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος & Εικόνας

Μάθημα 20^ο

Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών

Φίλτρα IIR

A. Μπακλέζος

abaklezos@hmu.gr

Φίλτρα άπειρης κρουστικής απόκρισης (IIR)

- Αναπαράσταση LTI συστημάτων με γραμμικές εξισώσεις διαφορών

Κάθε γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα (LTI) περιγράφεται από μία γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k]$$

με αρχικές συνθήκες εξόδου $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$ και με αρχικές συνθήκες εισόδου $x[0], x[-1], x[-2], \dots, x[-N]$

και σταθερούς (ανεξάρτητους του n) συντελεστές $a_k, k = 1, 2, \dots, N$ και $b_k, k = 0, 1, \dots, M$

- Κρουστική απόκριση $h[n]$ ενός φίλτρου άπειρης κρουστικής απόκρισης :

$$h[n] = \sum_{k=0}^M b_k \delta[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k h[n-k]$$

Φίλτρα άπειρης κρουστικής απόκρισης (IIR)

Η ρητή συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ μπορεί να γραφτεί ως :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = A \frac{\prod_{k=0}^M (1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=0}^N (1 - p_k z^{-1})} = b_o z^{N-M} \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_M)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_N)}$$

Με z_1, z_1, \dots, z_M τα M μηδενικά (zeros) και p_1, p_2, \dots, p_N οι N πόλοι (poles) της συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$.

Τάξη: ο μεγαλύτερος αριθμός των προηγούμενων εισαγόμενων και εξαγόμενων τιμών που απαιτούνται για να υπολογιστεί η τρέχουσα έξοδος. Επειδή πρέπει $N \geq M$ για να είναι το φίλτρο αιτιατό, η τάξη του αναδρομικού φίλτρου προσδιορίζεται από τον όρο N .

Σχεδίαση:

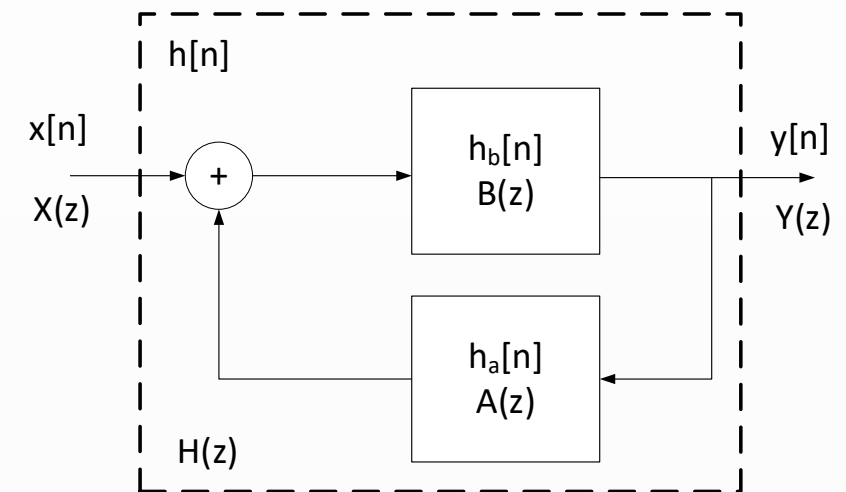
Γνωστές «προδιαγραφές», δηλαδή η απαιτούμενη απόκριση στη συχνότητα

→ ζητείται ο υπολογισμός των συντελεστών a_k, b_k

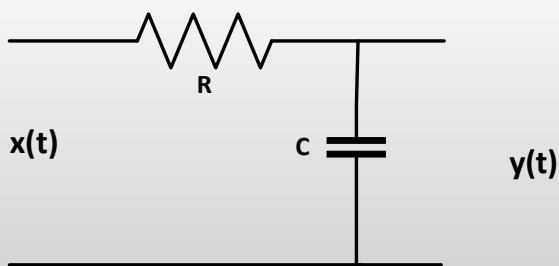
Φίλτρα άπειρης κρουστικής απόκρισης (IIR)

- Διαθέτουν κρουστική απόκριση **άπειρης διάρκειας**.
- Είναι **αναδρομικά** (recursive) : δείγματα της εξόδου χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των νέων τιμών της εξόδου σε επόμενες χρονικές στιγμές.

- Γενικό διάγραμμα αναδρομικού (IIR) συστήματος



- Το πιο απλό παράδειγμα **αναλογικού φίλτρου IIR** είναι ένα RC φίλτρο το οποίο αποτελείται από μια αντίσταση και έναν πυκνωτή :



$$H(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}, \omega_c = \frac{1}{RC}, \text{ συνάρτηση μεταφοράς}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}, \omega_c = \frac{1}{RC}, \text{ Απόκριση συχνότητας}$$

Φίλτρα άπειρης κρουστικής απόκρισης (IIR)

- Λόγω της αναδρομικότητας **φαίνεται** ότι τα φίλτρα IIR **απαιτούν περισσότερους υπολογισμούς**, επειδή υπάρχουν προηγούμενοι εξαγόμενοι όροι στην έκφραση του φίλτρου, όπως και εισαγόμενοι όροι.
- Στην πραγματικότητα **ισχύει το αντίθετο** :
 - για να επιτευχθεί μια επιθυμητή απόκριση συχνότητας με ένα φίλτρο IIR, γενικά απαιτείται **χαμηλότερη τάξη φίλτρου**, και συνεπώς **λιγότεροι όροι** που πρέπει να υπολογιστούν από τον επεξεργαστή, σε σύγκριση με ένα FIR φίλτρο.

Μειονεκτήματα IIR φίλτρων

- Μπορούν να καταστούν **ασταθή** αν οι συντελεστές τους δεν έχουν επιλεγεί σωστά, δηλαδή αν έστω και ένας πόλος της συνάρτησης μεταφοράς βρεθεί εκτός του μοναδιαίου κύκλου.
- **Δεν έχουν γραμμική απόκριση φάσης** στη ζώνη διέλευσης, όπως συμβαίνει στα FIR φίλτρα με συμμετρική ή αντισυμμετρική κρουστική απόκριση.

Γενική μέθοδος σχεδίασης απλών IIR φίλτρων

Για πολύ απλά φίλτρα :

Κατάλληλη τοποθέτηση πόλων και μηδενικών στο πεδίο z ώστε να λάβουμε την επιθυμητή απόκριση συχνότητας

- ❖ Εάν ένα μηδενικό z_i βρίσκεται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο τότε το $|H(e^{j\omega})| = 0$ για $\omega = \angle z_i$
 - ❖ Ένα μηδενικό πολύ κοντά στο μοναδιαίο κύκλο οδηγεί την απόκριση συχνότητας να λάβει πολύ μικρές τιμές για τιμές της συχνότητας κοντά στο συγκεκριμένο μηδενικό.
- ❖ Εάν ένας πόλος p_i βρίσκεται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο τότε το $|H(e^{j\omega})| = \infty$ για $\omega = \angle p_i$
 - ❖ Ένας πόλος πολύ κοντά στο μοναδιαίο κύκλο οδηγεί την απόκριση συχνότητας να λάβει πολύ μεγάλες τιμές για τιμές της συχνότητας κοντά στο συγκεκριμένο πόλο.
- ❖ Για να είναι πραγματικοί οι συντελεστές \rightarrow πόλοι και ρίζες πρέπει να είναι είτε πραγματικοί ή μιγαδικοί συζυγείς
- ❖ Για την απόσταση (r) ενός πόλου από το κέντρο του μοναδιαίου κύκλου ισχύει η ακόλουθη εμπειρική σχέση:

$$r \approx 1 - \frac{BW_{3dB}}{F_s} \pi, \quad 0.9 \leq r < 1$$

όπου BW_{3dB} είναι το αποδεκτό εύρος ζώνης του φίλτρου στα 3 dB και F_s είναι η συχνότητα δειγματοληψίας.

Γενική μέθοδος σχεδίασης απλών IIR φίλτρων

Για πολύ απλά φίλτρα :

Ένα αιτιατό χαμηλοπερατό IIR φίλτρο έχει συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(z) = \frac{1-a}{2} \left(\frac{1+z^{-1}}{1-az^{-1}} \right) = \frac{1-a}{2} \left(\frac{z+1}{z-a} \right), |a| < 1 \text{ λόγω ευστάθειας}$$

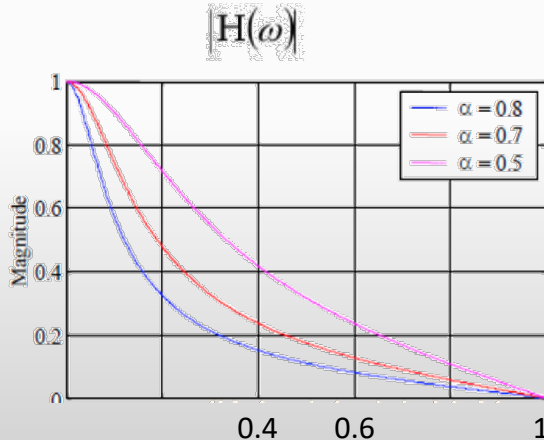
Έχει 1 μηδενικό στο $z = -1$ δηλαδή στο $\omega = \pi$

Έχει ένα πραγματικό πόλο στο $z = a$

Η μέγιστη τιμή της απόκρισης πλάτους είναι 1 στο $\omega=0$ και η ελάχιστη είναι 0 στο $\omega=\pi$:

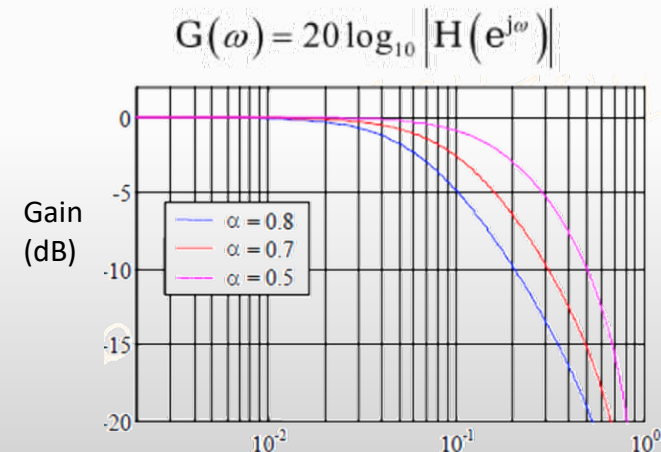
$$|H(e^{j0})| = 1, |H(e^{j\pi})| = 0 \rightarrow \text{LPF}$$

$$\text{Επιλογή τιμής του } a \text{ για δεδομένη συχνότητα αποκοπής 3dB } \omega_c \quad a = \frac{1 - \sin \omega_c}{\cos \omega_c}$$



Εύρεση συχνότητας
αποκοπής 3dB για γνωστό a

$$\cos \omega_c = \frac{2a}{1+a^2}$$



Γενική μέθοδος σχεδίασης απλών IIR φίλτρων

Για πολύ απλά φίλτρα :

Ένα αιτιατό χαμηλοπερατό IIR φίλτρο έχει συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(z) = \frac{1-a}{2} \left(\frac{1+z^{-1}}{1-az^{-1}} \right) = \frac{1-a}{2} \left(\frac{z+1}{z-a} \right), |a| < 1 \text{ λόγω ευστάθειας}$$

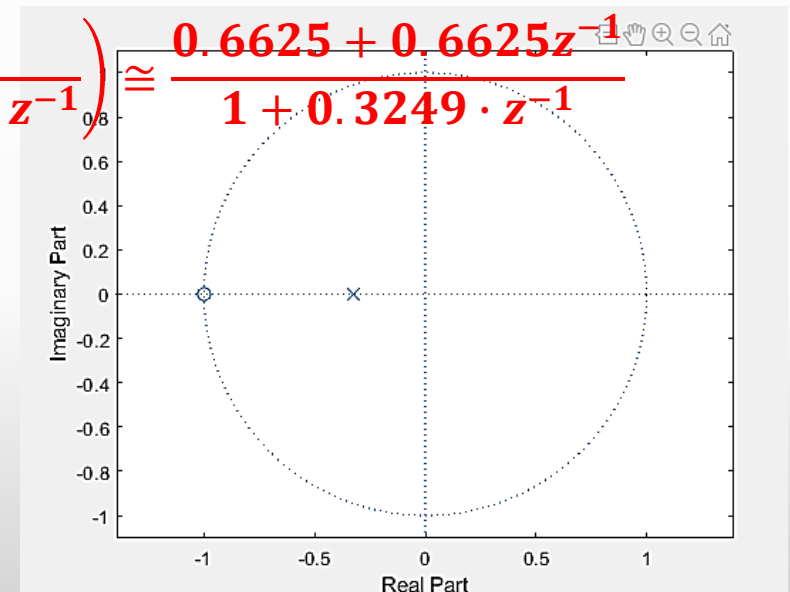
Για παράδειγμα έστω ότι θέλουμε χαμηλοπερατό φίλτρο με $\omega_c = 0.7$. Τότε

$$a = \frac{1 - \sin \omega_c}{\cos \omega_c} = \frac{1 - \sin(0.7\pi)}{\cos(0.7\pi)} \approx -0.3249 \rightarrow$$

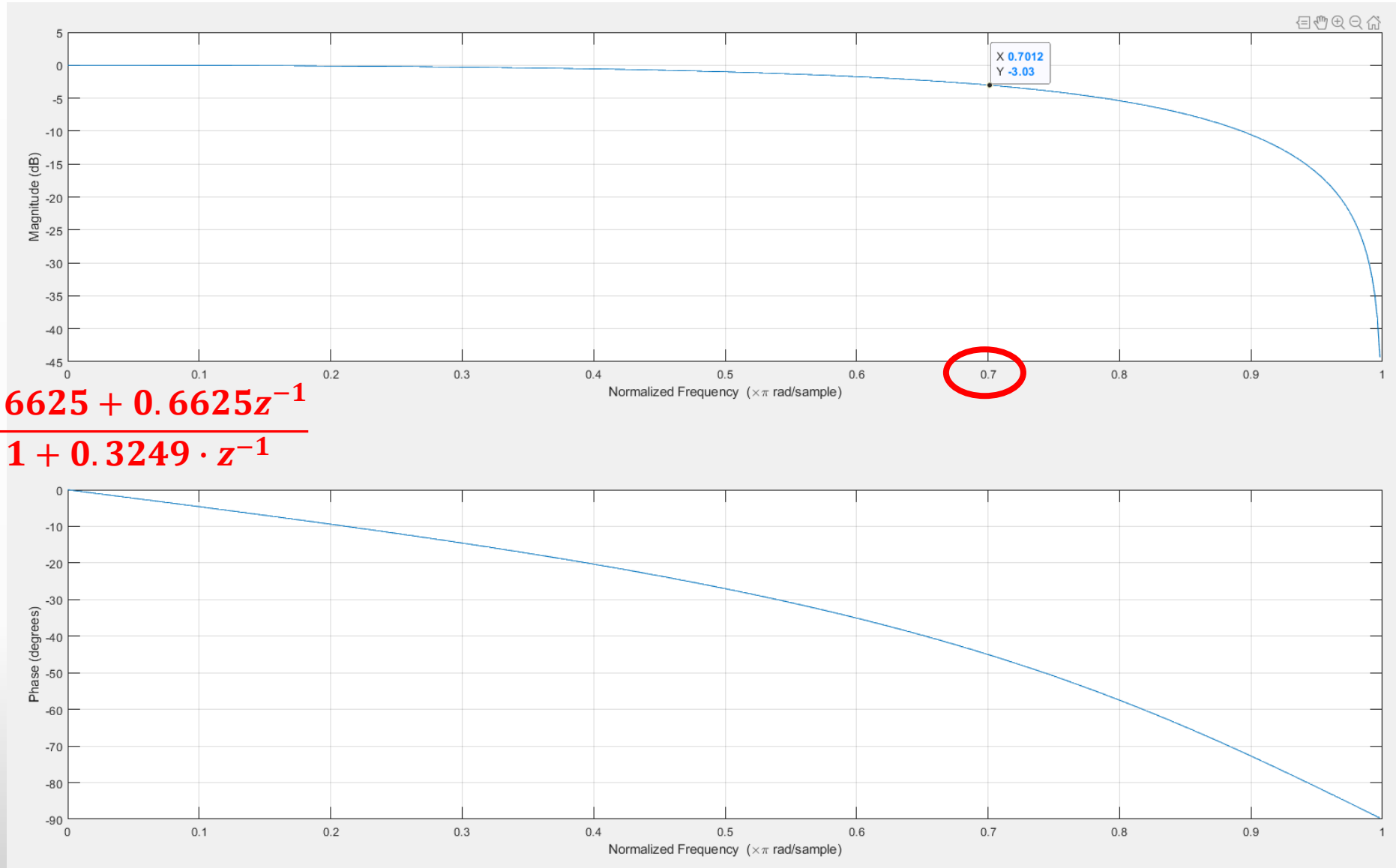
$$H(z) \cong \frac{1 - (-0.3249)}{2} \left(\frac{1 + z^{-1}}{1 - (-0.3249)z^{-1}} \right) = \frac{1.3249}{2} \left(\frac{1 + z^{-1}}{1 + 0.3249 \cdot z^{-1}} \right) \cong \frac{0.6625 + 0.6625z^{-1}}{1 + 0.3249 \cdot z^{-1}}$$

