Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος & Εικόνας

Μάθημα 13ο

Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών

Μετασχηματισμός Z (συνέχεια..)

Α. Μπακλέζος

abaklezos@hmu.gr

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Ζ

- Ο <u>αντίστροφος μετασχηματισμός Ζ</u> ορίζεται ως το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) \cdot z^{n-1} dz$$

όπου είναι μία αριστερόστροφη κλειστή καμπύλη ολοκλήρωσης γύρω από την αρχή των αξόνων ($z = 0$)και εντός της Περιοχής Σύγκλισης (ROC).

Υπολογισμός

- Με ανάπτυξη σε δυναμοσειρές (μακρά διαίρεση – long division)
- **Με ανάπτυξη σε μερικά αθροίσματα**

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z) \cdot z^{n-1} dz}$$

- Αντίστροφος μετασχηματισμός πολυωνύμου :

❖ Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z μπορεί να υπολογιστεί με **βάση τον ορισμό του μετασχηματισμού Z**.
❖ Τα σήματα που προκύπτουν είναι σήματα **πεπερασμένης** διάρκειας.

Παράδειγμα :
Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z του $\mathrm{X(z)} = 3 + 4z^2 + 5z^{-3}$

❖ Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Z

$$\mathrm{X}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot z^{-n}$$

$$\mathrm{X(z)} = 4z^2 + 0z^1 + 3z^0 + 0z^{-1} + 0z^{-2} + 5z^{-3}$$

Έτσι ο αντίστροφος Μ/Τ Z είναι :

$$x[n] = 4\delta[n+2] + 3\delta[n] + 5\delta[n-3]$$

(πεπερασμένης διάρκειας)

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Ζ

- Αντίστροφος μετασχηματισμός ρητής συνάρτησης $X(z)$ μέσω μακράς διαίρεσης (long division):

Όταν η $X(z)$ δίνεται σε κλασματική μορφή $X(z) = B(z)/A(z)$ και έχει περιοχή σύγκλισης ROC $|z| > |a|$

τότε μπορεί να εκφραστεί σε πολυωνυμική μορφή, διαιρώντας το $B(z)$ με το $A(z)$:

$$X(z) = x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \cdots$$

Στην περίπτωση αυτή η ακολουθία $x[n]$ μπορεί να παραχθεί από τη σχέση:

$$x[n] = x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + \cdots$$

Για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Ζ εκτελούμε τη διαίρεση $B(z)/A(z)$, η οποία δίνει ένα (πιθανά άπειρης τάξης) πολυώνυμο, του οποίου οι διατεταγμένοι συντελεστές των δυνάμεων του z^{-1} ή του z είναι οι τιμές της ακολουθίας $x[n]$.

Το μειονέκτημα της μεθόδου είναι ότι δεν οδηγεί σε μια κλειστή μαθηματική μορφή της ακολουθίας $x[n]$ και δεν εφαρμόζεται για αμφίπλευρα σήματα (μη αιτιατά) δηλαδή για $X(z)$ με περιοχή σύγκλισης δακτύλιο.

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Ζ

<u>Παράδειγμα:</u> Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Ζ της συνάρτησης:

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad ROC: |z| > \frac{1}{2}$$

Απάντηση: Η μορφή της περιοχής σύγκλισης υποδηλώνει ότι το σήμα $x[n]$ είναι δεξιάς πλευράς (αιτιατό).

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1-\frac{1}{2}z^{-1} \\ \cline{2-2}
-1+\frac{1}{2}z^{-1} & \boxed{1+\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}+\frac{1}{8}z^{-3}+\frac{1}{16}z^{-4}+\cdots} \\
\qquad -\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2} & \\
\qquad\qquad -\frac{1}{4}z^{-2}+\frac{1}{8}z^{-3} & \\
\qquad\qquad\qquad -\frac{1}{8}z^{-3} & \\
\qquad\qquad\qquad +\frac{1}{16}z^{-4} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad \cdots &
\end{array}$$

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z

<u>Παράδειγμα:</u> Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z της συνάρτησης:

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad ROC: |z| > \frac{1}{2}$$

Απάντηση: Η μορφή της περιοχής σύγκλισης υποδηλώνει ότι το σήμα $x[n]$ είναι δεξιάς πλευράς (αιτιατό).

