# Matematik och Konvolutionella Neurala Nätverk för dataseende

Nikita Zozoulenko

1 november 2017

## Abstract

Convolutional Neural Networks have ...

## Innehåll



# 1 Introduktion

## 1.1 Bakgrund

15 sidor av min rapport är bakgrund

## 1.2 Syfte

Syftet med arbetet är att redogöra för den underliggande matematiken bakom den matematiska modellen av klassiska neurala nätverk och konvolutionella

neurala nätverk, samt visa exempel på praktiska tillämpningar.

### 1.3 Frågeställning

Vad är ett artificiellt neuralt nätverk?

Vad är ett Konvolutionellt Neuralt Nätverk?

Hur härleds framåt- och bakåtpropageringen i dessa nätverk

Hur kan man tillämpa modellen för att implementera sifferavläsning,ansiktsigenkänning och objektdetektion i bilder?

## 2 Metod

Majoriteten av tiden gick åt till att... standford, vetenskapliga artiklar batch normalization någonting et al. 2015.... implementera skiten och dubbelkolla med derivatans definition

## 3 Notation

I denna rapport används notation för bland annat vektorer, matriser och tensorer av högre grad. En tensor av grad 1 är en vektor $x \in \mathbb{R}^H$ och är en radvektor med $H$ element. Matriser $M$ är tensorer av grad 2 sådana att $M \in \mathbb{R}^{H \times W}$. En tensor $X \in \mathbb{R}^{R \times C \times H \times W}$ av grad 4 indexeras med en fyr-tupel $(r, c, h, w)$ där $0 \leq r < R$, $0 \leq c < C$, $0 \leq h < H$ och $0 \leq w < W$. Om $R \times C \times H \times W$ och $(r, c, h, w)$ representerar dimensionerna respektive index för lager $l$ represneterar $R \times C' \times H' \times W'$ och $(r, c', h', w')$ dimensionerna respektive index för nästinkommande lager.

Om $X$ är en matris definieras funktionen $f(X)$ genom att elementvis applicera $f$ på alla matrisens element:

$$f(X) = \begin{bmatrix} f(X_{0,0}) & f(X_{0,1}) & \cdots & f(X_{0,i}) \\ f(X_{1,0}) & f(X_{1,1}) & \cdots & f(X_{1,i}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(X_{j,0}) & f(X_{j,1}) & \cdots & f(X_{j,i}) \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(X_{0,0})}{\partial X_{0,0}} & \frac{\partial f(X_{0,1})}{\partial X_{0,1}} & \cdots & \frac{\partial f(X_{0,i})}{\partial X_{0,i}} \\ \frac{\partial f(X_{1,0})}{\partial X_{1,0}} & \frac{\partial f(X_{1,1})}{\partial X_{1,1}} & \cdots & \frac{\partial f(X_{1,i})}{\partial X_{1,i}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(X_{j,0})}{\partial X_{j,0}} & \frac{\partial f(X_{j,1})}{\partial X_{j,1}} & \cdots & \frac{\partial f(X_{j,i})}{\partial X_{j,i}} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Detta kan generaliseras för en tensor av grad n:

$$\left[f(X)\right]_{i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}} = f(X_{i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}}) \tag{3}$$

$$\left[\frac{\partial f(X)}{\partial X}\right]_{i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}} = \frac{\partial f(X_{i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}})}{\partial X_{i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}}} \tag{4}$$

Hadamardprodukten betäcknas med $\odot$ och verkar på två tensorer $A$ och $B$ av samma storlek och producerar en tensor $C$ med samma storlek. Elementen i tensorerna multipliceras elementvist:

$$C_{i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}} = A_{i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}} \odot B_{i_0, i_1, \cdots, i_{n-1}} \tag{5}$$

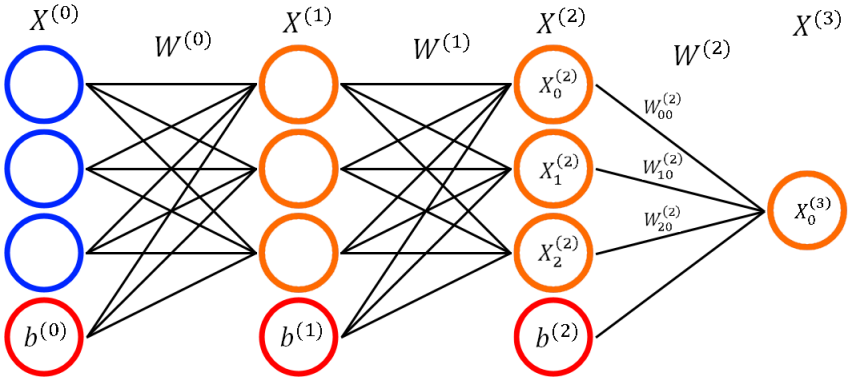
NÅGONTING OM vec()

# 4 Resultat

## 4.1 Feed-forward Neurala Nätverk

Ett artificellt neuralt nätverk består av ett antal lager neuroner. De är uppbyggda rekursivt så att resultatet av ett lager är inmatningen till nästintilliggande lager. Nervsignalen propageras framåt tills den når det sista lagret. Hur nervceller från ett lager är kopplade till det föregående lagret varierar med vilken typ av neuralt nätverk man väljer.

Den mest grundläggande modellen är så kallade *Multilayer Perceptrons* och har flera namn, bland annat *Fully Connected Cascade (FCC)*, *Feed-forward Neural Network* och *Densly Connected (Dense)*. Modellen består av ett flertal lager av neuroner sådana att resultatet av ett lager matas in som input till nästa lager. Varje neuron i ett lager är kopplade till alla neuroner i nästintillföljande lager. Styrkan av en nervsignals fortplantning till nästa neuron beror på hur stark kopplingen mellan de två neuronerna är. Deras värden vid ett visst lager kallas för aktiveringen vid det lagret. Utöver den vanliga nervsignalsöverföringen appliceras dessutom en aktiveringsfunktion $f(x)$ på samtliga lager elementvis på varje neuron enligt ekvation (3).




Figur 1: Ett exempel på ett enkelt feed-forward neuralt nätverk. Inputneuronerna är blåmarkerade medan resterande neuroner är orangea. Röda neuroner är så kallade ”bias-neuroner” som är konstanta oberoende på indatan. Svarta linjer symboliserar vikterna och deras styrka mellan två neuroner.

### 4.1.1 Framåtprogagering

*Forward propagation* eller framåtpropagering är processen av att från sina inputneuroner propagera framåt nervsignalen i nätverket tills man når det sista lagret av neuroner.

