Алгоритм Гёманса–Уильямсона поиска приближённо максимального разреза с точностью 0.878

Напоминание некоторых определений:

- Симметрическая матрица X называется неотрицательно определённой, если все её собственные числа неотрицательны. Обозначение $X \succeq 0$ либо X - PSD-матрица
- $Tr(A)$ - след матрицы A, то есть сумма диагональных элементов
- S^n - множество симметричных матриц размера $n \times n$
- S_+^n - множество симметричных неотрицательно определённых матриц размера $n \times n$
- SDP-задача - это задача оптимизации (т.е. минимизации или максимизации) некоторой линейной целевой функции на множестве PSD-матриц (возможно, с некоторыми линейными ограничениями).
- Пусть Σ - матрица размера $n \times n$, тогда корнем из Σ (обозначение $\sqrt{\Sigma}$) называется такая матрица A, что $A \cdot A = \Sigma$. В частности, если Σ - диагональная матрица, то корень из Σ - тоже диагональная матрица, причем $\left(\sqrt{\Sigma}\right)_{ii} = \sqrt{(\Sigma_{ii})}$

Постановка задачи:

Дан неориентированный граф $G = (V, E)$ с матрицей весов $W \in S^n$, то есть W_{uv} - вес ребра между вершинами u и v. В частности, $W_{uv} = 0 \Leftrightarrow$ в графе нет ребра между вершинами u и v.

Найти такое подмножество вершин $S \subset V$, что сумма весов рёбер из вершин, лежащих в S, в вершины из $V \backslash S$ максимальна

Формально:

$$\max_{\mathbf{x}} \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \left(1 - x_i x_j\right)$$

$$\text{т.ч. } x_i \in \{+1, -1\}$$

То есть x - вектор из $\mathbb{R}^n$ такой, что если $x_i = +1$, то i-я вершина идет в первое подмножество вершин (в S), иначе, если $x_i = -1$, то i-я вершина относится ко второму множеству ($V \backslash S$)

Тогда если $x_u = x_v$, то $(1 - x_u \cdot x_v) = 0$ и вес ребра (u, v) не учитывается в сумме

Иначе, $(1 - x_u \cdot x_v) = 2$ и вес ребра (u, v) учитывается дважды в сумме. Кроме того, для ребра (v, u) происходит все то же самое, поэтому мы домножаем на $\frac{1}{4}$

Перепишем:

$$\max_{x_i=\pm 1} \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^{n} w_{ij} \left(1 - x_i x_j\right) = \max_{x_i=\pm 1} \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^{n} w_{ij} \left(\frac{x_i^2 + x_j^2}{2} - x_i x_j \right) =$$

Это просто потому что $\frac{x_i^2 + x_j^2}{2} = 1$. Далее, раскроем скобки

$$= \max_{x_i=\pm 1} \frac{1}{4} \left(- \sum_{i,j=1}^{n} w_{ij} x_i x_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} w_{ij} \right] x_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n} w_{ij} \right] x_j^2 \right) =$$

Обозначим $deg(i) := \sum_{j=1}^{n} w_{ij}$. Будем называть это число степенью вершины i. Кроме того, $D := diag\left(deg(1), \ldots, deg(n)\right)$. Тогда:

$$= \max_{x_i=\pm 1} \frac{1}{4} \left(- \sum_{i,j=1}^{n} w_{ij} x_i x_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \deg(i) x_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \deg(j) x_j^2 \right)$$

Приводя подобные слагаемые, получаем:

$$= \max_{x_i=\pm 1} \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^{n} \deg(i) x_i^2 - \sum_{i,j=1}^{n} w_{ij} x_i x_j \right) = \max_{x_i=\pm 1} \frac{1}{4} \left[\mathbf{x}^\top D \mathbf{x} - \mathbf{x}^\top W \mathbf{x} \right] = \max_{x_i=\pm 1} \frac{1}{4} \left[\mathbf{x}^\top \left(D - W \right) \mathbf{x} \right] = \max_{x_i=\pm 1} \frac{1}{4} \mathbf{x}^\top L \mathbf{x}$$

Где $L = D - W$ - лапласиан графа

Введем

$$X := \mathbf{x}\mathbf{x}^T$$

Заметим, что

$$\mathbf{x}^\top L\mathbf{x} = Tr\,(LX)$$

Действительно,

$$(LX)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} L_{ik}X_{ki} = \sum_{k=1}^{n} L_{ik}\mathbf{x}_k\mathbf{x}_i$$

$$Tr\,(LX) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} L_{ik}\mathbf{x}_k\mathbf{x}_i$$

Кроме того, легко видеть, что:

$$\mathbf{x}^\top L\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} L_{ij}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j$$

Что и требовалось.

