Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος & Εικόνας

Μάθημα 1ο

Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών

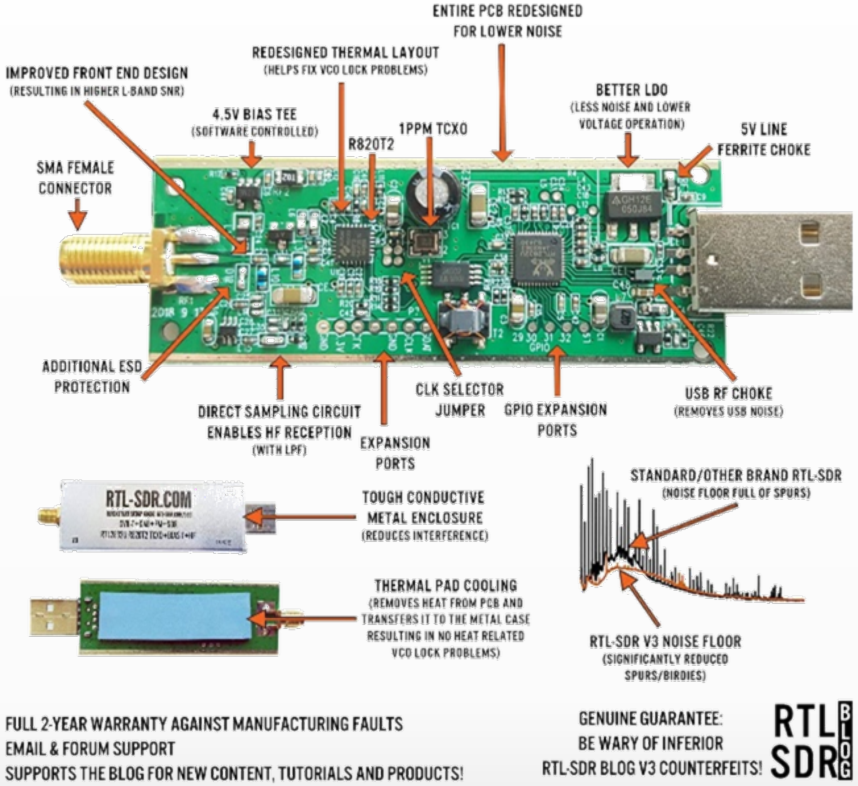
ΕΙΣΑΓΩΓΗ – Σήματα Διακριτού Χρόνου

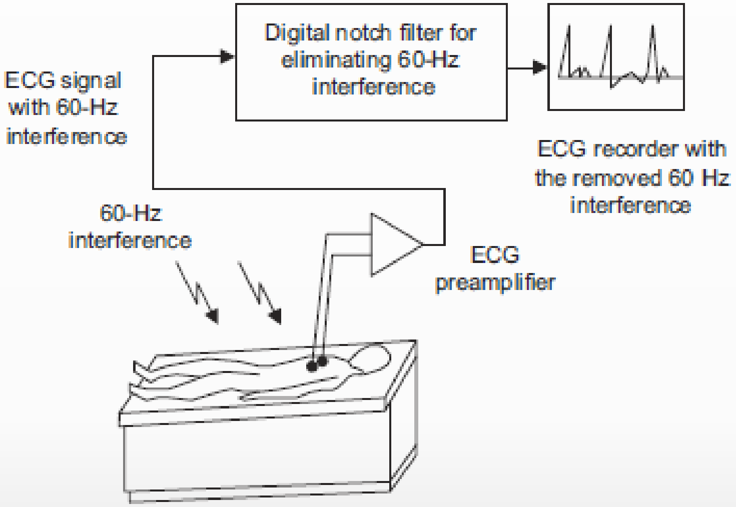
Α. Μπακλέζος

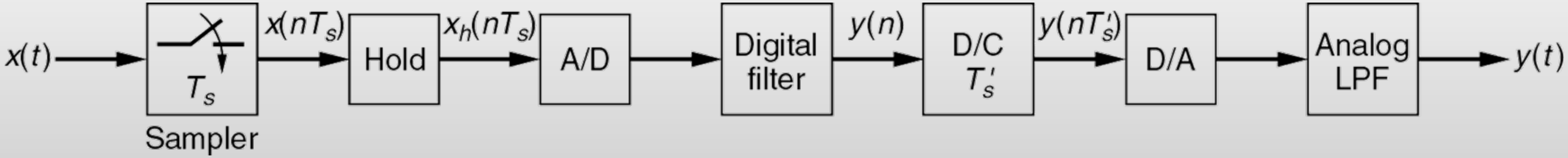
abaklezos@hmu.gr

ΥΛΗ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ :

- **ΨΗΦΙΑΚΑ ΣΗΜΑΤΑ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ**

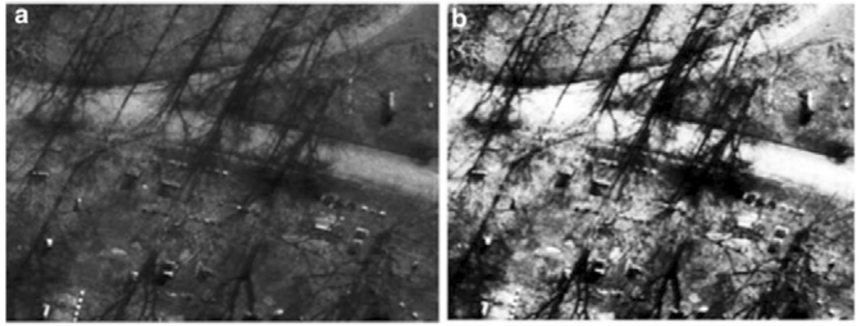




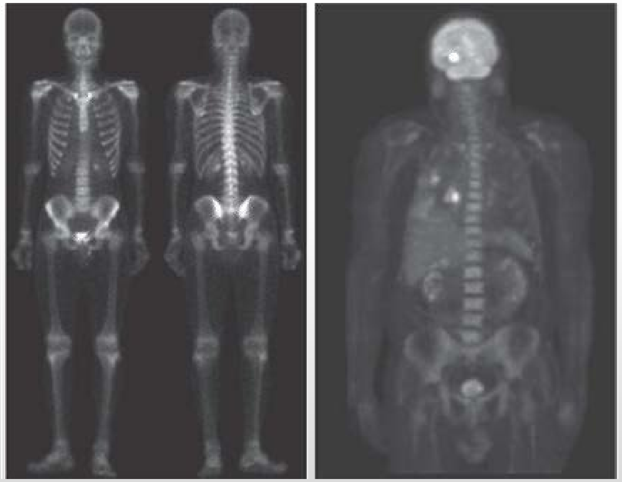


ΥΛΗ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ :

- ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΕΙΚΟΝΑΣ



Διόρθωση Αντίθεσης (Contrast)



Συμπίεση
(Compression)

Διόρθωση Θολώματος (deblurring)

Συγγράμματα - Εύδοξος:

Μάθημα [0806.4.003.0]: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος & Εικόνας
Εξάμηνο 4 - Εαρινό
Επιλογές Συγγραμμάτων:

1. **Βιβλίο [102071800]: Σήματα και Συστήματα Συνεχούς και Διακριτού Χρόνου με Matlab και Octave, 3η Έκδοση, Παρασκευάς Μιχάλης Λεπτομέρειες**
2. **Βιβλίο [68373921]: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος, Βελώνη Αναστασία, Μυριδάκης Νικόλαος Λεπτομέρειες**
3. Βιβλίο [112690259]: Βασικές Τεχνικές Ψηφιακής Επεξεργασίας Σημάτων, 2η Έκδοση, Μουστακίδης Γεώργιος Β. Λεπτομέρειες
4. Βιβλίο [102071118]: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος, 1η Βελτιωμένη Έκδοση, Antoniou A. Λεπτομέρειες
5. **Βιβλίο [86057371]: Επεξεργασία σήματος συνεχούς και διακριτού χρόνου, Καφεντζής Γεώργιος Λεπτομέρειες**
6. Βιβλίο [68384821]: Ψηφιακή Επεξεργασία Εικόνας, 4η Έκδοση, Gonzales, Στέφανος Κόλλιας (επιμέλεια) Λεπτομέρειες
7. Βιβλίο [68372511]: ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΙΚΟΝΑΣ, ΠΑΠΑΜΑΡΚΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ Λεπτομέρειες

1

2

5

Αξιολόγηση

Ο τελικός βαθμός του μαθήματος προκύπτει από το σταθμισμένο μέσο όρο των βαθμών:
- **Της τελικής γραπτής εξέτασης (70%)** σε όλη τη διδαχθείσα ύλη μέσω ανάπτυξης θεωρητικών ζητημάτων και επίλυσης αριθμητικών προβλημάτων. **(π.χ. 6*0,7=4,2)**

– **Της βαθμολογίας του εργαστηριακού μέρους❉ (30%)** του μαθήματος η οποία προκύπτει ως ο μέσος όρος όλων των επιμέρους βαθμών των ασκήσεων που έχουν διεξαχθεί με επιτυχία. (**π.χ. 6*0,3=1,8**).

