# Семинар 6. Задача 9.

Степанов Н. Н.

Студент гр. РК6-55Б

Ноябрь 2021

### Задача 6.9

Требуется найти все значения $\alpha$ и $\beta$, для которых матрица

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

является:

1. вырожденной;
2. матрицей со строгим диагональным преобладанием;
3. положительно определенной.

## Решение

### 1. Вырожденная матрица

Вырожденная матрица - квадратная матрица $\mathbf{A}$, определитель которой равен 0. Найдем определитель матрицы $\mathbf{A}$:

$$\Delta(A) = 4\alpha + 0 - \alpha - 2\beta = 0 \Rightarrow 3\alpha = 2\beta \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}\beta$$

Таким образом, при:

$$\begin{cases} \alpha \in R \\ \beta \in R \\ \alpha = \frac{2}{3}\beta \end{cases}$$

Матрица **A** является вырожденной, т. е. $\Delta(A) = 0$

## 2. Матрица со строгим диагональным преобладанием

Матрица **A** является матрицей со строгим диагональным преобладанием если:

$$|A_{ii}| > \sum_{j \neq i} |A_{ij}| \tag{2}$$

Таким образом, учитывая соотношение (2), получаем следующую систему:

$$\begin{cases} |\alpha| > 1 \\ 2 > |\beta| + 1 \\ 2 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\alpha| > 1 \\ |\beta| < 1 \end{cases} \tag{3}$$

Упрощая соотношение (3), получаем, что:

$$\begin{cases} \alpha, \beta \in R \\ \left[ \begin{array}{l} \alpha > 1 \\ \alpha < -1 \end{array} \right. \\ -1 < \beta < 1 \end{cases} \tag{4}$$

Таким образом, при выполнении соотношения (4) матрица **A** является матрицей со строгим диагональным преобладанием.

## 3. Положительно определенная матрица

Согласно теореме **5.1.4** лекционного материала матрица **A** называется положительно определенной тогда и только тогда, когда она симметричная и существует разложение $A = LL^T$, называемое разложением Холецкого, где $L$ - нижняя треугольная матрица с ненулевыми элементами на диагонали.

Симметричная матрица - матрица, элементы которой симметричны относительно главной диагонали, т. е. $A = A^T$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \beta = 1 \tag{5}$$

Используя формулы (5.57 - 5.62) лекционного материала и тот факт, что выражение под корнем всегда положительно, если $\mathbf{A}$ — действительная положительно-определённая матрица, найдем значения для $\alpha$ :

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{\alpha} \Rightarrow \alpha > 0 \tag{6}$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \Rightarrow \alpha > 0 \tag{7}$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \alpha * 0 = 0 \tag{8}$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{2 - l_{21}^2} = \sqrt{2 - \frac{1}{\alpha}} \Rightarrow \alpha > 0,5 \tag{9}$$

$$l_{32} = \frac{1}{l_{22}}(a_{32} - l_{21}l_{31}) = \frac{1}{l_{22}} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha - 1}} \Rightarrow \alpha > 0,5 \tag{10}$$

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{2 - 0 - \frac{\alpha}{2\alpha - 1}} = \sqrt{2 - \frac{\alpha}{2\alpha - 1}} \Rightarrow \alpha > \frac{2}{3} \tag{11}$$

Таким образом, матрица $\mathbf{A}$ является положительно определенной матрицей при выполнения условия (12):

$$\begin{cases} \alpha \in R \\ \beta = 1 \\ \alpha > \frac{2}{3}\beta \end{cases} \tag{12}$$