Combinatoria. Matrices

Ejercicio 1.
Sea X el conjunto de los números positivos que se escriben con 7 cifras[1].

1. ¿Cuántos elementos tiene X?
2. ¿Cuántos elementos hay en X cuyas cifras sean todas pares? ¿Y todas impares?
3. ¿En cuántos elementos de X se alternan cifras pares e impares?
4. ¿Cuántos elementos hay en X con exactamente 3 cifras impares? ¿Y con 3 cifras pares?
5. ¿Cuántos elementos de X son múltiplos de 6, 10 ó 15?
6. ¿Cuántos elementos de X no son múltiplos de 4 ni de 6 ni de 9?
7. ¿Cuántos elementos de X hay que no tengan dos cifras iguales consecutivas?
8. ¿Cuántos elementos hay en X que tengan exactamente cuatro *cincos*?
9. ¿Cuántos de ellos tienen los *cincos* separados?
10. ¿Cuántos elementos hay en X que tengan cuatro *cincos* consecutivos?
11. ¿Cuántos elementos de X se escriben usando únicamente los dígitos 2 y 5?
12. ¿Cuántos elementos hay en X con todas las cifras distintas?
13. ¿Cuántos elementos hay en X que tengan a lo sumo dos cifras distintas?
14. ¿Cuántos elementos hay en X con las cifras en orden estrictamente creciente?
15. ¿Cuántos elementos hay en X con las cifras en orden decreciente?
16. ¿Cuántos elementos hay en X cuyas cifras sumen 9?
17. ¿Cuántos elementos hay en X cuyas cifras sumen 15?
18. ¿Cuántos elementos hay en X cuyas cifras sumen 22?
19. ¿Cuántos elementos hay en X formados con las cifras 2, 2, 7, 7, 7, 9, 9? ¿Cuántos de ellos son mayores que 5000000?
20. ¿Cuántos elementos capicúas hay en X?

Ejercicio 2 (Introducción a los códigos correctores de errores)**.**
Sea $P \in M_{3\times 7}(\mathbb{Z}_2)$ la matriz cuyas columnas son los números del 1 al 7 escritos en binario.

1 Calcula el rango de P.

2 Calcula una matriz $G \in M_{4\times 7}(\mathbb{Z}_2)$ de rango cuatro y tal que $G \cdot P^t = 0$.

3 Calcula la forma escalonada reducida por filas (forma normal de Hermite) de G, y llámala H_G. Comprueba que $H_G \cdot P^t = 0$.

Supongamos que tenemos un mensaje de cuatro bits que queremos enviar. Llamemos a este mensaje m, que representaremos como una matriz 1×4 con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$.

Para enviar el mensaje lo codificamos, multiplicándolo por la matriz G, es decir, calculamos $c = m \cdot G$. El receptor, al recibir el mensaje, calcula $v = P \cdot c^t$. Notemos que $c \in M_{1\times 7}(\mathbb{Z}_2)$ y $v \in M_{3\times 1}(\mathbb{Z}_2)$.

4 Comprueba que, sea quien sea m, $v = 0$.

[1] Elige 15 apartados de los 20 que tiene este ejercicio

Imaginemos que al enviar un mensaje se produce un error en un bit. Para esto, elige un mensaje cualquiera $m \in M_{1\times 4}(\mathbb{Z}_2)$, calcula el correspondiente elemento c y modifica un bit (el que quieras) de este mensaje. Llama a este mensaje c'.

5 Calcula $v' = P\cdot(c')^t$. Intenta, a partir del resultado, determinar que bit se ha modificado (Indicación: el vector de 3 bits que te ha salido considéralo como un número en binario).

6 ¿Qué ocurre si, en lugar de modificar un bit se modifican dos bits?

7 Repite los apartados 4, 5 y 6 pero con la matriz H_G. Encuentra un método para determinar m a partir de c.

8 Realiza operaciones elementales por columnas en la matriz P^t para obtener una matriz de la forma $\left(\frac{B}{Id}\right)$. Compara esta matriz con H_G.

Ejercicio 3 (El juego del asesino. Opcional)**.**

En este juego puede participar cualquier número de personas n con $n \geq 3$. Supongamos que tomamos $n = 10$.

Se reúnen 10 personas para jugar una partida. A cada persona se le asigna un espacio (que inicialmente sólo conoce ella). Luego se hace un papel con el nombre de cada uno de los participantes y se mezclan. Cado uno elige un papel. Una vez hecho esto, cada persona tiene un papel con el nombre de alguno de ellos. Ese será su primer objetivo. En el lugar que se le ha asignado deberá encontrarse con esa persona a solas, y en ese momento esa persona quedará muerta, por lo que dejará el juego, pero antes deberá decir cuál era su objetivo y el lugar donde debía matarlo y se convierte automáticamente en el objetivo de la primera persona.

Por ejemplo, Juan debe matar a Pedro en el salón y Pedro debe matar a Carmen en la cocina. Si Juan consigue estar con Pedro a solas en el salón, Pedro muere y Juan debe ahora matar a Carmen en la cocina.

Asumimos que a la hora de elegir cada uno a su víctima, todas las asignaciones posibles tienen igual probabilidad.

1. ¿Cuántas asignaciones distintas hay? (con 10 personas).

2. ¿En cuántas de ellas no hay nadie que tenga que matarse a sí mismo? ¿Cuál es la probabilidad de que esto ocurra?

3. Aún cuando nadie tenga que matarse inicialmente a sí mismo, pueden darse bucles. Por ejemplo: si se da la situación de que Juan debe matar a Pedro, Pedro debe matar a Carmen y Carmen debe matar a Juan, en cuanto dos de ellos maten a sus víctimas, quedará uno que tenga que matarse a sí mismo (Juan mata a Pedro, y Carmen mata a Juan. Entonces Carmen debe matar a Carmen). ¿Cuál es la probabilidad de que esto no ocurra (salvo que sólo quede una persona viva de los 10 participantes)?