Τελικός βαθμός 4,2+1,8=6

Προαιρετικά:

– **Bonus 1: Σε κάποια μαθήματα θα υπάρξουν ασκήσεις προς επίλυση.**
Η σωστή και έγκαιρη επίλυση και αποστολή τους επιφέρει 1 βαθμό επιπλέον στον τελικό βαθμό. (Άριστα 11)

– **Bonus 2: Σε όλες τις διαλέξεις θεωρίας θα λαμβάνονται παρουσίες.**
Τουλάχιστον 20 παρουσίες επιφέρουν 1 βαθμό bonus στον τελικό βαθμό. (Άριστα 12)
Τουλάχιστον 13 παρουσίες επιφέρουν 0,5 βαθμό bonus στον τελικό βαθμό. (Άριστα 11,5)

Τελικός βαθμός 4,2+1,8+1+1=6+1+1 = 8

Αξιολόγηση

Το εργαστήριο, οι παρουσίες και οι ασκήσεις bonus μπορούν να έχουν σημαντικό ρόλο στον τελικό σας βαθμό!

Παράδειγμα (1):

1.Εργαστήριο βαθμός : 5/10

2. Τελική εξέταση : 5/10
3. Ασκήσεις διαφανειών (50% σωστά λυμένες)= 0,5
4. Παρουσίες (13)= 0,5

$$\left.\begin{array}{l} 5*0{,}3=1{,}5 \\ 5*0{,}7=3{,}5 \end{array}\right\} 5+0{,}5+0{,}5=6\ \tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{o}\varsigma\ \beta\alpha\theta\mu o\varsigma$$ ☺

Αξιολόγηση

«Δεν θέλω να κάνω εργαστήριο, ούτε ασκήσεις, ούτε να έρχομαι στις διαλέξεις..»
"αν γράψω 6 στις εξετάσεις δεν «περνάω» το μάθημα;"

Παράδειγμα (2):

1.Εργαστήριο βαθμός : 0/10

2. Τελική εξέταση : 6/10
3. Ασκήσεις διαφανειών (0% σωστά λυμένες)= 0
4. Παρουσίες (0)= 0

όμως με 20 παρουσίες

$$\left.\begin{matrix} 0*0{,}3=0 \\ 6*0{,}7=4{,}2 \end{matrix}\right\} 4{,}2 \neq 5\ \textit{τελικός βαθμος}$$ ☹

$$\left.\begin{matrix} 0*0{,}3=0 \\ 6*0{,}7=4{,}2 \end{matrix}\right\} 4{,}2 + 1 = 5{,}2\ \textit{τελικός βαθμος}$$ ☺

Παράδειγμα (3):

1.Εργαστήριο βαθμός : 0/10

2. Τελική εξέταση : **7**/10
3. Ασκήσεις διαφανειών (0% σωστά λυμένες)= 0
4. Παρουσίες (0)= 0

$$\left.\begin{matrix} 0*0{,}3=0 \\ 7*0{,}7=4{,}9 \end{matrix}\right\} 4{,}9 \approx 5\ \textit{τελικός βαθμος}$$ ☺

Αξιολόγηση

Παράδειγμα (4):

1.Εργαστήριο βαθμός : 0/10

2. Τελική εξέταση : 5/10
3. Ασκήσεις διαφανειών (100% σωστά λυμένες)= 1
4. Παρουσίες (13)= 0,5

$$\left.\begin{array}{r} 0*0{,}3=0 \\ 5*0{,}7=3{,}5 \end{array}\right\} 3{,}5 + 1 + 0{,}5 = 5\ \tau\varepsilon\lambda\iota\kappa ó\varsigma\ \beta\alpha\theta\mu o\varsigma$$

☺

Παράδειγμα (5):

1.Εργαστήριο βαθμός : 8/10

2. Τελική εξέταση : 2/10
3. Ασκήσεις διαφανειών (50% σωστά λυμένες)= 0,5
4. Παρουσίες (13)= 0,5

$$\left.\begin{array}{r} 8*0{,}3=2{,}4 \\ 2*0{,}7=1{,}4 \end{array}\right\} 1{,}4 + 2{,}4 + 0{,}5 + 0.5 = 4{,}8 \approx 5\ \tau\varepsilon\lambda\iota\kappa ó\varsigma\ \beta\alpha\theta\mu o\varsigma$$

☺

Εργαστήριο

1. **Φοιτητές Νέου Προγράμματος (5ετές ΠΠΣ)**	2. **Φοιτητές Παλαιού Προγράμματος (Υπόχρεοι Παρακολούθησης)**	3. **Φοιτητές Παλαιού Προγράμματος (Μη Υπόχρεοι Παρακολούθησης)**
Για κάθε απουσία ή μη εμπρόθεσμη παράδοση εργασίας → αυτόματος μηδενισμός στην αντίστοιχη εργασία.	**1 απουσία** (με αυτόματο μηδενισμό αντίστοιχης εργασίας)	Παράδοση **ατομικών** εργασιών έως το τέλος του εξαμήνου. (Θα ανακοινωθεί ακριβής ημερομηνία παράδοσης εντός του εξαμήνου)

Εργαστήριο

- Εργαστήριο σε **ζευγάρια**, κοινή αναφορά-εργασία,

MATLAB
GNU Octave

- https://www.gnu.org/software/octave/

- Παραδοτέα εργαστηρίου
  - Υποβάλει ένας από τους δύο (1 zip στις εργασίες του eclass)
    - **Αναφορά** σε MS Word/LibreOffice Writer
      - **Τελευταία Σελίδα : αναφορά της συνεισφοράς του κάθε μέλους**
    - **Κώδικας** *.m αρχεία Matlab/Octave με σχόλια
    - *Έως δύο εβδομάδες μετά το εργαστήριο,*
      - *μην το αφήνετε τελευταία στιγμή,*
        αφήστε χρόνο για τυχόν προβλήματα δικτύου κτλ,
        εκπρόθεσμη υποβολή με email = 0

Ενημέρωση & Επικοινωνία

Eclass μαθήματος:

https://eclass.hmu.gr/modules/user/index.php?course=EE127

Ηλεκτρονική Επικοινωνία:

- abaklezos@hmu.gr
- an.baklezos@gmail.com
- Προσωπικά μηνύματα μέσω eclass

Ώρες Γραφείου (Παλιό Κτήριο, 2ος όροφος, εργαστήριο 07, 2η πόρτα στα δεξιά όπως βγαίνετε από το ασανσέρ)

- **Τετάρτη 11:00 - 17:00**
- **Πέμπτη 11:00 - 16:30**
- **Προσοχή στο inbox του ακαδημαϊκού σας email, γεμίζει και χάνετε email/ενημερώσεις**

Σήματα

- **σήμα** : το σύνολο των τιμών που παίρνει μία φυσική ποσότητα

- **σήμα** : συλλογή μίας ή περισσότερων συναρτήσεων ή ακολουθιών (κανάλια) μίας ή περισσότερων μεταβλητών (διαστάσεις)

- **Στην απλή περίπτωση σήμα** είναι μία συνάρτηση ή ακολουθία (1 κανάλι) μίας μεταβλητής(1 διάσταση).
  - Π.χ Θερμοκρασία με το χρόνο

- Όταν τα σήματα είναι συναρτήσεις ή ακολουθίες περισσότερων της μίας μεταβλητών, τότε ονομάζονται πολυδιάστατα σήματα.