Εξίσωση διαφορών

$$y[n] \cong 0.6625 \cdot x[n] + 0.6625 \cdot x[n-1] - 0.3249 \cdot y[n-1]$$



Γενική μέθοδος σχεδίασης απλών IIR φίλτρων



$$H(z) \cong \frac{0.6625 + 0.6625z^{-1}}{1 + 0.3249 \cdot z^{-1}}$$

Γενική μέθοδος σχεδίασης απλών IIR φίλτρων

Για πολύ απλά φίλτρα :

Ένα αιτιατό υψιπερατό IIR φίλτρο έχει συνάρτηση μεταφοράς

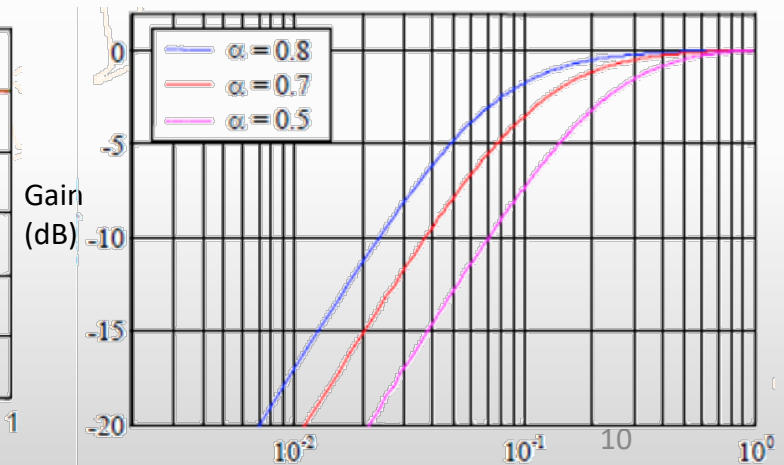
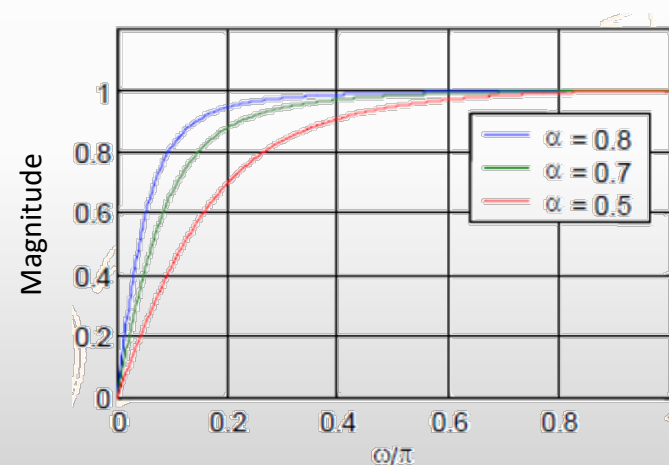
$$H(z) = \frac{1+a}{2} \left(\frac{1-z^{-1}}{1-az^{-1}} \right) = \frac{1+a}{2} \left(\frac{z-1}{z-a} \right), |a| < 1 \text{ λόγω ευστάθειας}$$

Έχει 1 μηδενικό στο $z = 1$ δηλαδή στο $\omega = 0$

Έχει ένα πραγματικό πόλο στο $z = a$

$$\text{Επιλογή τιμής του } a \text{ για δεδομένη συχνότητα αποκοπής 3dB } \omega_c \quad a = \frac{1 - \sin \omega_c}{\cos \omega_c}$$

- ❖ Θα μπορούσαμε να δημιουργήσουμε ένα HPF αν στο LPF βάζαμε $-z$ στη θέση του z
- ❖ Η συνάρτηση μεταφοράς που θα προέκυπτε θα ήταν λίγο διαφορετική



Γενική μέθοδος σχεδίασης απλών IIR φίλτρων

Παράδειγμα : HPF φίλτρο με προδιαγραφές με συχνότητα αποκοπής 0.8π

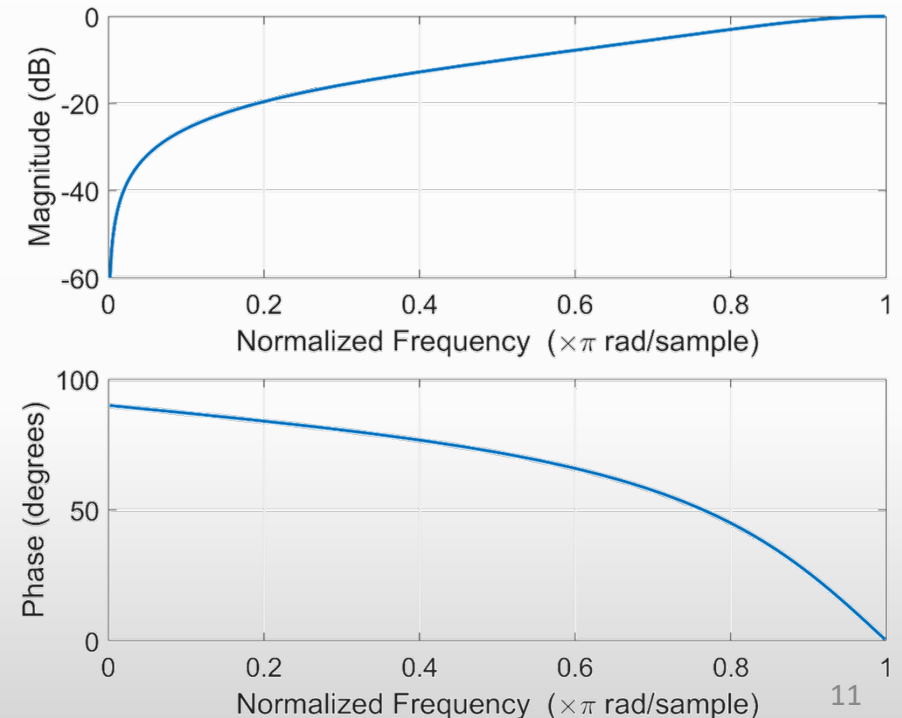
$$H(z) = \frac{1+a}{2} \left(\frac{1-z^{-1}}{1-az^{-1}} \right) = \frac{1+a}{2} \left(\frac{z-1}{z-a} \right), |a| < 1 \text{ λόγω ευστάθειας}$$

α για δεδομένη συχνότητα αποκοπής 3dB 0.8π $a = \frac{1-\sin\omega_c}{\cos\omega_c} = \frac{1-\sin(0.8\pi)}{\cos(0.8\pi)} = \frac{1-0.587785}{-0.80902} = -0.5095245$

$$H(z) = \frac{1+a}{2} \left(\frac{1-z^{-1}}{1-az^{-1}} \right) = 0.245238 \cdot \left(\frac{1-z^{-1}}{1+0.5095245 \cdot z^{-1}} \right)$$

Εξίσωση διαφορών

$$y[n] = 0.245238 \cdot x[n] - 0.245238 \cdot x[n-1] - 0.5095245 \cdot y[n-1]$$



Γενική μέθοδος σχεδίασης απλών IIR φίλτρων

$$r \approx 1 - \frac{BW}{f_s} \pi \rightarrow BW \approx \left(\frac{1-r}{\pi} \right) f_s$$

Παράδειγμα : Ζωνοπερατό φίλτρο IIR με προδιαγραφές:

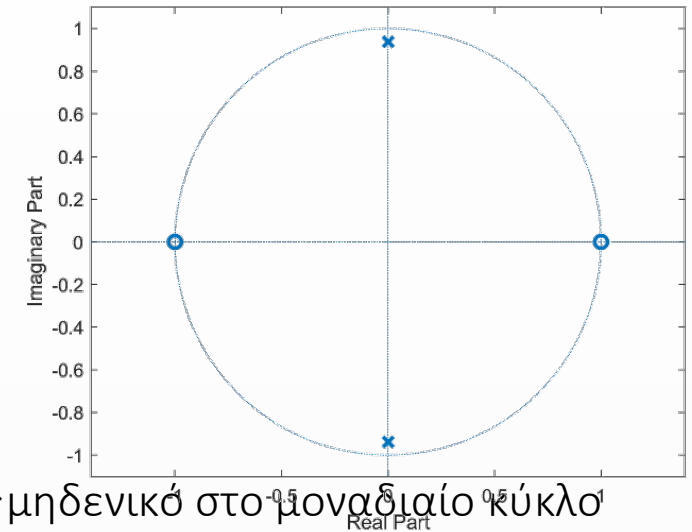
- (1) απόρριψη σήματος σε DC και 250Hz (2) ζώνη διάβασης με κέντρο 125Hz
- (2) εύρος ζώνης BW_{3dB} : 10Hz (4) $f_s = 500\text{Hz}$

Τοποθέτηση πόλων – ριζών:

- Απόρριψη σε 0Hz \rightarrow Απόρριψη στην ψηφιακή συχνότητα $\omega = 2\pi \frac{f}{f_s} = 2\pi \frac{0}{500} = 0 \rightarrow$ μηδενικό στο μοναδιαίο κύκλο στο $e^{j0} \rightarrow (1,0)$
- Απόρριψη σε 250Hz $\rightarrow \omega = 2\pi \frac{f}{f_s} = 2\pi \frac{250}{500} = \pi \rightarrow$ μηδενικό στο μοναδιαίο κύκλο στο $e^{j\pi} \rightarrow (-1,0)$ ($\omega=\pi$)
- Κέντρο Ζώνης Διέλευσης 125Hz , $\omega = 2\pi \frac{f}{f_s} = 2\pi \frac{125}{500} = \pi/2 \rightarrow$ πόλος σε γωνία $2\pi^\circ \cdot 125/500 = \pi/2$

Ακτίνα πόλου $r \approx 1 - \frac{BW}{f_s} \pi = 1 - \frac{10}{500} \pi \approx 0.937$.

Όμως ο πόλος φανταστικός άρα θα πρέπει να μπει και ο συζυγής, ώστε να έχω πραγματικούς συντελεστές. Άρα 2ος πόλος σε γωνία $-\pi/2$



Γενική μέθοδος σχεδίασης απλών IIR φίλτρων

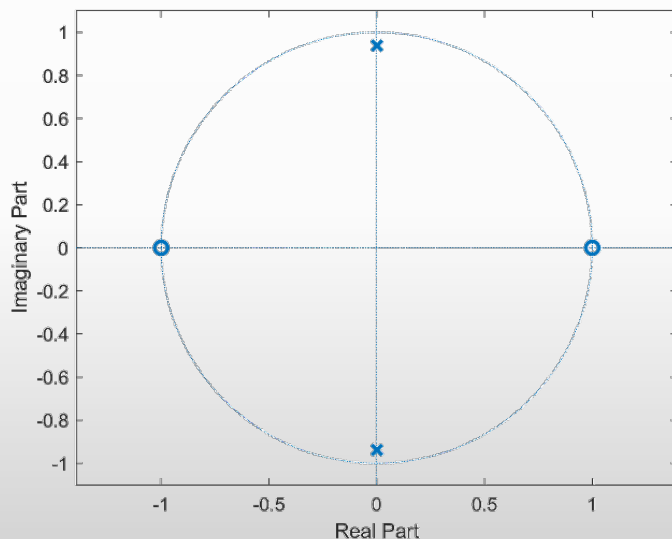
Παράδειγμα : Ζωνοπερατό φίλτρο IIR με προδιαγραφές:

- (1) απόρριψη σήματος σε DC και 250Hz (2) ζώνη διάβασης με κέντρο 125Hz
(2) εύρος ζώνης BW_{3dB} : 10Hz (4) $f_s = 500\text{Hz}$

Τοποθέτηση πόλων – ριζών:

$$\text{Συνάρτηση μεταφοράς } H(z) = \frac{(z-1)(z+1)}{(z-re^{j\frac{\pi}{2}})(z-re^{-j\frac{\pi}{2}})} = \frac{z^2-1}{z^2+r^2} \cong \frac{z^2-1}{z^2+0.877969} = \frac{1-z^{-2}}{1+0.877969 \cdot z^{-2}}$$

$$\text{Εξίσωση διαφορών } y[n] \cong x[n] - x[n-2] - 0.877969 \cdot y[n-2]$$

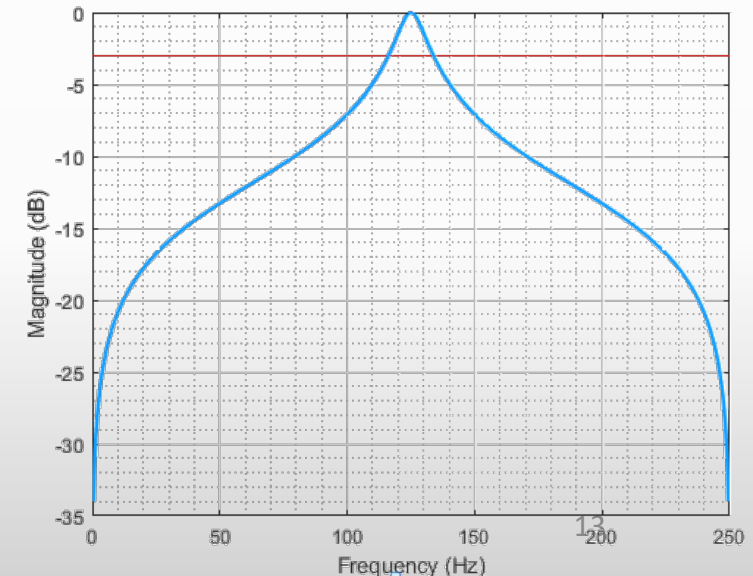


Συντελεστές Φίλτρου :

$$b_o = 1 \quad a_o = 1$$

$$b_1 = 0 \quad a_1 = 0$$

$$b_2 = -1 \quad a_2 \cong 0.877969$$



Γενική μέθοδος σχεδίασης απλών IIR φίλτρων

$$r \approx 1 - \frac{BW}{f_s} \pi \rightarrow BW \approx \left(\frac{1-r}{\pi} \right) f_s$$

