```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.stats as sps
```

# Задача №1

## Условие:

(К теоретической задаче 1) Сгенерируйте $M = 100$ выборок $X_1, \ldots, X_{1000}$ из равномерного распределения на отр (возьмите три произвольных положительных значения $\theta$). Для каждой выборки $X_1, \ldots, X_n$ для всех $n \leqslant 1000$ пос параметра $\theta$ из теоретической задачи: $2\overline{X}, (n+1)X_{(1)}, X_{(1)} + X_{(n)}, \frac{n+1}{n}X_{(n)}$. Посчитайте для всех полученых оцен квадратичную функцию потерь $(\hat{\theta} - \theta)^2$ и для каждого фиксированного $n$ усредните по выборкам. Для каждого из т постройте графики усредненных функций потерь в зависимости от $n$.

## Решение:

$$R\left(2\overline{X}, \theta\right) = E_\theta\left(2\overline{X} - \theta\right)^2 = \frac{\theta^2\ (3n+1)}{3n}$$

$$R\left((n+1)X_{(1)}, \theta\right) = E_\theta\left((n+1)X_{(1)} - \theta\right)^2 = \frac{\theta^2 n}{n+2}$$

$$R\left(\frac{n+1}{n}X_{(n)}, \theta\right) = E_\theta\left(\frac{n+1}{n}X_{(n)} - \theta\right)^2 = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

Таким образом,

$$R\left(\frac{n+1}{n}X_{(n)}, \theta\right) \leq R\left(2\overline{X}, \theta\right) \leq R\left((n+1)X_{(1)}, \theta\right)$$

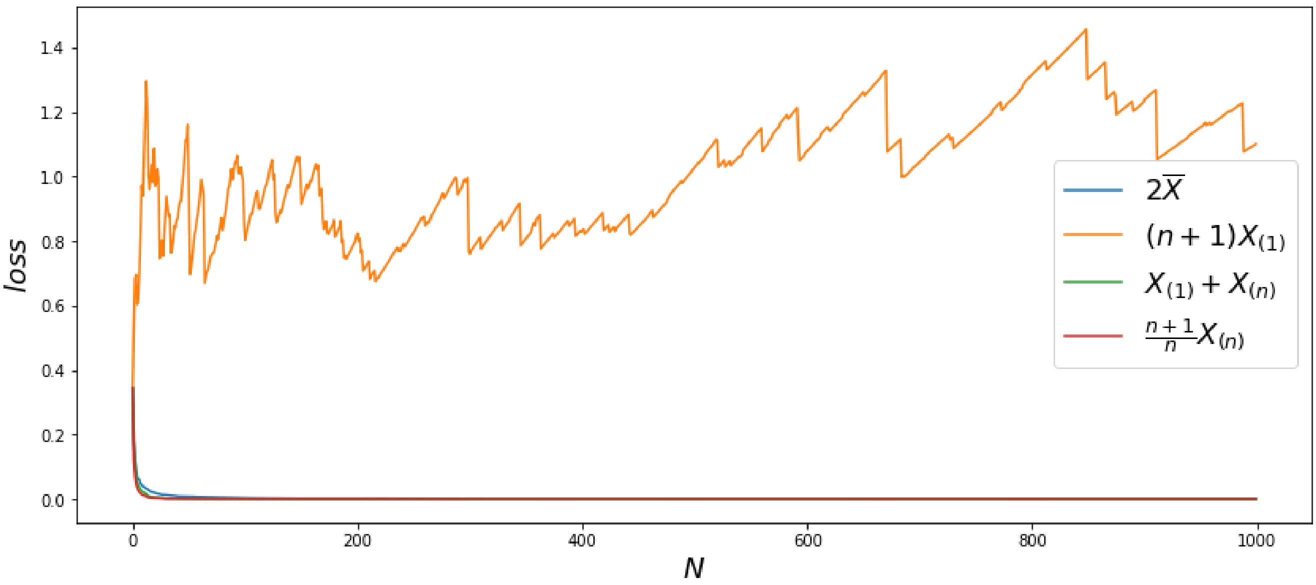
То есть можно выдвинуть гипотезу, что оценка $(n+1)X_{(1)}$ будет хуже остальных

```
# получаем для данного theta усредненные по выборкам значения
# квадратичной функции потерь
def get_means(theta, M, N):
    # Получаем выборку из распределения U[0, theta] размера M*N
    X = sps.uniform(0, theta).rvs((M, N))

    # Вычисляем различные оценки (в том же порядке, что и в условии)
    estimations = [
        2 * np.cumsum(X, axis=-1) / np.arange(1, N + 1),
        np.arange(2, N + 2) * np.minimum.accumulate(X, axis=-1),
        np.minimum.accumulate(X, axis=-1) + np.maximum.accumulate(X, axis=-1),
        np.arange(2, N + 2) / np.arange(1, N + 1) * np.maximum.accumulate(X, axis=-1)
    ]
    # приводим к типу numpy array
    estimations = np.asarray(estimations)

    # Запишем эти оценки чтобы отобразить на графике
    labels = [
        '$2\\overline{X}$',
        '$(n + 1)X_{(1)}$',
        '$X_{(1)} + X_{(n)}$',
        '$\\frac{n + 1}{n} X_{(n)}$'
    ]

    # для всех полученых оценок вычисляем квадратичную функцию потерь
    loss = (estimations - theta)**2

    # считаем среднее по выборкам
    means = loss.mean(axis=1)

    return means, labels
```