Еще раз, мы теперь перешли к рассмотрению матрицы X:

$$X_{ij} = x_i x_j, \quad x_i = \begin{cases} -1, & \text{если } i \in S \\ +1, & \text{если } i \notin S \end{cases}$$

Наблюдение: X — PSD матрица (ранга 1), на диагонали стоят 1. Действительно, для любой матрицы $Y \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и для любого вектора $z \in \mathbb{R}^n$ верно:

$$z^T\left(Y^TY\right)z = (Yz)^T(Yz) = \|Yz\|_2^2 \geq 0$$

Из этого сразу следует, что Y^TY — PSD-матрица, а после транспорнирования: YY^T — PSD-матрица. В частности, $X = \mathbf{x}\mathbf{x}^T$ PSD-матрица.

И решаем такую задачу:

$$\max_{x_i=\pm 1} \frac{1}{4}Tr\,(LX)$$

Но это переборная задача - её сложно решить. Поэтому мы делаем то, что называется **релаксация**. То есть мы просто заменяем текущие переборные ограничения ($x_i = \pm 1$) на такие, чтобы задача легко решалась. Например, давайте рассматривать в качестве X все PSD-матрицы, на диагонали которых стоят единички. Тогда получим такую задачу оптимизации:

$$\max \frac{1}{4}Tr\,(LX)$$
$$\text{т. ч. } X \succeq 0$$
$$X_{i,i} = 1$$

Она выпуклая, так как S_+^n — выпуклое, а $X_{i,i} = 1$ — это аффинное ограничение (i-й диагональный элемент матрицы легко получить просто домножением этой матрицы на матрицу M из всех нулей, кроме $M_{ii} = 1$). Поскольку мы **расширили** допустимое множество для нашей задачи максимизации, то и новый максимум будет **больше**, чем исходный. Другими словами, $\mathrm{OPT} \geq \mathrm{MAXCUT}$, где OPT — оптимальное значение релаксации, а MAXCUT — ответ на исходную задачу.

Известно, что существуют эффективные алгоритмы решения SDP-задач. Формально, есть, например, метод эллипсоидов который решает эту задачу с точностью ε за $poly(N, R, log(1/\varepsilon))$, где N — длина записи данных, R — логарифм максимального размера допустимого решения. На практике применяются в том числе и некоторые другие методы (например, есть метод внутренней точки), которые достаточно быстро работают на матрицах даже порядка $1000 * 1000$

Далее, пусть X^* - матрица-решение задачи максимизации. Тогда, так как $X^* \in S_+^n$, то существует разложение $X^* = \overline{U}\Sigma\overline{U}^T$, где Σ — матрица с собственными числами матрицы X^* на диагонали, а U имеет столбцами соответствующие этим собственным числам собственные векторы единичной длины (это называется SVD-разложение). Обозначим $\mathbf{U} := \overline{U} \cdot \sqrt{\Sigma}$, Тогда

$$X^* = \overline{U}\Sigma\overline{U}^T = \left(\overline{U} \cdot \sqrt{\Sigma}\right)\left(\sqrt{\Sigma} \cdot \overline{U}^T\right) = \mathbf{U}\mathbf{U}^T$$

Давайте обозначим $\mathbf{u}_i := i$-ая строка матрицы $\mathbf{U}$. Рассмотрим систему векторов $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$. Видно, что матрица $\mathbf{X}^* = \mathbf{U}\mathbf{U}^T$ — это матрица Грама этой системы векторов, то есть матрица, элементами которой являются попарные скалярные произведения данных векторов. По условию, $\mathbf{X^*}_{ii} = 1$, значит

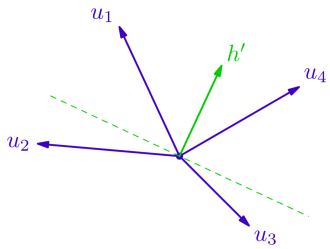
$$\forall i \;\; ||\mathbf{u}_i||^2 = \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle = \mathbf{X^*}_{ii} = 1$$

То есть все векторы имеют единичную длину. Это нам пригодится далее.

Теперь мы хотим получить сам разрез. Предлагается такой алгоритм:

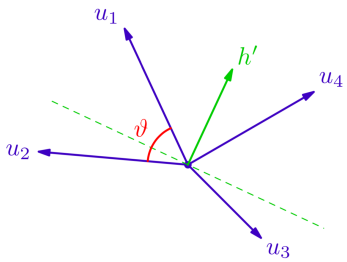
1. Сгенерировать случайный вектор $h \in \mathbb{R}^n$ на единичной сфере
2. $S := \{i \mid \langle h, \mathbf{u}_i \rangle \geq 0\}$, то есть $x_i = \operatorname{sign}\langle h, \mathbf{u}_i \rangle$

Мы хотим оценить точность такого алгоритма. Давайте для примера посмотрим на рисунок:



Здесь у нас есть 4 вектора $\mathbf{u}_i$ и случайный вектор h. В таком случае, вектор
$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (\operatorname{sign}\langle h, \mathbf{u}_1 \rangle, \operatorname{sign}\langle h, \mathbf{u}_2 \rangle, \operatorname{sign}\langle h, \mathbf{u}_3 \rangle, \operatorname{sign}\langle h, \mathbf{u}_4 \rangle) = (+1, -1, -1, +1)$

Теперь мы хотим оценить вероятность того, что вектора x_1 и x_2 имеют разные знаки:



Можно заметить, что вероятность разных знаков у $x_1 = \operatorname{sign}\langle h, \mathbf{u}_1 \rangle$ и $x_2 = \operatorname{sign}\langle h, \mathbf{u}_2 \rangle$ равна ϑ/π, так как разделяющие прямые распределены равномерно.