Παράδειγμα : Ζωνοπερατό φίλτρο IIR με προδιαγραφές:

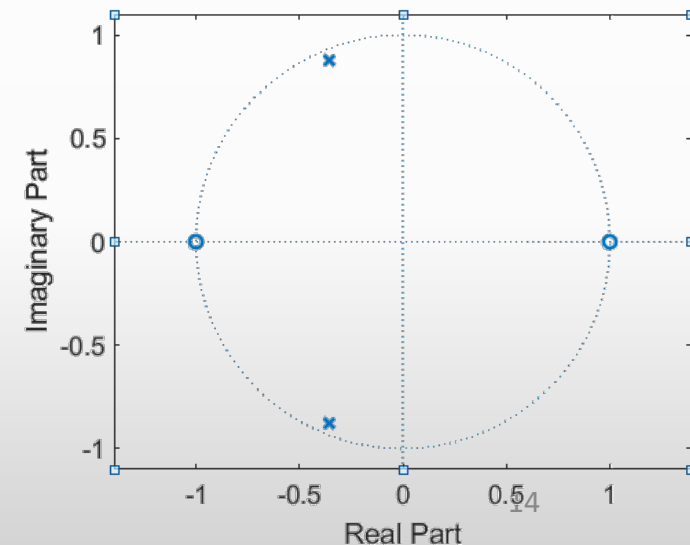
- (1) απόρριψη σήματος σε DC και $5kHz$ (2) ζώνη διάβασης με κέντρο $3kHz$
- (3) $f_s = 10kHz$

Τοποθέτηση πόλων – ριζών:

- Απόρριψη σε $0Hz \rightarrow$ Απόρριψη στην ψηφιακή συχνότητα $\omega = 2\pi \frac{f}{f_s} = 2\pi \frac{0}{10000} = 0 \rightarrow$ μηδενικό στο μοναδιαίο κύκλο στο $e^{j0} \rightarrow (1,0)$
- Απόρριψη σε $5kHz \rightarrow \omega = 2\pi \frac{f}{f_s} = 2\pi \frac{5000}{10000} = \pi \rightarrow$ μηδενικό στο μοναδιαίο κύκλο στο $e^{j\pi} \rightarrow (-1,0)$ ($\omega=\pi$)
- Κέντρο Ζώνης Διέλευσης $3kHz$, $\omega = 2\pi \frac{f}{f_s} = 2\pi \frac{3000}{10000} = 3\pi/5 \rightarrow$ πόλοι σε γωνίες $\pm \pi \cdot 3/5$

Ακτίνα πόλων $r \approx 1 - \frac{BW}{f_s} \pi = 1 - \frac{160}{10000} \pi \approx 0.95$

$$\begin{aligned} \text{Συνάρτηση μεταφοράς } H(z) &= \frac{(z-1)(z+1)}{(z-re^{j\frac{3\pi}{5}})(z-re^{-j\frac{3\pi}{5}})} = \frac{z^2-1}{z^2-zre^{j\frac{3\pi}{5}}-zre^{-j\frac{3\pi}{5}}+r^2} = \frac{z^2-1}{z^2-zr(e^{j\frac{3\pi}{5}}+e^{-j\frac{3\pi}{5}})+r^2} = \\ &= \frac{z^2-1}{z^2-2zr\cos\left(\frac{3}{5}\pi\right)+r^2} = \frac{1-z^{-2}}{1-2z^{-1}r\cos\left(\frac{3}{5}\pi\right)+r^2z^{-2}} = \end{aligned}$$



Γενική μέθοδος σχεδίασης απλών IIR φίλτρων

$$r \approx 1 - \frac{BW}{f_s} \pi \rightarrow BW \approx \left(\frac{1-r}{\pi} \right) f_s$$

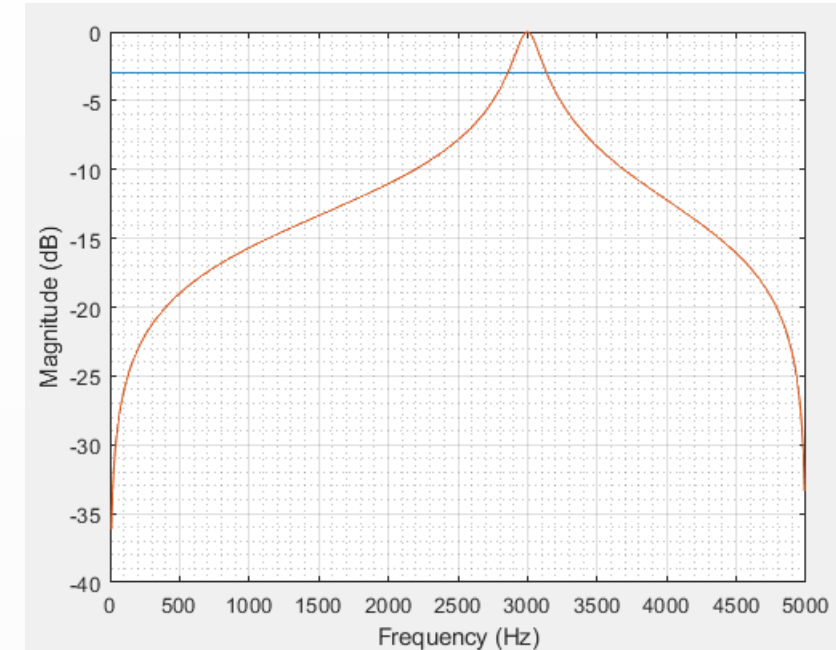
Παράδειγμα : Ζωνοπερατό φίλτρο IIR με προδιαγραφές:

- (1) απόρριψη σήματος σε DC και $5kHz$ (2) ζώνη διάβασης με κέντρο $3kHz$
- (3) $f_s = 10kHz$

Τοποθέτηση πόλων – ριζών:

$$\text{Συνάρτηση μεταφοράς } H(z) = \frac{1-z^{-2}}{1-2r\cos\left(\frac{3}{5}\pi\right)z^{-1}+r^2z^{-2}} = \frac{1-z^{-2}}{1+0.5871 \cdot z^{-1}+0.9025 \cdot z^{-2}}$$

$$\text{Εξίσωση διαφορών } y[n] \cong x[n] - x[n-2] - 0.5871 \cdot y[n-1] - 0.9025 \cdot y[n-2]$$



Συντελεστές Φίλτρου :

$$\begin{array}{ll} b_0 = 1 & a_0 = 1 \\ b_1 = 0 & a_1 \cong 0.5871 \\ b_2 = -1 & a_2 \cong 0.9025 \end{array}$$

Σχεδίαση IIR φίλτρων μέσω πρότυπου αναλογικού φίλτρου

Για το σχεδιασμό ενός IIR φίλτρου θα στηριχτούμε, ως ενδιάμεσο βήμα, σε ένα πρότυπο αναλογικό φίλτρο.

Συγκεκριμένα ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- Μετατρέπουμε τις αρχικές ψηφιακές προδιαγραφές σε αναλογικές.
- Προσδιορίζουμε το πρότυπο βαθυπερατό αναλογικό φίλτρο που ικανοποιεί τις προδιαγραφές.
- Μετατρέπουμε το αναλογικό φίλτρο σε ψηφιακό μέσω κατάλληλης μιγαδικής απεικόνισης (complex valued mapping) της αναλογικής μιγαδικής συχνότητας s στην ψηφιακή μιγαδική συχνότητα z .

Η σχεδίαση ψηφιακού φίλτρου μέσω αναλογικού χρησιμοποιείται επειδή:

- Οι τεχνικές σχεδίασης αναλογικών φίλτρων είναι ευρέως μελετημένες και συνήθως καταλήγουν σε λύσεις κλειστής μορφής.
- Στη βιβλιογραφία διατίθενται έτοιμοι πίνακες για τη σχεδίαση αναλογικών φίλτρων (αλλά μόνο για βαθυπερατά φίλτρα).
- Διατίθενται πίνακες μετατροπής της αναλογικής μιγαδικής συχνότητας στην ψηφιακή μιγαδική συχνότητα.

Σχεδίαση IIR φίλτρων μέσω πρότυπου αναλογικού φίλτρου

Για το σχεδιασμό ενός IIR φίλτρου θα στηριχτούμε, ως ενδιάμεσο βήμα, σε ένα πρότυπο αναλογικό φίλτρο.

Συγκεκριμένα ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- Μετατρέπουμε τις αρχικές ψηφιακές προδιαγραφές σε αναλογικές.
 - Προσδιορίζουμε το πρότυπο βαθυπερατό αναλογικό φίλτρο που ικανοποιεί τις προδιαγραφές.
 - Μετατρέπουμε το αναλογικό φίλτρο σε ψηφιακό μέσω κατάλληλης μιγαδικής απεικόνισης (complex valued mapping) της αναλογικής μιγαδικής συχνότητας s στην ψηφιακή μιγαδική συχνότητα z .
- Έτσι, η σχεδίαση ενός ψηφιακού φίλτρου ανάγεται ουσιαστικά στη σχεδίαση του κατάλληλου αναλογικού φίλτρου και στην μετέπειτα μετάβαση από τη $H(s)$ στη $H(z)$, έτσι ώστε τα επιθυμητά χαρακτηριστικά του αναλογικού φίλτρου να διατηρούνται κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

Σχεδίαση IIR φίλτρων μέσω πρότυπου αναλογικού φίλτρου

Μεθοδολογία σχεδίασης ψηφιακού φίλτρου επιλογής συχνοτήτων από αναλογικό χαμηλοπερατό φίλτρο :

Τρόπος Α' :

- Σχεδίαση του πρότυπου βαθυπερατού αναλογικού φίλτρου
- Μετασχηματισμός του πρότυπου βαθυπερατού αναλογικού φίλτρου στην κατάλληλη ζώνη συχνοτήτων λειτουργίας ($s \rightarrow s$)
- Μετατροπή του πρότυπου αναλογικού φίλτρου σε ψηφιακό ($s \rightarrow z$)

Τρόπος Β' :

- Σχεδίαση του πρότυπου βαθυπερατού αναλογικού φίλτρου
- Μετατροπή του πρότυπου αναλογικού φίλτρου σε ψηφιακό ($s \rightarrow z$)
- Μετασχηματισμός του πρότυπου βαθυπερατού ψηφιακού φίλτρου στην κατάλληλη ζώνη συχνοτήτων λειτουργίας ($z \rightarrow z$)

Οι προσεγγίσεις αυτές δεν προσφέρουν πλήρη δυνατότητα ελέγχου στη **φάση** του IIR φίλτρου.

Θα δούμε τον πρώτο τρόπο σχεδίασης, για τον οποίο το Matlab προσφέρει αρκετές έτοιμες συναρτήσεις.

Σχεδίαση IIR φίλτρων μέσω πρότυπου αναλογικού φίλτρου

Προσεγγίσεις για τη μετατροπή του πρότυπου αναλογικού φίλτρου σε ψηφιακό:

- Μέθοδος αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης
(impulse invariance transformation)
- Μέθοδος διγραμμικού μετασχηματισμού
(Bilinear transformation)

Άλλες τεχνικές στις οποίες η σχεδίαση γίνεται απευθείας στο επίπεδο της μιγαδικής συχνότητας z , όπως η μέθοδος προσεγγίσεων Pade, η μέθοδος Prony ή η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων για την επίλυση ενός συνόλου γραμμικών ή μη-γραμμικών εξισώσεων.

Σχεδίαση IIR φίλτρων μέσω πρότυπου αναλογικού φίλτρου

Πρότυπα Βαθυπερατά Αναλογικά Φίλτρα :

Το τετραγωνισμένο πλάτος της απόκρισης συχνότητας ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\frac{1}{1 + \varepsilon^2} \leq |H(j\Omega)|^2 \leq 1, \quad |\Omega| \leq \Omega_p$$

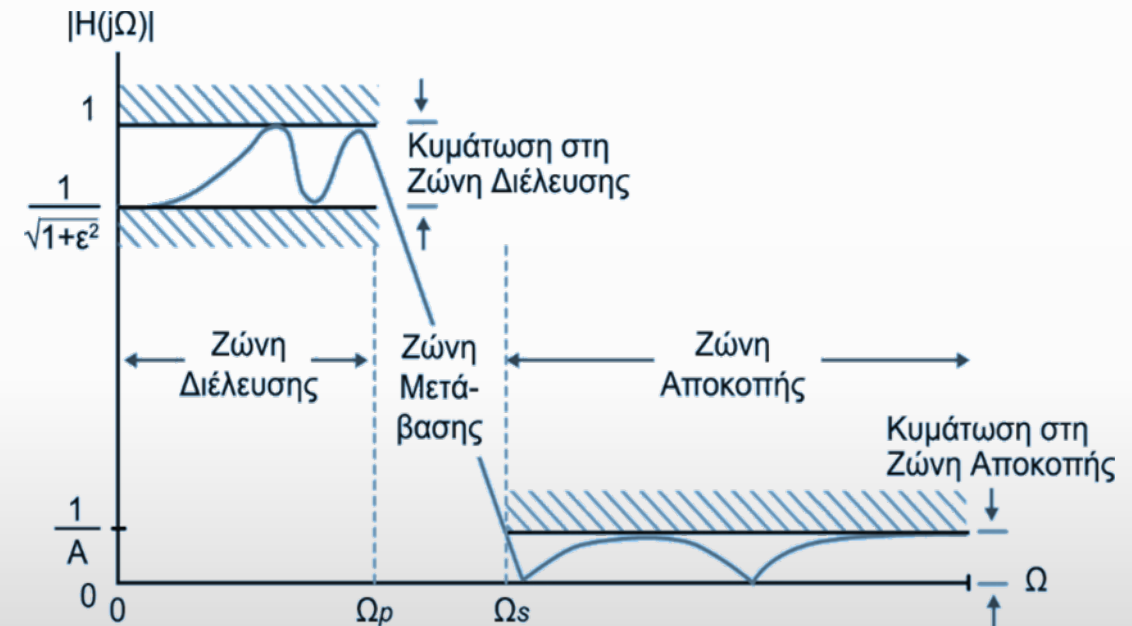
$$0 \leq |H(j\Omega)|^2 \leq \frac{1}{A^2}, \quad |\Omega| \geq \Omega_s$$

ε : κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης

Ω_p : συχνότητα αποκοπής της ζώνης διέλευσης

A : εξασθένιση στη ζώνη αποκοπής

Ω_s : συχνότητα αποκοπής της ζώνης αποκοπής



Σχεδίαση IIR φίλτρων μέσω πρότυπου αναλογικού φίλτρου

Πρότυπα Βαθυπερατά Αναλογικά Φίλτρα :

