Семинар 5. Задача 9.

Степанов Н. Н.

Студент гр. РК6-55Б

Ноябрь 2021

Задача 5.9

Важной частью вывода метода анализа А-устойчивости было решение линейного дифференциального уравнения 1-го порядка

$$\frac{dy}{dt} - k_y y = f_i + (t - t_i)k_t - k_y y_i, \tag{1}$$

где $k_y, f_i, t_i, k_t, k_y, y_i \in R$ являются некоторыми константами и $y(t_i) = y_i$ является начальным условием задачи Коши. Требуется найти решение данного уравнения с помощью метода интегрирующего множителя.

Решение для проверки:

$$y(t) = [y_i - f_i + k_t t_i + k_y y_i + \frac{k_t t_i}{k_y} - \frac{k_t}{k_y^2}]e^{k_y(t-t_i)} - \frac{k_t}{k_y}t + [f_i - k_t t_i - k_y y_i + \frac{k_t}{k_y^2}]$$

Для справки:

Интегрирующий множитель $\mu(x, y)$ - это такая функция от переменных x и y, умножив на которую дифференциальное уравнение первого порядка:

$p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$

становится уравнением в полных дифференциалах:

$M(x, y)p(x, y)dx + M(x, y)q(x, y)dy = dU = 0$

Решение

Решим ОДУ, используя метод интегрирующего множителя.
Домножим (1) на множитель $\mu(t)$:

$$\mu(t)y'(t) - k_y\mu(t)y(t) = \mu(t)[f_i + (t - t_i)k_t - k_y y_i] \tag{2}$$

Пусть $\mu'(t) = -k_y\mu(t)$, тогда справедливо:

$$(\mu(t)y(t))' = -k_y\mu(t)y(t) + \mu(t)y' = \mu(t)[-k_y y(t) + y'(t)] = \mu(t)[f_i + (t - t_i)k_t - k_y y_i] \tag{3}$$

Из (3) следует следующее соотношение:

$$y(t) = \frac{\int \mu(t)[f_i + (t - t_i)k_t - k_y y_i]dt + \mathrm{C}_1}{\mu(t)} \tag{4}$$

Для того, чтобы явно найти выражение (4), необходимо рассчитать $\mu(t)$:

$$\mu'(t) = -k_y\mu(t) \Rightarrow \mu(t) = C_2 e^{-k_y t} \tag{5}$$

Тогда выражение для $y(t)$ принимает вид:

$$y(t) = ce^{k_y t} + e^{k_y t}\int\limits_{t^i}^{t} e^{-k_y\tau}[f_i + k_t(\tau - t_i) - k_y y_i]d\tau \tag{6}$$

Коэффициент c находится из начального условия задачи Коши $y(t_i) = y_i$:

$$y(t_i) = ce^{k_y t_i} \Rightarrow c = y_i e^{-k_y t_i} \tag{7}$$

Получив соотношение (7), преобразуем соотношение (6):

$$y(t) = y_i e^{k_y(t - t_i)} + e^{k_y t}\int\limits_{t_i}^{t} e^{-k_y\tau}[f_i + k_t(\tau - t_i) - k_y y_i]d\tau \tag{8}$$

После интегрирования имеем:

$$y(t) = y_i e^{k_y(t - t_i)} + e^{k_y t}(e^{-k_y t} - e^{-k_y t_i})(f_i - k_t t_i - k_y y_i) + k_t e^{k_y t}\int\limits_{t_i}^{t} e^{-k_y\tau}\tau d\tau \tag{9}$$

В свою очередь упрощая (9) получаем:

$$y(t) = \mathbf{[}y_i - f_i + k_t t_i + k_y y_i + \frac{k_t t_i}{k_y} - \frac{k_t}{k_y^2}\mathbf{]}e^{k_y(t - t_i)} - \frac{k_t}{k_y}t + \mathbf{[}f_i - k_t t_i - k_y y_i + \frac{k_t}{k_y^2}\mathbf{]} \tag{10}$$

Из данного выражения можно заметить, что при $k_y > 0$ будет наблюдаться бесконечный экспоненциальный рост, что говорит о линейной неустойчивости исходного ОДУ.