Εκτελούμε τη διαίρεση $B(z)/A(z)$, ώστε να αποδώσουμε τη συνάρτηση $X(z)$ ως δυναμοσειρά ως προς z^{-1} και βρίσκουμε:

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = 1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2} + \frac{1}{8}z^{-3} + \frac{1}{16}z^{-4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n}$$

Επομένως, η ακολουθία του σήματος διακριτού χρόνου είναι:

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Ζ

- Αντίστροφος μετασχηματισμός ρητής συνάρτησης σε άθροισμα μερικών κλασμάτων :

❖ Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Ζ μπορεί να υπολογιστεί με **ανάλυση της ρητής συνάρτησης σε άθροισμα απλών κλασμάτων**..

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \boxed{\mathrm{G}\frac{\prod_{k=1}^{M}(1-\beta_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-p_k z^{-1})}}$$

με **απλούς (διακριτούς) πόλους** $p_k, k = 1,2,\ldots,N$ τότε για τον υπολογισμό του αντίστροφου μετ/σμού Ζ αναλύεται η $X(z)$ σε άθροισμα απλών (πρώτης τάξης) κλασμάτων :

Α) Αν $\mathrm{N} > \mathrm{M}$ ($\beta\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma\ \mathrm{A}(z) > \beta\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma\ \mathrm{B}(z)$) τότε

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1-p_k z^{-1}}$$

$$\mu\varepsilon\ \sigma\upsilon\nu\tau\varepsilon\lambda\varepsilon\sigma\tau\acute{\varepsilon}\varsigma\ A_k = [(1-p_k z^{-1})\cdot X(z)]_{z=p_k}$$

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Ζ

- Αντίστροφος μετασχηματισμός ρητής συνάρτησης με άθροισμα μερικών κλασμάτων :
- :

Αν $\mathrm{N} = \mathrm{M} \rightarrow \mathrm{X}_2(z) = \mathrm{C}_0 z^{-0} = \mathrm{C}_0$ σταθερός όρος

Β) Αν $\mathrm{N} \leq \mathrm{M}$ (βαθμός $\mathrm{A}(z) \leq$ βαθμός $\mathrm{B}(z)$) τότε με διαίρεση πολυωνύμων γράφουμε την $X(z)$

$$X(z) = \mathrm{X}_1(z) + \mathrm{X}_2(z)$$

Στη συνέχεια σαν το Α

$$\mathrm{X}_1(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}}$$

συντελεστές A_k

$$A_k = [(1 - p_k z^{-1}) \cdot X(z)]_{z=p_k}$$

$$\mathrm{X}_2(z) = \sum_{k=0}^{\mathrm{M}-N} \mathrm{C}_k z^{-k}$$

συντελεστές C_k

C_k υπολογίζονται από τη διαίρεση $\frac{B(z)}{A(z)}$ και προκύπτει το $\mathrm{X}_2(z)$ βαθμού $\mathrm{M} - \mathrm{N}$

Πολυώνυμο το πολύ M-N βαθμού

❖ Τελικά αντίστροφος μετασχηματισμός → αντίστροφος μετασχηματισμός Z σε κάθε όρο του αθροίσματος χρησιμοποιώντας τα ζεύγη του μετασχηματισμού Z και την ιδιότητα της γραμμικότητας του μετασχηματισμού Z

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Ζ

- Αν υπάρχει πόλος με πολλαπλότητα, οι τύποι μεταβάλλονται

❖ Αν η $X(z)$ έχει ένα διπλό πόλο $\boldsymbol{p}$ η ανάλυση σε απλά κλάσματα είναι της μορφής

$$X(z) = \frac{A_1}{1 - pz^{-1}} + \frac{A_2}{(1 - pz^{-1})^2}$$

με συντελεστές

$$A_1 = p\left[\frac{d}{dz}\{(1 - pz^{-1})^2 \cdot X(z)\}\right]_{z=p}$$

$$A_2 = [(1 - pz^{-1})^2 \cdot X(z)]_{z=p}$$

❖ Αν η $X(z)$ έχει ένα διπλό πόλο p και N απλούς πόλους p_k η ανάλυση σε απλά κλάσματα είναι της μορφής

$$X(z) = \frac{A_1}{1 - pz^{-1}} + \frac{A_2}{(1 - pz^{-1})^2} + \sum_{k=1}^{N} \frac{\mathrm{B}_k}{1 - p_k z^{-1}}$$