Nätverket kan framställas genom att representera neuronerna och deras kopplingar

m.h.a matriser. Låt $X_{ri}^{(l)}$ benämna neuron nummer $i$ i lager $l$ i hop $r$, $W_{ba}^{(l)}$ styrkan på kopplingen mellan neuron $X_{ra}^{(l)}$ och $X_{rb}^{(l+1)}$ och låt $b^{(l)}$ (efter engelskans *bias*) vara en konstant neuron som är kopplad till alla neuron i lager $l+1$. Output av nätverket kallas för $\hat{y}$ och är värdet av det sista lagret neuroner. Signalöverföringen mellan lager 2 och 3 i figur 1 kan beskrivas matematiskt genom:

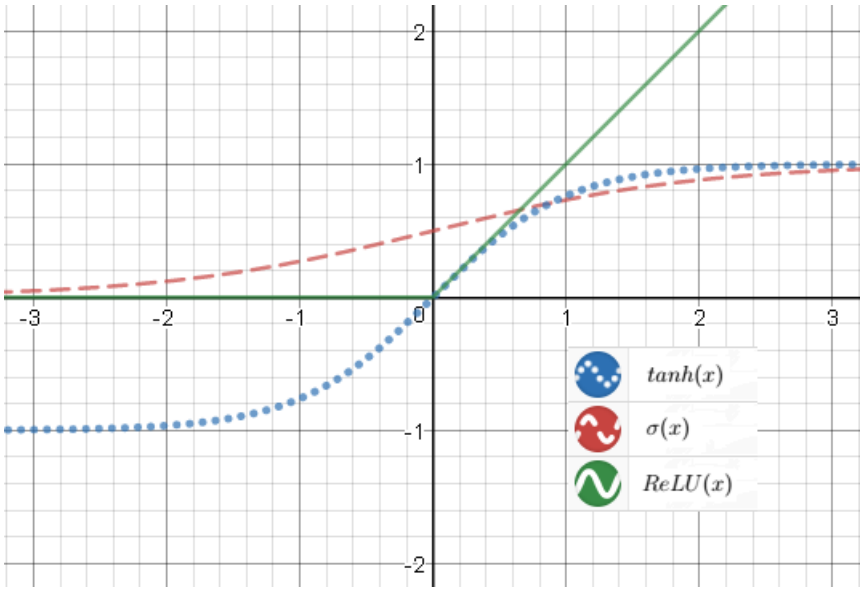
$$\begin{aligned} X_{00}^{(3)} &= f(X_{00}^{(2)}W_{00}^{(2)} + X_{01}^{(2)}W_{10}^{(2)} + X_{02}^{(2)}W_{20}^{(2)} + b^{(2)}) \\ &= f(X^{(2)}W^{(2)} + b^{(2)}) \end{aligned} \tag{6}$$

Där $X^{(3)} \in \mathbb{R}^{1\times 1}$, $X^{(2)} \in \mathbb{R}^{1\times 3}$, $W^{(2)} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ och $b^{(2)} \in \mathbb{R}^{1}$.

Mer generellt kan ett helt neuralt nätverk beskrivas med följande rekursiva formel:

$$X^{(l+1)} = f(X^{(l)}W^{(l)} + b^{(l)}) \tag{7}$$

Vanliga aktiveringsfunktioner för neurala nätverk är *Rectified Linear Units (ReLU)*, *sigmoid* ($\sigma$) och *tangens hyperbolicus (tanh)*. Funktionerna måste vara deriverbara för att nätverket ska kunna tränas genom processen som kallas för bakåtpropagering. Utan aktiveringsfunktioner skulle hela modellen vara en linjär transformation. Genom att använda olinjära funktioner kan nätverket lära sig olinjära samband. Definitionerna av funktionerna ges av:




Figur 2: Grafen av aktiveringsfunktionerna $ReLU$, $\sigma$ och $tanh$.

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \tag{8}$$

$$tanh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} \tag{9}$$

$$ReLU(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x < 0 \\ x & \text{om } x \geq 0 \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x} &= \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} \\ &= \frac{1}{1 + e^{-x}}(\frac{1 + e^{-x}}{1 + e^{-x}} - \frac{1}{1 + e^{-x}}) \\ &= \sigma(x)(1 - \sigma(x)) \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (tanh(x))}{\partial x} &= \frac{(e^{x} + e^{-x})(e^{x} + e^{-x}) - (e^{x} - e^{-x})(e^{x} - e^{-x})}{(e^{x} + e^{-x})^2} \\ &= 1 - \frac{(e^{x} - e^{-x})^2}{(e^{x} + e^{-x})^2} \\ &= 1 - tanh^2(x) \end{aligned} \tag{12}$$

$$\frac{\partial (ReLU(x))}{\partial x} = \begin{cases} 0 & \text{om } x < 0 \\ 1 & \text{om } x \geq 0 \end{cases} \tag{13}$$

Notera att:

$$\lim_{x \to 0^{+}} ReLU(x) = 1 \tag{14}$$

$$\lim_{x \to 0^{-}} ReLU(x) = 0 \tag{15}$$

Trots att derivatan av ReLU inte är definierad i punkten $x = 0$ sätts $\frac{\partial (ReLU(x))}{\partial x}|_{x=0}$ vara lika med 0 eller 1 utan att några problem tillkommer.

#### 4.1.2 Bakåtpropagation

Given en input $X$, vill du prognostisera ett värde $\hat{y}$ Detta värde ska vara så likt THE GROUND TRUTH $y$ som möjligt. När man först initialiserar modellen kommer vikterna $W^{(l)}$ vara slumpade och nätverkets prognos kommer inte efterlikna det eftersökta värdet. Med hjälp av *gradient descent* kan man iterativt träna modellen så det slutgiltiga värdet kommer så nära y som möjligt. Detta görs genom att definiera en multivariat kostnadsfunktion $L(W, b; X, y)$ av variablerna $W^{(0)}$, $W^{(1)}$, ..., $W^{(l)}$, $b^{(0)}$, $b^{(1)}$, ..., $b^{(l)}$ med avseende på ett träningsexempel $(X, y)$. Funktionen är ett mått på prognosen $\hat{y}$ kvalitet. Man definierar $L$ på ett sådant sätt att ju liten värdemängd av $L$, desto högre kvalitet består $\hat{y}$ av. Ett sätt att definiera $L$ är exempelvis med en så kallad *L2 kostnadsfunktion*:

$$\begin{aligned} L(W, b) &= ||\hat{y} - y||^2 \\ &= ||f(f(f(XW^{(0)} + b^{(0)})W^{(1)} + b^{(1)})W^{(2)} + b^{(2)}) - y||^2 \end{aligned} \tag{16}$$

Gradienten $\nabla L(\theta)$ är en vektor av partiella derivator med avseende på funktionen $L$ variabler $W^{(0)}$, $W^{(1)}$, ..., $W^{(l)}$, $b^{(0)}$, $b^{(1)}$, ..., $b^{(l)}$ som definieras genom:

$$\nabla L(\theta) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \tag{17}$$

