Espacios vectoriales - aplicaciones lineales

Realizado por:

- Nikita Stetskiy
- Miguel Campos Cobillas

Ejercicio 1

1.

$$B \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Hay 4 vectores linealmente independientes, por lo que es base

2.

$$V_B = (M_{B \to B_C})^{-1} \cdot V_{B_C}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & -4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}$$

//

3.

$$X. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Por lo que hay 3 vectores linealmente independientes

4.

Como es de $\mathbb{R}^4$, añadimos un vector de la base canonica:

$$B_1 = \{(1,0,1,1), (1,1,-1,1), (0,1,2,1), (0,0,0,1)\}$$

5.

$$M_{B_1 \to B} = M_{B_C \to B} \cdot M_{B1 \to B_C}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & -4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 7 & -1 \\ -2 & 1 & -5 & 0 \\ 9 & -3 & 14 & 2 \end{pmatrix} //$$

② $f : (\mathbb{Z}_2)^7 \longrightarrow (\mathbb{Z}_2)^3$

$f(x,y,z,t,u,v,w) = (t+u+v+w,\ y+z+v+w,\ x+z+u+w)$

$B = \{(1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$

1. Comprueba que B es una base de $(\mathbb{Z}_2)^3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+1-1 = 1 \neq 0$$

Por lo tanto al ser el determinante de M_B distinto de 0, B es base de $(\mathbb{Z}_2)^3$.

2. Matriz de f en las bases canónicas de $(\mathbb{Z}_2)^7$ y $(\mathbb{Z}_2)^3$. Matriz P.

3. Calcula una base de N(F)

$\cancel{N(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}_2 : f(x}$

$N(f) = \{(x,y,z,t,u,v,w) \in \mathbb{Z}_2 : (x,y,z,t,u,v,w) = 0\}$

$$N(f) = \begin{cases} x + z + u + w = 0 \\ y + z + v + w = 0 \\ t + u + v + w = 0 \end{cases}$$ resolvemos el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{23}(1)]{E_{13}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego $N(f) \equiv \begin{cases} x+t+v=0 \\ y+t+u=0 \\ t+u+v+w=0 \end{cases}$ $\quad$ $\dim(N(F)) \equiv 7-3=4$

③ $U = L\,[(1,2,3),(2,3,4),(3,4,0)]$ $\qquad (\mathbb{Z}_5)^3$

$$W \equiv \begin{cases} 2x+2y+z=0 \\ 4x+3y+3z=0 \end{cases} \quad ; \quad V_3 \equiv \begin{cases} 4x+2y+z=0 \\ 2x+y+3z=0 \end{cases}$$

1.)

$$B_U \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(2)]{E_{21}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{32}(2)]{E_{12}(3)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_3(3)]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{13}(1)]{E_{23}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$B_U \equiv \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$

$$B_W \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$B_W \equiv \{(1,0,4),\ (0,1,4)\}$

$$B_{V_3} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(4)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B_{V_3} \equiv \{(1,3,4)\}$

2.) $B_{V_2} \Rightarrow V_2 = U \cap W$

$$V_2 : \begin{cases} 2x+2y+z=0 \\ 4x+3y+3z=0 \\ 4x+2y+z=0 \\ 2x+y+3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1(3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{31}(1),\ E_{41}(3)]{E_{21}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2(4)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{42}(1)]{E_{12}(4),\ E_{32}(2)}$$

$$\cancel{\begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{matrix}} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{34}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{23}(1),\ E_{43}(3)]{E_{13}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & 0 \end{pmatrix}$$

$B_{r2} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$