Με

$$\mathrm{B}_k = [(1 - p_k z^{-1}) \cdot X(z)]_{z=p_k}$$

Όπως στην περίπτωση των απλών πόλων προηγουμένως

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Ζ

- Παράδειγμα 1 : να υπολογιστεί ο αντίστροφος Μ/Τ Ζ του μετασχηματισμού $X(z) = \frac{1}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}, |z| > 2$

Ο $X(z)$ είναι ρητή συνάρτηση με βαθμό του αριθμητή (M=0) μικρότερο από το βαθμό του παρονομαστή (N=2) άρα θα προσπαθήσουμε να το εκφράσουμε σαν άθροισμα απλών κλασμάτων :
Έχει δύο πόλους $p_1 = -2, p_2 = -1$
:

$$X(z) = \frac{1}{1+3z^{-1}+2z^{-2}} = \frac{1}{(1-p_1 z^{-1})\cdot(1-p_2 z^{-1})} = \frac{1}{(1+2z^{-1})\cdot(1+z^{-1})} = \frac{1}{(1+2z^{-1})}\cdot\frac{1}{(1+z^{-1})}$$

$$X(z) = \frac{1}{(1+2z^{-1})}\cdot\frac{1}{(1+z^{-1})} = \frac{A_1}{(1+2z^{-1})} + \frac{A_2}{(1+z^{-1})}$$

Με $A_1 = [(1+2z^{-1})\cdot X(z)]_{z=-2} = \left[(1+2z^{-1})\cdot\frac{1}{(1+2z^{-1})}\cdot\frac{1}{(1+z^{-1})}\right]_{z=-2} = \left[\frac{1}{(1+z^{-1})}\right]_{z=-2} = 2$

$$A_2 = [(1+z^{-1})\cdot X(z)]_{z=-1} = \left[(1+z^{-1})\cdot\frac{1}{(1+2z^{-1})}\cdot\frac{1}{(1+z^{-1})}\right]_{z=-1} = \left[\frac{1}{(1+2z^{-1})}\right]_{z=-1} = -1$$

Άρα $X(z) = \frac{2}{(1+2z^{-1})} - \frac{1}{(1+z^{-1})} \overset{Z^{-1}}{\longleftrightarrow} x[n] = 2(-2)^n u[n] - (-1)^n u[n]$

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Ζ

- Παράδειγμα 2 : να υπολογιστεί ο αντίστροφος Μ/Τ Ζ του μετασχηματισμού $X(z) = \frac{1+\frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2}, |z| > \frac{1}{4}$

Ο $X(z)$ είναι ρητή συνάρτηση με βαθμό του αριθμητή (Μ=1) μικρότερο από το βαθμό του παρονομαστή (Ν=2) και έχει ένα διπλό πόλο $p = \frac{1}{4}$ άρα θα προσπαθήσουμε να το εκφράσουμε σαν άθροισμα απλών κλασμάτων :

$$X(z) = \frac{1+\frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2} = \frac{A_1}{1-pz^{-1}} + \frac{A_2}{(1-pz^{-1})^2}$$

$$A_1 = p\left[\frac{d}{dz}\{(1-pz^{-1})^2 \cdot X(z)\}\right]_{z=p} = \frac{1}{4}\left[\frac{d}{dz}\left\{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2 \cdot \frac{1+\frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2}\right\}\right]_{z=\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\left[\frac{d}{dz}\left\{1+\frac{1}{4}z^{-1}\right\}\right]_{z=\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{4}z^{-2}\right]_{z=\frac{1}{4}} = -1$$

$$A_2 = [(1-pz^{-1})^2 \cdot X(z)]_{z=p} = \left[\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2 \cdot \frac{1+\frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2}\right]_{z=\frac{1}{4}} = \left[1+\frac{1}{4}z^{-1}\right]_{z=\frac{1}{4}} = 2$$

Άρα $X(z) = \frac{-1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2} = -\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + 8\frac{\frac{1}{4}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2} \overset{Z^{-1}}{\longleftrightarrow} x[n] = -\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 8(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} u[n]$

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Ζ

- Παράδειγμα 3 : να υπολογιστεί ο αντίστροφος Μ/Τ Ζ του μετασχηματισμού $X(z) = \frac{4-\frac{7}{4}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}, |z| > \frac{1}{2}$