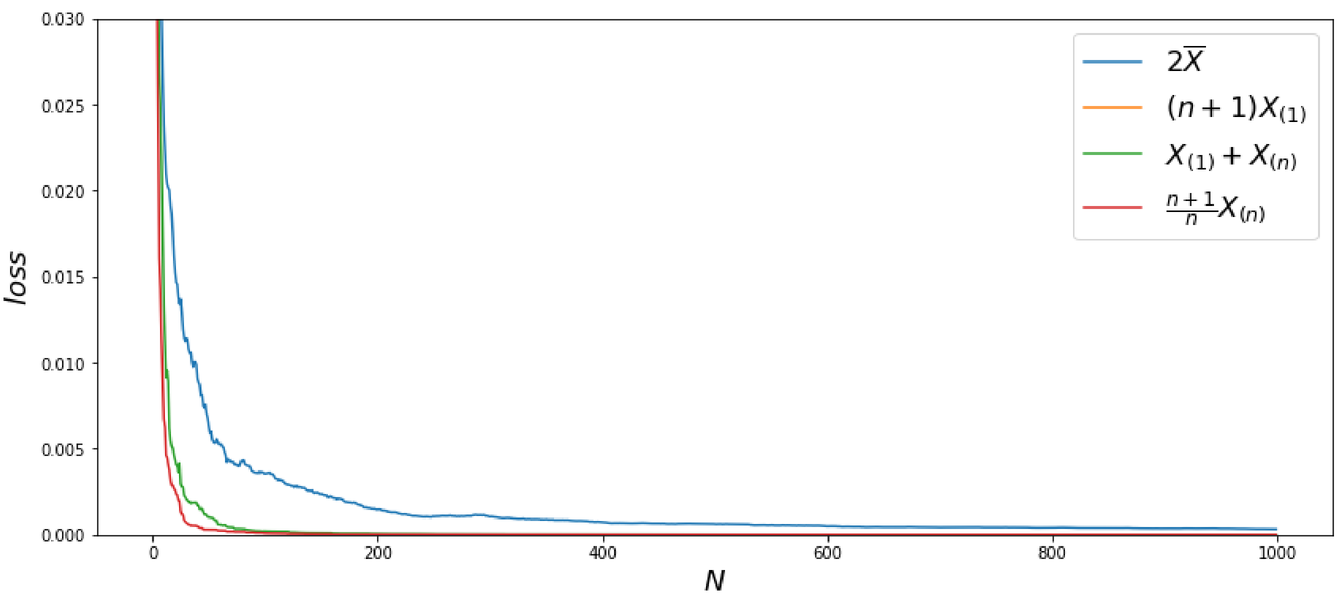
```
# отображаем на графике усредненные функции потерь в зависимости от n
def show_means(means, labels, ylim=None):
    plt.figure(figsize=(14, 6))
    lineObjects = plt.plot(means.T)

    plt.legend(lineObjects, labels, fontsize=18)
    plt.xlabel('$N$', fontsize=18)
    plt.ylabel('$loss$', fontsize=18)

    plt.ylim(ylim)

    plt.show()
```

$$X_i \sim U[0, 1]$$

```
# Получаем значения усредненных функций потерь для theta=1
means, labels = get_means(theta=1, M=100, N=1000)
show_means(means, labels)
```



