Задача 2.1

Требуется построить кусочно-линейный интерполянт для функции $f(x) = e^{2x}$

при условии, что известны значения функции в узлах x_i, $i = 1, 2, 3$

Используя полученный интерполянт, требуется найти аппроксимацию значения интеграла

$$\int_{x_1}^{x_3} f(x)dx,\ x_1 < x_2 < x_3$$

где x_i следует задать произвольно.

Далее следует осуществить сравнение с точным значением интеграла.

Решение

Зададим начальные условия:

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Для получения кусочно-линейных интерполянтов воспользуемся интерполяционным многочленом Лагранжа:

$$L_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) l_i(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \prod_{i \neq j} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Согласно этой формуле, получим два линейных интерполянта:

При $x_1 \le x \le x_2$:

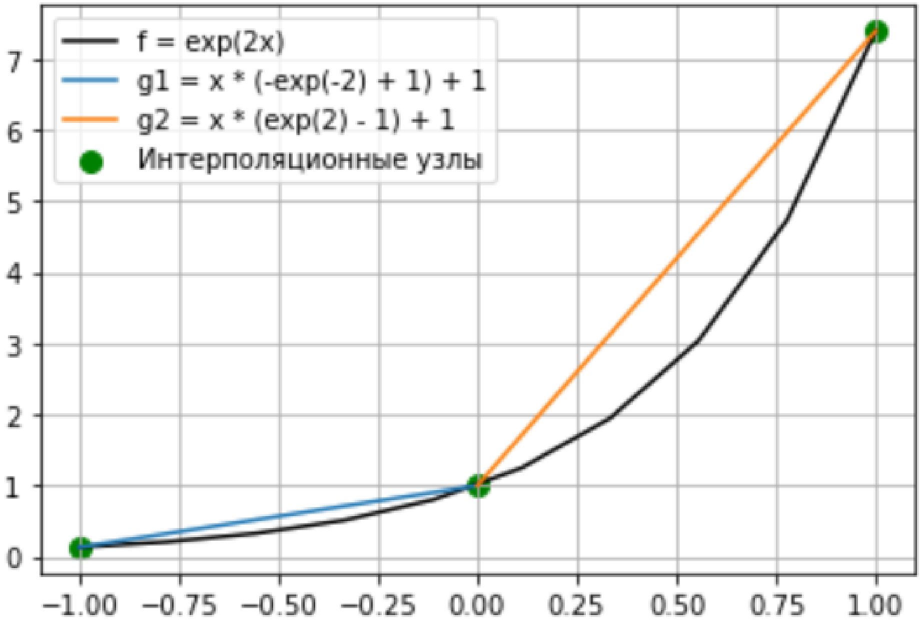
$$g_1 = L_1 = \sum_{i=1}^{2} f(x_i) l_i(x) = \sum_{i=1}^{2} f(x_i) \prod_{i \neq j} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = e^{-2} \frac{x}{-1} + \frac{x+1}{+1} = -e^{-2}x + x + 1 = x(-e^{-2} + 1) + 1$$

При $x_2 \le x \le x_3$:

$$g_2 = L_1 = \sum_{i=2}^{3} f(x_i) l_i(x) = \sum_{i=2}^{3} f(x_i) \prod_{i \neq j} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{x-1}{-1} + e^{2} \frac{x}{1} = e^{2}x - x + 1 = x(e^{2} - 1) + 1$$

Следовательно, кусочно-линейный интерполянт имеет следующий вид:

$$\begin{cases} g_1 = x(-e^{-2} + 1) + 1;\ \text{при } -1 \le x \le 0 \\ g_2 = x(e^{2} - 1) + 1;\ \text{при } 0 \le x \le 1 \end{cases}$$



Для аппроксимации вычислим сумму двух интегралов кусочно-линейных интерполянтов:

$$\int_{-1}^{0}(x(1-e^{-2})+1)dx = \int_{-1}^{0}x(1-e^{-2})dx + \int_{-1}^{0}dx \;\; = -0,43+1 = 0,57$$

$$\int_{0}^{1}(x(e^{2}-1)+1)dx = \int_{0}^{1}x(e^{2}-1)dx + \int_{0}^{1}dx \;\; = 3,194+1 = 4,194$$

Сумма вычисленных значений составляет:

0,57 + 4,194 = 4,764

Точное значение интеграла составляет:

$$\int_{-1}^{1}e^{2x}dx = \frac{1}{2}(e^{2}-e^{-2}) = 0,5(7,398-0,135) = 3,626$$

Оценим погрешность интерполяции:

$\Delta(a^*) = |a - a^*|$ – абсолютная погрешность;

$\delta(a^*) = \left|\dfrac{a - a^*}{a}\right|$ – относительная погрешность;

Тогда для нашего случая:

$\Delta = |3,626 - 4,764| = 1,138$

$\delta = \left|\dfrac{3,626 - 4,764}{3,626}\right| = 0,313$