Αλγόριθμοι & Πολυπλοκότητα 01
Νικήτας Μενούνος ΤΛ20412

α)
Για τους παρακάτω αλγορίθμους ψευδοκώδικα υπολόγισε το πλήθος των πολ/σμών που εκτελούνται κατα την τελική τιμή του s

a)

```
p ← 1
s ← ∅
for i ∈ {1, 2, 3, 4} do
    p ← p · 3
    s ← s + p
```

i	p	s	πολ/σιασμοί
∅	1	∅	∅
1	3	3	1
2	9	12	2
3	27	39	3
4	81	120	4
5	81	120	4

Εκτελούνται 4^εις πολλαπλασιασμοί

b)

```
s ← ∅
for i ∈ {1, 2, 3, 4} do
    p ← 1
    for j ∈ {1, ..., i} do
        p ← p · 3
    s ← s + p
```

i	j	s	p	πολ/μοι
∅	∅	∅	∅	∅
1	∅	∅	1	∅
1	1	∅	3	1
1	1	3	3	1
2	1	3	1	1
2	1	3	3	2
2	2	3	9	3
3	2	12	1	3
3	1	12	3	4
3	2	12	9	5
3	3	12	27	6
4	3	39	1	6
4	4	39	81	10
4	4	120	81	10

Εκτελούναι 10 πολ/μοι

2η

Για τον διπλανό αλγόριθμο όταν θα ολοκληρωθεί,
α) ποιο είναι το πλήθος των εντολών «+» που εκτελούνται;
Β) ποια η τελική τιμή του x.

α)

```
x ← 1
for i ∈ {1,2,3} do
    for j ∈ {1,2,3,4} do       } => 4 πράξεις «+»
        x ← x+x
    for k ∈ {1,2,3,4,5} do     } => 5 πράξεις «+»
        x ← x+1
    x ← x+5
```

$\Rightarrow (4+5)\cdot 3 = 9\cdot 3 = 27$ πράξεις «+»

β)

i	j	k	x
1	1	1	2
1	2	1	4
1	3	1	8
1	4	1	16
1	4	1	17 ...
1	4	5	21
1	4	5	26
2	1	5	52
2	2	5	104
2	3	5	208
2	4	5	416
2	4	1	417 ...
2	4	5	421

i	j	k	x
2	4	5	426
3	1	5	852
3	2	5	1704
3	3	5	3408
3	4	5	6816
3	4	1	6817 ....
3	4	5	6821
3	4	5	6826

Η τελική τιμή του x θα είναι 6826

Ασκηση 3η

Εστω $U=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$ με $n>3$. Στο πλαίσιο των προβλημάτων κληρωτίδας τι κάνει ο παρακάτω αλγόριθμος; Πόσες γραμμές εκτυπώνονται; Δώστε μια Θ-εκτίμηση για αυτό.

```
for i ∈ {1, 2, ..., n} do
    for j ∈ {i+1, i+2, ..., n} do
        for k ∈ {j+1, j+2, ..., n} do
            print bi, bj, bk
```

Ο αλγόριθμος εμφανίζει όλους τους συνδυασμούς τριάδων του συνόλου U, με τρία διαφορετικά στοιχεία.
Το σύνολο των εμφανίσεων ισούται με το γινόμενο του πλήθους των επαναλήψεων. Δηλαδή $\frac{n*(n-1)*(n-2)}{6} = f(n) = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

$$\Rightarrow f(n) = \frac{n^3-3n^2+2n}{6}$$

Άρα $f \in \Theta(n^3)$

Ασκηση 4η

Βρείτε μια Θ-εκτίμηση χρησιμοποιώντας έναν από τους στόχους εκτίμησης για τις παρακάτω συναρτήσεις

α) $(12n+17)^{23}$

$$\cancel{(12n+17)^{23} = (12n+17)^2(12n+17)^{21} = (12n+17)(12n+17)(12n+17)^{21}}$$

$$(12n+17)^{23} \le 14n^{23} \quad \text{για } n\ge 1 \text{ και } 1<p<\infty$$

επίσης:

$$(12n+17)^{23} \ge 10n^{23} \quad \text{για } n\ge 1 \text{ και } 1<p<\infty$$

άρα $(12n+17)^{23} \in \Theta(n^{23})$

b) $n\log_2 n + n!$

$$0.5n! \leq n\log_2 n + n! \leq 2n!$$

Άρα $n\log_2 n + n! \in \Theta(n!)$

γ) $\log_2 n^3 + 3n\log n$

$$\log_2 n^3 + 3n\log n = 3\log_2 n + 3n\log_2 n$$
$$\leq 4n\log_2 n$$

αντίστοιχα: $\log_2 n^3 + 3n\log n \geq n\log_2 n$

Άρα $\log_2 n^3 + 3n\log n \in \Theta(n\log_2 n)$

δ) $(1+n+n^2+n^3+n^4+n^5)(10+n^2)$

$(1+n+n^2+n^3+n^4+n^5)(10+n^2) = 10+n^2+10n+n^3+10n^2+n^4+10n^3+n^5+10n^4+n^6+10n^5+n^7 = 10+11n^2+10n+11n^3+11n^4+11n^5+n^6+n^7$

$p=7$ και $a_i > 0$ Άρα $(1+n+n^2+n^3+n^4+n^5)(10+n^2) \in \Theta(n^7)$

Ασκηση 5η

Ενας συγκεκριμένος αλγόριθμος επεξεργάζεται μια λίστα με n στοιχεία. Έστω ότι η Υπορουτίνα$_a$ απαιτεί n^2+2n πράξεις, και η Υπορουτίνα$_b$ $3n^3+7$. Δώστε μια Θ-εκτίμηση για το πλήθος των πράξεων το παρακάτω τμήμα ψευδοκώδικα.

α)

```
for i ∈ {1,2,...,n} do
    Υπορουτίνα_a
    Υπορουτίνα_b
```

$$n((n^2+2n)+(3n^3+7)) = n^3+2n^2+3n^4+7n \in \Theta(n^4)$$

b)

```
for i ∈ {1,2,...,n} do
    Υπορουτίνα_a
    for j ∈ {1,2,...,2n} do
        Υπορουτίνα_b
```

$$n((n^2+2n)+(2n(3n^3+7))) = n^3+2n^2+5n^5+7n^2 = 9n^2+n^3+5n^5 \in \Theta(n^5)$$