ϵ : κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης

Ω_p : συχνότητα αποκοπής της ζώνης διέλευσης

A : εξασθένιση στη ζώνη αποκοπής

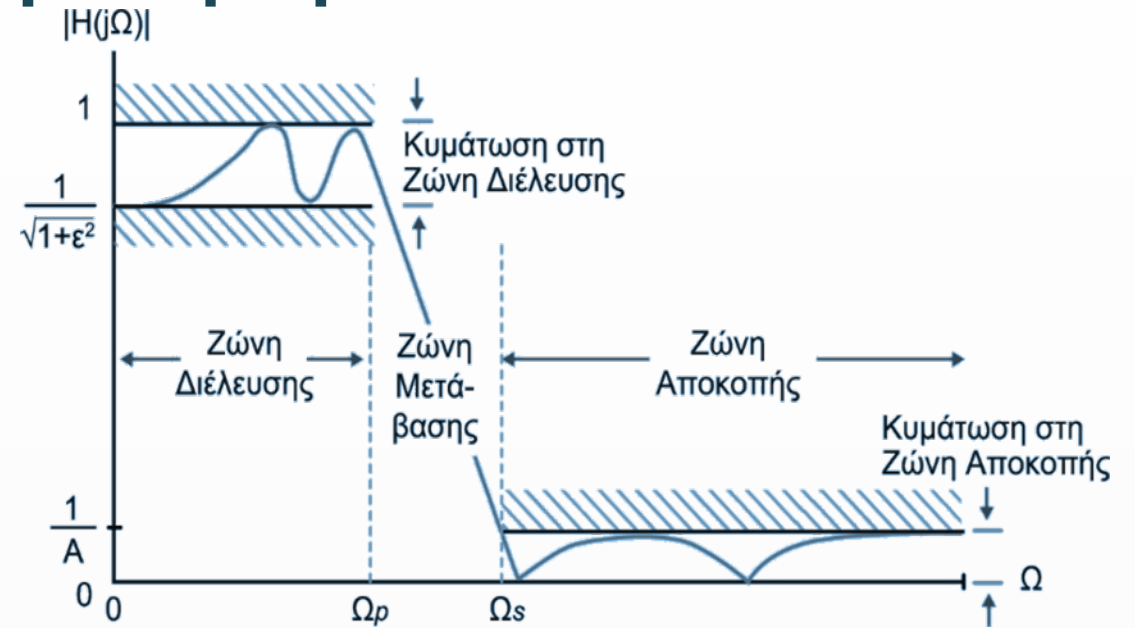
Ω_s : συχνότητα αποκοπής της ζώνης αποκοπής

$r = \frac{\Omega_p}{\Omega_s} < 1$ λόγος μετάβασης (transition ratio) ή παράμετρος επιλεκτικότητας (selectivity parameter)

$r=1$ στα ιδανικά φίλτρα

$d = \frac{\epsilon}{\sqrt{A^2-1}}$ παράμετρος διακριτότητας (discrimination factor)

$d = 0$ στα ιδανικά φίλτρα



ή $d = \sqrt{\frac{\frac{1}{(1-\delta_p)^2}-1}{\frac{1}{(\delta_s)^2}-1}}$ εκφράζει την κυμάτωση στις ζώνες ενδιαφέροντος

Πραγματικά Ψηφιακά Φίλτρα (από προηγούμενο μάθημα)

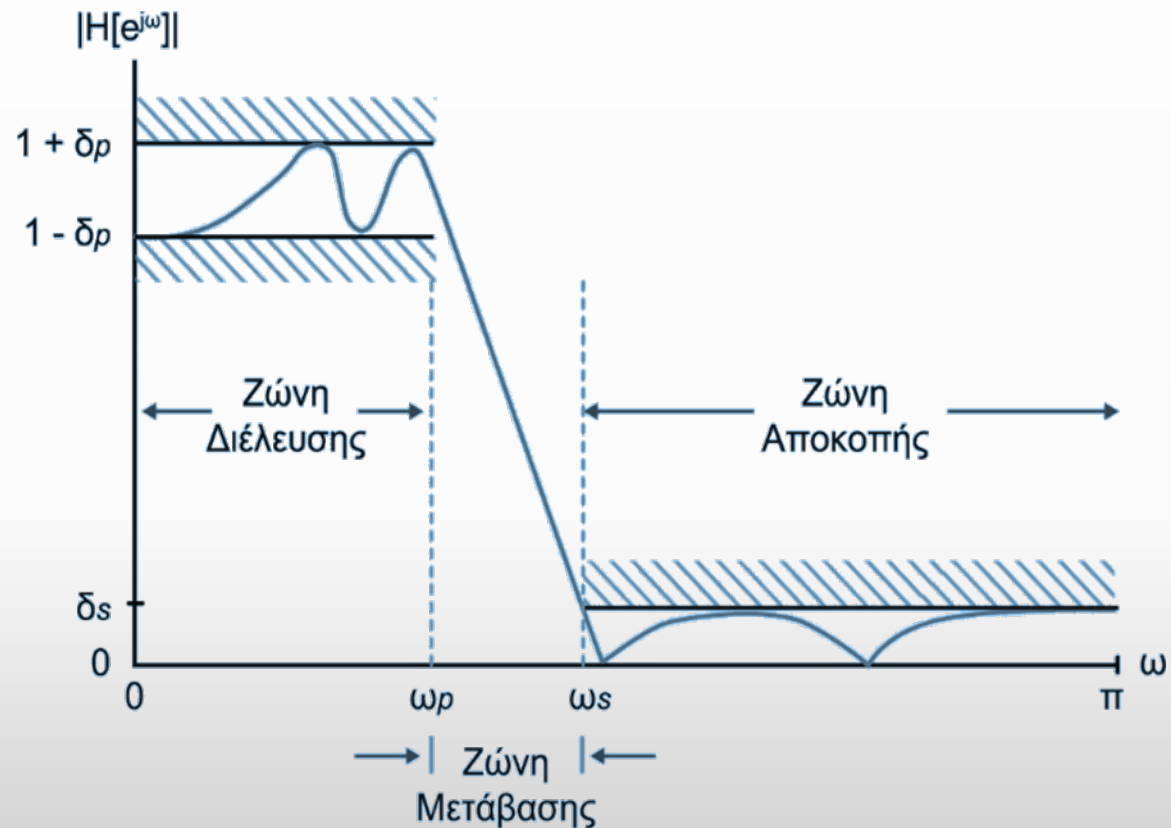
Με αποκλίσεις από την ιδανική απόκριση → **πραγματικά φίλτρα**.

Για παράδειγμα για τον σχεδιασμό πραγματικού βαθυπερατού φίλτρου θέτουμε:

- $1 - \delta_p < |H(e^{-j\omega})| \leq 1 + \delta_p$ $0 \leq |\omega| < \omega_p$ (ζώνη διέλευσης)
- $|H(e^{-j\omega})| \leq \delta_s$ $\omega_s \leq |\omega| < \pi$ (ζώνη αποκοπής)

Απόλυτες προδιαγραφές:

- ω_p : συχνότητα αποκοπής στη ζώνη διέλευσης
- ω_s : συχνότητα αποκοπής στη ζώνη αποκοπής
- δ_p : απόκλιση στη ζώνη διέλευσης
- δ_s : απόκλιση στη ζώνη αποκοπής
- $[\omega_p, \omega_s]$: ζώνη μετάβασης



Πραγματικά Ψηφιακά Φίλτρα (από προηγούμενο μάθημα)

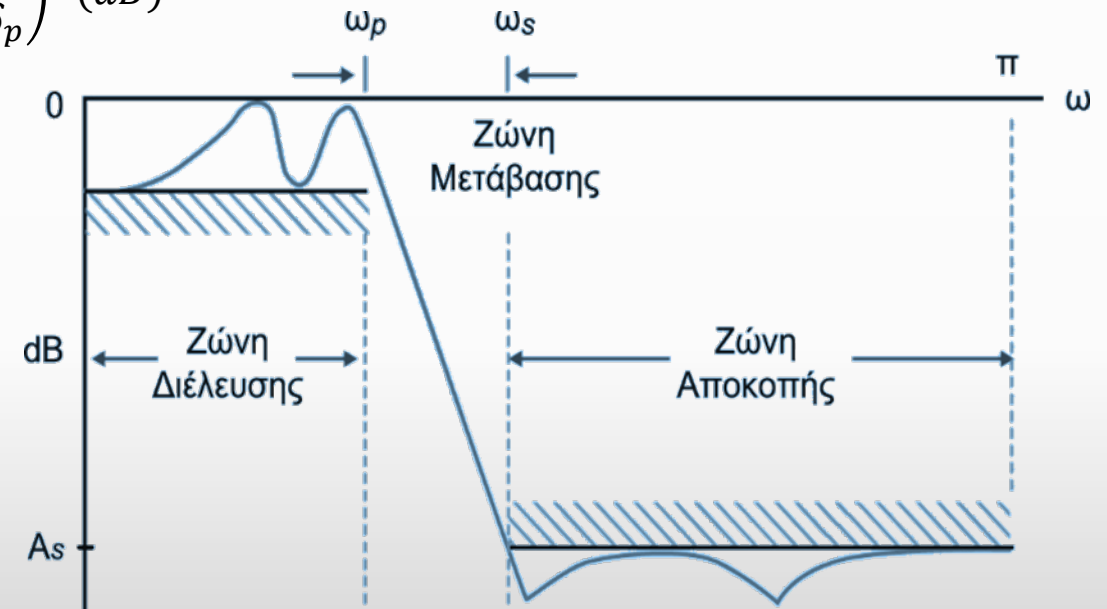
Σχετικές προδιαγραφές:

R_p : κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης (passband ripple):

$$R_p = -20 \log_{10} \left(\frac{1 - \delta_p}{1 + \delta_p} \right) \text{ (dB)}$$

A_s : εξασθένιση στη ζώνη αποκοπής (stopband attenuation):

$$A_s = -20 \log_{10} \left(\frac{\delta_s}{1 + \delta_p} \right) \text{ (dB)}$$



Σχεδίαση IIR φίλτρων μέσω πρότυπου αναλογικού φίλτρου

Πρότυπα Βαθυπερατά Αναλογικά Φίλτρα :

Οι παράμετροι ε και A συνδέονται με τις αντίστοιχες παραμέτρους κυμάτωσης R_p και εξασθένισης A_s , μέσω των σχέσεων:

$$R_p = -10 \log_{10} \left(\frac{1}{1 + \varepsilon^2} \right) \Rightarrow \varepsilon = \sqrt{10^{R_p/10} - 1}$$

$$A_s = -10 \log_{10} \left(\frac{1}{A^2} \right) \Rightarrow A = 10^{A_s/10}$$

και με τις παραμέτρους απόκλισης πλάτους δ_p και δ_s μέσω των σχέσεων:

$$\frac{1 - \delta_p}{1 + \delta_p} = \sqrt{\frac{1}{1 + \varepsilon^2}} \Rightarrow \varepsilon = \frac{2\sqrt{\delta_p}}{1 - \delta_p} \quad \text{και} \quad \frac{\delta_s}{1 + \delta_p} = \frac{1}{A} \Rightarrow A = \frac{1 + \delta_p}{\delta_s}$$

Για συχνότητα ίση με Ω_p και Ω_s , το τετραγωνισμένο πλάτος της απόκρισης συχνότητας είναι:

$$|H(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \quad \text{και} \quad |H(j\Omega_s)|^2 = \frac{1}{A^2}$$

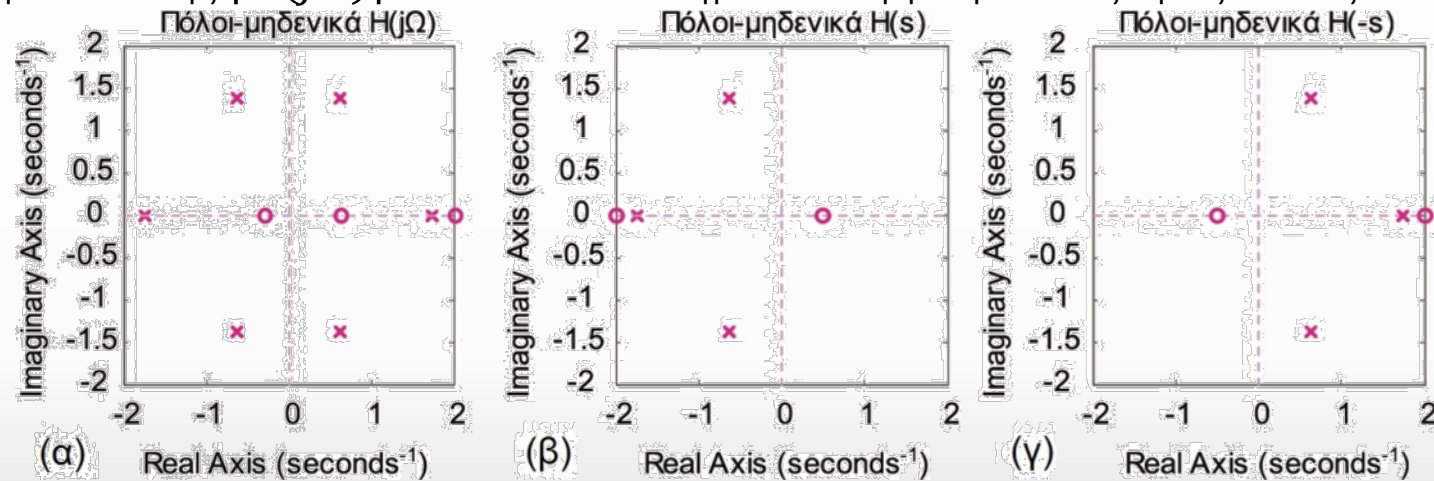
Σχεδίαση IIR φίλτρων μέσω πρότυπου αναλογικού φίλτρου

Διάγραμμα πόλων – μηδενικών IIR φίλτρου

Για το τετραγωνισμένο πλάτος της απόκρισης συχνότητας ισχύει:

$$|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega)H(-j\Omega) = H(s)H(-s) \Big|_{s=j\Omega} \Rightarrow H(s)H(-s) = |H(j\Omega)|^2 \Big|_{\Omega=s/j}$$

Άρα, οι πόλοι και τα μηδενικά της $|H(j\Omega)|^2$ είναι τοποθετημένοι συμμετρικά ως προς τον άξονα $j\Omega$.