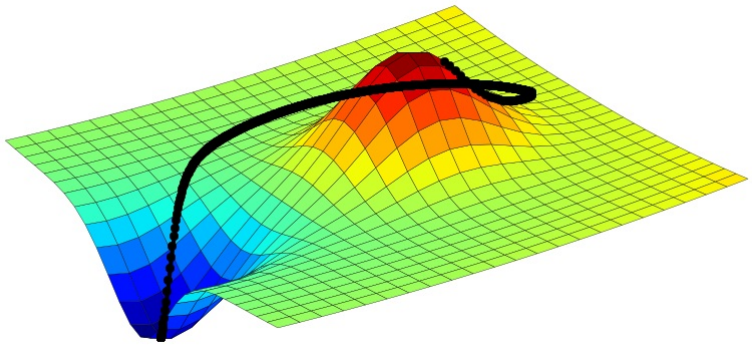
$$\nabla L(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta^{(0)}} & \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta^{(1)}} & \dots & \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta^{(n)}} \end{pmatrix} \tag{18}$$

Gradienten $\nabla L(\theta)$ visar riktningen vari värdemängdsökningen är som störst. Genom att ändra vikterna $\theta$ värde proportionellt med avseende på den negativa gradienten $-\nabla L(\theta)$ kan man iterativt modifiera $\theta$ tills man når funktionens minimum. Den mest grundläggande algoritmen för *gradient descent* kallas för *Stochastic Gradiant Descent (SGD)* och använder hyperparametern $\alpha$ för att beteckna träningshastigheten:

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta^{(l)}} = \nabla_{\theta^{(l)}} L(\theta) \tag{19}$$

$$\theta^{(n)} \to \theta^{(n)} - \alpha \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta^{(l)}} \tag{20}$$

De partiella derivatorna kan approximeras med hjälp av framåt, bakåt eller central differenskvot för partiella derivator:



Figur 3: En illustration av gradient descent på en funktion med två variabler

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta^{(i)}} = \frac{L(\theta^{(0)}, ..., \theta^{(i)} + h, ..., \theta^{(n-1)}) - L(\theta)}{h} \tag{21}$$

Detta skulle inte skapa några problem för det lilla neurala nätverket i ??IGUR 1 med 24 parametrar, men i själva verket har djupa neurala nätverk miljontals av parametrar som skulle behöva en enorm datorkraft. Istället kan man tillämpa regler för matriskalkyl och kedjeregeln för att effektivt beräkna de partiella derivatorna. Genom att använda ett kedjeliknande argument kan derivatorna uttryckas som:

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial (vec(W^{(l)})^T)} = \frac{\partial L(\theta)}{\partial (vec(X^{(l+1)})^T)} \frac{\partial (vec(X^{(l+1)}))}{\partial (vec(W^{(l)})^T)} \tag{22}$$

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial (vec(b^{(l)})^T)} = \frac{\partial L(\theta)}{\partial (vec(X^{(l+1)})^T)} \frac{\partial (vec(X^{(l+1)}))}{\partial (vec(b^{(l)})^T)} \tag{23}$$

Där

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial (vec(X^{(l)})^T)} = \frac{\partial L(\theta)}{\partial (vec(X^{(l+1)})^T)} \frac{\partial (vec(X^{(l+1)}))}{\partial (vec(X^{(l)})^T)} \tag{24}$$

För att $\frac{\partial X^{(l+1)}}{\partial X^{(l)}}$, $\frac{\partial X^{(l+1)}}{\partial W^{(l)}}$, $\frac{\partial X^{(l+1)}}{\partial b^{(l)}}$ och derivatan av $L$ med avseende på det sista lagret är möjliga att beräknas algebraiskt är det därför möjligt att rekursivt beräkna gradienten genom att bakåtpropagera i nätverket från outputlagret. Värdena från det nästkommande lagret används för att beräkna värdena för det föregående lagret.

Betrakta ekvation (7). Om $L$ är en L2 kostandsfunktion beräknas de partiella derivatorna enligt:

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \hat{y}} = 2||\hat{y} - y|| \tag{25}$$

I följande ekvationer utnyttjas $\frac{\partial AB}{\partial B} = A^T$ och $\frac{\partial AB}{\partial A} = B^T$ tillsammans med kedjeregeln.

$$\begin{aligned} \frac{\partial X^{(l+1)}}{\partial X^{(l)}} &= \frac{\partial f(X^{(l)}W^{(l)} + b^{(l)})}{\partial X^{(l)}} \\ &= f'(X^{(l)}W^{(l)} + b^{(l)})W^{(l)^T} \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial X^{(l+1)}}{\partial W^{(l)}} &= \frac{\partial f(X^{(l)}W^{(l)} + b^{(l)})}{\partial X^{(l)}} \\ &= X^{(l)^T} f'(X^{(l)}W^{(l)} + b^{(l)}) \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial X^{(l+1)}}{\partial b^{(l)}} &= \frac{\partial f(X^{(l)}W^{(l)} + b^{(l)})}{\partial X^{(l)}} \\ &= f'(X^{(l)}W^{(l)} + b^{(l)}) \end{aligned} \tag{28}$$

I praktiken beräknas de partiella derivatorna med hjälp av en rekursiv formel. Låt

$$\delta^{(l)} = \frac{\partial L(\theta)}{\partial X^{(l)}} \tag{29}$$

Det (också kallat delta-felet) är den bakåtpropagerade nervsignalen upp till lager $l$. Om $l_{sista}$ är det sista lagret definieras delta-felen och gradienten enligt följande formler för en L2 kostandsfunktion:

$$\delta^{(l_{sista})} = 2||\hat{y} - y|| \tag{30}$$

$$\begin{aligned} \delta^{(l)} &= \frac{\partial L(\theta)}{\partial X^{(l)}} \\ &= \frac{\partial L(\theta)}{\partial X^{(l+1)}} \frac{\partial X^{(l+1)}}{\partial X^{(l)}} \\ &= \left(\delta^{(l+1)} \odot f'(X^{(l)}W^{(l)} + b^{(l)})\right) W^{(l+1)^T} \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L(\theta)}{\partial W^{(l)}} &= \frac{\partial L(\theta)}{\partial X^{(l+1)}}\frac{\partial X^{(l+1)}}{\partial W^{(l)}} \\ &= X^{(l)^T}\left(\delta^{(l+1)} \odot f'(X^{(l)}W^{(l)} + b^{(l)})\right)\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L(\theta)}{\partial b^{(l)}} &= \frac{\partial L(\theta)}{\partial X^{(l+1)}}\frac{\partial X^{(l+1)}}{\partial b^{(l)}} \\ &= \delta^{(l+1)} \odot f'(X^{(l)}W^{(l)} + b^{(l)})\end{aligned} \tag{33}$$