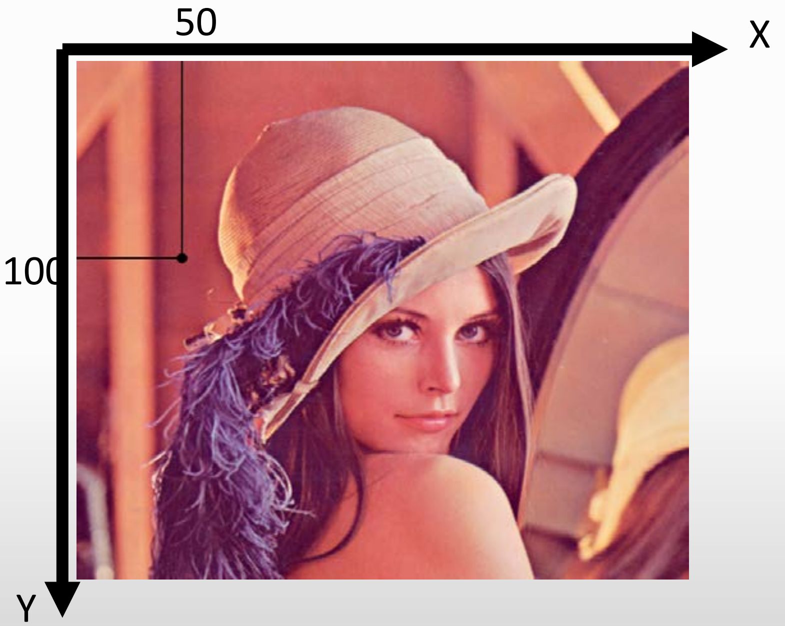
  - Ασπρόμαυρη εικόνα : ένα δισδιάστατο σήμα με ανεξάρτητες μεταβλητές τις συντεταγμένες (x, y) του επιπέδου και πλάτος τη φωτεινότητα I της εικόνας $I = f(x, y)$

  - Video : τρισδιάστατο σήμα με ανεξάρτητες μεταβλητές τις συντεταγμένες του επιπέδου και τον χρόνο (x, y, n) και πλάτος τη φωτεινότητα του I video $I = f(x, y, n)$

Σήματα

- Όταν τα σήματα είναι περισσότερες από μία συναρτήσεις ή ακολουθίες, τότε ονομάζονται πολυκαναλικά σήματα και παριστάνονται με διανύσματα.
  - Έγχρωμη εικόνα : δισδιάστατο σήμα τριών καναλιών.
    - οι δύο διαστάσεις →συντεταγμένες του επιπέδου
    - τα τρία κανάλια → τιμές των τριών χρωμάτων Κόκκινο, Πράσινο, Μπλε (RGB: Red, Green, Blue).

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_R(x,y) \\ x_G(x,y) \\ x_B(x,y) \end{bmatrix}$$



Σήματα

- Η βασική κατηγοριοποίηση των σημάτων γίνεται με κριτήριο τον τύπο της ανεξάρτητης μεταβλητής, η οποία μπορεί να είναι ένα φυσικό μέγεθος, όπως χρόνος ή απόσταση.
- Συνήθως η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο πραγματικός χρόνος, για το λόγο αυτό έχει επικρατήσει να ονομάζεται χρόνος.
- Τα σήματα διακρίνονται σε
    - α) σήματα διακριτού χρόνου (discrete time signals), όπου ο χρόνος n δέχεται συγκεκριμένες τιμές από το σύνολο των ακεραίων αριθμών $\mathbf{Z}$ και
    - β) σήματα συνεχούς χρόνου (continuous time signals), όπου ο χρόνος είναι συνεχής μεταβλητή με τιμές στο σύνολο των πραγματικών αριθμών R

Σήματα

- Η εξαρτημένη μεταβλητή μπορεί να είναι και αυτή ένα φυσικό μέγεθος και ονομάζεται πλάτος του σήματος.

- Το πλάτος συμβολίζεται με
  - $x[n]$ για τα σήματα διακριτού χρόνου ή
  - $x(t)$ για τα σήματα συνεχούς χρόνου.

- τέσσερις κατηγορίες σημάτων:

  - **σήματα διακριτού χρόνου συνεχούς πλάτους**, όπως είναι οι ημερήσιοι δείκτες του χρηματιστηρίου

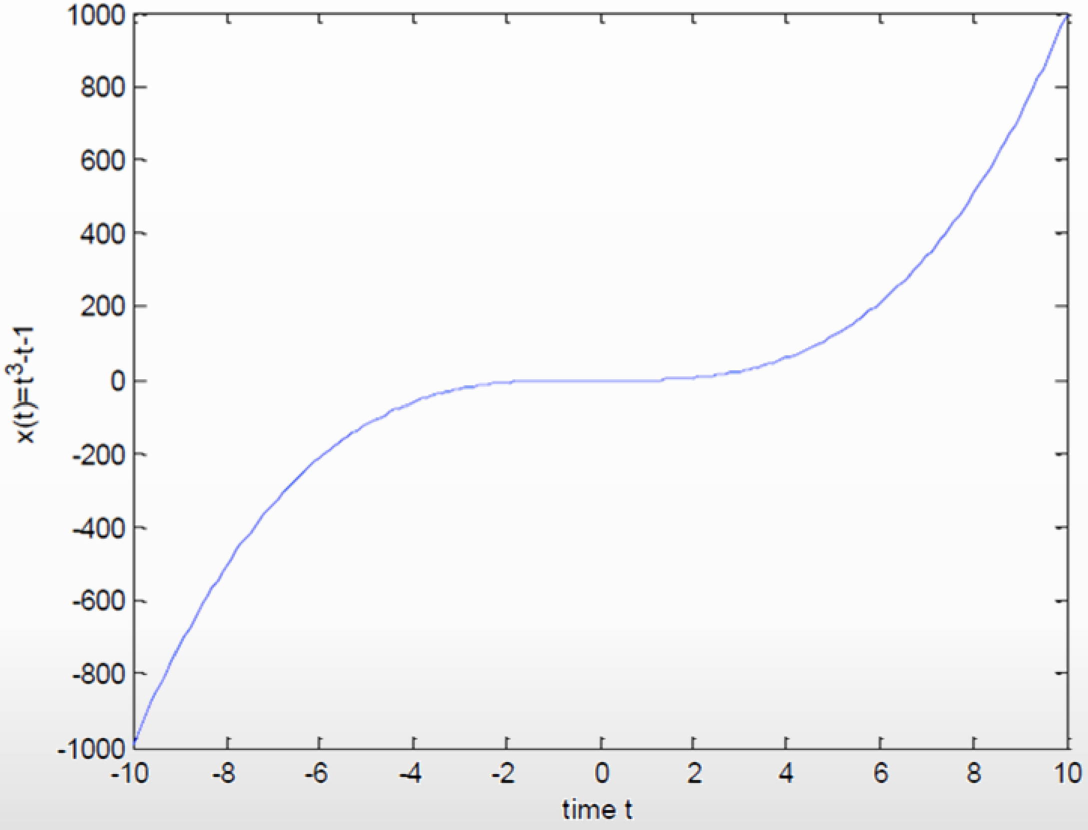
  - **σήματα διακριτού χρόνου διακριτού πλάτους ή ψηφιακά σήματα**, όπως είναι τα σήματα σε έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή

  - **σήματα συνεχούς χρόνου συνεχούς πλάτους ή αναλογικά σήματα**, όπως είναι η θερμοκρασία ως συνάρτηση του χρόνου

  - **σήματα συνεχούς χρόνου διακριτού πλάτους**, όπως είναι το πλήθος των «φάουλ» μίας ομάδας «μπάσκετ» σε σχέση με τον χρόνο

Σήματα

- σήματα συνεχούς χρόνου - συνεχούς πλάτους ή αναλογικά σήματα
  - $x(t) = t^3 - t - 1$, t ∈ $[-10,10]$
  - Ορίζεται για κάθε τιμή του t στο διάστημα $[-10,10]$
  - $x(t)$ παίρνει πραγματικές τιμές
    - → πραγματικό σήμα συνεχούς χρόνου



Σήματα Διακριτού Χρόνου

- **Σήμα Διακριτού Χρόνου** : $x[n]$ ακολουθία πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών, συνάρτηση **ακέραιας** μεταβλητής n $(n \in Z)$.

- Το σήμα διακριτού χρόνου $x[n]$ δεν ορίζεται για μη-ακέραιες τιμές του n

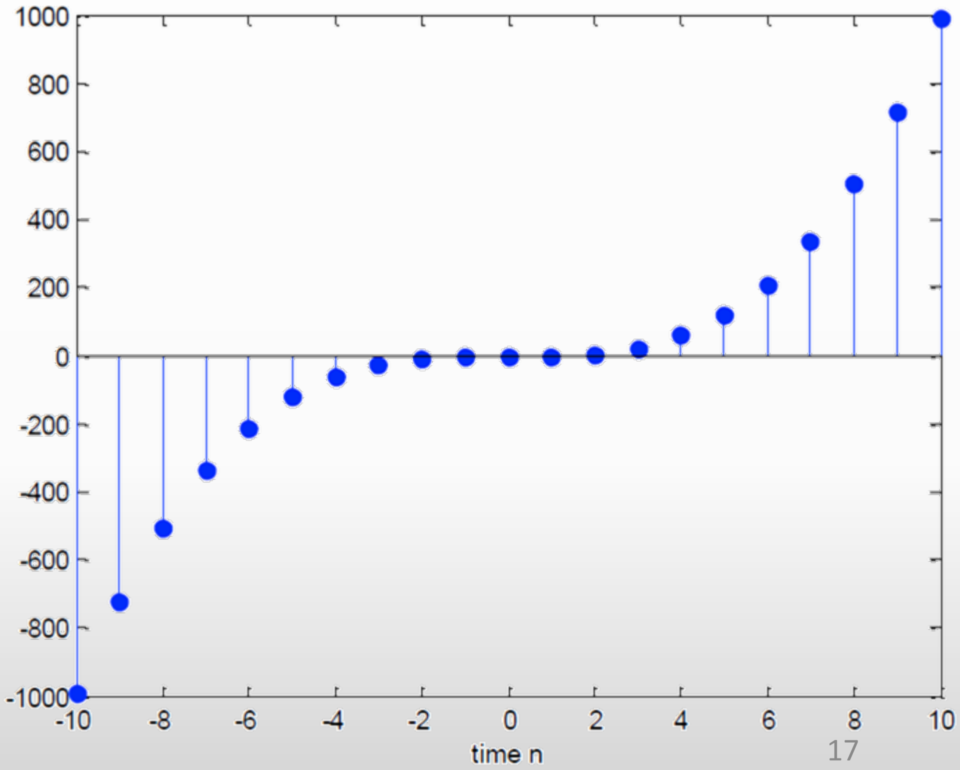
- Η μεταβλητή n δεν είναι υποχρεωτικά χρόνος (μπορεί π.χ. να είναι χωρική συντεταγμένη)