Далее, оценим мат. ожидание величины разреза (вспоминая нашу изначальную формальную постановку задачи):

$$\mathbb{E}[c(X)] = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\{i,j\} \subset V, \\ i \leq j}} w_{ij} \left(1 - \mathbb{E}\left[x_i x_j\right]\right)$$

Поскольку случайная величина $x_i x_j$ принимает ровно два значения (± 1), то можно записать её мат. ожидание по определению:

$$\mathbb{E}\left[x_i x_j\right] = \frac{\vartheta}{\pi} \cdot (-1) + \left(1 - \frac{\vartheta}{\pi}\right) \cdot (+1) = 1 - 2\frac{\vartheta}{\pi}$$

Поэтому, получаем:

$$\mathbb{E}[c(x)] = \sum_{\substack{\{i,j\} \subset V, \\ i \leq j}} w_{ij} \frac{\vartheta_{ij}}{\pi}$$

Теперь вспоминаем, что вектора $\mathbf{u}_i$ имеют единичную длину, а $\mathbf{X^*}$ – матрица Грама, поэтому:

$$\mathbf{X^*}_{ij} = \left\langle u_i, u_j \right\rangle = \cos \vartheta_{ij}$$

Далее, снова запишем мат. ожидание величины разреза, а затем домножим и разделим каждое слагаемое на $\left(1 - \cos \vartheta_{ij}\right)$, при это вынося $\frac{1}{2}$ знак суммы:

$$\mathbb{E}[c(x)] = \sum_{\substack{\{i,j\} \subset V, \\ i \leq j}} w_{ij} \frac{\vartheta_{ij}}{\pi} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\{i,j\} \subset V, \\ i \leq j}} w_{ij} \frac{2\left(1 - \cos \vartheta_{ij}\right)}{\left(1 - \cos \vartheta_{ij}\right)} \frac{\vartheta_{ij}}{\pi}$$

А теперь просто оценим эту сумму снизу, оценивая кусочек каждого из слагаемых, то есть:

$$\mathbb{E}[c(x)] = \frac{1}{2}\sum_{\substack{\{i,j\}\subset V,\\ i\leq j}} w_{ij}\frac{2\left(1-\cos\vartheta_{ij}\right)}{\left(1-\cos\vartheta_{ij}\right)}\frac{\vartheta_{ij}}{\pi} \geqslant \min_{0<\vartheta<\pi}\frac{2\vartheta}{(1-\cos\vartheta)\pi}\cdot\frac{1}{2}\sum_{\substack{\{i,j\}\subset V,\\ i\leq j}} w_{ij}\left(1-\cos\vartheta_{ij}\right)$$

Обозначим $\alpha_{GW} := \min_{0<\vartheta<\pi}\frac{2\vartheta}{(1-\cos\vartheta)\pi}$. И, вспоминая, что $\mathbf{X^*}_{ij} = \cos\vartheta_{ij}$ перепишем:

$$\mathbb{E}[c(x)] \geqslant \alpha_{\text{GW}}\frac{1}{2}\sum_{\substack{\{i,j\}\subset V,\\ i\leq j}} w_{ij}\left(1-\mathbf{X}^*_{ij}\right) = \alpha_{\text{GW}}\text{OPT}$$

Где OPT — оптимальное значение релаксации. Ясно, что OPT представляется в таком виде, ведь X^* — это решение нашей релаксации, а $\frac{1}{2}\sum_{\substack{\{i,j\}\subset V,\\ i\leq j}} w_{ij}\left(1-\mathbf{X}^*_{ij}\right)$ это и есть в точности то, что было заявлено в начале: $\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n} w_{ij}\left(1-x_i x_j\right)$

Кроме того, так как метод Goemans-Williamson'а выдаёт некоторый разрез, то, очевидно, мат. ожидание величины этого разера не может быть больше, чем истинное значение максимального разреза, то есть:

$$\mathbb{E}[c(x)] \leq \text{MAXCUT}$$

Как уже было показано ранее, выполнено:

$$\text{MAXCUT} \leq \text{OPT}$$

Наконец, соединяя все неравенства вместе, получаем:

$$\alpha_{\text{GW}}\text{OPT} \leqslant \mathbb{E}[c(x)] \leqslant \text{MAXCUT} \leqslant \text{OPT}$$

Значение константы α_{GW} легко вычислить и оказывается, что оно примерно равно 0.878. Таким образом, описанный алгоритм находит разрез в среднем со значением порядка 87% от максимального. Известно, что получение оценки в $\frac{16}{17}$ от оптимального значения уже является NP-сложной задачей. $\frac{16}{17}$ примерно равно 0.94. То есть, если человечество сможет найти алгоритм, который решает задачу MAXCUT с точностью всего лишь на 6% лучшей, чем описанный алгоритм, то из этого будет следовать, что $P = NP$.