Ο $X(z)$ είναι ρητή συνάρτηση με βαθμό του αριθμητή (Μ=2) ίσο με το βαθμό του παρονομαστή (Ν=2).Κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων :
Για ευκολία θέτουμε $\boldsymbol{y = z^{-1}}$

$$\Delta \quad \frac{1}{4}y^2 - \frac{7}{4}y + 4 \quad \Big| \quad \frac{1}{8}y^2 - \frac{3}{4}y + 1 \quad \delta$$

$$-(\frac{2}{8}y^2 - \frac{6}{4}y + 2) \qquad 2 \quad \pi$$

$$\upsilon \quad -\frac{1}{4}y + 2$$

$$\frac{\Delta}{\delta} = \frac{\delta\pi + \upsilon}{\delta} = \frac{\upsilon}{\delta} + \pi$$

$$X(z) = \frac{4-\frac{7}{4}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{2-\frac{1}{4}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}} + 2 = \frac{2-\frac{1}{4}z^{-1}}{(1-p_1z^{-1})\cdot(1-p_2z^{-1})} + 2 = \underbrace{\boxed{\frac{2-\frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}}}_{X_1(z)} + \underbrace{2}_{X_2(z)=2}$$

$$X(z) = X_1(z) + X_2(z)$$

Η $X_1(z)$ έχει δύο πόλους $p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{4}$

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Ζ

- Παράδειγμα 3(συνέχεια) : να υπολογιστεί ο αντίστροφος Μ/Τ Ζ του μετασχηματισμού $X(z) = \frac{4-\frac{7}{4}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}, |z| > \frac{1}{2}$

$$X(z) = \mathrm{X}_1(z) + \mathrm{X}_2(z)$$

Η $\mathrm{X}_1(z)$ έχει δύο πόλους $p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{4}$ άρα θα προσπαθήσουμε να το εκφράσουμε σαν άθροισμα απλών κλασμάτων :

$$\mathrm{X}_1(z) = \frac{A_1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} + \frac{A_2}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

$$A_1 = [(1-p_1z^{-1})\cdot \mathrm{X}_1(z)]_{z=p_1} = \left[\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\cdot\frac{2-\frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}\right]_{z=\frac{1}{2}} = \left[\frac{2-\frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}\right]_{z=\frac{1}{2}} = 3$$

$$A_2 = [(1-p_2z^{-1})\cdot \mathrm{X}_1(z)]_{z=p_2} = \left[\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\cdot\frac{2-\frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}\right]_{z=\frac{1}{4}} = \left[\frac{2-\frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}\right]_{z=\frac{1}{4}} = -1$$

Άρα $X(z) = \frac{3}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} - \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)} + 2 \overset{\mathrm{Z}^{-1}}{\longleftrightarrow} x[n] = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\delta[n]$

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Ζ

- Παράδειγμα 4 : να υπολογιστεί ο αντίστροφος Μ/Τ Ζ του μετασχηματισμού $X(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2(1-z^{-1})}, |z| > 1$

Ο $X(z)$ είναι ρητή συνάρτηση με βαθμό του αριθμητή (Μ=0) μικρότερο από το βαθμό του παρονομαστή (Ν=3) και έχει ένα διπλό πόλο $p = \frac{1}{2}$ και ένα απλό πόλο $p_1 = 1$ άρα θα προσπαθήσουμε να το εκφράσουμε σαν άθροισμα απλών κλασμάτων :

$$X(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2(1-z^{-1})} = \frac{A_1}{1-pz^{-1}} + \frac{A_2}{(1-pz^{-1})^2} + \frac{A_3}{(1-p_1z^{-1})} = \frac{A_1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{A_2}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} + \frac{A_3}{1-z^{-1}}$$

$$A_1 = p\left[\frac{d}{dz}\{(1-pz^{-1})^2 \cdot X(z)\}\right]_{z=p} = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dz}\left\{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2 \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2(1-z^{-1})}\right\}\right]_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{(1-z^{-1})}\right\}\right]_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[\frac{-z^{-2}}{(1-z^{-1})^2}\right]_{z=\frac{1}{2}}$$

$$= -2$$

$$A_2 = [(1-pz^{-1})^2 \cdot X(z)]_{z=p} = \left[\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2 \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2(1-z^{-1})}\right]_{z=\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{(1-z^{-1})}\right]_{z=\frac{1}{2}} = -1$$

$$A_3 = [(1-p_1z^{-1}) \cdot \mathrm{X}(z)]_{z=p_1} = \left[(1-z^{-1}) \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2(1-z^{-1})}\right]_{z=1} = \left[\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}\right]_{z=1} = 4$$