- Παράδειγμα
  - $x[n] = n^3 - n - 1\ ,\ n \in [-10{:}10]$

- $[-10{:}10] = [-10, -9, -8, \dots, 8{,}9{,}10]$

- $n_1, n_2 \in N$ και $n_1 \le n_2$
- $[n_1{:}n_2] = [n_1, n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_2 - 2, n_2 - 1, n_2]$

- $x[n]$ παίρνει πραγματικές τιμές
  → πραγματικό σήμα διακριτού χρόνου



Σήματα Διακριτού Χρόνου

- Γενικά $x[n] \in C$ (παίρνει μιγαδικές τιμές)→ μιγαδικό σήμα διακριτού χρόνου.

$$x[n] = a[n] + j \cdot b[n], \qquad j = \sqrt{-1}$$

$Re\{x[n]\} = a[n]$, πραγματικό μέρος του x[n]
$Im\{x[n]\} = b[n]$, φανταστικό μέρος του x[n]

$$x[n] = |x(n)| \cdot e^{j\varphi[n]}$$

$|x(n)|$: Μέτρο του $x[n]$

$$|x(n)| = \sqrt{Re^2\{x[n]\} + Im^2\{x[n]\}} = \sqrt{a^2[n] + b^2[n]}$$

$\varphi[n]$: Φάση του $x[n]$, Πρωτεύουσα Φάση $\in [-\pi, \pi]$

$$\varphi[n] = \arg(x[n]) = arctan\frac{Im\{x[n]\}}{Re\{x[n]\}} = tan^{-1}\frac{b[n]}{a[n]} \in [-\pi, \pi]$$

Σχέση Euler:

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \mathrm{Re}\{e^{j\varphi}\} = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$$

$$\sin(\varphi) = \mathrm{Im}\{e^{j\varphi}\} = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$$

Σήματα Διακριτού Χρόνου

- Όταν $x[n] \in C$ ορίζεται και το **συζυγές σήμα** $x^*[n]$.

$$x^*[n] = a[n] - j \cdot b[n]$$

$Re\{x^*[n]\} = a[n] = Re\{x[n]\}$, πραγματικό μέρος του $x^*[\mathrm{n}]$
$Im\{x^*[n]\} = -b[n] = -Im\{x[n]\}$, φανταστικό μέρος του $x^*[\mathrm{n}]$

$$x^*[n] = |x^*(n)| \cdot e^{-j\varphi[n]}$$

$|x^*(n)| = |x(n)|$: Μέτρο του $x^*[n]$

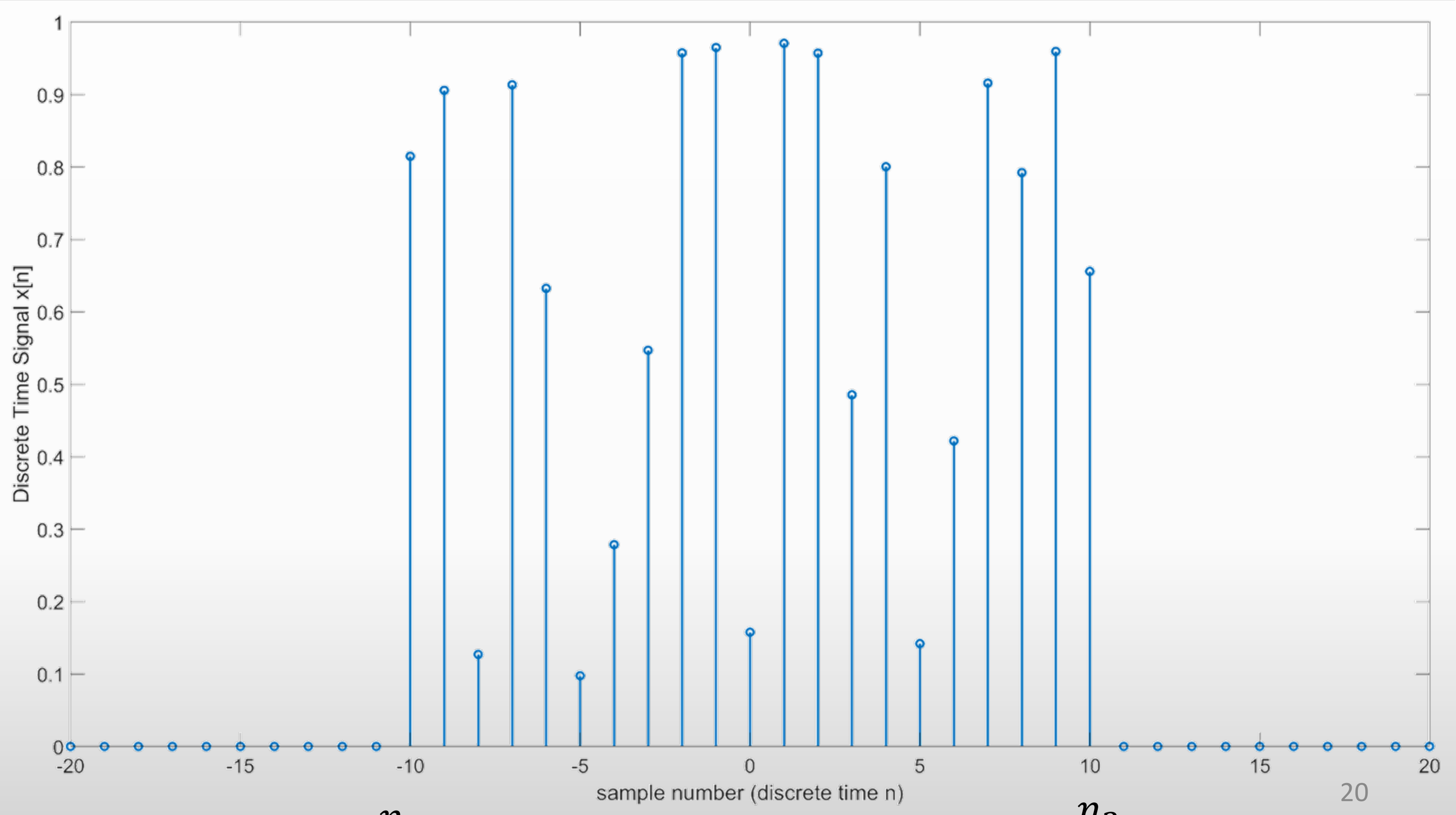
$$|x^*(n)| = \sqrt{Re^2\{x^*[n]\} + Im^2\{x^*[n]\}} = \sqrt{a^2[n] + (-b[n])^2} = \sqrt{a^2[n] + b^2[n]} = |x(n)|$$

Φάση του $x^*[n]$:$-\varphi[\mathrm{n}]$

$$\arg(x^*[n]) = -\arg(x[n])$$

Σήματα Διακριτού Χρόνου - Διάρκεια

- Τα σήματα διακριτού χρόνου διακρίνονται με κριτήριο τη διάρκειά τους
  - σε σήματα πεπερασμένης διάρκειας
    - το σήμα είναι μια πεπερασμένη ακολουθία από τη χρονική στιγμή n_1 έως τη στιγμή n_2 και 0 έξω από αυτό το διάστημα
    - $n_1 = -10\,, n_2 = 10$