Διαγράμματα πόλων – μηδενικών των συναρτήσεων:

(α) $|H(j\Omega)|^2 = H(s)H(-s)$, (β) $H(s)$ και (γ) $H(-s)$

Πρότυπα Βαθυπερατά Αναλογικά Φίλτρα

Βαθυπερατό φίλτρο Butterworth

(όσο πιο ευθύ γίνεται χωρίς να είναι σταθερό)

Βαθυπερατό φίλτρο Chebyshev τύπου I

(ομοιόμορφη κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης)

Βαθυπερατό φίλτρο Chebyshev τύπου II

(ομοιόμορφη κυμάτωση στη ζώνη αποκοπής)

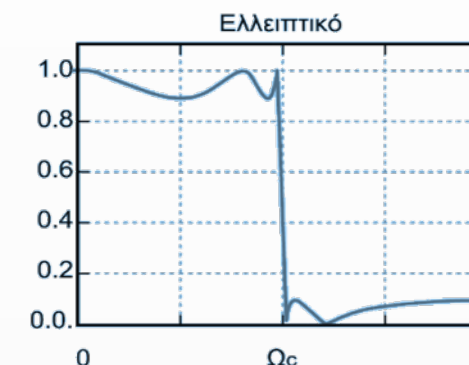
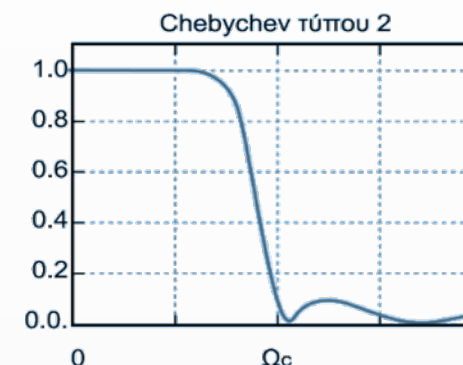
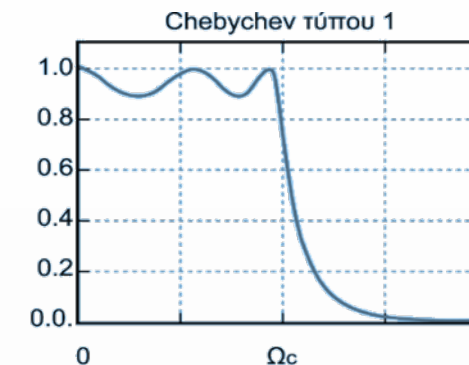
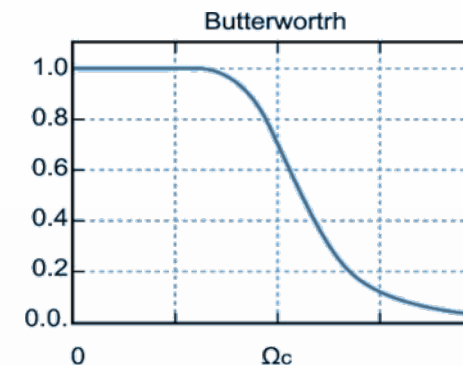
Βαθυπερατό ελλειπτικό φίλτρο

(Απότομη μετάβαση αλλά μη γραμμική φάση και όχι **equiripple**)

Υπάρχουν και άλλοι τύποι π.χ. :

Bessel φίλτρο

(γραμμική φάση στη ζώνη διέλευσης αλλά μεγάλη ζώνη μετάβασης)



Αποκρίσεις συχνότητας πρότυπων αναλογικών βαθυπερατών φίλτρων Butterworth, Chebyshev I, Chebyshev II και Ελλειπτικό

Πρότυπα Βαθυπερατά Αναλογικά Φίλτρα

Βαθυπερατό φίλτρο Butterworth

Τετραγωνισμένο μέτρο της απόκρισης συχνότητας:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}}$$

Ω_c : συχνότητα αποκοπής

N : τάξη συνάρτησης Butterworth

Μέτρο απόκρισης συχνότητας

Butterworth για διάφορες τιμές τάξης

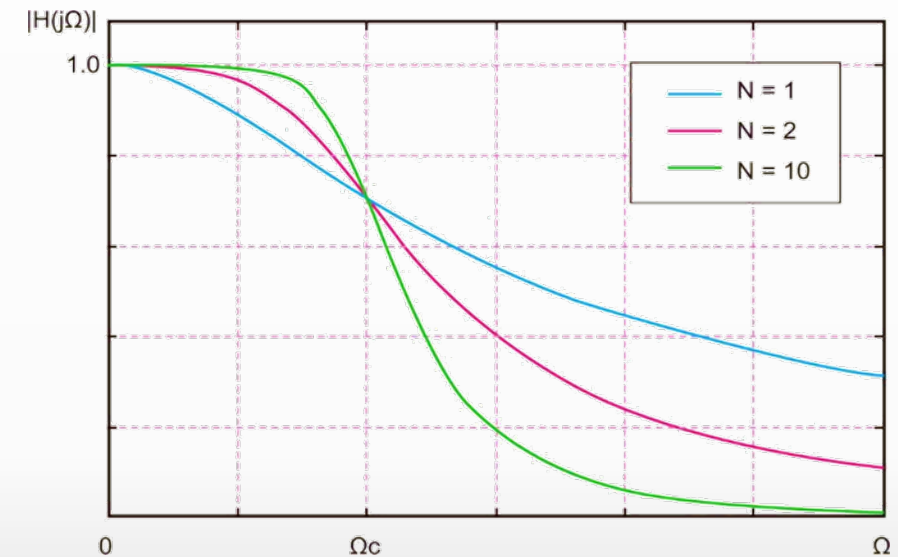
Ισχύουν:

$|H(j0)|^2 = 1 = 0\text{dB}$ για όλες τις τιμές της τάξης N .

$|H(j\Omega_c)|^2 = 1/2 = 3\text{dB}$, ανεξάρτητα από την τιμή του N .

Για $\Omega_c = 1 \text{ rad/sec}$ λαμβάνουμε το πρότυπο βαθυπερατό φίλτρο.

Για $N \rightarrow \infty$ το φίλτρο προσεγγίζει το ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο.



Πρότυπα Βαθυπερατά Αναλογικά Φίλτρα

Σχεδιασμός φίλτρου Butterworth :

Με βάση τις προδιαγραφές:

Ω_p : συχνότητα αποκοπής στο όριο της ζώνης διέλευσης

Ελάχιστη τιμή του μέτρου της απόκρ. συχν. $1/\sqrt{1 + \varepsilon^2}$ στη ζώνη διέλευσης

Ω_s : συχνότητα στο όριο της ζώνης αποκοπής

Μέγιστη τιμή του μέτρου της απόκρισης συχνότητας $1/A$ στη ζώνη αποκοπής

Υπολογίζουμε:

Την **τάξη** του φίλτρου:

$$N = \left\lceil \frac{\log_{10}[(A^2 - 1)/\varepsilon^2]}{2 \log_{10}[\Omega_s/\Omega_p]} \right\rceil$$

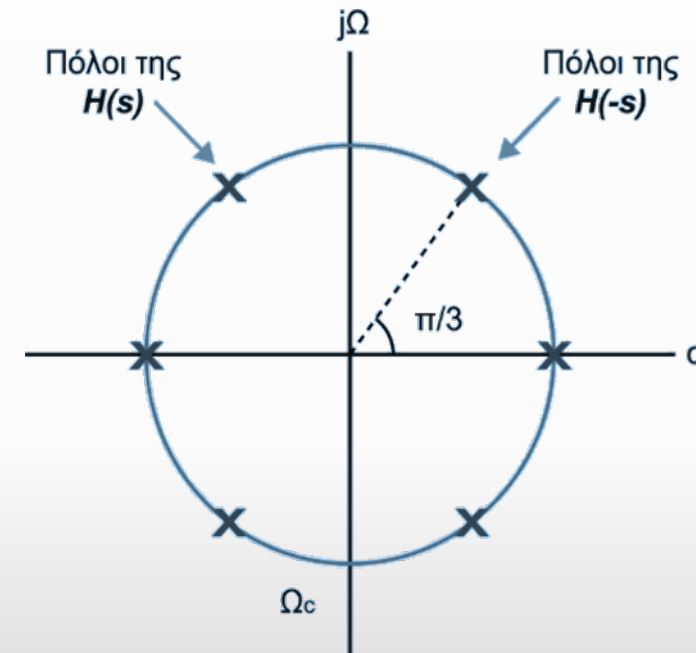
Τη **συχνότητα αποκοπής**:

$$\Omega_c = \frac{\Omega_p}{\sqrt[2N]{10^{Rp/10} - 1}} \quad \text{ή} \quad \Omega_c = \frac{\Omega_s}{\sqrt[2N]{10^{As/10} - 1}}$$

Πρότυπα Βαθυπερατά Αναλογικά Φίλτρα

Πόλοι και μηδενικά βαθυπερατού φίλτρου Butterworth

- Για τάξη φίλτρου N , οι πόλοι είναι $2N$ στο πλήθος.
- Οι πόλοι είναι τοποθετημένοι επάνω σε κύκλο ακτίνας Ω_c και ισαπέχουν μεταξύ τους κατά γωνία $2\pi/2N = \pi/N$.
- Το φίλτρο είναι αιτιατό και ευσταθές όταν όλοι οι πόλοι του βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο της συχνότητας s .
- Οι πόλοι στο αριστερό ημιεπίπεδο αντιστοιχούν στην $H(s)$ ενώ στο δεξί αντιστοιχούν στην $H(-s)$.



Πόλοι του γινομένου $H(s)H(-s)$ για $N=3$

Πρότυπα Βαθυπερατά Αναλογικά Φίλτρα

Συνάρτηση Μεταφοράς πρότυπου βαθυπερατού αναλογικού φίλτρου Butterworth:

Τάξη (N)	Συνάρτηση Μεταφοράς $H(s)$ (για $\Omega_c = 1\text{rad/sec}$)
1	$\frac{1}{s + 1}$
2	$\frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$
3	$\frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$
4	$\frac{1}{s^4 + 2.6131s^3 + 3.4142s^2 + 2.6131s + 1}$

Πρότυπα Βαθυπερατά Αναλογικά Φίλτρα

Σχεδιασμός φίλτρου Butterworth στο Matlab :

[N, Wn] = buttord(Wp, Ws, Rp, As): Επιστρέφει τη μικρότερη τάξη N ενός αναλογικού φίλτρου Butterworth που ικανοποιεί τις προδιαγραφές. Wn είναι η συχνότητα αποκοπής Ω_c σε κανονικοποιημένη κλίμακα, δηλαδή $0 < W_n < 1$, όπου το 1 αντιστοιχεί στο ήμισυ της συχνότητας δειγματοληψίας.

[b, a] = butter(N, Wn): Επιστρέφει τους συντελεστές $a[n]$, $b[m]$ της συνάρτησης μεταφοράς, τάξης N και συχνότητας αποκοπής Wn. Εναλλακτικά συντάσσεται **[z, p, k] = butter(N, Wn)** οπότε επιστρέφει τους πόλους, τα μηδενικά και τον συντελεστή κέρδους της συνάρτησης μεταφοράς.

Σχεδίαση πρότυπου βαθυπερατού αναλογικού φίλτρου Butterworth:

[z, p, k] = buttap(N): Επιστρέφει τους πόλους, τα μηδενικά και το κέρδος ενός κανονικοποιημένου πρότυπου αναλογικού φίλτρου Butterworth τάξης N. Το προκύπτον φίλτρο έχει N πόλους περί του μοναδιαίου κύκλου στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο και δεν έχει μηδενικά.

Πρότυπα Βαθυπερατά Αναλογικά Φίλτρα

Βαθυπερατό φίλτρο Chebyshev τύπου Ι:

Τα φίλτρο **Chebyshev I** έχει μόνο πόλους, παρουσιάζει ομοιόμορφη κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης ($0 \leq \Omega < 1$) και φθίνει μονότονα στη ζώνη αποκοπής ($\Omega > 1$).

Το τετραγωνισμένο μέτρο της απόκρισης συχνότητάς του είναι:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\Omega/\Omega_c)}$$

ε : κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης,
 Ω_c : συχνότητα αποκοπής

$T_N(\Omega)$: πολυώνυμο Chebyshev τάξης N :

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1} x), & 0 \leq x \leq 1 \\ \cosh(N \cosh^{-1} x), & 1 < x < \infty \end{cases}, \quad \text{όπου } x = \Omega/\Omega_c$$

- $\Omega = 0$ και N άρτιο: $|H(j0)|^2 = 1$
- $\Omega = 0$ και N περιττό: $|H(j0)|^2 = 1/(1 + \varepsilon^2)$
- $\Omega = \Omega_c$: $|H(j\Omega_c)|^2 = 1/(1 + \varepsilon^2)$ ανεξάρτητα από το N
- $0 \leq \Omega \leq \Omega_c$: $|H(j\Omega)|^2$ ταλαντώνεται μεταξύ 0 και $1/(1 + \varepsilon^2)$
- $\Omega > \Omega_c$: $|H(j\Omega)|^2$ φθίνει μονότονα.

Πρότυπα Βαθυπερατά Αναλογικά Φίλτρα

Βαθυπερατό φίλτρο Chebyshev τύπου I:

Συχνότητα αποκοπής Ω_c :

$$\Omega_c = \Omega_p \quad \text{και} \quad \Omega_r = \frac{\Omega_s}{\Omega_p}$$

Τάξη N :

$$N = \left\lceil \frac{\log_{10} \left[g + \sqrt{g^2 - 1} \right]}{\log_{10} \left[\Omega_r + \sqrt{\Omega_r^2 - 1} \right]} \right\rceil$$

Σχεδίαση βαθυπερατού αναλογικού φίλτρου Chebyshev τύπου I:

- **[N, Wn] = cheb1ord(Wp, Ws, Rp, Rs):** Επιστρέφει τη μικρότερη τάξη N ενός αναλογικού φίλτρου Chebyshev-I που ικανοποιεί τις προδιαγραφές. Wn είναι η συχνότητα αποκοπής Ω_c σε κανονικοποιημένη κλίμακα.
- **[b, a] = cheby1(N, R, Wn):** Επιστρέφει τους συντελεστές $a[n]$, $b[m]$ της συνάρτησης μεταφοράς, τάξης N , συχνότητας αποκοπής Wn και κυμάτωσης R . Εναλλακτικά συντάσσεται **[z, p, k] = butter(N, Wn)** οπότε επιστρέφει τους πόλους, τα μηδενικά και τον συντελεστή κέρδους της συνάρτησης μεταφοράς.

Σχεδίαση πρότυπου βαθυπερατού αναλογικού φίλτρου Chebyshev τύπου I:

- **[z, p, k] = cheb1ap(N, Rp):** Επιστρέφει τους πόλους, τα μηδενικά και το κέρδος ενός κανονικοποιημένου πρότυπου αναλογικού φίλτρου Chebyshev τύπου I τάξης N , με κυμάτωση R_p στη ζώνη διέλευσης.

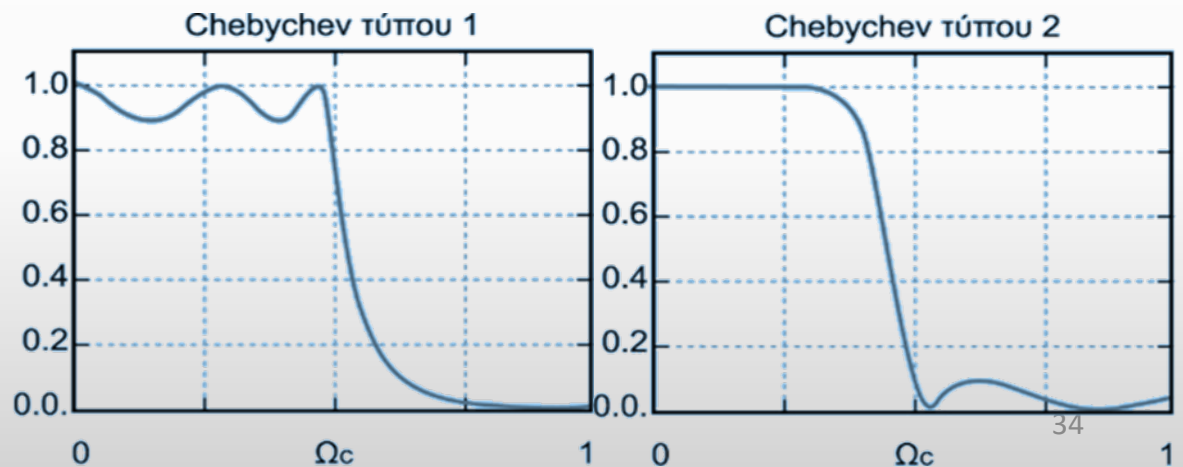
Πρότυπα Βαθυπερατά Αναλογικά Φίλτρα

Βαθυπερατό φίλτρο Chebyshev τύπου II:

- Το φίλτρο Chebyshev τύπου II έχει πόλους και μηδενικά, παρουσιάζει ομοιόμορφη κυμάτωση στη ζώνη αποκοπής ($\Omega > 1$) και φθίνει μονότονα στη ζώνη διέλευσης ($0 \leq \Omega < 1$).
- Τα μηδενικά του βρίσκονται επάνω στο φανταστικό άξονα του επιπέδου s .
- Το τετραγωνισμένο μέτρο της απόκρισης συχνότητάς του είναι:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + [\varepsilon^2 T_N^2(\Omega_c/\Omega)]^{-1}}$$

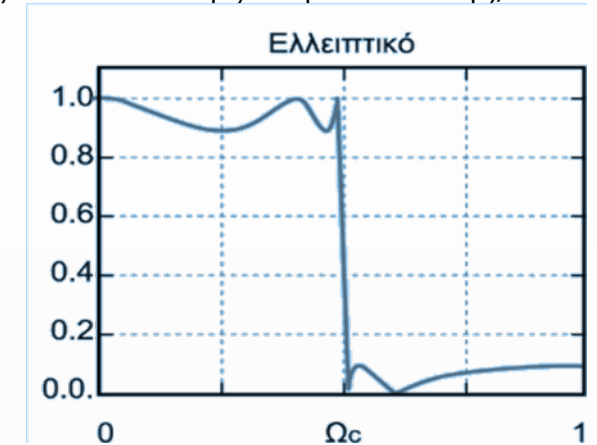
- Το φίλτρο αυτό παρουσιάζει περισσότερο γραμμική φάση και βελτιωμένη καθυστέρηση ομάδας σε σχέση με το φίλτρο Chebyshev τύπου I.
- Υλοποίηση με συναρτήσεις `cheb2ord()`, `cheby2()` και `cheb2ap()`



Πρότυπα Βαθυπερατά Αναλογικά Φίλτρα

Βαθυπερατό ελλειπτικό φίλτρο :

- Το βαθυπερατό ελλειπτικό φίλτρο παρουσιάζει ομοιόμορφη κυμάτωση τόσο στη ζώνη διέλευσης όσο και στη ζώνη αποκοπής, όπως το ισοκυματικό FIR φίλτρο.
- Το ελλειπτικό φίλτρο είναι καλύτερο των φίλτρων Butterworth και Chebyshev επειδή απαιτεί μικρότερη τάξη για να ικανοποιήσει τις ίδιες προδιαγραφές.
- Ωστόσο, η απόκριση του ελλειπτικού φίλτρου παρουσιάζει περισσότερες μη-γραμμικότητες στη ζώνη διέλευσης, σε σχέση με τα φίλτρα Butterworth ή Chebyshev.