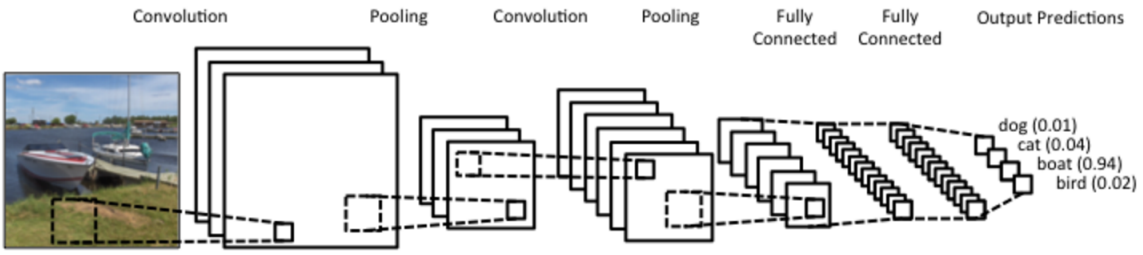
Två implementationer av ett feedforward neuralt nätverk kan hittas på github i python och C++: `https://github.com/nikitazozoulenko`

### 4.2 Konvolutionella Neuala Netvärk

När människor vill identifiera någonting i en bild så letar vi efter vissa karakteristiska drag objektet har. En hund består exempelvis av en kropp, ett huvud och fyra ben. Kroppsdelarna består sedan själva av grundläggande geometriska former som i sig självt är kombinationer av kanter och linjer. Dessutom har hundar en viss textur, det som vi kännetecknar som något pälsliknande. Dessa karakteristiska drag är lokala inom bilden och kan extraheras av att endast se på en liten del av bilden i taget.Det är just detta som är principen bakom *Konvolutionella Neurala Nätverk (CNN)*: Genom så kallade *konvolutioner* kunna extrahera dessa karakteristiska drag. Nätverket lär sig ett antal filter väldigt små filter som den applicerar på en delmängd av bilden genom att filtret sammanrullar över hela bilden. Värdet av filtret över en delmängd av bilden blir aktiveringen av ett neuron i nästa lager.

Figur 4: Resultatet av ett en kärna för horizontell och vertikal kantdetektering har sammanrullat över en bild av en katt

Till skillnad från *FCC* är neuronerna i ett *CNN* bara kopplade till närliggande neuroner i det föregående lagret. På detta sätt kan nätverket lära sig fler hög-nivåspecialartiklar ju djupare i nätverket signalen går. Exempelvis kan det hända att det första lagret identifiera kanter och linjer medan de senare lagren lagren känner igen olika former och till sist känna igen ansikten eller object i sista lagert.




Figur 5: En illustration av ett konvolutionellt neuralt nätverk

Modellen, precis som ett *feed-forward nätverket*, består av ett flertal lager neuroner sådant att resultatet av ett lager matas in till nästkommande lager. För ett *FCC* användes en matris för att representera neuronerna. I ett *CNN* är en tensor $X^{(l)} \in \mathbb{R}^{R \times C \times H \times W}$ av grad 4 aktiveringen vid lager $l$. Aktiveringen brukar illustreras som en tredimensionell volym där $W$, $H$ och $C$ är bredden, höjden respektive djupet. En $H' \times W'$ skiva av volymen kallas för en *feature map* eller en *kanal*. Antalet kanaler benämns med $C$. $R$ står för hopstorlek då man bearbetar flera exempel i taget. Vid varje lager finns dessutom vikter $W^{(l)}$ som beror på vad för slags lager det är. $W^{(l)}$ kan vara tom med inga vikter när lager inte bidrar till någon inlärning.

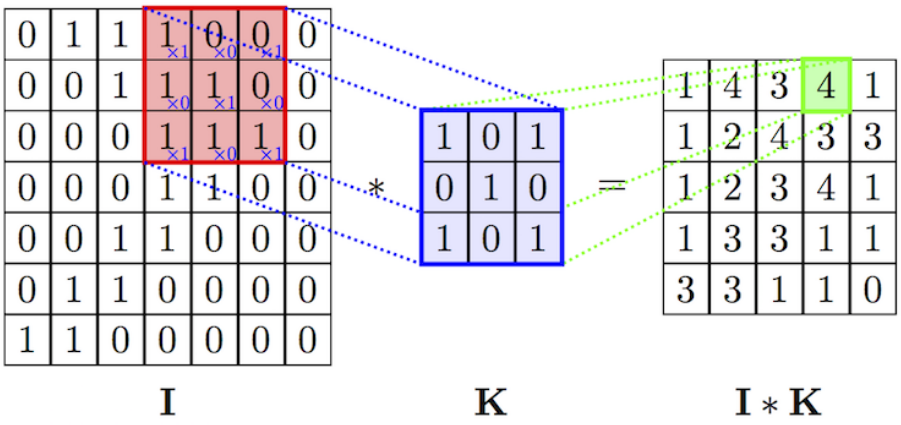
För att en konvolution är en lokal operator används CNNs för data som innehåller lokalt sammanhängande samband, exempelvis bilder eller ljud. Om det är en bild som bearbetas har det första lagrets aktivering $C = 3$ kanaler, en för varje RGB-kanal, och en bredd och höjd lika med bildens bredd och höjd i pixlar.

#### 4.2.1 Konvolutionslagret framåtpropagering

Ett konvolutionslager består av ett antal vikter kallade *kärnor (kernels)* eller *masker (masks)*, representerade av en tensor av grad fyra, $W^{(l)} \in \mathbb{R}^{C' \times C \times k_h \times k_W}$ för lager $l$.

När masken är över en godtycklig del av volymen multipliceras varje värde

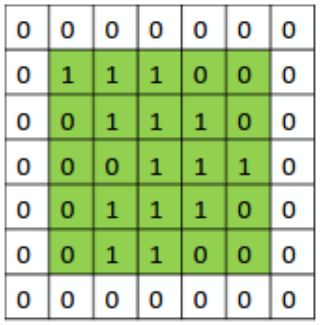
i delmängden av $W^{(l)}$ elementvis med respektive värde i masken vid samma position och summeras (se figur 6). Summan blir aktiveringen av ett neuron i nästa lager. Konvolutionsoperatorn betecknas med $*$.




Figur 6: En kärna med storlek $3 \times 3$ sammanrullar över ett område med dimensioner $6 \times 6$ och bildar en aktivering med dimensionerna $4 \times 4$.

En feature map i lager $l + 1$ är resultatet av att en kärna med dimensioner $1 \times \times C \times k_h \times k_W$ har sammanrullat över aktiveringen av det föregående lagret. $C'$ är antalet kärnor och blir dessutom antalet feature maps nästa lager har.

Kärnorna har två ytterligare egenskaper: ett kliv $s$ och så kallad *zero-padding* $p$. $s$ är hur stort kliv man tar efter varje gång filtret blir applicerat på tensorn. Man ökar tensorns höjd och bredd med $2p$ genom att fylla på med nollor vid tensors ändor (se figur 7). På grund av att aktiveringens höjd och bredd avtar ju djupare i nätverket de befinner sig på används zero-padding för att kontrollera storleken av tensorn.



Figur 7: Ett område med dimensioner $5 \times 5$ zero-paddas med $p = 1$ och resulterande område får dimensioner $7 \times 7$.