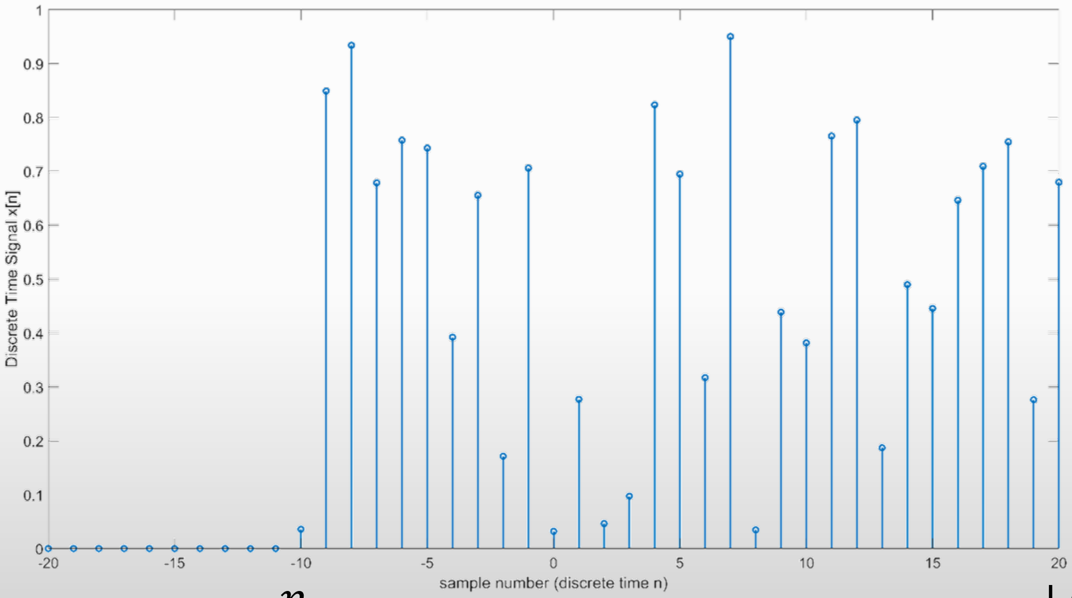
n_1 n_2

Σήματα Διακριτού Χρόνου - Διάρκεια

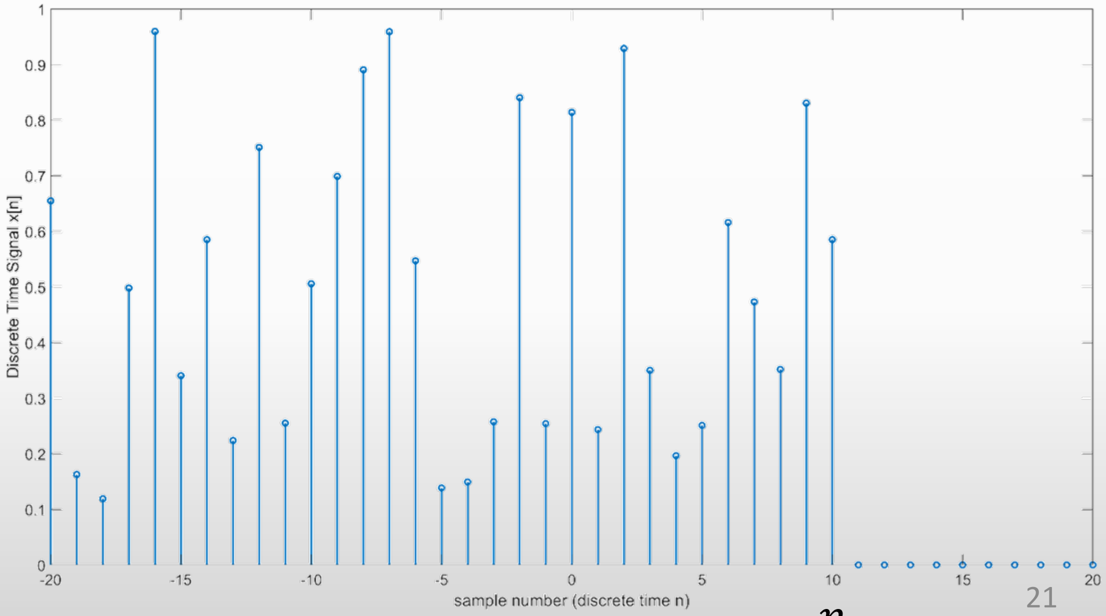
- Και σε σήματα άπειρης διάρκειας
  - Το σήμα είναι μία άπειρη ακολουθία,
    - δεξιάς πλευράς (η διάρκεια του σήματος αρχίζει κάποια χρονική στιγμή n_o και εκτείνεται μέχρι το συν άπειρο),
    - αριστερής πλευράς (από το πλην άπειρο και τελειώνει κάποια χρονική στιγμή n_o),
    - ή αμφίπλευρη (εκτείνεται από το πλην άπειρο μέχρι το συν άπειρο)