Но до сих пор поиск алгоритма даже субэкспоненциальной сложности, который бы находил оценку лучше 0.878, является открытой проблемой.

Реализация

In [31]:
```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
import numpy as np
import cvxpy as cvx
import pandas as pd
import warnings
warnings.filterwarnings('ignore')
from IPython.display import display, HTML
```

Для примера, создадим полный двудольный граф на 13 вершинах: 5 вершин в одной доле и 8 в другой. Очевидно, что значение максимального разреза равно $5 * 8 = 40$

In [45]:
```
n = 5 + 8
# полный двудольный граф на 13 вершинах
G = nx.complete_bipartite_graph(n1=5, n2=8)
# получам лапласиан графа
L = nx.laplacian_matrix(G)
```

In [46]:
```
# вычисляем значение разреза. x - вектор из +- 1
# L - лапласиан графа
def cut(x, L):
    return 0.25 * x @ L @ x
```

Известный алгоритм нахождения максимального разреза с точностью 0.5 - это просто взятие случайного разреза. Попробуем реализовать этот алгоритм на данном графе и посмотрим, что получится.

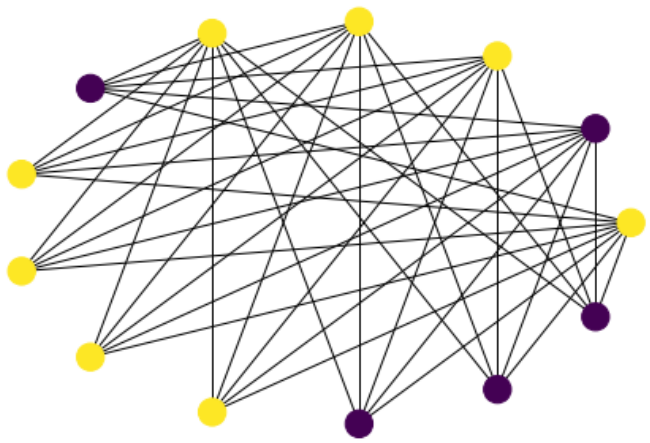
In [57]:
```
# берем случайный вектор из +- 1
cut_trial = 2 * np.random.randint(0, 2, n) - 1
# вычисляем величину такого разреза
cut(cut_trial, L)
```

Out[57]:
```
20.0
```

Видно, что значение такого разреза равно 20, что как раз и есть ровно половина от истинного значения максимального разреза.

Изобразим полученный разрез. Желтые вершины лежат в одной доле, фиолетовые в другой.

In [58]:
```
nx.draw_circular(G, node_color=cut_trial)
```



Теперь же, наконец, реализуем алгоритм Гёманса–Уильямсона

In [6]:
```
# вычисляем ответ для задачи максимизации (релаксация Гёманса–Уильямсона)
def GW_solve(n, L, verbose=False):
    # X - положительно полуопределенная (PSD) матрица
    X = cvx.Variable((n, n), PSD=True)
    # целевая функция Tr(LX)/4
    obj = 0.25 * cvx.trace(L.toarray() * X)
    # ограничение: на диагонали стоят единички
    constr = [cvx.diag(X) == 1]
    # нам нужно максимизировать
    problem = cvx.Problem(cvx.Maximize(obj), constraints=constr)
    return problem.solve(verbose=verbose, solver=cvx.SCS), X

# выводим результат решение задачи оптимизации
result, X = GW_solve(n, L, True)
print(result)
```

```
------------------------------------------------------------------------------
        SCS v2.1.1 - Splitting Conic Solver
        (c) Brendan O'Donoghue, Stanford University, 2012
------------------------------------------------------------------------------
Lin-sys: sparse-direct, nnz in A = 104
eps = 1.00e-04, alpha = 1.50, max_iters = 5000, normalize = 1, scale = 1.00
acceleration_lookback = 10, rho_x = 1.00e-03
Variables n = 91, constraints m = 104
Cones:  primal zero / dual free vars: 13
        sd vars: 91, sd blks: 1
Setup time: 2.03e-02s
------------------------------------------------------------------------------
 Iter | pri res | dua res | rel gap | pri obj | dua obj | kap/tau | time (s)
------------------------------------------------------------------------------
     0| 8.56e+19  1.39e+19  9.42e-01 -2.28e+21 -6.78e+19  1.70e+20  9.45e-03
    40| 6.43e-07  8.16e-07  2.59e-08 -4.00e+01 -4.00e+01  1.16e-15  1.35e-02
------------------------------------------------------------------------------
Status: Solved
Timing: Solve time: 1.36e-02s
        Lin-sys: nnz in L factor: 299, avg solve time: 1.43e-06s
        Cones: avg projection time: 2.04e-04s
        Acceleration: avg step time: 2.21e-05s
------------------------------------------------------------------------------
Error metrics:
dist(s, K) = 1.7159e-09, dist(y, K*) = 1.8634e-09, s'y/|s||y| = 1.2848e-11
primal res: |Ax + s - b|_2 / (1 + |b|_2) = 6.4337e-07
dual res:   |A'y + c|_2 / (1 + |c|_2) = 8.1579e-07
rel gap:    |c'x + b'y| / (1 + |c'x| + |b'y|) = 2.5894e-08
------------------------------------------------------------------------------
c'x = -40.0000, -b'y = -40.0000
==============================================================================
40.00000095875753
```