- Το τετραγωνισμένο μέτρο της απόκρισης συχνότητας του βαθυπερατού ελλειπτικού φίλτρου είναι:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 U_N^2(\Omega/\Omega_c)}$$

- ε : κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης, Ω_c : συχνότητα αποκοπής, $U_N(\Omega)$: ελλειπτική συνάρτηση Jacobi τάξης N.
- Για τη σχεδίαση βαθυπερατού αναλογικού ελλειπτικού φίλτρου το Matlab προσφέρει τη συνάρτηση **ellip()** και τη συνάρτηση **ellipord()** για τον υπολογισμό της βέλτιστης τάξης, ενώ για τη σχεδίαση πρότυπου βαθυπερατού αναλογικού ελλειπτικού φίλτρου προσφέρει τη συνάρτηση **ellipap()**.

Μέθοδος Αμετάβλητης Κρουστικής Απόκρισης - Impulse Invariant Transformation

Μέθοδος Αμετάβλητης Κρουστικής Απόκρισης

Μετατροπή ενός αναλογικού φίλτρου με επιθυμητές προδιαγραφές σε ψηφιακό, μέσω της δειγματοληψίας της κρουστικής απόκρισης του αναλογικού φίλτρου.

- Υπολογίζουμε την κρουστική απόκριση του φίλτρου, με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$ του αναλογικού φίλτρου:

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\}$$

- Δειγματοληπτούμε με περίοδο δειγματοληψίας T_d , την κρουστική απόκριση $h(t)$ και λαμβάνουμε:

$$h[nT_d] = h(t) \Big|_{t=nT_s}, \quad n \geq 0$$

- Υπολογίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ του ψηφιακού φίλτρου από τον μετασχηματισμό Z της ακολουθίας $h[nT_d]$:

$$H(z) = Z\{h[nT_d]\}$$

Μέθοδος Αμετάβλητης Κρουστικής Απόκρισης - Impulse Invariant Transformation

Μέθοδος Αμετάβλητης Κρουστικής Απόκρισης

Μειονεκτήματα:

- Η δειγματοληψία της κρουστικής απόκρισης προκαλεί το φαινόμενο της αναδίπλωσης του φάσματος, άρα αλλοίωσης του φάσματος.
- Το φαινόμενο είναι δυνατό να περιοριστεί με επαρκή αύξηση της συχνότητας δειγματοληψίας, αλλά όχι να εξαλειφθεί εντελώς.
- Καθίσταται αναγκαίο το φιλτράρισμα της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ με ένα φίλτρο χαμηλών συχνοτήτων ώστε να απομακρυνθούν οι υψηλές συχνότητες.
- Το γεγονός αυτό συνιστά μια επιπλέον αδυναμία της μεθόδου καθώς δεν μπορεί να εφαρμοστεί για τον σχεδιασμό υπεραπλών ψηφιακών φίλτρων, παρά μόνο βαθυπερατών και ζωνοπερατών.

Μέθοδος Αμετάβλητης Κρουστικής Απόκρισης - Impulse Invariant Transformation

Απεικόνιση μεταξύ μιγαδικών επιπέδων αναλογικής και ψηφιακής συχνότητας

Η αναλογική (Ω) και η ψηφιακή (ω) συχνότητα συνδέονται με τη σχέση:

$$\omega = \Omega T_s \Rightarrow e^{j\omega} = e^{j\Omega T_d}$$

Επειδή στον μοναδιαίο κύκλο ισχύει $z = e^{j\omega}$ και στον φανταστικό άξονα $s = j\Omega$, έχουμε:

$$z = e^{s T_d}$$

Η σχέση αυτή περιγράφει μια σχέση απεικόνισης της αναλογικής μιγαδικής συχνότητας s στην ψηφιακή μιγαδική συχνότητα z .

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $z = r e^{j\omega}$ και $s = \sigma + j\Omega$, καταλήγουμε:

$$r = e^{\sigma T_d}$$

Παρατηρήσεις:

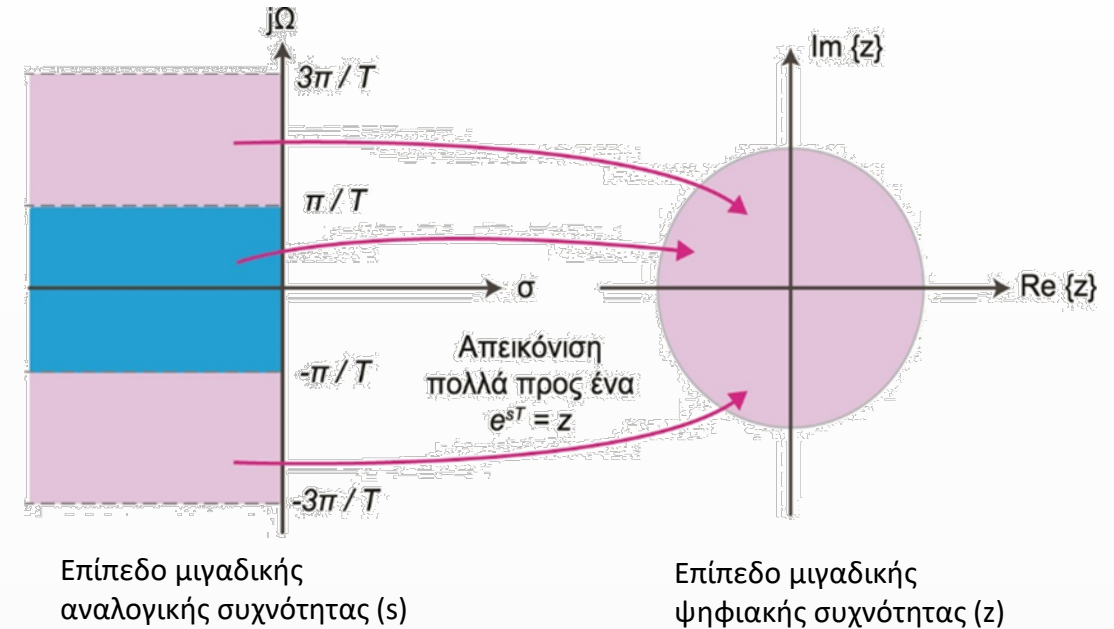
- Για $\sigma = 0 \Rightarrow r = 1$, δηλ. ο φανταστικός άξονας $j\Omega$ του επιπέδου s απεικονίζεται επάνω στον μοναδιαίο κύκλο του επιπέδου z .
- Για $\sigma < 0 \Rightarrow r < 1$, δηλ. το αριστερό ημιεπίπεδο s απεικονίζεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου του επιπέδου z . Ωστόσο, η απεικόνιση μεταξύ των σημείων των επιπέδων s και z δεν είναι ένα-προς-ένα.
- Για $\sigma > 0 \Rightarrow r > 1$, δηλαδή το δεξί ημιεπίπεδο s απεικονίζεται στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου του επιπέδου z .

Μέθοδος Αμετάβλητης Κρουστικής Απόκρισης - Impulse Invariant Transformation

Απεικόνιση μεταξύ μιγαδικών επιπέδων αναλογικής και ψηφιακής συχνότητας

Μεταξύ των $H(z)$ και $H(s)$ ισχύει η σχέση:

$$H(z) = \frac{1}{T_d} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H\left(s - j \frac{2\pi}{T_d} k\right)$$



Παρατήρηση: Η απεικόνιση μεταξύ των επιπέδων s και z δεν είναι ένα-προς-ένα, αλλά είναι πολλά-προς-ένα, καθώς λωρίδες πλάτους $2\pi/T_d$ του επιπέδου s απεικονίζονται σε σημεία του μοναδιαίου κύκλου του επιπέδου z . Το γεγονός αυτό οφείλεται στην ανεπαρκή συχνότητα δειγματοληψίας.

Μέθοδος Αμετάβλητης Κρουστικής Απόκρισης - Impulse Invariant Transformation

Μεθοδολογία σχεδιασμού:

- Δοθέντων των επιθυμητών προδιαγραφών ω_p , ω_s , R_p και A_s προχωρούμε στο σχεδιασμό του φίλτρου με τη μέθοδο της αμετάβλητης κρουστικής, με τα ακόλουθα βήματα:
- Επιλέγουμε το T_d και μετατρέπουμε τις ψηφιακές συχνότητες ω_p , ω_s σε αναλογικές:

$$\Omega_p = \omega_p/T_d \text{ και } \Omega_s = \omega_s/T_d$$

- Σχεδιάζουμε το ισοδύναμο αναλογικό φίλτρο με ένα από τα πρότυπα αναλογικά βαθυπερατά φίλτρα και υπολογίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του $H(s)$ από τις προδιαγραφές Ω_p , Ω_s , R_p και A_s .
- Αν οι πόλοι της $H(s)$ έχουν πολλαπλότητα 1, τότε μπορούμε να εκφράσουμε την $H(s)$ σε ανάπτυγμα μερικών κλασμάτων:

$$H(s) = \sum_{k=1}^N \frac{R_k}{s - p_k}$$

- Η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ του ψηφιακού φίλτρου βρίσκεται ότι είναι:

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{R_k}{1 - e^{p_k T_d} z^{-1}}$$

- Επίλυση στο Matlab: $[bz, az] = \text{impinvar}(bs, as, Fd)$, όπου bz , az , οι συντελεστές του ψηφιακού φίλτρου, bs , as οι συντελεστές του αναλογικού φίλτρου και $Fd=1/T_d$.

Μέθοδος Αμετάβλητης Κρουστικής Απόκρισης - Impulse Invariant Transformation

Παράδειγμα :

Να μετατραπεί η παρακάτω συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ του αναλογικού φίλτρου σε συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ του ψηφιακού φίλτρου.

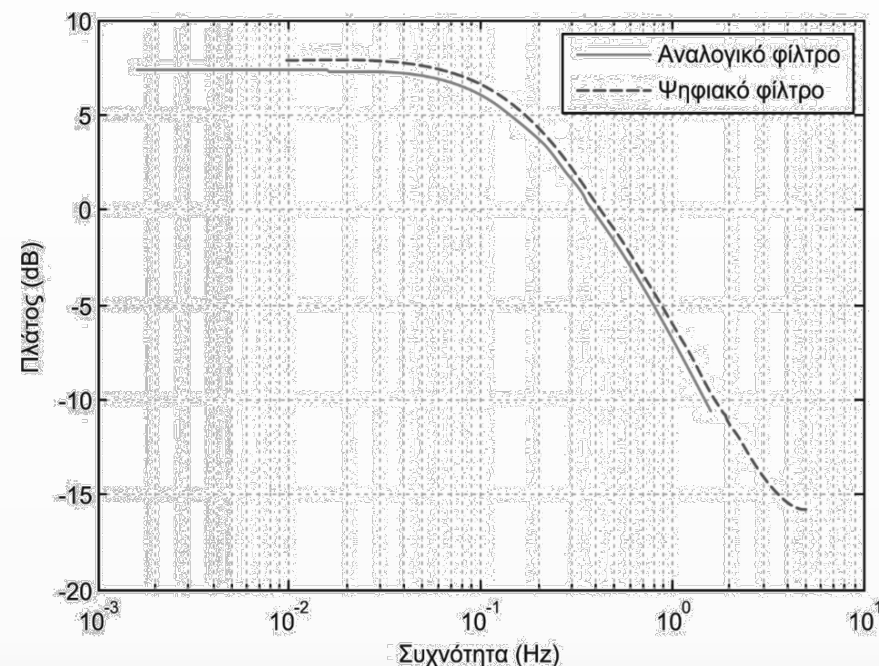
$$H(s) = \frac{3s + 7}{s^2 + 4s + 3}$$

Απάντηση: Γράφουμε την $H(s)$ σε ανάπτυγμα μερικών κλασμάτων:
Οι πόλοι της $H(s)$ είναι: $p_1 = -1$ και $p_2 = -3$.

$$H(s) = \frac{3s + 7}{s^2 + 4s + 3} = \frac{3s + 7}{(s + 1)(s + 3)} = \dots = \frac{1}{s + 3} + \frac{2}{s + 1}$$

Για $T_d = 0.1$ η συνάρτηση μεταφοράς του ψηφιακού φίλτρου είναι:

$$H(z) = \frac{1}{1 - e^{-0.1 \cdot 3} z^{-1}} + \frac{2}{1 - e^{-0.1 \cdot 1} z^{-1}} = \frac{3 - 2.3865 z^{-1}}{1 - 1.6457 z^{-1} + 0.6703 z^{-2}}$$

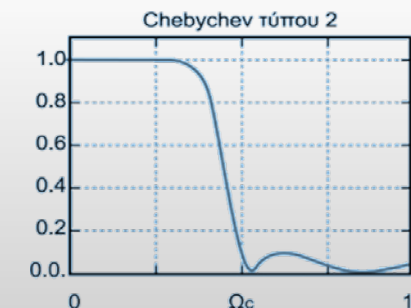


$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{R_k}{1 - e^{p_k T_d} z^{-1}}$$

Μέθοδος Αμετάβλητης Κρουστικής Απόκρισης - Impulse Invariant Transformation

Συμπεράσματα :

- Η μέθοδος της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης **γενικά αποτυγχάνει** να υπολογίσει με ακρίβεια το ψηφιακό φίλτρο.
- Η μέθοδος είναι κατάλληλη μόνο για το σχεδιασμό βαθυπερατών φίλτρων, επειδή η ανεπαρκής δειγματοληψία της κρουστικής απόκρισης δημιουργεί το φαινόμενο της αναδίπλωσης του φάσματος λόγω της απεικόνισης **πολλά-προς-ένα** μεταξύ των επιπέδων s και z .
- Ιδιαίτερα στην περίπτωση του πρότυπου φίλτρου Chebyshev τύπου II, η απόκριση συχνότητας στη ζώνη αποκοπής του παραγόμενου ψηφιακού φίλτρου διαφέρει σημαντικά από την αντίστοιχη απόκριση συχνότητας του αναλογικού φίλτρου.
- Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το φίλτρο Chebyshev τύπου II έχει ισοκυματική συμπεριφορά στη ζώνη αποκοπής, άρα η απόκριση συχνότητάς του δεν τείνει στο μηδέν για τις υψηλές συχνότητες.
- Έτσι, το φαινόμενο της αλλοίωσης του φάσματος που εμφανίζεται λόγω της δειγματοληψίας συχνότητας είναι ακόμα πιο έντονο και εμφανές.