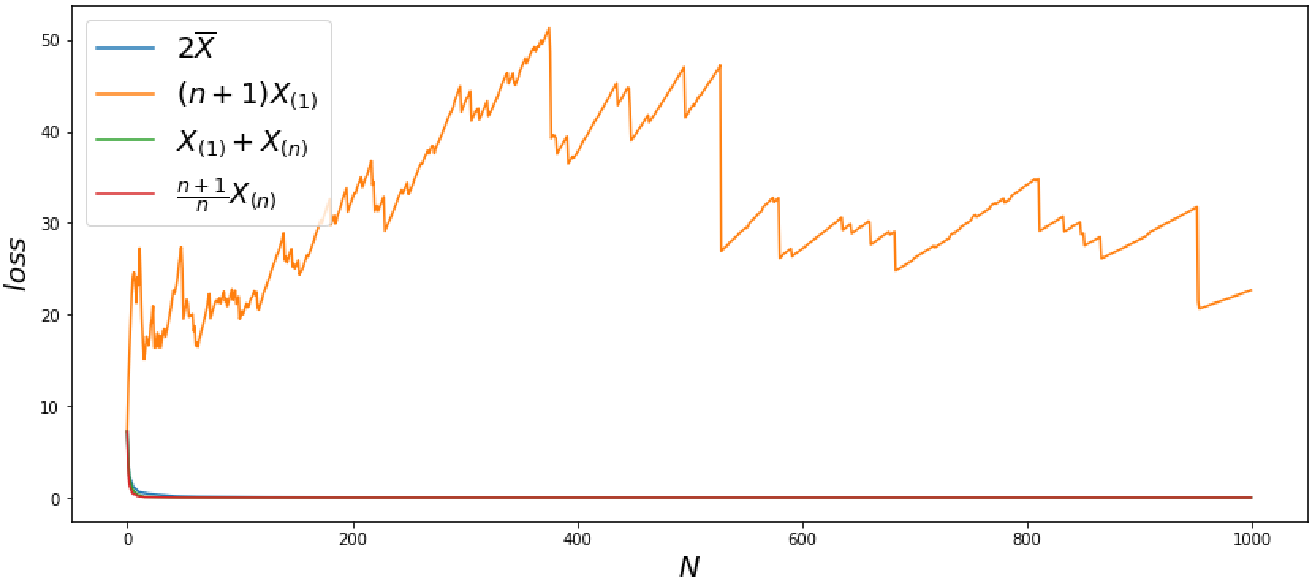

```
# Рассмотрим график в окрестности нуля по оси ординат
show_means(means, labels, ylim=(0, 0.03))
```



