Задача 1.

1. Док-ть, что опред. инт-л

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx$$

можно переписать в виде рекуррентного соот-я:

$$I_n = 1 - n I_{n-1}$$

и вывести нач. условие I_0.

$$I_n = \int x^n e^{x-1} dx = \left| \begin{array}{l} u = x^n \\ du = n x^{n-1} dx \\ dV = e^{x-1} dx \\ V = \int e^{x-1} dx = e^{x-1} \end{array} \right| \overset{\int u dv = uV - \int V du}{=}$$

$$= x^n e^{x-1} - n \int e^{x-1} x^{n-1} dx \quad (1)$$

$$I_{n-1} = \int x^{n-1} e^{x-1} dx \quad (2)$$

Перепишем (1), учитывая (2), в виде:

$$I_n = x^n e^{x-1} - n \cdot I_{n-1} \quad (3)$$

Учтем границы интегрирова-
-ния:

$$\Big|_0^1 \left(x^n \cdot e^{x-1}\right) = 1^n e^0 = 1^n = 1 \quad (4)$$

Следовательно (3), учитывая (4),
имеет вид:

$$I_n = 1 - n \cdot I_{n-1} \quad (5)$$

Выведем нач. ус-е для I_0:

$$I_1 = 1 - 1 \cdot I_0 = 1 - I_0.$$

$$I_0 = \int_0^1 x^0 e^{x-1} dx = \int_0^1 e^{x-1} dx = \Big|_0^1 e^{x-1} =$$

$$= 1 - e^{-1}$$ - нач. ус-е для I_0

Проверка:

$$I_1 = \int_0^1 x^1 e^{x-1} dx = \Big|_0^1 \left(x e^{x-1} - \int e^{x-1} dx\right) =$$

$$= \Big|_0^1 \left(x e^{x-1} - e^{x-1}\right) = e^{-1}$$

Используя (5), получаем:

$$I_1 = 1 - 1 \cdot (I_0) = 1 - 1 \cdot (1 - e^{-1}) =$$
$$= e^{-1},$$

Вышеполученное зн-е, вычисл. благо-даря рекк. соот-я совпадает с вычисл. посредством инт-я

$\Rightarrow I_0$ - найдено верно

$$I_0 = 1 - \frac{1}{e} \quad (6)$$

2. Док-ть, что решение для I_n имеет след. вид:

$$I_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} + (-1)^n n! I_0 \quad (7)$$

Используя (5), распишем I_n:

$$I_n = 1 - n\left(1-(n-1)\left(1-(n-2)\left(1-(n-3) \times I_{n-4}\right)\right)\right)$$

Раскроем:

$$I_n = 1 - n\left(1-(n-1)\left(1-(n-2)-\left(-(n-2)(n-3) I_{n-4}\right)\right)\right)$$

$$I_n = 1 - n\left(1-(n-1) - (n-1)(-(n-2)) - (n-1)\left(-\left(-(n-2)(n-3) I_{n-4}\right)\right)\right)$$

$$I_n = 1 - n - n(-(n-1)) - n(-(n-1)(-(n-2))) - n\left(-(n-1)\left(-(-(n-2))(n-3)\right)\right) I_{n-4}$$

Рассмотрим до I_0:

$$I_n = 1 - n - n(-(n-1)) - n(-(n-1)(-(n-2))) - n\left(-(n-1) \times \left(-(n-2)\left(-(n-3) \ldots -(n-k) \ldots (-2)(-1) I_0\right)\right)\right)$$

$$I_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} + (-1)^n \cdot n! \cdot I_0 \quad \blacksquare$$

3.

Используя фо-лу Стирлинга

$n! \approx \sqrt{2\Pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}$, доказать, что рекурр-е соот-е (5) яв-ся вычисл. неустойчивым

Т.к. (7) ~~вы~~ следует из (5), то подставим фо-лу Стирлинга в (7)

$$I_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{\sqrt{2\Pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}}{(n-k)!} + (-1)^n \cdot I_0 \cdot$$

$$\cdot \sqrt{2\Pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} \quad (8)$$

Заменим I_0 на $I_0 + \delta$, где δ - изнач. вычисл. погрешн. нач. ус-ий

$$I'_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{\sqrt{2\Pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}}{(n-k)!} + (-1)^n (I_0 + \delta)$$

$$\cdot \sqrt{2\Pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} \quad (9)$$

Вычтем (8) из (9):

$$I'_n - I_n = \delta\cdot\sqrt{2\pi n}\cdot(-1)^n\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n -$$

– вычисл. погрешность после n итераций.

$$f(n) = \delta\sqrt{2\pi n}\cdot(-1)^n\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Оценим $O(f(n))$:

$$\underbrace{\delta\cdot\sqrt{2\pi}\cdot(-1)^n}_{const}\cdot\sqrt{n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$\sqrt{n}$ – степенная ф-я от n; $\left(\frac{n}{e}\right)^n$ – показ.-степ. ф-я

$\Downarrow$

$$O(f(n)) = n^n$$

$\Downarrow$

Соот-е (5) яв-ся выч. неуст., т.к. $f(n)$ быстро растет как ф-я от n ∎