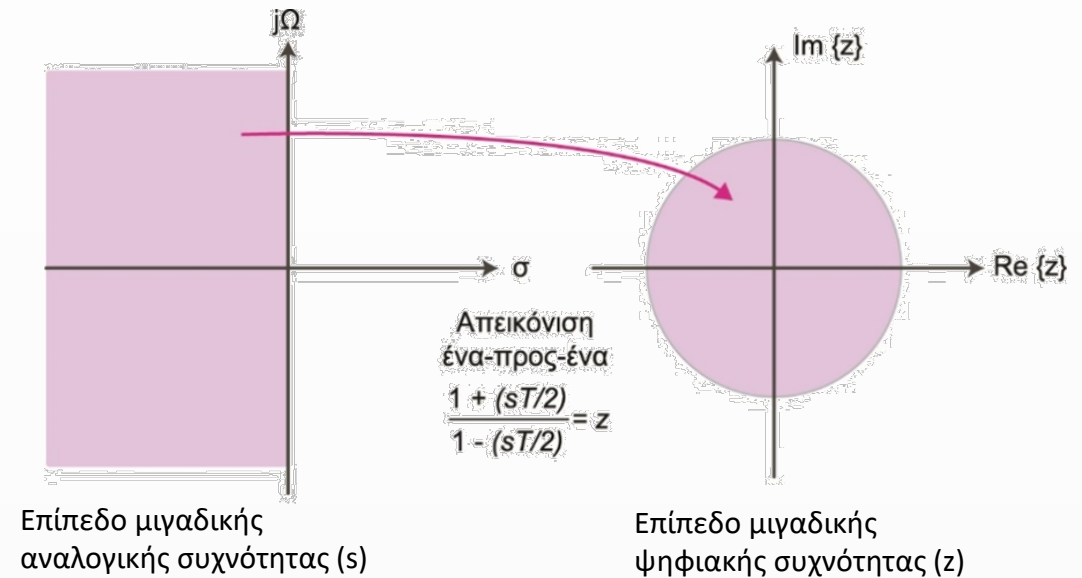


Μέθοδος Διγραμμικού Μετασχηματισμού - Bilinear Transform

Μέθοδος διγραμμικού μετασχηματισμού:

- Η μέθοδος του διγραμμικού μετασχηματισμού (bilinear transform) εξασφαλίζει απεικόνιση **ένα-προς-ένα** των σημείων των επιπέδων s και z .

$$z = re^{j\omega} \text{ και } s = \sigma + j\Omega$$



- Η σχέση απεικόνισης μεταξύ των μεταβλητών s και z αποδεικνύεται ότι δίνεται από τις σχέσεις:

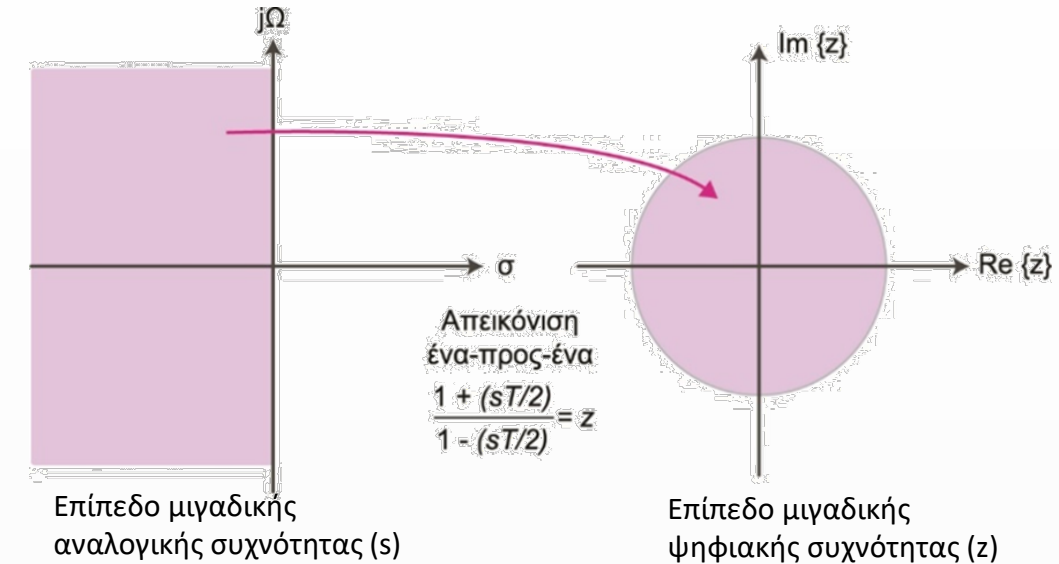
$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \text{ και } z = \frac{1 + \frac{sT}{2}}{1 - \frac{sT}{2}}$$

Μέθοδος Διγραμμικού Μετασχηματισμού - Bilinear Transform

Μέθοδος διγραμμικού μετασχηματισμού:

Παρατηρήσεις:

- Το θετικό μέρος του φανταστικού άξονα $j\Omega$ του επιπέδου s απεικονίζεται στο θετικό ήμισυ της περιφέρειας του μοναδιαίου κύκλου του επιπέδου z
- Το αρνητικό μέρος του φανταστικού άξονα $j\Omega$ απεικονίζεται στο αρνητικό ήμισυ της περιφέρειας του μοναδιαίου κύκλου του επιπέδου z .
- Το αριστερό ημιεπίπεδο s απεικονίζεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου του επιπέδου z . Επομένως, από ένα ευσταθές αναλογικό φίλτρο παράγεται ένα επίσης ευσταθές ψηφιακό φίλτρο.
- Το δεξιό ημιεπίπεδο s απεικονίζεται στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου του επιπέδου z .



Μέθοδος Διγραμμικού Μετασχηματισμού - Bilinear Transform

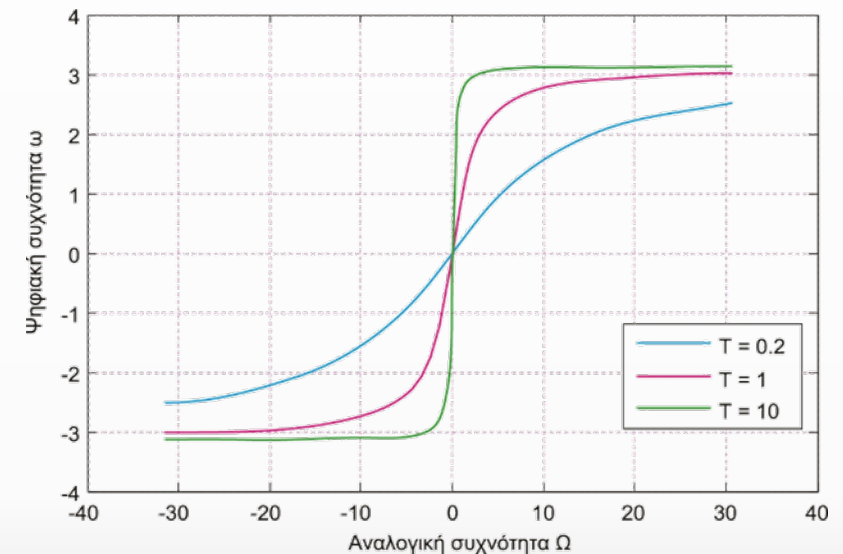
Μέθοδος διγραμμικού μετασχηματισμού:

Η σχέση απεικόνισης, για $r=1$, μεταξύ της αναλογικής συχνότητας Ω και της ψηφιακής συχνότητας ω , είναι:

$$\Omega = \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Παρατηρήσεις:

- Ολόκληρο το σύνολο των αναλογικών συχνοτήτων απεικονίζεται στην περιοχή ψηφιακών συχνοτήτων $-\pi \leq \omega \leq \pi$.
- Η απεικόνιση αυτή είναι μη-γραμμική, δηλαδή προκύπτει συμπίεση (στρέβλωση) συχνοτήτων (frequency wrapping), γεγονός το οποίο οφείλεται στην ύπαρξη της συνάρτησης $\tan^{-1}()$.
- Επίλυση στο Matlab: $[bz, az] = \text{bilinear}(bs, as, Fd)$, όπου bz, az , οι συντελεστές του ψηφιακού φίλτρου, bs, as οι συντελεστές του αναλογικού φίλτρου και $Fd=1/Td$.



Μέθοδος Διγραμμικού Μετασχηματισμού - Bilinear Transform

Μέθοδος διγραμμικού μετασχηματισμού:

- Για τα βαθυπερατά και υψηπερατά φίλτρα, η τάξη της $H(z)$ που προκύπτει, είναι **ίδια με την τάξη** της $H(s)$.
→ από ένα 2^{ης} τάξης βαθυπερατό αναλογικό φίλτρο θα πάρουμε ένα 2^{ης} τάξης βαθυπερατό ψηφιακό φίλτρο.
- Για τα ζωννοδιαβατά φίλτρα και τα φίλτρα απόρριψης ζώνης αυτό δεν ισχύει.
Στην περίπτωση αυτή, η **τάξη της $H(z)$ είναι διπλάσια της τάξης της $H(s)$** .

Μέθοδος Διγραμμικού Μετασχηματισμού - Bilinear Transform

Παράδειγμα :

Με χρήση του διγραμμικού μετασχηματισμού να μετατραπεί σε ψηφιακό το αναλογικό φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς :

$$H(s) = \frac{3s + 7}{s^2 + 4s + 3}$$

Απάντηση: Θέτουμε τιμή $T = 2$ στη σχέση:

$$s = \left. \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1} \right|_{T=2} = \frac{z - 1}{z + 1}$$

Η ζητούμενη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ δίνεται από τη σχέση:

$$H(z) = H(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{z+1}} = \frac{3 \left(\frac{z-1}{z+1} \right) + 7}{\left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2 + 4 \left(\frac{z-1}{z+1} \right) + 3}$$

Με απλοποίηση λαμβάνουμε:

$$H(z) = \frac{5z^2 + 7z + 2}{4z^2 + 2z} = \frac{1.25 + 1.75z^{-1} + 0.5z^{-2}}{1 + 0.5z^{-1}}$$

Συγκρίνοντας με το αποτέλεσμα του προηγούμενου παραδείγματος (σελ. 41) παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις μεταφοράς των ψηφιακών φίλτρων που παράγονται από τις μεθόδους της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης και του διγραμμικού μετασχηματισμού είναι **διαφορετικές** μεταξύ τους.

Μετασχηματισμοί συχνότητας Φίλτρων

Τρόπος Α'

- Μετασχηματίζουμε το πρότυπο βαθυπερατό αναλογικό φίλτρο στην κατάλληλη ζώνη συχνοτήτων λειτουργίας ($s \rightarrow s$)
- Μετατρέπουμε το πρότυπο αναλογικό φίλτρο σε ψηφιακό ($s \rightarrow z$).

Τρόπος Β'

- Μετατρέπουμε το πρότυπο αναλογικό σε ψηφιακό ($s \rightarrow z$)
- Μετασχηματίζουμε το πρότυπο βαθυπερατό ψηφιακό φίλτρο στην κατάλληλη ζώνη συχνοτήτων λειτουργίας ($z \rightarrow z$)

Μετασχηματισμοί συχνότητας

Από Βαθυπερατό Αναλογικό Φίλτρο σε Αναλογικό Επιλογής Συχνοτήτων :

- Σχεδιάζουμε αρχικά το πρότυπο βαθυπερατό αναλογικό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής 3-dB (στα όρια της ζώνης διέλευσης) $\Omega_p = 1$
- Κατόπιν το μετατρέπουμε στο κατάλληλο φίλτρο επιλογής συχνοτήτων με βάση την απεικόνιση συχνότητας του πίνακα:

Μετασχηματισμός	Απεικόνιση	Νέες συχνότητες αποκοπής
Βαθυπερατό	$s \rightarrow \frac{\Omega_p}{\Omega'_p} s$	Ω'_p
Υψιπερατό	$s \rightarrow \frac{\Omega_p \Omega'_p}{s}$	Ω'_p
Ζωνοπερατό	$s \rightarrow \frac{\Omega_p (s^2 + \Omega_l \Omega_u)}{s(\Omega_u - \Omega_l)}$	Ω_l, Ω_u
Ζωνοφρακτικό	$s \rightarrow \frac{\Omega_p (\Omega_u - \Omega_l)}{s^2 + \Omega_l \Omega_u}$	Ω_l, Ω_u

Μετασχηματισμοί συχνότητας

Από Βαθυπερατό Αναλογικό Φίλτρο σε Αναλογικό Επιλογής Συχνοτήτων :

Παράδειγμα : Να σχεδιαστεί ψηφιακό χαμηλοπερατό φίλτρο που να προσεγγίζει την $H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2} \cdot s + 1}$ (Butterworth 2^{ης} τάξης) με συχνότητα αποκοπής 3dB $f_c = 150\text{Hz}$ και συχνότητα δειγματοληψίας $f_s = 1.5\text{kHz}$.

- Μετασχηματίζουμε το πρωτότυπο βαθυπερατό σε βαθυπερατό με συχνότητα αποκοπής

$$\Omega'_p = \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) = \tan\left(\frac{\Omega_p T}{2}\right) = \tan\left(\frac{2\pi f_p}{2f_s}\right) = \tan\left(\frac{2\pi 150}{2 \cdot 1500}\right) = \tan(0.1\pi) = 0.32$$

$$H(s) \Big|_{s=\frac{\Omega_p}{\Omega'_p}s=\frac{s}{0.32}} = \frac{1}{\left(\frac{s}{0.32}\right)^2 + \sqrt{2} \cdot \left(\frac{s}{0.32}\right) + 1} = \frac{1}{9.47s^2 + 4.35s + 1}$$

Εφαρμόζουμε τον διγραμμικό μετασχηματισμό :

$$H(z) = H(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{z+1}} = \frac{1}{9.47 \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + 4.35 \left(\frac{z-1}{z+1}\right) + 1} = \frac{0.07(1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{1 - 1.14z^{-1} + 0.41z^{-2}}$$

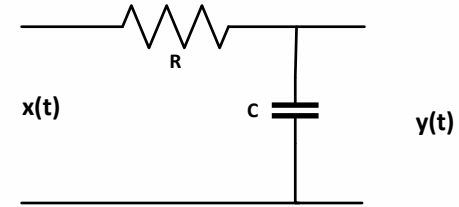
Το ζητούμενο ψηφιακό φίλτρο είναι δεύτερης τάξης, όπως και το αναλογικό από το οποίο αρχίσαμε τη σχεδίαση, και έχει εξίσωση διαφορών:

$$y[n] = 0.07x[n] + 0.14x[n-1] + 0.07x[n-2] + 1.14y[n-1] - 0.41y[n-2]$$

Μετασχηματισμοί συχνότητας

Από Βαθυπερατό Αναλογικό Φίλτρο σε Αναλογικό Επιλογής Συχνοτήτων :

Παράδειγμα : Το πιο απλό αναλογικό LP φίλτρο αποτελείται από έναν αντιστάτη και έναν πυκνωτή, κύκλωμα RC, η έξοδος του οποίου λαμβάνεται στα άκρα του πυκνωτή. Με τη μέθοδο του διγραμμικού μετασχηματισμού, να σχεδιαστεί το αντίστοιχο ψηφιακό φίλτρο, του οποίου η συχνότητα αποκοπής να είναι 30 Hz, όταν η συχνότητα δειγματοληψίας είναι 150 Hz.