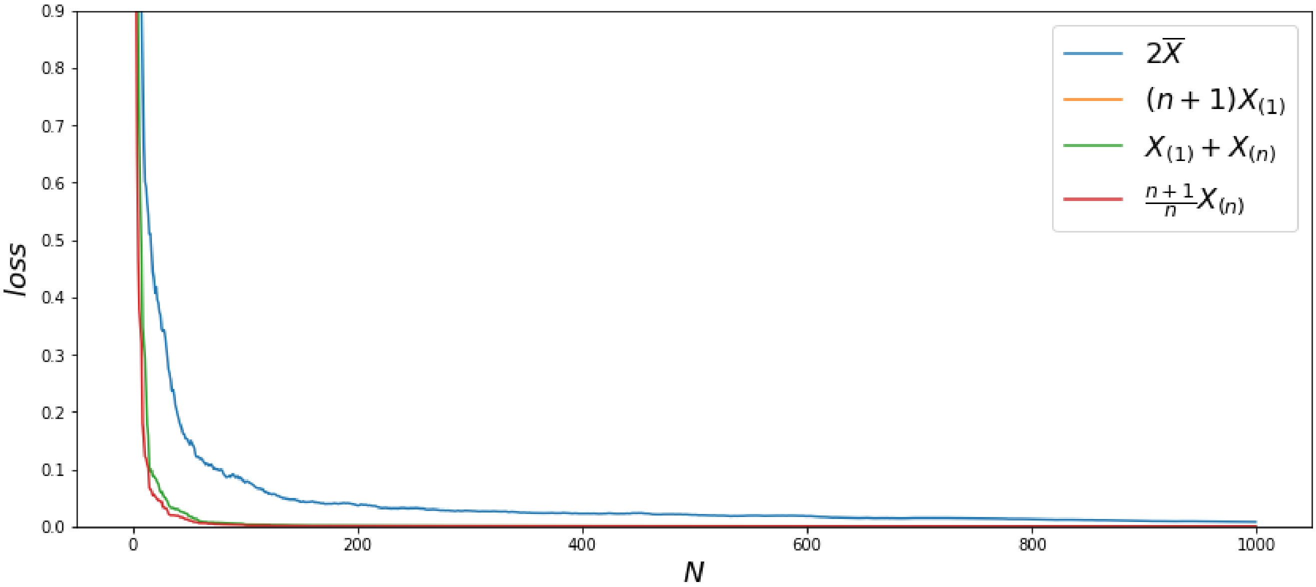

$$X_i \sim U[0, 5]$$

```
# аналогично для theta=5
```

```
means, labels = get_means(theta=5, M=100, N=1000)
show_means(means, labels)
```

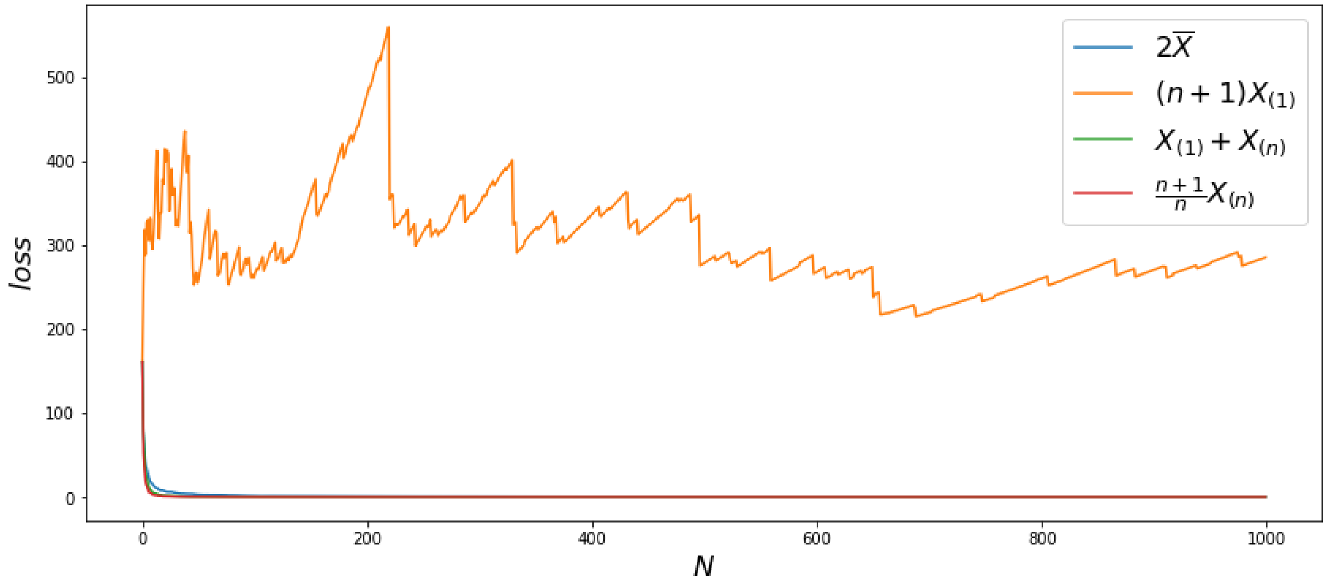



```
# Рассмотрим график в окрестности (теперь большей, чем в предыдущем примере) нуля по оси ординат
show_means(means, labels, ylim=(0, 0.9))
```