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z

- Παράδειγμα 4(συνέχεια) : να υπολογιστεί ο αντίστροφος Μ/Τ Z του μετασχηματισμού $X(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2 (1-z^{-1})}, |z| > 1$

$$X(z) = \frac{A_1}{1-pz^{-1}} + \frac{A_2}{(1-pz^{-1})^2} + \frac{A_3}{(1-p_1 z^{-1})} = \frac{-2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{-1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} + \frac{4}{1-z^{-1}}$$

Άρα $X(z) = -2\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} + 4\frac{1}{1-z^{-1}}$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \overset{Z^{-1}}{\longleftrightarrow} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$\frac{1}{1-z^{-1}} \overset{Z^{-1}}{\longleftrightarrow} u[n]$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} \overset{Z^{-1}}{\longleftrightarrow} ???$$

Ιδιότητα της παραγώγου

$x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z), ROC$ τότε $n \cdot x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz}, ROC$

$$\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} \overset{Z^{-1}}{\longleftrightarrow} n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} = \frac{\boxed{\frac{1}{2}z^{-1}2z}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} = 2z\boxed{\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}} \overset{Z^{-1}}{\longleftrightarrow} 2(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+1]$$

$$x[n] = -2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+1] + 4u[n]$$

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z

- Αντίστροφος μετασχηματισμός ρητής συνάρτησης σε άθροισμα μερικών κλασμάτων :

Αν η συνάρτηση $X(z)$ δίνεται ως λόγος πολυωνύμων εκφρασμένων σε όρους του z (και όχι του z^{-1}), τότε εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία και αναπτύσσουμε σε μερικά κλάσματα την παράσταση

$$\tilde{X}(z) = \frac{X(z)}{z}$$

ως

$$\tilde{X}(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{z - p_k}$$

με ***συντελεστές*** A_k

$$A_k = \left[(z - p_k) \cdot \tilde{X}(z)\right]_{z=p_k}$$

Τότε μετατρέπουμε την $X(z) = z\tilde{X}(z)$ και αφού μετατρέψουμε σε όρους z^{-1} τα απλά κλάσματα λαμβάνουμε τους μετασχηματισμούς.

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z

- Παράδειγμα 5 : να υπολογιστεί ο αντίστροφος Μ/Τ Z του μετασχηματισμού $X(z) = \frac{2z(z-0.5)}{(z-1)(z+1)}, |z| > 1$

Ο βαθμός του αριθμητή είναι $M = 2$ και ο βαθμός του παρονομαστή $N = 2$.

Επειδή τα πολυώνυμα είναι εκφρασμένα σε θετικές δυνάμεις του z, θα υπολογίσουμε το ανάπτυγμα της παράστασης $X(z)/z$.

$$\frac{X(z)}{z} = \tilde{X}(z) = \frac{2(z-0.5)}{(z-1)(z+1)} = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{z+1}$$

Για τον υπολογισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Z της συνάρτησης $\tilde{X}(z)$ εφαρμόζουμε τη μέθοδο μερικών κλασμάτων. Είναι:

$$\tilde{X}(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{z+1}$$

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Ζ

- Παράδειγμα 5(συνέχεια) : να υπολογιστεί ο αντίστροφος Μ/Τ Ζ του μετασχηματισμού $X(z) = \frac{2z(z-0.5)}{(z-1)(z+1)}, |z| > 1$

όπου τα υπόλοιπα A_1 και A_2 της πολυωνυμικής διαίρεσης για τους αντίστοιχους πόλους δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\mathrm{A}_1 = [(z-1)\tilde{X}(z)]_{z=1} = \left[(z-1)\frac{2(z-0.5)}{(z-1)(z+1)}\right]_{z=1} = \left[\frac{2(z-0.5)}{(z+1)}\right]_{z=1} = 0.5$$

$$\mathrm{A}_2 = [(z+1)\tilde{X}(z)]_{z=-1} = \left[(z+1)\frac{2(z-0.5)}{(z-1)(z+1)}\right]_{z=-1} = \left[\frac{2(z-0.5)}{(z-1)}\right]_{z=-1} = 1.5$$

Επομένως, το ανάπτυγμα της συνάρτησης $X(z)$ είναι:

$$X(z) = \frac{0.5\, z}{z-1} + \frac{1.5\, z}{z+1} = 0.5\frac{1}{1-z^{-1}} + 1.5\frac{1}{1+z^{-1}}$$