Действительно, получилось, что $\mathrm{OPT} \geq \mathrm{MAXCUT}$

Теперь нам нужно восстановить сам разрез по описанному выше алгоритму:

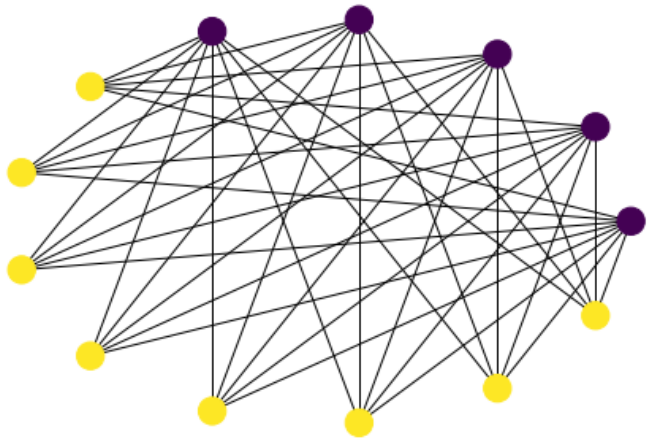
In [7]:
```
# получаем сам разрез
def get_random_GW_cut(X):
    # получаем размерность
    n = X.value.shape[0]
    # получаем SVD разложение
    u, s, v = np.linalg.svd(X.value)
    # получаем матрицу Грама U
    U = u * np.sqrt(s)
    # берем случайный вектор на единичной сфере
    h = np.random.randn(n)
    unit_h = h / np.linalg.norm(h)
    # x_i = sign <h, u_i>
    gw_cut = np.sign(U @ unit_h)
    return gw_cut

# Выводим значение полученного разреза
cut(get_random_GW_cut(X), L)
```

Out[7]:
```
40.0
```

Как видим, алгоритм нашел действительно максимальный разрез, то есть точность получилась 100%. Изобразим этот разрез:

In [8]:
```
nx.draw_shell(G, node_color=get_random_GW_cut(X))
```



Видно, что, действительно, вершины из первой доли оказались в одной части разреза, а из другой доли - в другой.

Теперь протестируем алгоритм на случайных графах.

Возьмем данные из http://biqmac.uni-klu.ac.at/biqmaclib (http://biqmac.uni-klu.ac.at/biqmaclib) - по этой ссылке есть архив с описанием всех графов, которые мы будем рассматривать

Ответы здесь: http://biqmac.uni-klu.ac.at/biqmaclib.pdf (http://biqmac.uni-klu.ac.at/biqmaclib.pdf) - pdf-ка с описанием всех графов и табличками с ответами

Для удобства, я вручную переписал всю нужную информацию в файлик input.txt, откуда далее считаю названия графов и ответы (то есть значения величины максимального разреза).

In [9]:
```
# массив с названиями графов
names = []
# массив с ответами (MAXCUT) для каждого графа
solutions = []

# чтение данных
for line in open('input.txt'):
    values = line.strip().split()
    names.append(values[0] + '_' + values[1])
    solutions.append(int(values[2]))

# приводим к типу np-array
solutions = np.asarray(solutions)
```

In [35]:
```
# ф-ция принимает на вход название файла и возвращает
# массив ребер графа, который описан в этом файле
def get_edges(name):
    with open(name) as f:
        edges = f.readlines()
    edges = [edge.strip() for edge in edges][1:]
    return edges

# возвращает pandas табличку с колонками из данных массивов
def get_df(cur_names, maxs, means, cur_solutions):
    pd.set_option("display.precision", 0)
    df = pd.DataFrame(
        list(
            zip(
                cur_names,
                cur_solutions,
                means,
                means / cur_solutions * 100,
                maxs,
                maxs / cur_solutions * 100
            )
        ),
        columns=['Название графа', 'Решение', 'GW Mean', '% Mean', 'GW Max', '% Max']
    )
    return df

# запускаем алгоритм для графов, которые заданы в файле
# input.txt в строчках с номерами с start до finish
def get_results(start, finish):
    # n - количество вершин в графе
    # у нас всегда будет 100 вершин
    n = 100
    # лучшие величины разреза для каждого графа
    maxs = []
    # средние величины разреза для каждого графа
    means = []
    cur_names = names[start:finish]
    cur_solutions = solutions[start:finish]
    for name in cur_names:

        # получаем ребра текущего графа
        edges = get_edges(name)

        # создаем граф из них
        G = nx.parse_edgelist(edges, nodetype = int, data=(('weight',float),))
        # получаем лапласиан этого графа
        L = nx.laplacian_matrix(G)

        # решаем SDP задачу максимизации
        _, X = GW_solve(n, L, False)

        # сделаем try_num попыток восстановить разрез
        try_num = 100
        # все полученные величины разрезов
        cur_maxcut_values = []
        for _ in range(try_num):
            # получаем некоторый разрез
            cur_cut = get_random_GW_cut(X)
            # получаем величину этого разреза
            cur_cut_value = cut(cur_cut, L)
            # добавляем в массив эту величину
            cur_maxcut_values.append(
                cur_cut_value
            )
        # выбираем лучший из полученных разрезов
        maxs.append(max(cur_maxcut_values))
        # берем среднее по всем значениям
        means.append(np.mean(cur_maxcut_values))

    # приводим массивы к типу np-array
    maxs = np.asarray(maxs)
    means = np.asarray(means)
    # создаем табличку из данных массивов
    df = get_df(cur_names, maxs, means, cur_solutions)

    # возвращаем эту табличку а так же среднее средних значений разреза
    # и среднее среди максимальных значений разреза
```

```
    return df, \
            np.mean(means / cur_solutions * 100), \
            np.mean(maxs / cur_solutions * 100)
```