- Δεξιάς Πλευράς $n_o = -10$

Αριστερής Πλευράς $n_o = 10$



n_o $+\infty$



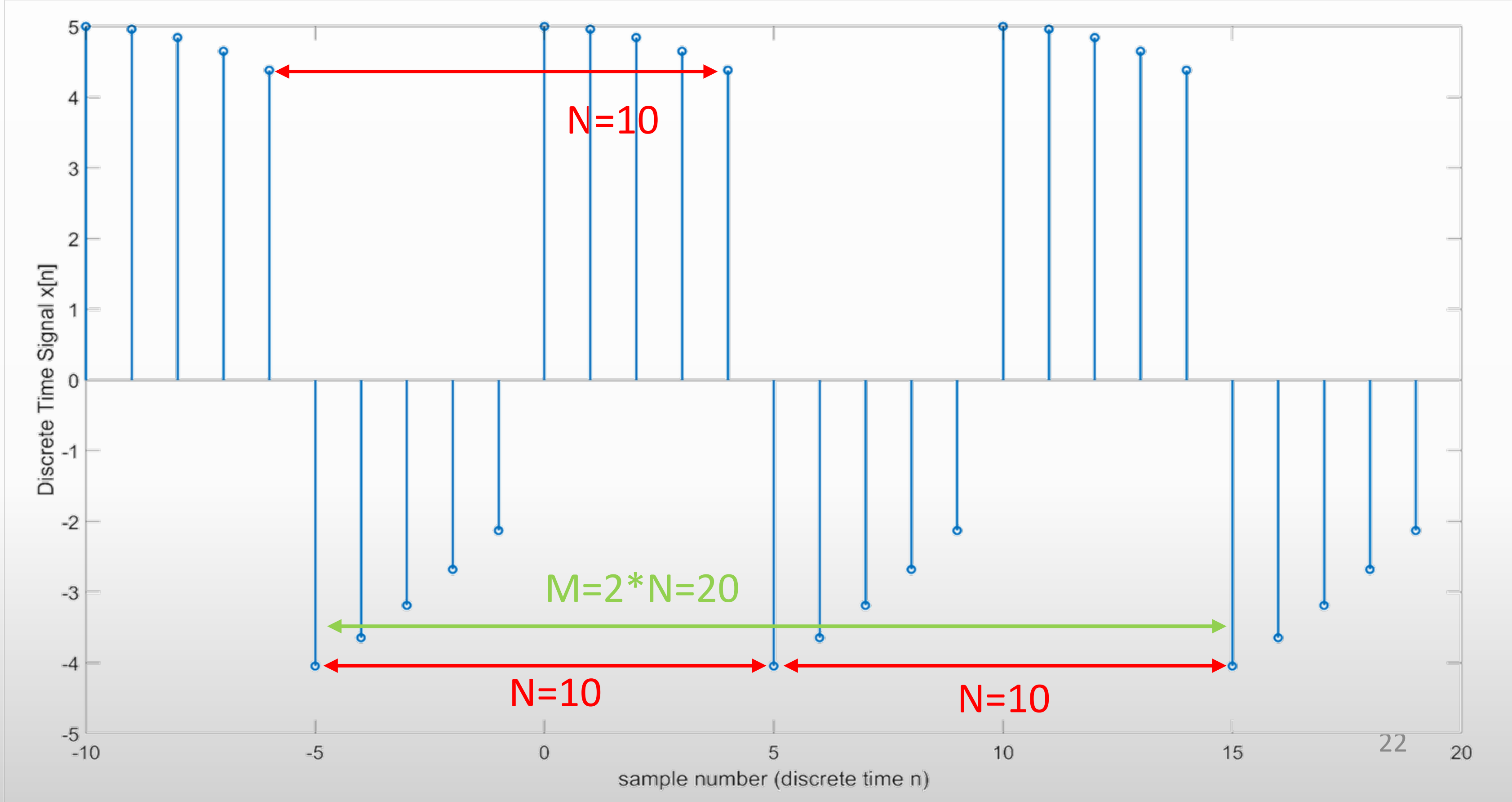
$-\infty$ n_o

Σήματα Διακριτού Χρόνου - Περιοδικότητα

- **Περιοδικό σήμα :** αν υπάρχει φυσικός (θετικός *ακέραιος)* N τέτοιος ώστε

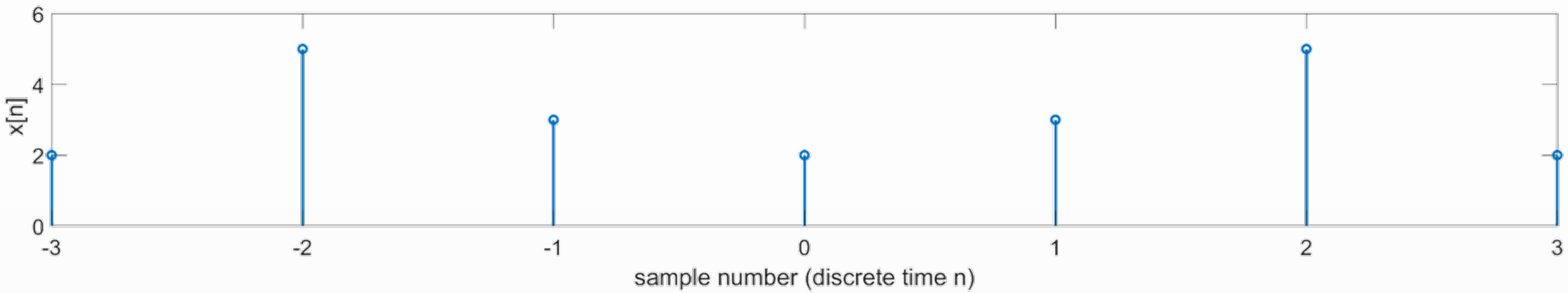
$$x[n] = x[n+N], \forall n$$

- Το σήμα δηλαδή επαναλαμβάνεται κάθε N δείγματα
- Ο μικρότερος αριθμός N που ικανοποιεί τη σχέση αυτή ονομάζεται (**θεμελιώδης**) **περίοδος** του σήματος.
- Αν N=1, τότε το σήμα σταθερό.



Σήματα Διακριτού Χρόνου - Συμμετρία

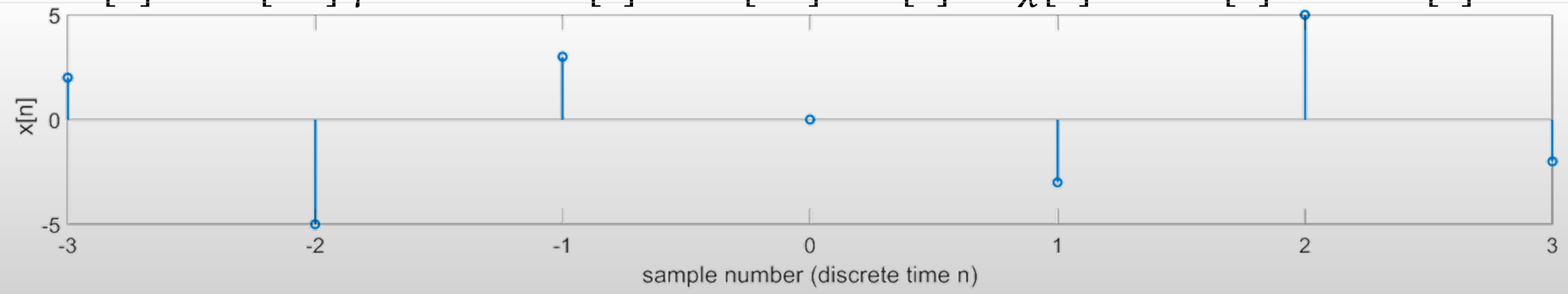
- Ένα πραγματικό σήμα διακριτού χρόνου $x[n]$ λέγεται **άρτιο**, όταν $x[n] = x[-n], \forall n$
  - έχει ίσες τιμές σε αντίθετους χρόνους → έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα του πλάτους στο $n = 0$



- Ένα πραγματικό σήμα διακριτού χρόνου $x[n]$ λέγεται **περιττό**, όταν $x[n] = -x[-n], \forall n$
  - έχει αντίθετες τιμές σε αντίθετους χρόνους → έχει κέντρο συμμετρίας το (0,0)
  - Για περιττά σήματα ισχύει ότι $x[0] = 0$

    το σήμα είναι περιττό:

    $x[n] = -x[-n]$ για $\mathrm{n} = 0 \rightarrow x[0] = -x[-0] \rightarrow x[0] = -\chi[0] \rightarrow 2 \cdot x[0] = 0 \rightarrow x[0] = 0$



Σήματα Διακριτού Χρόνου - Συμμετρία

- Άσκηση : Τι συμμετρία παρουσιάζει η πραγματική ακολουθία $\mathrm{x}[n] = x_1[n] \cdot x_2\,[n]$ εάν η $x_1[n]$ είναι άρτια και η $x_2[n]$ περιττή;

  Πρέπει να βρούμε τι σχέση έχουν οι $\mathrm{x}[n]$ και $\mathrm{x}[-n]$:

  $\mathrm{x}[n] = x_1[n] \cdot x_2\,[n] \rightarrow \mathrm{x}[-n] = x_1[-n] \cdot x_2\,[-n]$

  όμως $x_1[n]$ είναι άρτια $\rightarrow x_1\,[-n] = x_1[n]$ και $x_2[n]$ είναι περιττή $\rightarrow x_2\,[-n] = -x_2[n]$

  $\rightarrow \mathrm{x}[-n] = x_1[-n] \cdot x_2\,[-n] = x_1[n] \cdot (-x_2\,[n]) = -(x_1[n] \cdot x_2\,[n]) = -\mathrm{x}[n]$

  Άρα η $\mathrm{x}[n]$ είναι περιττή.

- Άσκηση : Βρείτε τη συμμετρία της πραγματικής ακολουθίας $\mathrm{y}[n] = x^2[n]$ και $\mathrm{y}[n] = x^3[n]$:

  1) εάν η $x[n]$ είναι άρτια;
  2) εάν η $x[n]$ είναι περιττή;

- Άσκηση : Δείξτε ότι το άθροισμα των τιμών περιττού σήματος διακριτού χρόνου είναι μηδέν

Σήματα Διακριτού Χρόνου - Συμμετρία

- Κάθε πραγματικό σήμα διακριτού χρόνου $\mathrm{x}[n]$ μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα ενός άρτιου (even) $x_e[n]$ και ενός περιττού (odd) σήματος $x_o[n]$:

$$\mathrm{x}[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

με

$$x_e[n] = \frac{1}{2}\left[x[n] + x[-n]\right]$$
$$x_o[n] = \frac{1}{2}\left[x[n] - x[-n]\right]$$

- **Άσκηση** : Βρείτε το άρτιο και το περιττό σήμα που συνθέτουν την ακολουθία $\mathrm{x}[n] = 2 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 1$

$$x_e[n] = \frac{1}{2}\left[x[n] + x[-n]\right] = \frac{1}{2}[(2 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 1) + (2 \cdot (-n)^2 - 3 \cdot (-n) + 1)]$$
$$= \frac{1}{2}[(2 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 1) + (2 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1)] \rightarrow x_e[n] = 2 \cdot n^2 + 1$$
$$x_o[n] = \frac{1}{2}\left[x[n] - x[-n]\right] = \frac{1}{2}[(2 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 1) - (2 \cdot (-n)^2 - 3 \cdot (-n) + 1)]$$
$$= \frac{1}{2}[(2 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 1) - (2 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1)] \rightarrow x_o[n] = -3 \cdot n$$

- **Άσκηση** : Βρείτε το άρτιο και το περιττό σήμα που συνθέτουν την ακολουθία $\mathrm{x}[n] = 2 \cdot n^3 - 5 \cdot n^2 - 7 \cdot n + 6$

Σήματα Διακριτού Χρόνου - Συμμετρία

- Ένα μιγαδικό σήμα διακριτού χρόνου $x[n]$ λέγεται **συζυγές συμμετρικό** , όταν $x[n] = x^*[-n], \forall n$
- Ένα μιγαδικό σήμα διακριτού χρόνου $x[n]$ λέγεται **συζυγές αντι-συμμετρικό** , όταν $x[n] = -x^*[-n], \forall n$
    - $x^*[n]$ το συζυγές του $x[n]$ ($x[n] = a[n] + j \cdot b[n] \rightarrow x^*[n] = a[n] - j \cdot b[n]$)

- Κάθε μιγαδικό σήμα διακριτού χρόνου $\mathrm{x}[n]$ μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα ενός **συζυγούς συμμετρικού** (**conjugate symmetric ή hermitian**) $x_e[n]$ και ενός **συζυγούς αντισυμμετρικού** (**conjugate antisymmetric**) σήματος $x_o[n]$:

$$\mathrm{x}[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

με

$$x_e[n] = \frac{1}{2}[x[n] + x^*[-n]]$$
$$x_o[n] = \frac{1}{2}[x[n] - x^*[-n]]$$