Η συχνότητα αποκοπής του επιθυμητού ψηφιακού φίλτρου είναι $\omega_c = \Omega_c T = 2\pi f_c \frac{1}{f_s} = 2\pi 30 \frac{1}{150} = 0.4\pi$

Αυτή η συχνότητα στο z επίπεδο αντιστοιχεί στο s επίπεδο στην $\Omega'_c = \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) = \tan\left(\frac{0.4\pi}{2}\right) = 0.73$

Ο υπολογισμός αυτός αποτελεί την αντιστάθμιση στρέβλωσης (prewarping).

Τώρα πρέπει να σχεδιάσουμε ένα αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής Ω'_c

- Το πρωτότυπο ($\Omega_c = 1$) αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο το οποίο αντιστοιχεί στο RC κύκλωμα έχει συνάρτηση μεταφοράς $H(s) = \frac{1}{s+1}$
- Εκτελούμε ένα μετασχηματισμό συχνότητας από βαθυπερατό σε βαθυπερατό για να υπολογίσουμε το αναλογικό βαθυπερατό φίλτρο το οποίο έχει $\Omega'_c = 0.73$

Μετασχηματισμοί συχνότητας

Από Βαθυπερατό Αναλογικό Φίλτρο σε Αναλογικό Επιλογής Συχνοτήτων :

Παράδειγμα (συνέχεια) : Το πιο απλό αναλογικό LP φίλτρο αποτελείται από έναν αντιστάτη και έναν πυκνωτή, κύκλωμα RC, η έξοδος του οποίου λαμβάνεται στα άκρα του πυκνωτή. Με τη μέθοδο του διγραμμικού μετασχηματισμού, να σχεδιαστεί το αντίστοιχο ψηφιακό φίλτρο, του οποίου η συχνότητα αποκοπής να είναι 30 Hz, όταν η συχνότητα δειγματοληψίας είναι 150 Hz

$$H(s) \Big|_{s=\frac{\Omega_c}{\Omega_c'} s = \frac{s}{0.73}} = \frac{1}{\left(\frac{s}{0.73}\right) + 1} = \frac{0.73}{s + 0.73}$$

Εφαρμόζουμε τον διγραμμικό μετασχηματισμό :

$$H(z) = H(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{z+1}} = \frac{0.73}{\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + 0.73} = \frac{0.42(1 + z^{-1})}{1 - 0.16z^{-1}}$$

Το ζητούμενο ψηφιακό φίλτρο είναι πρώτης τάξης, όπως και το αναλογικό από το οποίο αρχίσαμε τη σχεδίαση, και έχει εξίσωση διαφορών:

$$y[n] = 0.42x[n] + 0.42x[n-1] + 0.16y[n-1]$$

Μετασχηματισμοί συχνότητας

Από Βαθυπερατό Αναλογικό Φίλτρο σε Αναλογικό Επιλογής Συχνοτήτων :

Παράδειγμα Να σχεδιάσετε βαθυπερατό IIR ψηφιακό φίλτρο το οποίο να εξασθενίζει μονοτονικά τις συχνότητες. Η ζώνη διέλευσης του φίλτρου να εκτείνεται μέχρι τα 125 Hz, ενώ η εξασθένιση στη ζώνη αυτή να μην υπερβαίνει τα 0,5 dB. Η μέγιστη εξασθένιση στο όριο της ζώνης αποκοπής να είναι 15 dB, ενώ η συχνότητα στο όριο της ζώνης αποκοπής να είναι 275 Hz. Το όλο σύστημα λειτουργεί με συχνότητα δειγματοληψίας 1 kHz. Η σχεδίαση να γίνει με βάση τον διγραμμικό μετασχηματισμό.

- μονοτονική εξασθένιση για όλες τις συχνότητες → φίλτρο τύπου Butterworth

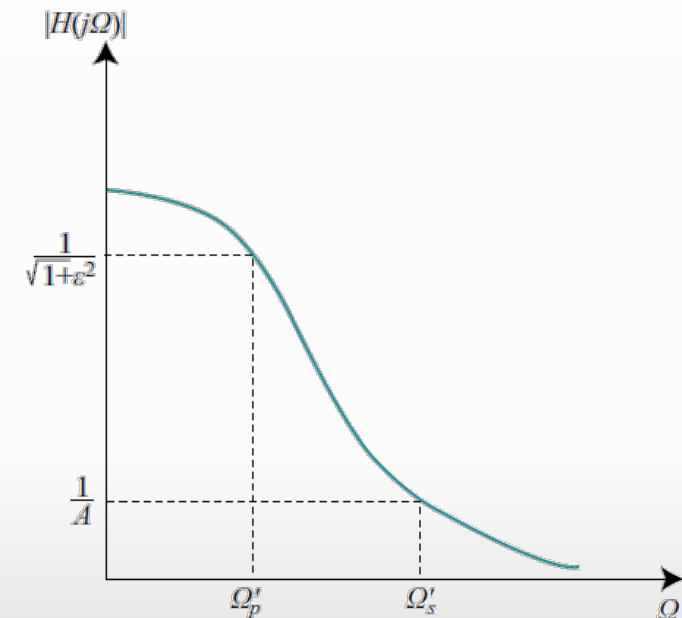
Πρέπει να βρούμε την τάξη : $N = \frac{\log_{10}[(A^2-1)/\varepsilon^2]}{2 \log_{10}[\Omega'_s/\Omega'_p]}$

$$10 \log_{10} \left(\frac{1}{1 + \varepsilon^2} \right) = -0.5 \text{ dB} \rightarrow \frac{1}{1 + \varepsilon^2} = 10^{-0.05} \rightarrow 1 + \varepsilon^2 = 10^{0.05} \rightarrow \varepsilon^2 = 0.122$$

$$10 \log_{10} \left(\frac{1}{A^2} \right) = -15 \text{ dB} \rightarrow A^2 = 31.623$$

$$\Omega'_p = \tan \left(\frac{\omega_p}{2} \right) = \tan \left(\frac{\Omega_p T}{2} \right) = \tan \left(\frac{2\pi 125}{2 \cdot 1000} \right) = 0,41$$

$$\Omega'_s = \tan \left(\frac{\omega_s}{2} \right) = \tan \left(\frac{\Omega_s T}{2} \right) = \tan \left(\frac{2\pi 275}{2 \cdot 1000} \right) = 1,17$$



Μετασχηματισμοί συχνότητας

Από Βαθυπερατό Αναλογικό Φίλτρο σε Αναλογικό Επιλογής Συχνοτήτων :

Παράδειγμα (συνέχεια) Να σχεδιάσετε βαθυπερατό IIR ψηφιακό φίλτρο το οποίο να εξασθενίζει μονοτονικά τις συχνότητες. Η ζώνη διέλευσης του φίλτρου να εκτείνεται μέχρι τα 125 Hz, ενώ η εξασθένιση στη ζώνη αυτή να μην υπερβαίνει τα 0,5 dB. Η μέγιστη εξασθένιση στο όριο της ζώνης αποκοπής να είναι 15 dB, ενώ η συχνότητα στο όριο της ζώνης αποκοπής να είναι 275 Hz. Το όλο σύστημα λειτουργεί με συχνότητα δειγματοληψίας 1 kHz. Η σχεδίαση να γίνει με βάση τον διγραμμικό μετασχηματισμό.

Η τάξη του φίλτρου υπολογίζεται από τη σχέση

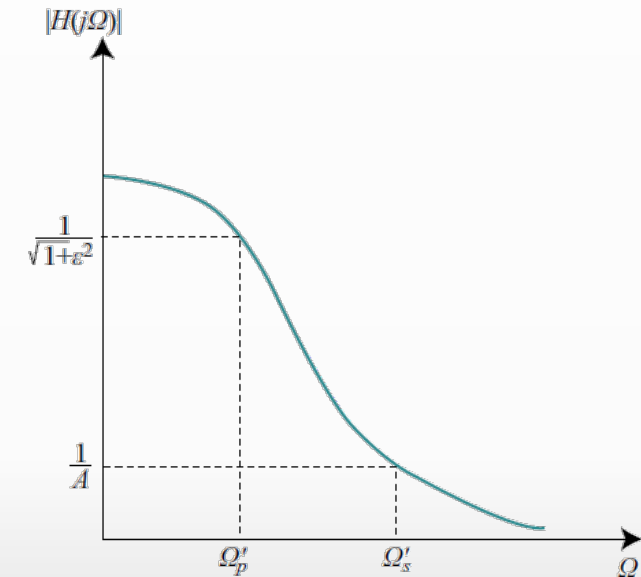
$$N = \frac{\log_{10}[(A^2 - 1)/\varepsilon^2]}{2 \log_{10}[\Omega'_s/\Omega'_p]} = \frac{\log_{10}[251]}{2 \log_{10}[2.85]} = \frac{2.4}{0.91} = 2.63 \rightarrow N = 3$$

Άρα το πρωτότυπο βαθυπερατό φίλτρο $H(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$

Μετασχηματίζουμε το πρωτότυπο βαθυπερατό σε βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα στο όριο της ζώνης διέλευσης ίση με Ω'_p

Για να το κάνουμε αυτό χρειαζόμαστε την συχνότητα Ω_p του πρωτότυπου φίλτρου ($\Omega_c = 1$)

$$\text{Για να την υπολογίσουμε : } \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \rightarrow \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_p}{1}\right)^6} = \frac{1}{1 + 0,122} \rightarrow \Omega_p = 0,702$$



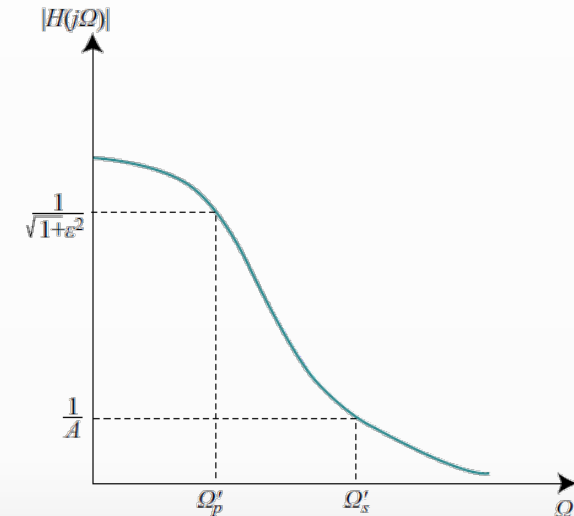
Μετασχηματισμοί συχνότητας

Από Βαθυπερατό Αναλογικό Φίλτρο σε Αναλογικό Επιλογής Συχνοτήτων :

Παράδειγμα (συνέχεια) Να σχεδιάσετε βαθυπερατό IIR ψηφιακό φίλτρο το οποίο να εξασθενίζει μονοτονικά τις συχνότητες. Η ζώνη διέλευσης του φίλτρου να εκτείνεται μέχρι τα 125 Hz, ενώ η εξασθένιση στη ζώνη αυτή να μην υπερβαίνει τα 0,5 dB. Η μέγιστη εξασθένιση στο όριο της ζώνης αποκοπής να είναι 15 dB, ενώ η συχνότητα στο όριο της ζώνης αποκοπής να είναι 275 Hz. Το όλο σύστημα λειτουργεί με συχνότητα δειγματοληψίας 1 kHz. Η σχεδίαση να γίνει με βάση τον διγραμμικό μετασχηματισμό.

Άρα :

$$H(s) \Big|_{s=\frac{\Omega_p}{\Omega'_p} s = \frac{0.702s}{0.41} = 1.712s} = \frac{1}{(1.712s)^3 + 2(1.712s)^2 + 2(1.712s) + 1} = \frac{1}{5.02s^3 + 5.86s^2 + 3.42s + 1}$$



Εφαρμόζουμε τον διγραμμικό μετασχηματισμό :

$$H(z) = H(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{z+1}} = \frac{1}{5.02 \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + 5.86 \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + 3.42 \left(\frac{z-1}{z+1}\right) + 1}$$

Μετασχηματισμοί συχνότητας

Από Βαθυπερατό Ψηφιακό Φίλτρο σε Ψηφιακό Επιλογής Συχνοτήτων:

- Σχεδιάζουμε αρχικά το πρότυπο βαθυπερατό ψηφιακό φίλτρο με βάση την επιθυμητή συχνότητα αποκοπής ω'_c
- Κατόπιν το μετατρέπουμε στο κατάλληλο φίλτρο επιλογής συχνοτήτων με βάση την απεικόνιση συχνότητας του πίνακα:

Μετασχηματισμός	Απεικόνιση	Παράμετροι
Βαθυπερατό	$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}}$	ω'_c $a = \frac{\sin[(\omega'_c - \omega_c)/2]}{\sin[(\omega'_c + \omega_c)/2]}$
Υψιπερατό	$z^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-1} + a}{1 + az^{-1}}$	ω'_c $a = -\frac{\cos[(\omega'_c + \omega_c)/2]}{\cos[(\omega'_c - \omega_c)/2]}$

Μετασχηματισμοί συχνότητας

Από Βαθυπερατό Ψηφιακό Φίλτρο σε Ψηφιακό Επιλογής Συχνοτήτων (συνέχεια):

- Σχεδιάζουμε αρχικά το πρότυπο βαθυπερατό ψηφιακό φίλτρο με βάση την επιθυμητή συχνότητα αποκοπής ω'_c
- Κατόπιν το μετατρέπουμε στο κατάλληλο φίλτρο επιλογής συχνοτήτων με βάση την απεικόνιση συχνότητας του πίνακα:

Μετασχηματισμός	Απεικόνιση	Παράμετροι
Ζωνοπερατό	$z^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-2} - a_1 z^{-1} + a_2}{a_2 z^{-2} - a_1 z^{-1} + 1}$	ω_l, ω_u $\alpha_1 = -2\beta K / (K + 1)$ $\alpha_2 = (K - 1) / (K + 1)$ $\beta = \frac{\cos[(\omega_u + \omega_l)/2]}{\cos[(\omega_u - \omega_l)/2]}$ $K = \cot \frac{\omega_u - \omega_l}{2} \tan \left(\frac{\omega'_c}{2} \right)$
Ζωνοφρακτικό	$z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-2} - a_1 z^{-1} + a_2}{a_2 z^{-2} - a_1 z^{-1} + 1}$	ω_l, ω_u $\alpha_1, \alpha_2, \beta \text{ } \acute{\omicron}\text{μοια}$ με παραπάνω $K = \tan \frac{\omega_u - \omega_l}{2} \tan \left(\frac{\omega'_c}{52} \right)$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος & Εικόνας

Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών

Α. Μπακλέζος

abaklezos@hmu.gr