Запустим алгоритм на графах g05_100.i. Это графы, у которых все ребра имеют вес ровно 1, количество вершин 100, а вероятность каждого ребра равна 0.5

В таблице присутствуют следующие колонки:

- Название графа - оно же имя входного файла, где описан этот граф
- Решение - истинное значение величины максимального разреза
- GW Mean - среднее значение величины разреза, полученное в ходе работы алгоритма (мы делаем несколько попыток восстановить разрез, используя разные случайные вектора h и потом берем среднее по всем результатам)
- % Mean - (GW Mean / Решение) * 100 - то есть какая точность (в процентах) в среднем была достигнута
- GW Max - аналогично GW Mean, только берем лучший из всех полученных разрезов
- % Max - (GW Max / Решение) * 100 - какая точность была достигнута в лучшем случае

In [44]:
```
%%time
df, mean, max_mean = get_results(0, 10)
print('Средняя точность: %d%%' % mean)
print('Средняя точность (если брать лучший результат по нескольким запускам): %d%%' % max_mean)

display(df)
```

```
Средняя точность: 97%
Средняя точность (если брать лучший результат по нескольким запускам): 99%
```

	Название графа	Решение	GW Mean	% Mean	GW Max	% Max
0	g05_100.0	1430	1397	98	1416	99
1	g05_100.1	1425	1397	98	1419	100
2	g05_100.2	1432	1396	97	1423	99
3	g05_100.3	1424	1392	98	1413	99
4	g05_100.4	1440	1403	97	1432	99
5	g05_100.5	1436	1403	98	1431	100
6	g05_100.6	1434	1400	98	1428	100
7	g05_100.7	1431	1398	98	1422	99
8	g05_100.8	1432	1399	98	1423	99
9	g05_100.9	1430	1398	98	1414	99

```
CPU times: user 45.1 s, sys: 4.17 s, total: 49.3 s
Wall time: 49.1 s
```

Видно, что на невзвешенных графах алгоритм получает ответ с очень высокой точностью как в среднем, так и (тем более) в лучшем случае.

Далее, запустим алгоритм на графах pm1s_100.i, это графы (как всегда на 100 вершинах) с весами ребер, выбранными случайно равномерно из $\{-1, 0, 1\}$ и плотностью 10% (то есть, вероятность ребра 0.1)

In [37]:
```
%%time
df, mean, max_mean = get_results(10, 20)
print('Средняя точность: %d%%' % mean)
print('Средняя точность (если брать лучший результат по нескольким запускам): %d%%' % max_mean)

display(df)
```

```
Средняя точность: 85%
Средняя точность (если брать лучший результат по нескольким запускам): 96%
```

	Название графа	Решение	GW Mean	% Mean	GW Max	% Max
0	pm1s_100.0	127	109	86	122	96
1	pm1s_100.1	126	110	87	121	96
2	pm1s_100.2	125	105	84	119	95
3	pm1s_100.3	111	94	85	105	95
4	pm1s_100.4	128	111	87	125	98
5	pm1s_100.5	128	109	86	120	94
6	pm1s_100.6	122	105	86	119	98
7	pm1s_100.7	112	93	83	107	96
8	pm1s_100.8	120	101	85	119	99
9	pm1s_100.9	127	111	88	124	98

```
CPU times: user 24.4 s, sys: 2.16 s, total: 26.5 s
Wall time: 21.7 s
```

Видим, что в среднем результат работы алгоритма уже не такой хороший, как в случае невзвешенного графа, но, тем не менее, довольно близок к теоретической оценке (85% против 87.8%). Однако, в лучшем случае результат по прежнему очень высокий (96% в среднем)

Далее, запустим алгоритм на графах pm1d_100.i, это графы (как всегда на 100 вершинах) с весами ребер, выбранными случайно равномерно из $\{-1, 0, 1\}$ и плотностью 99% (то есть, вероятность ребра 0.99)

То есть отличие от предыдущих десяти графов только в плотности.