Σχέσεις Euler:

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \mathrm{Re}\{e^{j\varphi}\} = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$$

$$\sin(\varphi) = \mathrm{Im}\{e^{j\varphi}\} = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$$

Σήματα Διακριτού Χρόνου - Συμμετρία

- **Άσκηση** : Εξετάστε ως προς τη συμμετρία το σήμα $\mathrm{x}[n] = j \cdot e^{\frac{j\pi n}{4}}$

Είναι μιγαδικό σήμα άρα πρέπει να βρούμε τι σχέση εχει το $x^*[-n]$ με το $x[n]$.

$$\mathrm{x}[n] = j \cdot e^{\frac{j\pi n}{4}} = j \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + j \cdot sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right] = -\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) + j \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$$

$$\rightarrow \mathrm{x}[-n] = -\sin\left(\frac{\pi(-n)}{4}\right) + j \cdot \cos\left(\frac{\pi(-n)}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) + j \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$$

$$\rightarrow x^*[-n] = \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) - j \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) = -\left[-\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) + j \cdot \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right] = -x[n]$$

Άρα το σήμα $\mathrm{x}[n]$ είναι συζυγές αντισυμμετρικό.

- **Άσκηση** : Εξετάστε ως προς τη συμμετρία το σήμα $\mathrm{x}[n] = e^{\frac{3j\pi n}{8}}$

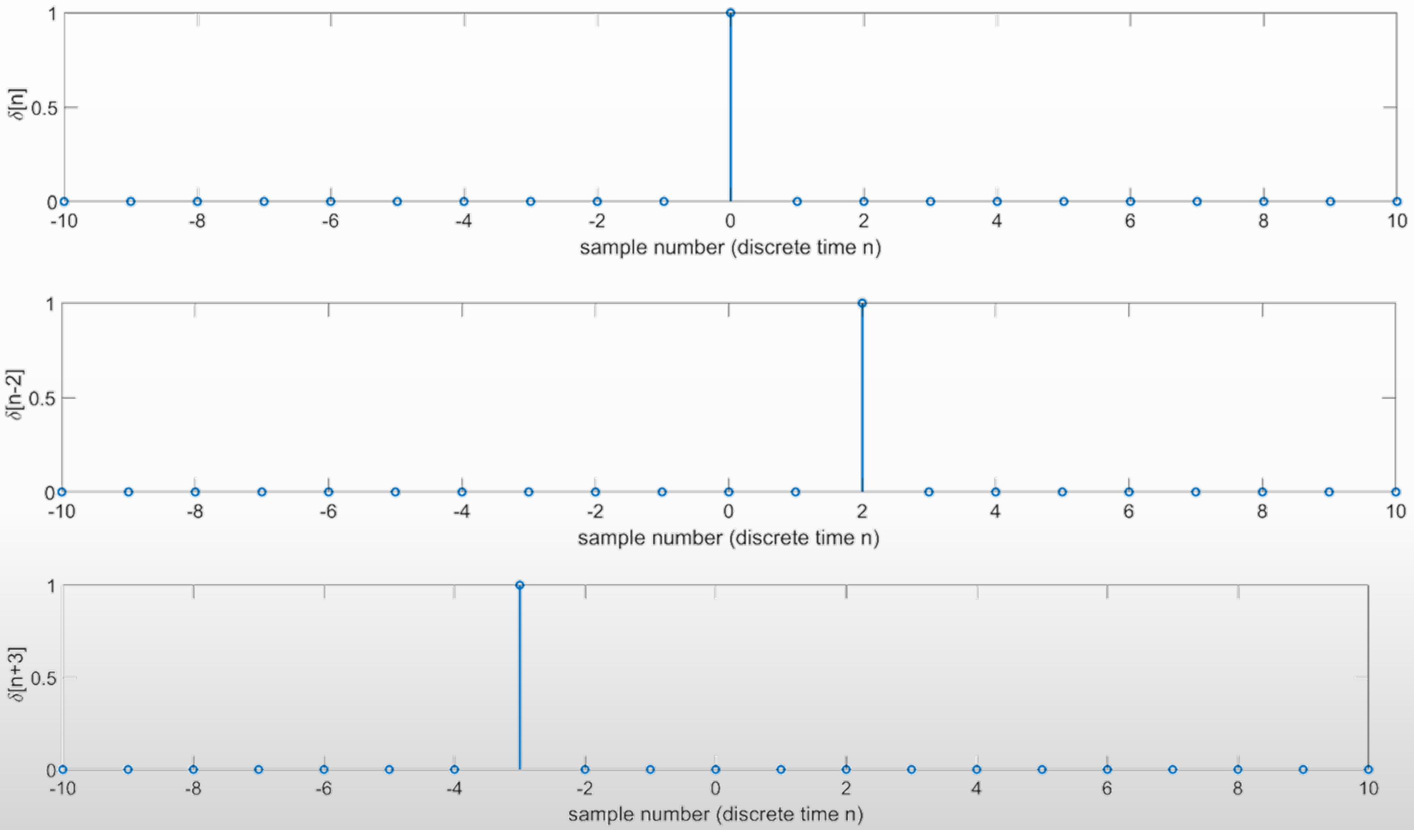
Βασικά Σήματα Διακριτού Χρόνου

- Σήμα μοναδιαίου δείγματος ή Δέλτα του Kronecker ή κρουστική ώση ή μοναδιαία ώση :

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$$

ή μετατοπισμένο

$$\delta[n-n_0] = \begin{cases} 1, n = n_0 \\ 0, n \neq n_0 \end{cases}$$



$\delta[n]$

$\delta[n-2]$

$\delta[n+3]$

Ανάλυση σήματος σε Άθροισμα Δέλτα

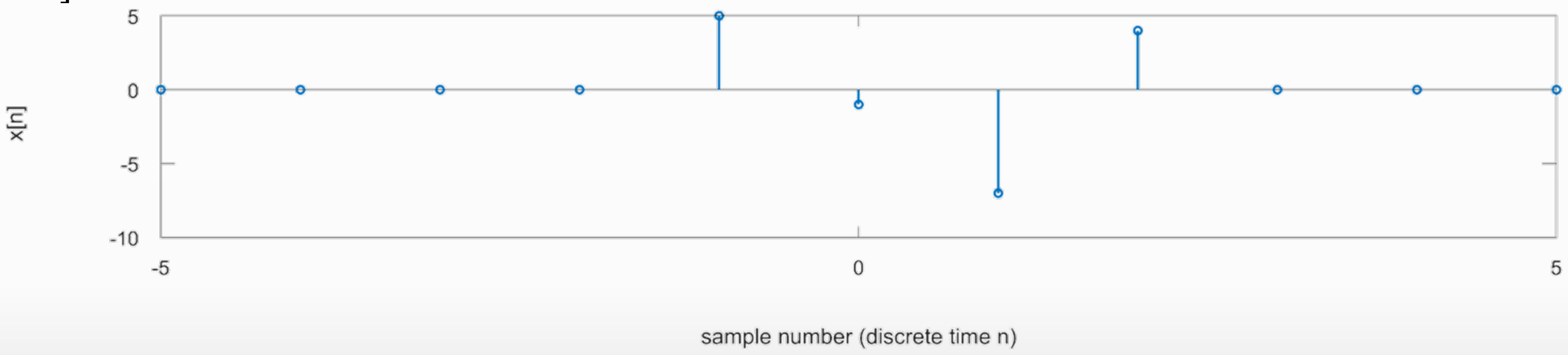
- Η δελτα $\delta[n]$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή ενός διακριτού σήματος $\mathbf{x}[n]$ σύμφωνα με τη σχέση

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x[k] \cdot \delta[n-k]$$

Κάθε συνάρτηση δέλτα έχει πλάτος την αντίστοιχη τιμή του σήματος $\mathbf{x}\ [\boldsymbol{n}]$ την χρονική στιγμή $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}$ *εκεί δηλαδή που το* $\delta[n-k] = 1$

Παράδειγμα :

$$x[n] = \begin{cases} 5, n = -1 \\ -1, n = 0 \\ -7, n = 1 \\ 4, n = 2 \end{cases}$$



$x[n] = 5 \cdot \delta[n+1] + (-1) \cdot \delta[n] + (-7)\ \cdot \delta[n-1] + (4) \cdot \delta[n-2]$ → $x[n] =$ [5 -1 -7 4]