από το οποίο προκύπτει:

$$x[n] = 0.5\, u[n] + 1.5(-1)^n\, u[n]$$

Συνέλιξη μέσω Μετασχηματισμού Ζ

- Η συνέλιξη δύο σημάτων διακριτού χρόνου $\boldsymbol{x_1}[\boldsymbol{n}], \boldsymbol{x_2}[\boldsymbol{n}]$ πεπερασμένου μήκους μπορεί να γίνει μέσω του μετασχηματισμού Ζ ως εξής:
  - υπολογίζουμε τους Μ/Τ Ζ $\mathbf{X_1}(\boldsymbol{z}), \mathbf{X_2}(\boldsymbol{z})$
  - υπολογίζουμε το γινόμενο $\mathbf{X}(\boldsymbol{z}) = \mathbf{X_1}(\boldsymbol{z}) \cdot \mathbf{X_2}(\boldsymbol{z})$ (που είναι ο Μ/Τ Ζ της συνέλιξης $\mathbf{x}[\mathbf{n}] = \boldsymbol{x_1}[\boldsymbol{n}] * \boldsymbol{x_2}[\boldsymbol{n}]$)
  - υπολογίζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Ζ του $\mathbf{X}(\boldsymbol{z})$, που είναι η συνέλιξη, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της μετατόπισης στο χρόνο

Παράδειγμα : Να υπολογιστεί η συνέλιξη μεταξύ των ακολουθιών $x_1[n] = 4 \cdot \delta[n+1] + 5 \cdot \delta[n] + 6 \cdot \delta[n-1] + 7 \cdot \delta[n-2]$ και $x_2[n] = 3 \cdot \delta[n-1] + 2 \cdot \delta[n-2] + \delta[n-3]$.

Απάντηση: Υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Ζ κάθε ακολουθίας χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της μετατόπισης στο χρόνο και έχουμε:

$$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n]\, z^{-n} = \sum_{n=-1}^{2} x_1[n]\, z^{-n} = 4z^1 + 5 + 6z^{-1} + 7z^{-2}$$

$$X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n]\, z^{-n} = \sum_{n=1}^{3} x_2[n]\, z^{-n} = 3z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}$$

Με βάση την ιδιότητα της συνέλιξης έχουμε:

$$Y(z) = X_1(z)X_2(z) = (4z^1 + 5 + 6z^{-1} + 7z^{-2})(3z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}) \rightarrow$$

Συνέλιξη μέσω Μετασχηματισμού Ζ

- Η συνέλιξη δύο σημάτων διακριτού χρόνου $\boldsymbol{x_1[n]}, \boldsymbol{x_2[n]}$ <u>πεπερασμένου μήκους</u> μπορεί να γίνει μέσω του μετασχηματισμού Ζ ως εξής:
  - υπολογίζουμε τους Μ/Τ Ζ $\mathbf{X_1}(\boldsymbol{z}), \mathbf{X_2}(\boldsymbol{z})$
  - υπολογίζουμε το γινόμενο $\mathbf{X}(\boldsymbol{z}) = \mathbf{X_1}(\boldsymbol{z}) \cdot \mathbf{X_2}(\boldsymbol{z})$ (που είναι ο Μ/Τ Ζ της συνέλιξης $\mathbf{x}[\mathbf{n}] = \boldsymbol{x_1}[\boldsymbol{n}] * \boldsymbol{x_2}[\boldsymbol{n}]$)
  - υπολογίζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Ζ του $\mathbf{X}(\boldsymbol{z})$, που είναι η συνέλιξη, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της μετατόπισης στο χρόνο

Παράδειγμα (συνέχεια): Να υπολογιστεί η συνέλιξη μεταξύ των ακολουθιών $x_1[n] = 4 \cdot \delta[n+1] + 5 \cdot \delta[n] + 6 \cdot \delta[n-1] + 7 \cdot \delta[n-2]$ και $x_2[n] = 3 \cdot \delta[n-1] + 2 \cdot \delta[n-2] + \delta[n-3]$.

$$Y(z) = X_1(z)X_2(z) = (4z^1 + 5 + 6z^{-1} + 7z^{-2})(3z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3})$$
$$= (12 + 8z^{-1} + 4z^{-2}) + (15z^{-1} + 10z^{-2} + 5z^{-3}) + (18z^{-2} + 12z^{-3} + 6z^{-4}) + (21z^{-3} + 14z^{-4} + 7z^{-5})$$
$$= 12 + 23z^{-1} + 32z^{-2} + 38z^{-3} + 20z^{-4} + 7z^{-5}$$
$$= \sum_{n=0}^{5} y[n]\, z^{-n}$$