In [38]:
```
%%time
df, mean, max_mean = get_results(20, 30)
print('Средняя точность: %d%%' % mean)
print('Средняя точность (если брать лучший результат по нескольким запускам): %d%%' % max_mean)

display(df)
```

```
Средняя точность: 84%
Средняя точность (если брать лучший результат по нескольким запускам): 95%
```

	Название графа	Решение	GW Mean	% Mean	GW Max	% Max
0	pm1d_100.0	340	278	82	328	96
1	pm1d_100.1	324	272	84	306	94
2	pm1d_100.2	389	330	85	377	97
3	pm1d_100.3	400	342	86	387	97
4	pm1d_100.4	363	309	85	346	95
5	pm1d_100.5	441	382	87	417	95
6	pm1d_100.6	367	309	84	355	97
7	pm1d_100.7	361	298	83	344	95
8	pm1d_100.8	385	317	82	370	96
9	pm1d_100.9	405	343	85	386	95

```
CPU times: user 22.5 s, sys: 2.48 s, total: 25 s
Wall time: 22.2 s
```

Результаты аналогичны предыдущим десяти графам, то есть изменение плотность никак не повлияло на точность.

Теперь рассмотрим графы w09_100.i, Граф с целочисленными весами ребер, выбранными случайно равномерно из $[-10, 10]$ и плотностью 0.9.

In [39]:
```
%%time
df, mean, max_mean = get_results(30, 40)
print('Средняя точность: %d%%' % mean)
print('Средняя точность (если брать лучший результат по нескольким запускам): %d%%' % max_mean)

display(df)
```

```
Средняя точность: 84%
Средняя точность (если брать лучший результат по нескольким запускам): 95%
```

	Название графа	Решение	GW Mean	% Mean	GW Max	% Max
0	w09_100.0	2121	1785	84	2024	95
1	w09_100.1	2096	1796	86	2033	97
2	w09_100.2	2738	2383	87	2605	95
3	w09_100.3	1990	1618	81	1863	94
4	w09_100.4	2033	1744	86	1960	96
5	w09_100.5	2433	2101	86	2338	96
6	w09_100.6	2220	1835	83	2115	95
7	w09_100.7	2252	1933	86	2117	94
8	w09_100.8	1843	1506	82	1813	98
9	w09_100.9	2043	1676	82	1997	98

```
CPU times: user 22.5 s, sys: 2.25 s, total: 24.8 s
Wall time: 20.1 s
```

Результаты аналогичны предыдущим нескольким запускам, то есть изменение масштаба величины ребер не повлияло на точность

Теперь рассмотрим графы w01_100.i, Граф с целочисленными весами ребер, выбранными случайно равномерно из $[-10, 10]$ и плотностью 0.1.

То есть отличается только плотность

In [40]:
```
%%time
df, mean, max_mean = get_results(40, 50)
print('Средняя точность: %d%%' % mean)
print('Средняя точность (если брать лучший результат по нескольким запускам): %d%%' % max_mean)

display(df)
```

```
Средняя точность: 85%
Средняя точность (если брать лучший результат по нескольким запускам): 97%
```

	Название графа	Решение	GW Mean	% Mean	GW Max	% Max
0	w01_100.0	651	555	85	626	96
1	w01_100.1	719	629	87	714	99
2	w01_100.2	676	586	87	654	97
3	w01_100.3	813	719	88	807	99
4	w01_100.4	668	554	83	643	96
5	w01_100.5	643	550	86	618	96
6	w01_100.6	654	539	82	617	94
7	w01_100.7	725	641	88	712	98
8	w01_100.8	721	622	86	711	99
9	w01_100.9	729	629	86	698	96

```
CPU times: user 26 s, sys: 2.22 s, total: 28.2 s
Wall time: 23 s
```

Результаты аналогичны

Теперь рассмотрим графы pw05_100.i, графы с целочисленными весами ребер, выбранными случайно равномерно из $[0, 10]$ и плотностью 0.5.

То есть теперь все веса неотрицательные

In [41]:
```
%%time
df, mean, max_mean = get_results(50, 60)
print('Средняя точность: %d%%' % mean)
print('Средняя точность (если брать лучший результат по нескольким запускам): %d%%' % max_mean)

display(df)
```

```
Средняя точность: 97%
Средняя точность (если брать лучший результат по нескольким запускам): 99%
```

	Название графа	Решение	GW Mean	% Mean	GW Max	% Max
0	pw05_100.0	8190	7981	97	8119	99
1	pw05_100.1	8045	7838	97	7977	99
2	pw05_100.2	8039	7817	97	7995	99
3	pw05_100.3	8139	7899	97	8080	99
4	pw05_100.4	8125	7921	97	8053	99
5	pw05_100.5	8169	7935	97	8078	99
6	pw05_100.6	8217	8001	97	8138	99
7	pw05_100.7	8249	8041	97	8181	99
8	pw05_100.8	8199	7991	97	8162	100
9	pw05_100.9	8099	7875	97	8044	99

```
CPU times: user 40.7 s, sys: 3.51 s, total: 44.2 s
Wall time: 38.6 s
```

Здесь сразу видно, что точность в среднем резко выросла. Теперь запустим на аналогичных графах (тоже с положительными весами ребер) но с другими плотностями (0.9 и 0.1) и убедимся, что, действительно, плотность не влияет на точность, а влияет наличие/отсутствие отрицательных весов у ребер.