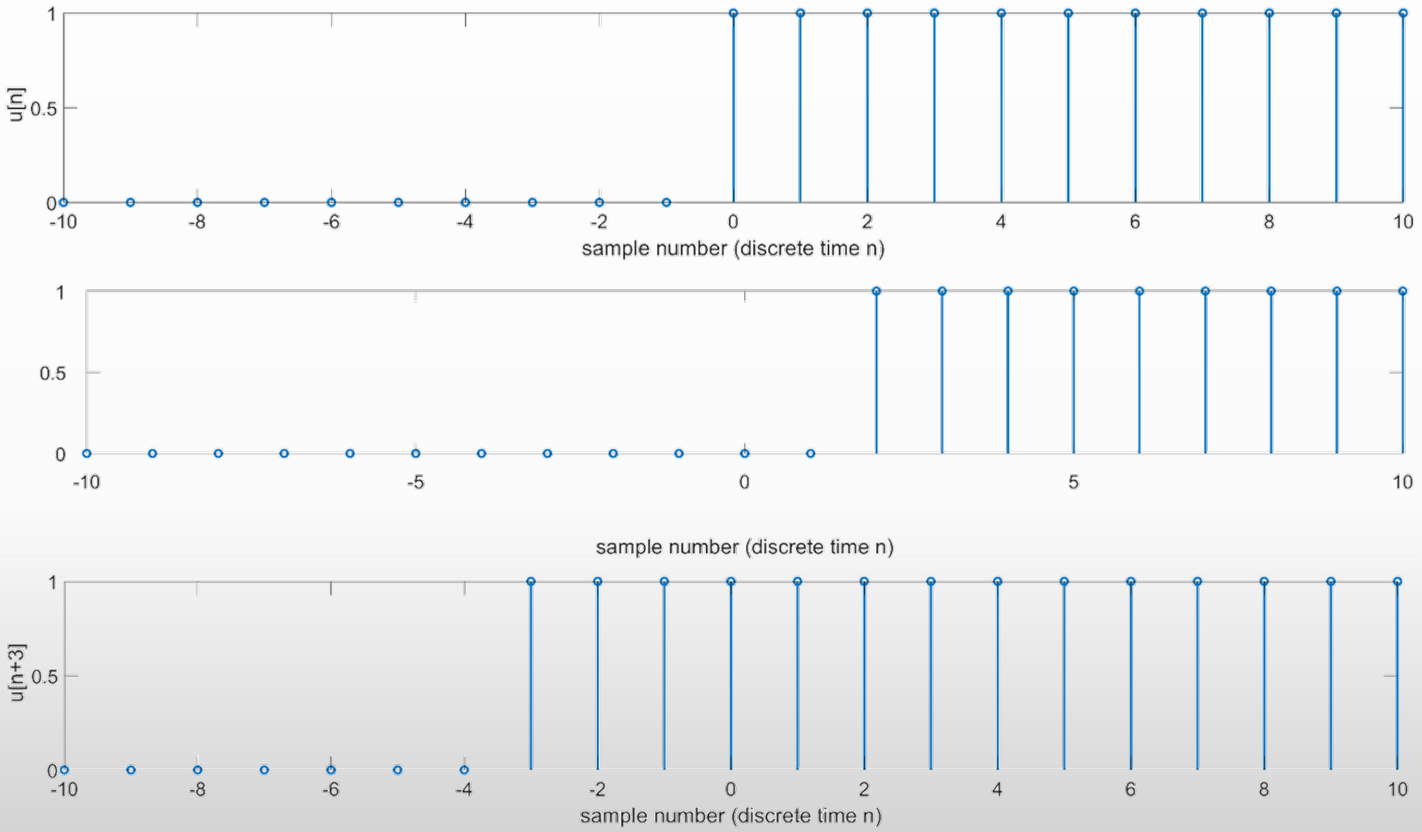
Βασικά Σήματα Διακριτού Χρόνου

- Σήμα μοναδιαίου βήματος (βηματική συνάρτηση) :

$$u[n] = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$$

ή μετατοπισμένο

$$\mathrm{u}[n - n_0] = \begin{cases} 1, n \geq n_0 \\ 0, n < n_0 \end{cases}$$



$u[n]$

$u[n-2]$

$u[n+3]$

Βασικά Σήματα Διακριτού Χρόνου

- Η βηματική συνάρτηση συνδέεται με τη Δέλτα :

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

αλλά και ως

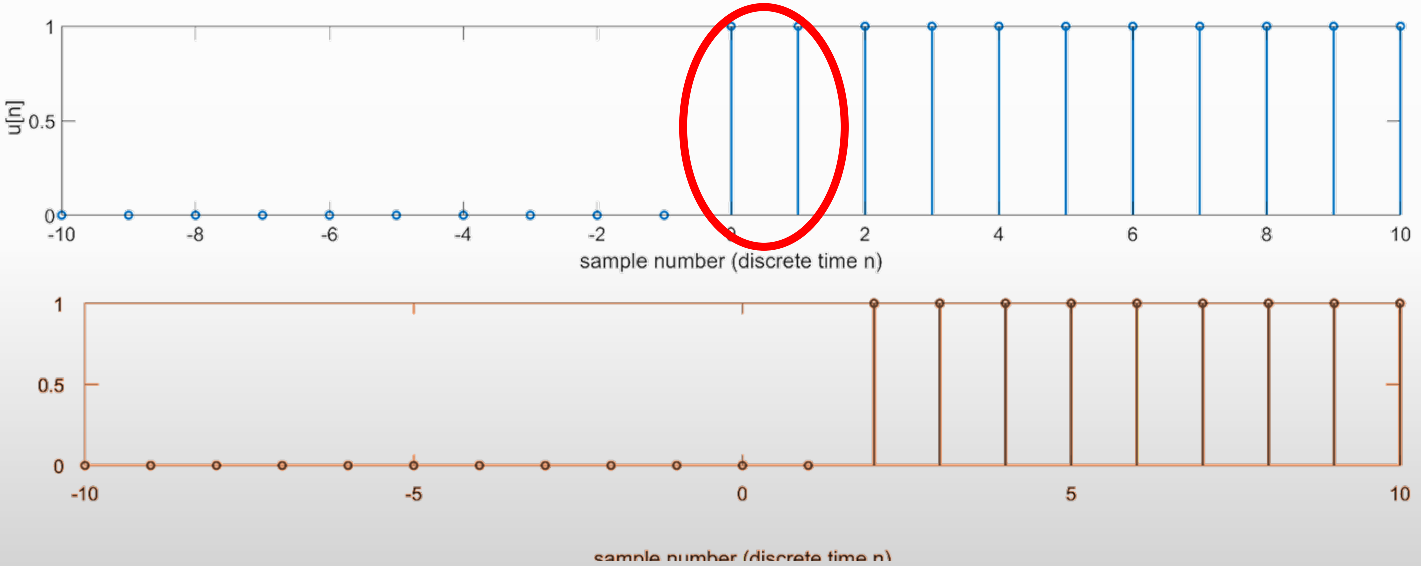
$$u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k] \quad \text{ή} \quad u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$$

- Γενικά μπορουμε να εκφράσουμε ένα διακριτό παλμό πλάτους 1 και διάρκειας N δειγμάτων ως:

$$\Pi[N] = u[n] - u[n-N]$$

Παράδειγμα : εκφράστε παλμό δυο δειγμάτων με την βοήθεια της βηματικής :

$$\Pi[n] = u[n] - u[n-N] = u[n] - u[n-2]$$



$u[n]$

$u[n-2]$

Ανάλυση σήματος σε Άθροισμα Δέλτα

Να εκφραστεί (α) σε άθροισμα μετατοπισμένων μοναδιαίων ώσεων $\delta[n]$ και (β) σαν άθροισμα μετατοπισμένων μοναδιαίων βηματικών συναρτήσεων $u[n]$, η ακολουθία:

$$x(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 2 & n = 1 \\ 3 & n = 2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

(α) Ως άθροισμα μοναδιαίων κρουστικών (ώσεων) είναι :

$$x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2]$$

(β) Στην παραπάνω επίλυση θέτουμε όπου $\delta[n]$ το $u[n] - u[n-1]$:

$$x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] = (u[n] - u[n-1]) + 2(u[n-1] - u[n-2]) + 3(u[n-2] - u[n-3])$$
$$= u[n] - u[n-1] + 2u[n-1] - 2u[n-2] + 3u[n-2] - 3u[n-3] = u[n] + u[n-1] + u[n-2] - 3u[n-3]$$

- Άσκηση : Αναλύστε σε δέλτα τον παλμό $\Pi(\mathrm{n}) = 0.5 \cdot \left[u[n] - u[n-4]\right]$
- Άσκηση : Αναλύστε σε δέλτα τον παλμό $\Pi(\mathrm{n}) = -0.3 \cdot \left[u[n-4] - u[n-7]\right]$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος & Εικόνας

Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών

Α. Μπακλέζος

abaklezos@hmu.gr