Låt $W^{(l)} \in \mathbb{R}^{C' \times C \times k_h \times k_W}$, $X^{(l)} \in \mathbb{R}^{R \times C \times (H+2p) \times (W+2p)}$ och $X^{(l+1)} \in \mathbb{R}^{R \times C' \times H' \times W'}$.

Dimensionerna vid lager $l+1$ blir lika med:

$$W' = \frac{W - k_W + 2p}{s} + 1 \tag{34}$$

$$H' = \frac{H - k_H + 2p}{s} + 1 \tag{35}$$

$$C' = C' \tag{36}$$

Då beskrivs en konvolution algebraiskt genom:

$$w = sw' \tag{37}$$

$$h = sh' \tag{38}$$

$$\begin{aligned} \left[X^{(l+1)}\right]_{r,c',h',w'} &= X^{(l)}_{r,c',h',w'} * W^{(l)}_{c'} \\ &= \sum_{c}^{C-1} \sum_{j}^{k_H-1} \sum_{i}^{k_W-1} X^{(l)}_{r,c,h'+j,w'+i} W^{(l)}_{c',c,j,i} \end{aligned} \tag{39}$$

Index på termen som ska sammanrullas i konvolutionen symboliserar vilka dimensioner som ska summeras. Exempelvis visar $W^{(l)}_{c'}$ att dimensionerna $C$, $H$ och $W$ (alla kanaler) ska summeras medan $W^{(l)}_{c',c}$ visar att endast $H$ och $W$ (en kanal) ska summeras.

I praktiken brukar konvolutioner implementeras med hjälp av funktionerna *row2im* och *im2row* vilka lämnas till läsaren att läsa på om om han eller hon vill optimera hur snabbt konvolutionen beräknas.

#### 4.2.2 Konvolutionslagret bakåtpropagering

Bakåtpropegeringen förstås bäst genom att algebraiskt härleda den.

Först har vi bakåtpropageringen av delta-felet. Med hjälp av kedjeregeln kan man dela upp derivatan i två bråk, $\frac{\partial L(W)}{\partial X^{(l+1)}_{r,c',h',w'}}$ och $\frac{\partial X^{(l+1)}_{r,c',h',w'}}{\partial X^{(l)}_{r,c,h,w}}$. $\frac{\partial L(W)}{\partial X^{(l+1)}_{r,c',h',w'}}$ är den rekursiva delta-felet. En summan uppstår på grund av att derivatan av en summa är lika med summan av derivatan. $X^{(l+1)}_{r,c',h',w'}$ byts sedan ut mot dess

definition enligt ekvation (39).

$$\begin{aligned}\delta^{(l)}_{r,c,h,w} &= \frac{\partial L(W)}{\partial X^{(l)}_{r,c,h,w}} \\ &= \sum_{c'}^{C'-1}\sum_{h'}^{H'-1}\sum_{w'}^{W'-1} \frac{\partial L(W)}{\partial X^{(l+1)}_{r,c',h',w'}} \frac{\partial X^{(l+1)}_{r,c',h',w'}}{\partial X^{(l)}_{r,c,h,w}} \\ &= \sum_{c'}^{C'-1}\sum_{h'}^{H'-1}\sum_{w'}^{W'-1} \delta^{(l+1)}_{r,c',h',w'} \frac{\partial \sum_{c}^{C-1}\sum_{j}^{k_H-1}\sum_{i}^{k_W-1} X^{(l)}_{r,c,h'+j,w'+i} W^{(l+1)}_{c',c,j,i}}{\partial X^{(l)}_{r,c,h,w}}\end{aligned} \tag{40}$$

Varje produkt i den innersta summan kommer att vara like med noll förutom om $X^{(l)}_{r,c,h'+j,w'+i} = X^{(l)}_{r,c,h,w}$. Förljaktligen insätter man $h'+j = h$ och $h'+j = h$. Summorna och derivatan förkortas:

$$\begin{aligned}\sum_{c'}^{C'-1}\sum_{h'}^{H'-1}\sum_{w'}^{W'-1} \delta^{(l+1)}_{r,c',h',w'} \frac{\partial \sum_{c}^{C-1}\sum_{j}^{k_H-1}\sum_{i}^{k_W-1} X^{(l)}_{r,c,h'+j,w'+i} W^{(l+1)}_{c',c,j,i}}{\partial X^{(l)}_{r,c,h,w}} \\ = \sum_{c'}^{C'-1}\sum_{h'}^{H'-1}\sum_{w'}^{W'-1} \delta^{(l+1)}_{r,c',h',w'} W^{(l+1)}_{c',c,j,i} \\ = \sum_{c'}^{C'-1}\sum_{h'}^{H'-1}\sum_{w'}^{W'-1} W^{(l+1)}_{c',c,(h-h'),(w-w')} \delta^{(l+1)}_{r,c',h',w'}\end{aligned} \tag{41}$$

Vilket man kan se är en summa av konvolutioner där en viss feature map av delta-felet sammanrullar över alla kärnor på en viss feature map med vikter som är roterade 180°. För att en konvolution ska kunna ske måste den roterade vikten zero-paddas på grund av att det glidande fönstret måste vara som mest lika stort som tensorn den sammanrullar över. Låt rotationen betäcknas med funktionen $rot()$.

$$\delta^{(l)}_{r,c,h,w} = \sum_{c'}^{C'-1} rot(W^{(l+1)}_{c',c,h,w}) * \delta^{(l+1)}_{r,c'} \tag{42}$$

En sundshetskontroll visar att detta är intuitivt då alla feature maps i $X^{(l)}$ används för att skapa en enstaka feature map i $X^{(l+1)}$. Det är därför man summerar över alla kärnor och endast konvolverar i en feature map i taget och summerar alltihop.

Den partiella derivatan av kostandsfunktionen med avseende på vikterna

hittas på ett liknande sätt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L(W)}{\partial W^{(l)}_{c',c,k_H,k_W}} &= \frac{1}{R}\sum_{r}^{R-1}\sum_{c'}^{C'-1}\sum_{h'}^{H'-1}\sum_{w'}^{W'-1}\frac{\partial L(W)}{\partial X^{(l+1)}_{r,c',h',w'}}\frac{\partial X^{(l+1)}_{r,c',h',w'}}{\partial W^{(l)}_{r,c,h,w}} \\
&= \frac{1}{R}\sum_{r}^{R-1}\sum_{c'}^{C'-1}\sum_{h'}^{H'-1}\sum_{w'}^{W'-1}\delta^{(l+1)}_{r,c',h',w'}\frac{\partial \sum_{c}^{C-1}\sum_{j}^{k_H-1}\sum_{i}^{k_W-1} X^{(l)}_{r,c,h'+j,w'+i}W^{(l)}_{c',c,j,i}}{\partial W^{(l)}_{c',c,k_H,k_W}} \\
&= \frac{1}{R}\sum_{r}^{R-1}\sum_{c'}^{C'-1}\sum_{h'}^{H'-1}\sum_{w'}^{W'-1} X^{(l)}_{r,c,h'+k_H,w'+k_W}\delta^{(l+1)}_{r,c',h',w'} \\
&= \frac{1}{R}\sum_{r}^{R-1}\sum_{c'}^{C'-1} X^{(l)}_{r,c,k_H,k_W} * \delta^{(l+1)}_{r,c'}
\end{aligned} \tag{43}$$

Summan av alla exempel i hopen och division med hopstorleken är ett direkt resultat av att man bearbetar flera exempel i taget. Man beräknar medelvärdet av alla gradienter av alla exemepel i hopen.