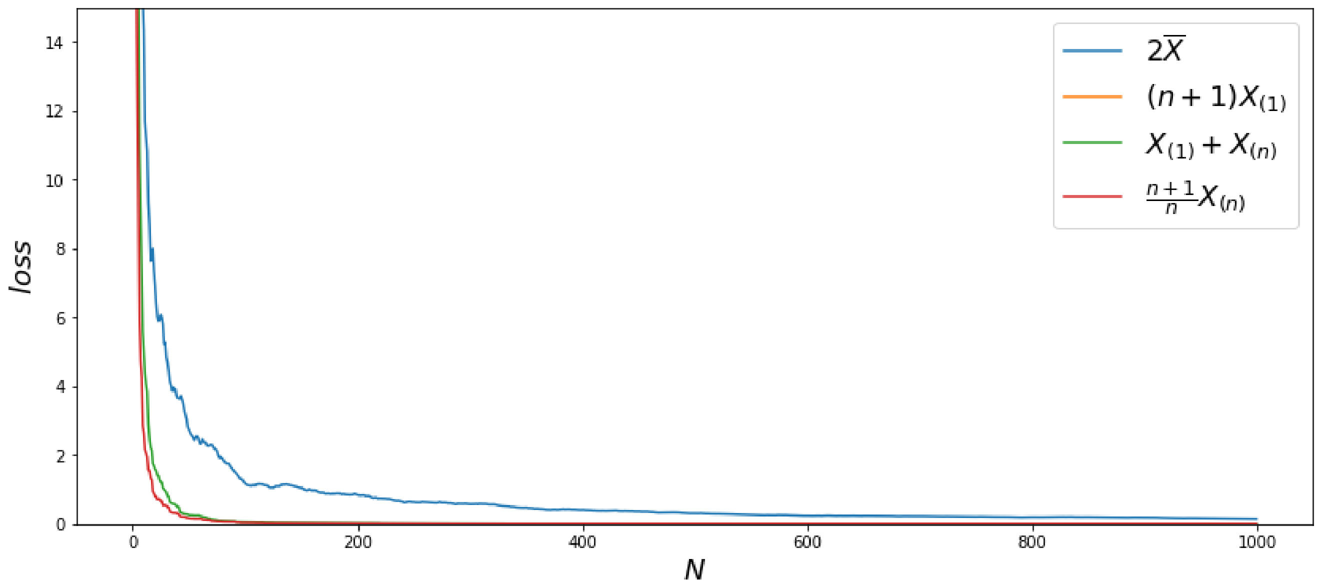



$$X_i \sim U[0, 20]$$

```
# аналогично для theta=20
means, labels = get_means(theta=20, M=100, N=1000)
show_means(means, labels)
```




```
# Рассмотрим график в окрестности (теперь большей, чем в предыдущем примере) нуля по оси ординат
show_means(means, labels, ylim=(0, 15))
```




Гипотеза подтвердилась

# Задача №3

## Условие:

Рассмотрим $X_1, \ldots, X_n \sim Bern(\theta)$. По сетке значений $\theta \in [0, 1]$ с шагом 0.01 постройте график зависимости ниж
дисперсии произвольной несмещенной оценки из неравенства Рао-Крамера от $\theta$. Какой можно сделать вывод (нап
комментариях)? Для каждого значения $\theta$ (для той же сетки) сгенерируйте выборку размера $n = 1000$ для параметр
эффективную оценку $\theta$ и бутстрепную оценку дисперсии (параметрический бутстреп, количество бутстрепных выбо
этой эффективной оценки $\theta$. Нарисуйте график зависимости полученных бутстрепных оценок от $\theta$.