Από την ιδιότητα της μετατόπισης στο χρόνο, λαμβάνουμε το αποτέλεσμα:

$$y[n] = \{\underline{12}, 23, 32, 38, 20, 7\}$$

Συνέλιξη μέσω Μετασχηματισμού Ζ

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 3^n u[-n]\ z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{0} 3^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}z\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z}, |z| < 3$$

- Η συνέλιξη δύο σημάτων διακριτού χρόνου $\boldsymbol{x_1[n]}, \boldsymbol{x_2[n]}$ *άπειρης διάρκειας* μπορεί να γίνει μέσω του μετασχηματισμού Ζ ως εξής:
  - υπολογίζουμε τους Μ/Τ Ζ $\mathbf{X_1}(\boldsymbol{z}), \mathbf{X_2}(\boldsymbol{z})$
  - υπολογίζουμε το γινόμενο $\mathbf{X}(\boldsymbol{z}) = \mathbf{X_1}(\boldsymbol{z}) \cdot \mathbf{X_2}(\boldsymbol{z})$ (που είναι ο Μ/Τ Ζ της συνέλιξης $\mathbf{x[n]} = \boldsymbol{x_1[n]} * \boldsymbol{x_2[n]}$)
  - το γινόμενο αναλύεται σε άθροισμα απλών κλασμάτων
  - υπολογίζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Ζ του $\mathbf{X}(\boldsymbol{z})$, που είναι η συνέλιξη

- **Παράδειγμα :** Να υπολογιστεί η συνέλιξη $\mathrm{x}[\mathrm{n}] = x_1[n] * x_2[n]$ με $x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ και $x_2[n] = (3)^n u[-n]$

$$\mathrm{X}_1(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}, |z| > \frac{1}{2}$$

Το σήμα $\mathrm{s[n]} = u[n]$ έχει μετασχηματισμό $\mathrm{S}(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}, |z| > 1$

Το σήμα $\mathrm{y[n]} = u[-n]$ έχει μετασχηματισμό $\mathrm{Y}(z) = S(z^{-1}) = \frac{1}{1-z}, |z| < 1$

Το σήμα $x_2[\mathrm{n}] = (3)^n y[n] = (3)^n u[-n]$ έχει μετασχηματισμό $X_2(z) = Y(3^{-1}z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z}, |z| < 3$

αναδίπλωση και μετατόπιση στη συχνότητα

Υπολογίζουμε το γινόμενο $\mathrm{X}(z) = \mathrm{X}_1(z) \cdot \mathrm{X}_2(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}z}, \left(|z| > \frac{1}{2}\right) \cap (|z| < 3\ ) \rightarrow \left(\frac{1}{2} < |z| < 3\right)$

$$\mathrm{X}(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}z} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} \cdot \frac{z^{-1}}{z^{-1}-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} \cdot \frac{-3z^{-1}}{-3z^{-1}+1} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} \cdot \frac{-3z^{-1}}{1-3z^{-1}}, \left(\frac{1}{2} < |z| < 3\right)$$

Συνέλιξη μέσω Μετασχηματισμού Z

- Παράδειγμα (συνέχεια): $\mathrm{X}(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{-3z^{-1}}{1-3z^{-1}}, \left(\frac{1}{2} < |z| < 3\right)$
- το γινόμενο αναλύεται σε άθροισμα απλών κλασμάτων:

$$\mathrm{X}(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{-3z^{-1}}{1-3z^{-1}} = \frac{A_1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{A_2}{1-3z^{-1}}$$

$$A_1 = [(1-p_1 z^{-1}) \cdot X(z)]_{z=p_1} = \left[\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right) \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{-3z^{-1}}{1-3z^{-1}}\right]_{z=\frac{1}{2}} = \left[\frac{-3z^{-1}}{1-3z^{-1}}\right]_{z=\frac{1}{2}} = \frac{6}{5}$$

$$A_2 = [(1-p_2 z^{-1}) \cdot X(z)]_{z=p_2} = \left[(1-3z^{-1}) \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{-3z^{-1}}{1-3z^{-1}}\right]_{z=3} = \left[\frac{-3z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right]_{z=3} = -\frac{6}{5}$$

$$\mathrm{X}(z) = \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{1-3z^{-1}}$$