#### 4.2.3 Aktiveringsfunktionslager framåtpropagering

Funktionen appliceras elementvis på alla neuroner i $X^{(l)}$ enligt ekvation (3). Följaktligen har $X^{(l)}$ och $X^{(l+1)}$ samma dimensioner. Låt aktiveringsfunktionen betäcknas med $f$. Nervsignalen framåtpropageras genom:

$$X^{(l+1)}_{r,c,h,w} = f(X^{(l)}_{r,c,h,w}) \tag{44}$$

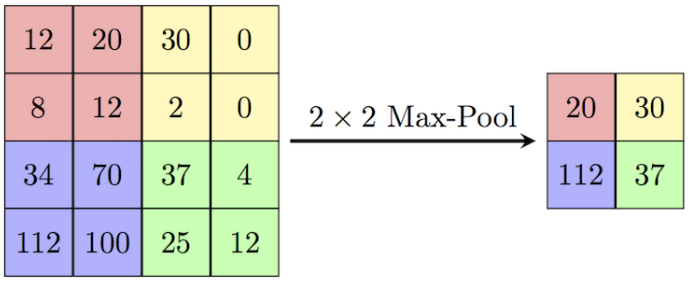
#### 4.2.4 Aktiveringsfunktionslager bakåtpropagering

Aktiveringsfunktioner har inga parametrar som ska optimeras och sålades är $W^{(l)}$ och $\frac{\partial L(W)}{\partial W^{(l)}}$ tomma. Bakåtpropageringen av nervsignalen definieras enligt ekvation (4):

$$\begin{aligned}\delta^{(l)}_{r,c,h,w} &= \frac{\partial L(W)}{\partial X^{(l)}_{r,c,h,w}} \\ &= \frac{\partial L(W)}{\partial X^{(l+1)}_{r,c,h,w}} \frac{\partial X^{(l+1)}_{r,c,h,w}}{\partial X^{(l)}_{r,c,h,w}} \\ &= \delta^{(l+1)}_{r,c,h,w} f'(X^{(l)}_{r,c,h,w})\end{aligned} \tag{45}$$

#### 4.2.5 Maxpoollagret framåtpropagation

Här är igen inputneuronerna representerade av $X^{(l)} \in \mathbb{R}^{R\times C\times H\times W}$ och skapar output $X^{(l+1)} \in \mathbb{R}^{R\times C'\times H'\times W'}$. Lagret har inga vikter men har däremot hyperparametrarna $k$ (kärnstorlek) och $s$ (stride eller kliv). *Maxpooling* delar in varje feature map i $X^{(l)}$ i ett antal sektioner med dimensioner $k\times k$ genom att ett glidande fönster med samma dimensioner samanrullar över alla lagrets feature maps (se figur 8). Aktiveringen vid ett neuron i lager $l+1$ blir lika med det största värdet i korresponderande $k \times k$ sektion.




Figur 8: Maxpooling med $k = 2$ och $s = 2$ av ett område med dimensioner $4 \times 4$ där resultatet bildar en aktivering med dimensionerna $2 \times 2$.

Liknande konvolutionslagret utan zero-padding blir nästintillkommande lagrets dimensioner:

$$W' = \frac{W-k}{s} + 1 \tag{46}$$

$$H' = \frac{H-k}{s} + 1 \tag{47}$$

$$C' = C \tag{48}$$

Antal kanaler förblir konstant.

Matematiskt beskrivs maxpoollagret genom:

$$X^{(l+1)}_{r,c',h',w'} = \max_{0\le j<k, 0\le i<k} X^{(l)}_{r,c',(h's+j),(w's+i)} \tag{49}$$

#### 4.2.6 Maxpoollagret bakåtpropagering

Maxpooling saknar vikter och därmed är $\frac{\partial L(W)}{\partial W^{(l)}}$ tom. Det som återstår är bakåtpropageringen av delta-felet. Med hjälp av kedjeregeln kan man dela upp derivatan i två bråk, $\frac{\partial L(W)}{\partial X^{(l+1)}_{r,c',h',w'}}$ och $\frac{\partial X^{(l+1)}_{r,c',h',w'}}{\partial X^{(l)}_{r,c,h,w}}$. $\frac{\partial L(W)}{\partial X^{(l+1)}_{r,c',h',w'}}$ är den rekursiva delta-delet. $X^{(l+1)}_{r,c',h',w'}$ byts sedan ut mot dess definition enligt ekvation (49):

$$\begin{aligned}
\delta^{(l)}_{r,c,h,w} &= \frac{\partial L(W)}{\partial X^{(l)}_{r,c,h,w}} \\
&= \frac{\partial L(W)}{\partial X^{(l+1)}_{r,c',h',w'}} \frac{\partial X^{(l+1)}_{r,c',h',w'}}{\partial X^{(l)}_{r,c,h,w}} \\
&= \delta_{r,c',h',w'} \frac{\partial \max\limits_{0\leq j<k, 0\leq i<k} X^{(l)}_{r,c',(h's+j),(w's+i)}}{\partial X^{(l)}_{r,c,h,w}}
\end{aligned} \tag{50}$$

Den partiella derivatan i den sista ekvationen kommer vara lika med 1 om $X^{(l)}_{r,c',(h's+j),(w's+i)} = X^{(l)}_{r,c,h,w}$. I annat fall kommer $X^{(l)}_{r,c,h,w}$ inte ha någon påverkan på neuron index $(r, c, h, w)$ i lager $l+1$ och den partiella derivatan blir lika med 0:

$$\delta^{(l)}_{r,c,h,w} = \begin{cases} \delta_{r,c,h',w'} & \text{om } \begin{matrix} h = h's + j, \\ w = w's + i \end{matrix} \\ 0 & \text{i annat fall} \end{cases} \tag{51}$$

Alltså omdiregeras delta-felet till det ansvariga neuronet vars index kommer att behöva hållas i minnet. Om det finns två eller fler sektioner med samma neuron som är ansvarig för framåtpropageringen så kommer delta-felen summeras från samtliga korresponderande sektioners delta-fel.

#### 4.2.7 Batch Normalization framåtpropagering

Utan Batch Normalization (BN) är det svårt att få djupa nätverk att divergera. Detta är till följd av att en liten ändring till det första lagret kan leda till en kaskad av förändringar i de senare lagren. I litteraturen kallas detta för *internal covariate shift*. BN försöker att minimera denna *internal covariate shift* genom att med avseende på alla exempel i mini-hopen normalisera varje feature map till varje lager. Resultatet är snabbare divergens och

att det tillåter större träningshastigheter. Alltså har att man bearbetar flera exemepl i taget i en mini-hop en annan praktiska tillämpning än att försnabba uträkningar.

