Семинар 4. Задача 4.

Степанов Н. Н.
Студент гр. РК6-55Б

Октябрь 2021

Задача 4.4

Требуется найти приближение заданной функции $f(x)$ квадратичным полиномом, используя взвешенный МНК и указанную систему ортогональных многочленов в качестве базисных функций для аппроксимирующей фукции.

Вид функции:
$f(x) = e^{-2x}, x \in (0; \infty)$, (использовать многочлены Лаггера)
Построить графики исходной функции и ее аппроксимации.

Решение:

Взвешенный МНК имеет вид:

$$\min_a E_2(\boldsymbol{a}) = \min_a \int\limits_a^b \omega(x)\big[y(x) - \sum_{i=0}^{n} a_i \phi_i(x)\big]^2 dx \tag{1}$$

Оптимальные значения вектора **a** определяются следующим образом:

$$a_k = \frac{\langle y(x), \phi_k(x)\rangle_\omega}{\langle \phi_k(x), \phi_k(x)\rangle_\omega} \tag{2}$$

В качестве системы базисных функций, согласно заданию, необходимо использовать многочлены Лаггера. Поскольку необходимо найти приближение заданной функции $f(x)$ квадратичным полиномом, следовательно необходимо использовать многочлены Лаггера до $L_2(x)$.
Полиномы Лаггера можно определить следующим реккурентным соотношением:

$$L_{k+1}(x) = \frac{1}{k+1}[(2k+1-x)L_k(x) - kL_{k-1}(x)], \forall k \geq 1, \tag{3}$$

предопределив первые два полинома как:

$$L_0(x) = 1, L_1(x) = 1 - x. \tag{4}$$

Найдем $L_2(x)$, используя (4):

$$L_2(x) = \frac{1}{2}[(2*1+1-x)L_1(x) - L_0(x)] = \frac{1}{2}[(3-x)(1-x)-1] = \frac{1}{2}[x^2-4x+2] \tag{5}$$

Учтем, что:

$$f(x) = e^{-2x}, x \in (0;\infty), \phi_i(x) = L_i(x), i = 0,1,2$$

Тогда задача оптимального приближения методом взвешенного МНК имеет вид:

$$\min_a E_2(\boldsymbol{a}) = \min_a \int\limits_0^\infty \omega(x)\big[y(x) - \sum_{i=0}^{2} a_i\phi_i(x)\big]^2 dx \tag{6}$$

Оптимальные значения вектора а примут вид:

$$\frac{\langle y(x), L_k(x)\rangle_\omega}{\langle L_k(x), L_k(x)\rangle_\omega}, k = 0,1,2 \tag{7}$$

Весовая функция для многочленов Лаггера имеет вид:

$$\omega(x) = x^\alpha, \tag{8}$$

где параметр α - вещественное число больше -1.
Скалярное произведение ортогональных функций с весом ω на интервале $[a;b]$:

$$\langle\phi_1(x), \phi_2(x)\rangle_\omega = \int\limits_a^b \omega(x)\phi_1(x)\phi_2(x)$$

Найдем соответствующие значения a_k для $k = 0,1,2$:
Для $k = 0$:

$$a_0 = \frac{\langle y(x), L_0(x)\rangle_\omega}{\langle L_0(x), L_0(x)\rangle_\omega} = \frac{\int_0^\infty e^{-x}e^{-2x}dx}{\int_0^\infty e^{-x}dx} = \frac{1}{3}$$

Для $k = 1$:

$$a_0 = \frac{\langle y(x), L_1(x)\rangle_\omega}{\langle L_1(x), L_1(x)\rangle_\omega} = \frac{\int_0^\infty e^{-x}e^{-2x}(1-x)dx}{\int_0^\infty e^{-x}(1-x)^2dx} = \frac{2}{9}$$

Для $k = 2$:

$$a_0 = \frac{\langle y(x), L_1(x)\rangle_\omega}{\langle L_2(x), L_2(x)\rangle_\omega} = \frac{\int_0^\infty e^{-x}e^{-2x}\frac{1}{2}[x^2-4x+2]dx}{\int_0^\infty e^{-x}\frac{1}{2}[x^2-4x+2]^2dx} = \frac{4}{27}$$