In [59]:
```
%%time
df, mean, max_mean = get_results(60, 70)
print('Средняя точность: %d%%' % mean)
print('Средняя точность (если брать лучший результат по нескольким запускам): %d%%' % max_mean)

display(df)
```

```
Средняя точность: 98%
Средняя точность (если брать лучший результат по нескольким запускам): 99%
```

	Название графа	Решение	GW Mean	% Mean	GW Max	% Max
0	pw09_100.0	13585	13370	98	13534	100
1	pw09_100.1	13417	13220	99	13331	99
2	pw09_100.2	13461	13229	98	13372	99
3	pw09_100.3	13656	13431	98	13589	100
4	pw09_100.4	13514	13286	98	13449	100
5	pw09_100.5	13574	13396	99	13530	100
6	pw09_100.6	13640	13408	98	13557	99
7	pw09_100.7	13501	13294	98	13438	100
8	pw09_100.8	13593	13363	98	13542	100
9	pw09_100.9	13658	13441	98	13622	100

```
CPU times: user 58.3 s, sys: 5.34 s, total: 1min 3s
Wall time: 1min
```

In [60]:
```
%%time
df, mean, max_mean = get_results(70, 80)
print('Средняя точность: %d%%' % mean)
print('Средняя точность (если брать лучший результат по нескольким запускам): %d%%' % max_mean)

display(df)
```

```
Средняя точность: 95%
Средняя точность (если брать лучший результат по нескольким запускам): 98%
```

	Название графа	Решение	GW Mean	% Mean	GW Max	% Max
0	pw01_100.0	2019	1921	95	1975	98
1	pw01_100.1	2060	1962	95	2050	100
2	pw01_100.2	2032	1924	95	1998	98
3	pw01_100.3	2067	1969	95	2045	99
4	pw01_100.4	2039	1934	95	2013	99
5	pw01_100.5	2108	1997	95	2084	99
6	pw01_100.6	2032	1946	96	2005	99
7	pw01_100.7	2074	1977	95	2066	100
8	pw01_100.8	2022	1909	94	1988	98
9	pw01_100.9	2005	1925	96	1984	99

```
CPU times: user 35.8 s, sys: 2.96 s, total: 38.7 s
Wall time: 34.1 s
```

Вывод

Алгоритм в среднем работает с высокой (значительно большей теоритически полученной) точностью для графов с положительными весами ребер. Для графов с произвольными весами ребер алгоритм в среднем работает с точностью близкой к теоритической. Если же брать не средний, а лучший результат по нескольким запускам, то алгоритм всегда работает с достаточно высокой точностью. Кроме того, можно заметить, что на более плотных графах алгоритм может работать дольше (это хорошо видно особенно на последних двух запусках)

P.S.

Ранее мы обозначили $\alpha_{GW} := \min_{0<\vartheta<\pi} \frac{2\vartheta}{(1-\cos\vartheta)\pi}$. Это число и было точностью нашего алгоритма. Покажем, что оно действительно примерно равно 0.878

In [19]:
```
theta = np.linspace(0 + 1e-8, np.pi, 1e7)
min(2 * theta / ((1 - np.cos(theta)) * np.pi))
```

Out[19]:
```
0.8785672057848526
```

Список литературы

- Оригинальная статья http://www-math.mit.edu/~goemans/PAPERS/maxcut-jacm.pdf (http://www-math.mit.edu/~goemans/PAPERS/maxcut-jacm.pdf)
- Лекция (Михаил Вялый) https://youtu.be/RNYfcl3hxUk (https://youtu.be/RNYfcl3hxUk), https://docplayer.ru/58779485-Priblizhennoe-reshenie-zadach-kombinatornoy-optimizacii-algoritmy-i-trudnost-lekciya-4-sdp-relaksacii-i-algoritm-gyomansa-vilyamsona.html (https://docplayer.ru/58779485-Priblizhennoe-reshenie-zadach-kombinatornoy-optimizacii-algoritmy-i-trudnost-lekciya-4-sdp-relaksacii-i-algoritm-gyomansa-vilyamsona.html)
- Лекция (Александр Катруца) https://github.com/amkatrutsa/optimization-fivt/blob/master/13-SDP/lecture13.pdf (https://github.com/amkatrutsa/optimization-fivt/blob/master/13-SDP/lecture13.pdf)
- Graphs and Graph Laplacians https://www.cis.upenn.edu/~cis515/cis515-14-graphlap.pdf (https://www.cis.upenn.edu/~cis515/cis515-14-graphlap.pdf)