Igen är aktiveringen vid lager $l$ och $l+1$ $X^{(l)} \in \mathbb{R}^{R\times C\times H\times W}$ respektive $X^{(l+1)} \in \mathbb{R}^{R\times C'\times H'\times W'}$. BN har ingen påverkan på dimensionerna av aktiveringen.

Först beräknas medelvärdena $\mu_c$ och varianserna $\sigma_c^2$ till varje feature map $c$:

$$\mu_c = \frac{1}{RHW}\sum_{r=0}^{R-1}\sum_{h=0}^{H-1}\sum_{w=0}^{W-1} X^{(l)}_{r,c,h,w} \tag{52}$$

$$\sigma_c^2 = \frac{1}{RHW}\sum_{r=0}^{R-1}\sum_{h=0}^{H-1}\sum_{w=0}^{W-1} (X^{(l)}_{r,c,h,w} - \mu_c)^2 \tag{53}$$

Sedan beräknas den normaliserade aktiveringen $\hat{X}$. Epsilon används för numerisk stabilitet.

$$\hat{X}_{r,c,h,w} = (X^{(l)}_{r,c,h,w} - \mu_c)(\sigma_c^2 + \epsilon)^{-\frac{1}{2}} \tag{54}$$

Sist introduceras 2 vikter, $\gamma^{(l)}_{c'}$ och $\beta^{(l)}_{c'}$, vilka tillåter nätverket att upphäva normaliseringen om nätverket dömmer det att vara användbart.

$$X^{(l+1)}_{r,c',h',w'} = \gamma^{(l)}_{c'}\hat{X}_{r,c',h',w'} + \beta^{(l)}_{c'} \tag{55}$$

Vid RUNTIME är det dock inte alltid möjligt att beräkna medelvärdet och variansen av mini-hopen på grund av att man oftast enbart vill testa ett exempel i taget. Medelvärdet och variansen för hela populationen måste då räknas ut och användas i stället för de beräknade värdena. Detta kan göras för små DATASETS, men om man arbetar med data som innehåller miljontals exempel är det enklare att uppskatta populationens statistik med hjälp av att updatera ett exponensiellt glidande medelvärde (EWMA) vid varje framåtpropagering:

$$\mu_{EWMA_c} \to \alpha\mu_c + (1-\alpha)\mu_{EWMA_c} \tag{56}$$

$$\sigma^2_{EWMA_c} \to \alpha\sigma_c^2 + (1-\alpha)\sigma^2_{EWMA_c} \tag{57}$$

Där $\mu_{EWMA_c}$ och $\sigma^2_{EWMA_c}$ betäcknar de exponensiella glidande medelvärdena och $\alpha$ betäcknar dämpfaktorn.

#### 4.2.8 Batch Normalization bakåtpropagering

För BN behöver det rekursiva delta-felet $\delta^{(l)}$, kostandsfunktionen med avseende på $\gamma_{c'}^{(l)}$ och kostandsfunktionen med avseende på $\beta c'^{(l)}$ beräknas. För att beräkna detta krävs något som heter hadamard-deltat, oftast betäcknat med $\delta_{i,j}$ men kommer nu vara betäcknat med $I_{i,j}$ på grund av att $\delta$ används för annat. Kronecker-deltat har följande egenskaper:

$$I_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{om } i = j \\ 0 & \text{om } i \neq j \end{cases} \tag{58}$$

$$\sum_j x_i I_{i,j} = x_j \tag{59}$$

Först har vi

$$\begin{aligned} \delta_{r,c,h,w}^{(l)} &= \frac{\partial L(W)}{\partial X_{r,c,h,w}^{(l)}} \\ &= \sum_{r'}^{R'-1} \sum_{c'}^{C'-1} \sum_{h'}^{H'-1} \sum_{w'}^{W'-1} \frac{\partial L(W)}{\partial X_{r',c',h',w'}^{(l+1)}} \frac{\partial X_{r',c',h',w'}^{(l+1)}}{\partial \hat{X}_{r',c',h',w'}} \frac{\partial \hat{X}_{r',c',h',w'}}{\partial X_{r,c,h,w}^{(l)}} \end{aligned} \tag{60}$$

h

$$\frac{\partial \hat{X}_{r',c',h',w'}}{\partial X_{r,c,h,w}^{(l)}} = \frac{\partial (X_{r',c',h',w'}^{(l)} - \mu_{c'})(\sigma_{c'}^2 + \epsilon)^{-\frac{1}{2}}}{\partial X_{r,c,h,w}^{(l)}} \tag{61}$$

$$= (\sigma_{c'}^2 + \epsilon)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial (X_{r',c',h',w'}^{(l)} - \mu_{c'})}{\partial X_{r,c,h,w}^{(l)}} - \frac{1}{2}(X_{r',c',h',w'}^{(l)} - \mu_c)(\sigma_{c'}^2 + \epsilon)^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial \sigma_{c'}^2}{\partial X_{r,c,h,w}^{(l)}} \tag{62}$$

j

$$\begin{aligned} \frac{\partial (X_{r',c',h',w'}^{(l)} - \mu_{c'})}{\partial X_{r,c,h,w}^{(l)}} &= \frac{\partial (X_{r',c',h',w'}^{(l)} - \frac{1}{RHW} \sum_{r''=0}^{R-1} \sum_{h''=0}^{H-1} \sum_{w''=0}^{W-1} X_{r'',c',h'',w''}^{(l)})}{\partial X_{r,c,h,w}^{(l)}} \\ &= I_{r',r} I_{c',c} I_{h',h} I_{w',w} - \frac{1}{RHW} I_{c',c} \end{aligned} \tag{63}$$

n

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{c'}^2}{\partial X_{r,c,h,w}^{(l)}} &= \frac{\partial \frac{1}{RHW} \sum_{r'=0}^{R-1} \sum_{h'=0}^{H-1} \sum_{w'=0}^{W-1} (X_{r',c',h',w'}^{(l)} - \mu_{c'})^2}{\partial X_{r,c,h,w}^{(l)}} \\
&= \frac{1}{RHW} \sum_{r'=0}^{R-1} \sum_{h'=0}^{H-1} \sum_{w'=0}^{W-1} 2(X_{r',c',h',w'}^{(l)} - \mu_{c'})(I_{r',r} I_{c',c} I_{h',h} I_{w',w} - \frac{1}{RHW} I_{c',c}) \\
&= \frac{2}{RHW}(X_{r,c',h,w}^{(l)} - \mu_{c'}) I_{c',c} - \frac{2}{(RHW)^2} \sum_{r'=0}^{R-1} \sum_{h'=0}^{H-1} \sum_{w'=0}^{W-1} (X_{r',c,h',w'}^{(l)} - \mu_c) \\
&= \frac{2}{RHW}(X_{r,c',h,w}^{(l)} - \mu_{c'}) I_{c',c}
\end{aligned} \tag{64}$$

Den sista summan blir lika med noll på grund av att termerna summeras ihop till medelvärdet minus medelvärdet.