Итого, учитывая выражения для $L_0(x), L_1(x), L_2(x)$ и соотношение (1) аппроксимирующая функция имеет вид:

$$f(a,x) = a_0L_0(x) + a_1L_1(x) + a_2L_2(x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}(1-x) + \frac{2}{27}[x^2-4x+2] \tag{9}$$

Графики:

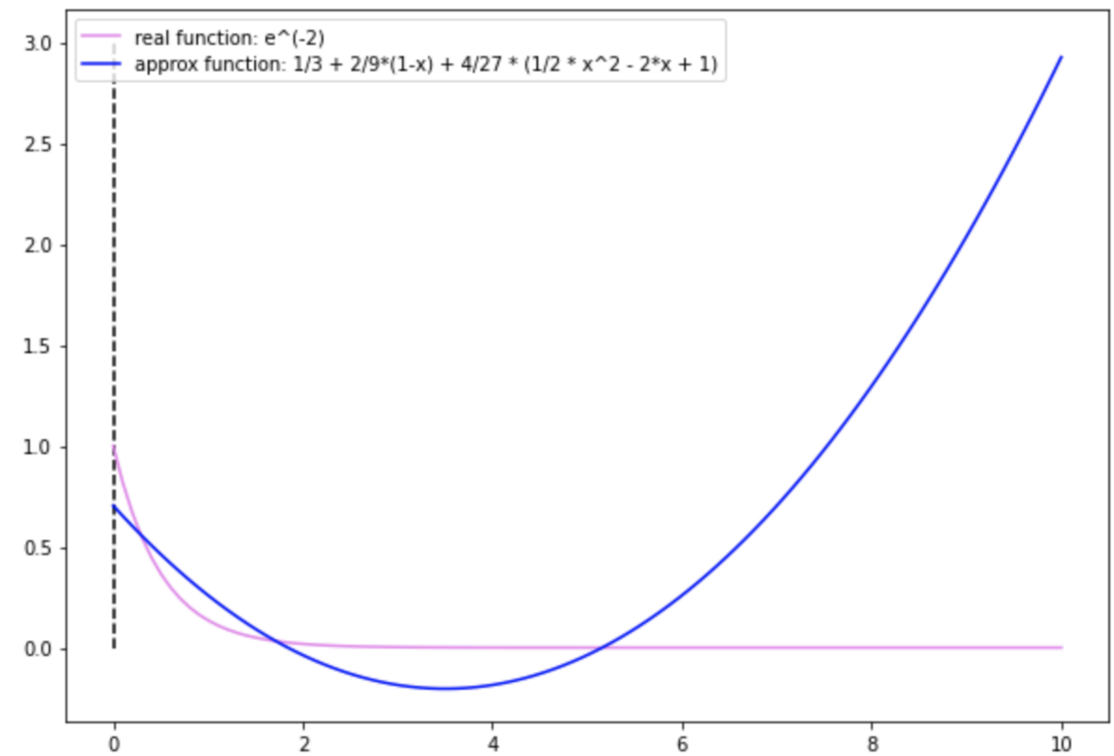

Рис. 1: Реальная и аппроксимирующая функции.

Листинг:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


def f1(x):
  return np.exp(-2*x)


def f2(x):
  return (1/3) + (2/9)*(1-x) + (4/27) * ((1/2) * x**2 - 2*x + 1)


fig, ax = plt.subplots(figsize = (10, 7))
x = np.linspace(0, 10, 100)
```

```
func1 = [f1(x[i]) for i in range (0, len(x))]
func2 = [f2(x[i]) for i in range (0, len(x))]
plt.plot(x, func1, label = 'real function: e^(-2)' ,
color = 'violet')
plt.plot(x, func2, label = 'approx function: 1/3 + 2/9*(1-x) + 4/27 * (1/2 * x^2 - 2*x
+ 1)' , color = 'blue')
y_min = 0
y_max = 3
ax.vlines(0, y_min, y_max, linestyle='--')
plt.legend()
plt.show()
```