- η συνέλιξη δηλαδή ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z του $\mathbf{X}(z)$ είναι

$$\mathrm{x}[\mathrm{n}] = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{6}{5}(-3)^n u[-n-1]$$

αιτιατό   αναιτιατό

Θεώρημα Αρχικής Τιμής

Αν $X(z)$ είναι ο μετασχηματισμός Z ενός σήματος $x[n]$,

- Αν $\mathbf{x[n] = 0, n < 0}$ τότε η αρχική τιμή του σήματος $\mathbf{x[n]}$ είναι $\mathbf{x[0]} = \lim_{z \to +\infty} \boldsymbol{X(z)}$

    - Απόδειξη :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x[n] \cdot z^{-n} + \mathbf{x[0]}\boldsymbol{z}^{-\mathbf{0}} + \sum_{n=1}^{+\infty} x[n] \cdot z^{-n} = \mathbf{x[0]} + \sum_{n=1}^{+\infty} x[n] \cdot z^{-n}$$

$$= \mathbf{x[0]} + \mathbf{x[1]}\boldsymbol{z}^{-\mathbf{1}} + \mathbf{x[2]}\boldsymbol{z}^{-\mathbf{2}} + \cdots$$

$$\to \lim_{z \to +\infty} \boldsymbol{X(z)} = \mathbf{x[0]} + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \cdots = \mathbf{x[0]}$$

- Παράδειγμα : Να βρεθεί η αρχική τιμή του αιτιατού σήματος $\mathrm{x}[\mathrm{n}]$ με μετασχηματισμό $\mathrm{X}(z) = \frac{2}{3-5z^{-1}}, |z| > \frac{5}{3}$

$$\mathbf{x[0]} = \lim_{z \to +\infty} \boldsymbol{X(z)} = \lim_{z \to +\infty} \frac{2}{3 - 5z^{-1}} = \frac{2}{3}$$

Θεώρημα Τελικής Τιμής

Αν $X(z)$ είναι ο μετασχηματισμός Ζ ενός σήματος $x[n]$,

- **Αν $\mathbf{x[n] = 0, n < 0}$** τότε το όριο της ακολουθίας $x[n]$, όταν το n τείνει στο άπειρο, δηλαδή η τελική τιμή του σήματος είναι

$$\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$$

- Παράδειγμα : Να βρεθεί η τελική τιμή του αιτιατού σήματος $\mathrm{x[n]}$ με μετασχηματισμό $\mathrm{X}(z) = \frac{2(1-0.5z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+z^{-1})}, |z| > 1$

$$\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{2z(z-0.5)}{(z-1)(z+1)} = \lim_{z\to 1}\frac{2z(z-0.5)}{(z+1)} = 0.5$$

Θεώρημα Τελικής Τιμής

Αν $X(z)$ είναι ο μετασχηματισμός Z ενός σήματος $x[n]$,

- Αν $\mathbf{x[n]=0}, \boldsymbol{n>0}$ τότε η τελική τιμή του σήματος $\mathbf{x[n]}$ είναι $\mathbf{x[0]}=\lim_{z\to 0} \boldsymbol{X(z)}$
  - Απόδειξη :

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\cdot z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1} x[n]\cdot z^{-n}+\mathbf{x[0]}\boldsymbol{z}^{-\mathbf{0}}+\sum_{n=1}^{+\infty} x[n]\cdot z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1} x[n]\cdot z^{-n}+\mathbf{x[0]}=\cdots+\mathbf{x[-2]}\boldsymbol{z}^{\mathbf{2}}+\mathbf{x[-1]}\boldsymbol{z}^{\mathbf{1}}+\mathbf{x[0]}$$

$$\rightarrow \lim_{z\to 0}\boldsymbol{X(z)}=\cdots+\mathbf{0}+\mathbf{0}+\mathbf{x[0]}=\mathbf{x[0]}$$

- Παράδειγμα : Να βρεθεί η τελική τιμή του μη αιτιατού σήματος $\mathrm{x[n]}$ με μετασχηματισμό $\mathrm{X}(z)=\frac{2-3z^{-1}}{4-5z^{-1}}, |z|<\frac{5}{4}$

$$\mathbf{x[0]}=\lim_{z\to 0}\boldsymbol{X(z)}=\lim_{z\to 0}\frac{2-3z^{-1}}{4-5z^{-1}}=\lim_{z\to 0}\frac{2z-3}{4z-5}=\frac{3}{5}$$

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος & Εικόνας

Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών

Α. Μπακλέζος

abaklezos@hmu.gr