När alla komponenter till bakåtpropageringen av delta-felet är beräknade är insättning av ekvation (61), (63) och (64) i ekvation (60) det enda som är kvar:

$$\begin{aligned}
\delta_{r,c,h,w}^{(l)} &= \sum_{r'}^{R'-1} \sum_{c'}^{C'-1} \sum_{h'}^{H'-1} \sum_{w'}^{W'-1} \frac{\partial L(W)}{\partial X_{r',c',h',w'}^{(l+1)}} \frac{\partial X_{r',c',h',w'}^{(l+1)}}{\partial \hat{X}_{r',c',h',w'}} \frac{\partial \hat{X}_{r',c',h',w'}}{\partial X_{r,c,h,w}^{(l)}} \\
&= \sum_{r',c',h',w'} \delta_{r',c',h',w'}^{(l+1)} \gamma_{c'}^{(l)} (\sigma_{c'}^2 + \epsilon)^{-\frac{1}{2}} (I_{r',r} I_{c',c} I_{h',h} I_{w',w} - \frac{1}{RHW} I_{c',c}) \\
&- \sum_{r',c',h',w'} \delta_{r',c',h',w'}^{(l+1)} \gamma_{c'}^{(l)} \frac{1}{RHW} (X_{r',c',h',w'}^{(l)} - \mu_{c'})(X_{r,c',h,w}^{(l)} - \mu_{c'})(\sigma_{c'}^2 + \epsilon)^{-\frac{3}{2}} I_{c',c} \\
&= \delta_{r,c,h,w}^{(l+1)} \gamma_c^{(l)} (\sigma_c^2 + \epsilon)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{RHW} \sum_{r',h',w'} \delta_{r',c,h',w'}^{(l+1)} \gamma_c^{(l)} (\sigma_c^2 + \epsilon)^{-\frac{1}{2}} \\
&- \frac{1}{RHW} \sum_{r',h',w'} \delta_{r',c,h',w'}^{(l+1)} \gamma_c^{(l)} (X_{r',c,h',w'}^{(l)} - \mu_{c'})(X_{r,c,h,w}^{(l)} - \mu_c)(\sigma_c^2 + \epsilon)^{-\frac{3}{2}} \\
&= \frac{1}{RHW} \gamma_c^{(l)} (\sigma_c^2 + \epsilon)^{-\frac{1}{2}} \Bigg( RHW \delta_{r,c,h,w}^{(l+1)} - \sum_{r',h',w'} \delta_{r',c,h',w'}^{(l+1)} \\
&- (X_{r,c,h,w}^{(l)} - \mu_c)(\sigma_c^2 + \epsilon)^{-\frac{3}{2}} \sum_{r',h',w'} \delta_{r',c,h',w'}^{(l+1)} (X_{r',c,h',w'}^{(l)} - \mu_{c'}) \Bigg)
\end{aligned} \tag{65}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L(W)}{\partial \gamma_c^{(l)}} &= \frac{1}{R}\sum_{r}^{R-1}\sum_{c'}^{C'-1}\sum_{h'}^{H'-1}\sum_{w'}^{W'-1}\frac{\partial L(W)}{\partial X_{r,c',h',w'}^{(l+1)}}\frac{\partial X_{r,c',h',w'}^{(l+1)}}{\partial \gamma_c^{(l)}} \\
&= \frac{1}{R}\sum_{r}^{R-1}\sum_{c'}^{C'-1}\sum_{h'}^{H'-1}\sum_{w'}^{W'-1}\delta_{r,c',h',w'}^{(l+1)}\frac{\partial(\gamma_{c'}^{(l)}\hat{X}_{r,c',h',w'}+\beta_{c'}^{(l)})}{\partial \gamma_c^{(l)}} \\
&= \frac{1}{R}\sum_{r}^{R-1}\sum_{c'}^{C'-1}\sum_{h'}^{H'-1}\sum_{w'}^{W'-1}\delta_{r,c',h',w'}^{(l+1)}\hat{X}_{r,c,h',w'}I_{c',c} \\
&= \frac{1}{R}\sum_{r}^{R-1}\sum_{h'}^{H'-1}\sum_{w'}^{W'-1}\delta_{r,c,h',w'}^{(l+1)}\hat{X}_{r,c,h',w'}
\end{aligned}
\tag{66}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L(W)}{\partial \beta_c^{(l)}} &= \frac{1}{R}\sum_{r}^{R-1}\sum_{c'}^{C'-1}\sum_{h'}^{H'-1}\sum_{w'}^{W'-1}\frac{\partial L(W)}{\partial X_{r,c',h',w'}^{(l+1)}}\frac{\partial X_{r,c',h',w'}^{(l+1)}}{\partial \beta_c^{(l)}} \\
&= \frac{1}{R}\sum_{r}^{R-1}\sum_{c'}^{C'-1}\sum_{h'}^{H'-1}\sum_{w'}^{W'-1}\delta_{r,c',h',w'}^{(l+1)}\frac{\partial(\gamma_{c'}^{(l)}\hat{X}_{r,c',h',w'}+\beta_{c'}^{(l)})}{\partial \beta_c^{(l)}} \\
&= \frac{1}{R}\sum_{r}^{R-1}\sum_{c'}^{C'-1}\sum_{h'}^{H'-1}\sum_{w'}^{W'-1}\delta_{r,c,h',w'}^{(l+1)}I_{c',c} \\
&= \frac{1}{R}\sum_{r}^{R-1}\sum_{h'}^{H'-1}\sum_{w'}^{W'-1}\delta_{r,c,h',w'}^{(l+1)}
\end{aligned}
\tag{67}
$$

### 4.3 Praktiska Tillämpningar

s

## 5 Diskussion

## Referenser


[1] *Design Patterns, Elements of Reusable Object-Oriented Software.* Erich Gamma, Richard Helm, Ralph Johnson, John Vlissides. Addison-Wesley 1995.

[2] *Safe as Milk.* Captain Beefheart, Zoot Horn Rollo, Winged Eel Fingerling, Alex Snouffler, John French. Budda Records 1969.

[3] *Title of document.* List of authors in the order they appear in the document Name of publisher, or other remark and year of publication. Document number or version number is good to include.

gradient descent bild https://camo.githubusercontent.com/2cf88d8a0cc996908dd154

OPTIONAL: *Gradient descent* kan såväl leda till både lokala minima eller globala minima. Risken med att fastna i ett loktalt minumum är att modellen tror att den är maximalt optimerad medan den inte är det i själva verket. I praktiken har det dock visat sig att alla minima för ett nätverks kostnadsfunktion brukar vara av samma kvalite. Det som brukar skapa problem är sadelpunkter som illustreras i FIGUR ?????