Семинар 3. Задача 4.

Степанов Н. Н.

Студент гр. РК6-55Б

Октябрь 2021

Задача 3.4

Требуется найти аппроксимацию значения интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

$$f(x) = \cos^2(x)$$

$$x \in (-1/2; 1/2)$$

с помощью составной формулы Симпсона, используя сначала 3 и затем 9 узлов. Вычислите погрешность аппроксимации для каждого из случаев. Во сколько раз увеличилась точность вычисления при увеличении числа узлов в три раза? Объясните полученное значение.

Решение

Изначально вычислим точное значение интеграла:

$$I = \int\limits_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} cos^2(x)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 + cos(2x)dx = \frac{1}{2}(x + \frac{\sin 2x}{2})\Bigg|_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \approx 0.9207$$

Составная формула Симпсона имеет вид:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_1) + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i+1}) + 4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i}) + f(x_{n+1})] - \frac{(b-a)h^4}{180}f^4(\xi)$$

3 узла

Количество промежутков разбиения:

$$k = n - 1 = 3 - 1 = 2$$

Шаг разбиения:

$$h_3 = \frac{b-a}{k} = \frac{1}{2}$$

Вычислим аппроксимацию интеграла по 3 узлам (без ост. члена):

$$I_3^* = \int\limits_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \int\limits_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos^2(x)dx = \frac{h}{3}[\cos^2(x_1) + 4\cos^2(x_2) + \cos(x_3)] =$$

$$= \frac{1}{6}[\cos^2(-0.5) + 4\cos^2(0) + \cos(0.5)] = \frac{1}{6}[0.77 + 4 + 0.77] \approx 0.9233$$

Оценим остаточный член:

$$c_3(\xi) = \frac{(b-a)h^4}{180}f^4(\xi); \xi \in (a;b)$$

$$f'(\xi) = (\cos^2(\xi))' = -2\cos(\xi)\sin(\xi) = -\sin(2\xi)$$

$$f''(\xi) = -(\sin(2\xi))' = -2\cos(2\xi)$$

$$f'''(\xi) = (-2\cos(2\xi))' = 4\sin(2\xi)$$

$$f^4 = (4\sin(2\xi))' = 8\cos(2\xi)$$

$$|(c_3(\xi)| \leqslant | - \frac{(b-a)h_3^4}{180} f^4_{max}(\xi)|$$

$$|(c_3(\xi)| \leqslant \frac{1}{360}$$

$$I_3 = 0.9233 - 0.0027 = 0.9206$$

Оценим абсолютную погрешность:

$$\Delta = |I - I_3| = |0.9207 - 0.9206| = 0.0001$$

9 узлов

Количество промежутков разбиения:

$$k = n - 1 = 9 - 1 = 8$$

Шаг разбиения:

$$h_9 = \frac{b-a}{k} = \frac{1}{8}$$

Вычислим аппроксимацию интеграла по 9 узлам (без ост. члена):

$$\int\limits_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_1) + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i+1}) + 4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i}) + f(x_{n+1})] - \frac{(b-a)h^4}{180} f^4(\xi)$$

$$I_9^* = \frac{h_9}{3}[f(x_1) + 2(f(x_3) + f(x_5) + f(x_7)) + 4(f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + f(x_8) + f(x_9))] =$$

$$\frac{1}{24}[\cos^2(0.5) + 2(\cos^2(0.25) + \cos^2(0) + \cos^2(0.25)) + 4(\cos^2(0.375) + \cos^2(0.125) + cos^2(0.125) +$$

$$+ \cos^2(0.375)) + \cos^2(0.5) = \frac{1}{24}(0.77 + 2(0.938 + 1 + 0.938) + 4(0.865 + 0.984 + 0.984 + 0.865) + 0.77)$$

$$\approx 0.921$$

Оценим остаточный член:

$$c_9(\xi) = \frac{(b-a)h_9^4}{180} f^4(\xi); \xi \in (a; b)$$

$$|(c_9(\xi)| \leqslant \frac{1}{92160}$$
$$I_9 = 0.9207 - 0.00001085 = 0.9206891$$

Оценим абсолютную погрешность:

$$\Delta = |I - I_9| = |0.9207 - 0.9206891| = 0.000108$$

Оценим во сколько раз увеличивается точность вычислений при увеличении числа узлов с 3 до 9:

$$t = \frac{c_3(\xi)}{c_9(\xi)} = \frac{92160}{360} = 256$$

Вывод

При увеличении числа узлов с 3 до 9 точность вычислений (отношение соответствующих остаточных членов) увеличилась в 256 раз. Следовательно, при большем количестве промежутков аппроксимации интеграла, его значение будет вычислено с большей точностью. Это подтверждается вычислительной устойчивостью операции интегрирования.