## Решение:

$$\tau(\theta) = \theta$$

Информация Фишера (распределение Бернулли):

$$i(\theta) = \frac{1}{\theta(1-\theta)}$$

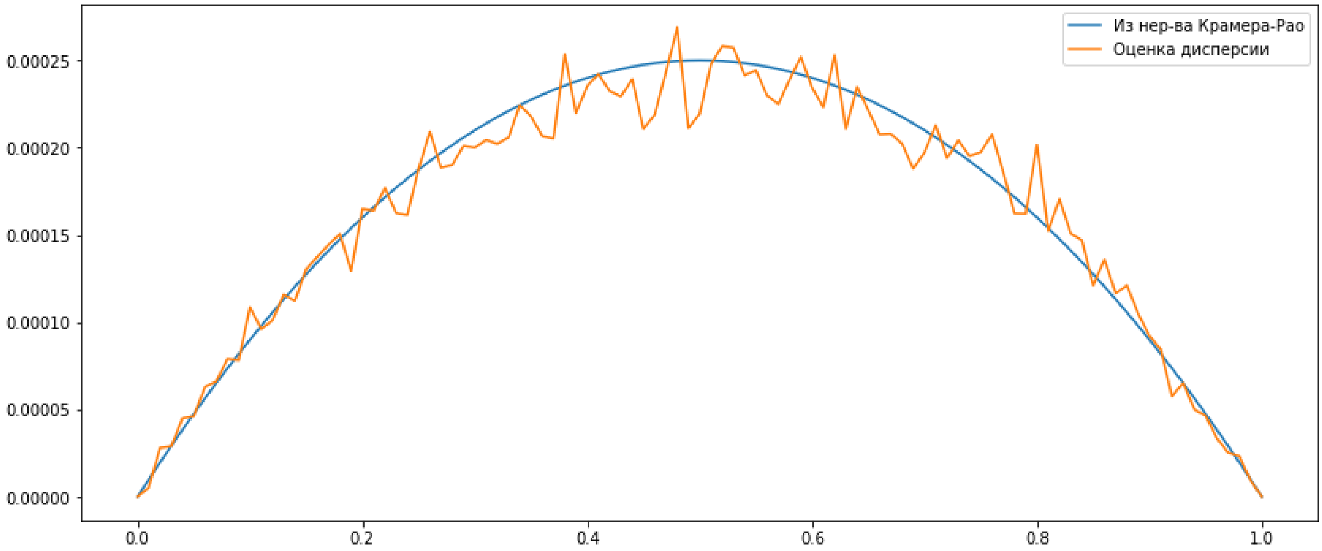
Неравенство Крамера-Рао:

$$\mathrm{D}_\theta \theta^* \ge \frac{\left(\tau'(\theta)\right)^2}{ni(\theta)} = \frac{1}{ni(\theta)} = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$$

Эффективная оценка:

$$\theta^* = \overline{X}$$

```
def solve(n, a, b, delta, k):
    # получаем сетку значений параметра
    thetas = np.arange(a, b + delta, delta)

    # получаем выборки размера из распределения Бернулли с параметрами thetas
    X = sps.bernoulli.rvs(p=thetas, size=(n, len(thetas))).T

    # Считаем эффективную оценку - среднее для каждой выборки
    estimation = X.mean(axis=-1)

    # получаем k бутстрепных выборок размера n в параметрическом бутстрепе
    bootstrap_samples = sps.bernoulli.rvs(size=(len(thetas), k, n), p=estimation[:, None, None])

    # считаем среднее для каждой выборки
    estimations_bootstrap = bootstrap_samples.mean(axis=-1)

    # для каждого исходного значения параметра (из сетки) получаем бутстрепную оценку дисперсии
    var_bootstrap_estimation = np.var(estimations_bootstrap, axis=-1)

    # задаем параметры графика
    plt.figure(figsize=(14, 6))

    # строим график зависимости нижней оценки дисперсии произвольной несмещенной оценки из
    # неравенства Рао-Крамера от θ
    plt.plot(
        thetas,
        thetas * (1. - thetas) / n,
        label='Из нер-ва Крамера-Рао'
    )
    # строим график зависимости полученных бутстрепных оценок от θ
    plt.plot(
        thetas,
        var_bootstrap_estimation,
        label='Оценка дисперсии'
    )
    plt.legend()


# Построим график с параметрами, данными в условии задачи
solve(n=1000, a=0, b=1, delta=0.01, k=500)
```




```
# Построим тот же график, немного увеличив количество и размер выборок
solve(n=3100, a=0, b=1, delta=0.01, k=3500)
```