

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Факультет прикладної математики

Кафедра прикладної математики

Звіт

Лабораторна робота 1

з дисципліни «Основи Нелінійного Аналізу »

на тему

«Дослідження систем лінійних диференціальних рівнянь»

Перевірив

доцент кафедри ПМА

Балюнов О.О.

Виконав:

студент групи КМ-73

Звягін М.С.

Київ — 2020

Зміст

1. Вступ.....	3
2. Постановка задачі.....	3
3. Розв'язок.....	3
4. Результати виконання програми.....	5
5. Висновок.....	7
6. Додаток А(код програми).....	8

Вступ

Мета виконання цієї лабораторної роботи полягає у дослідженні положення рівноваги та побудови фазових кривих системи лінійних диференціальних рівнянь.

Постановка задачі

Дослідити положення рівноваги даної системи диференціальних рівнянь та зобразити її фазові траєкторії на площині XOY :

Варіант 5:

$$5. \begin{cases} \dot{x} = 4x + y, \\ \dot{y} = 2x + 5y. \end{cases}$$

Розв'язок:

Для дослідження положення рівноваги потрібно знайти власні числа та власні вектори автономної системи. Відповідно до власних чисел можна визначити тип положення рівноваги та наближено уявити як будуть проходити фазові криві. Відповідно до теорії, положення рівноваги класифікують так:

Точка рівноваги	Власні значення
1. Вузол	λ_1, λ_2 - дійсні одного знаку ($\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$)
2. Сідло	λ_1, λ_2 - дійсні різних знаків ($\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$)
3. Фокус	λ_1, λ_2 - комплексні числа; дійсні частини рівні та відмінні від нуля
4. Центр	λ_1, λ_2 - комплексні числа; дійсні частини рівні та дорівнюють нулю

Провівши дослідження положення рівноваги можна знайти власні вектори та лінії ізоклін. Через власні вектори можна провести лінії сепаратриси, вони будуть асимптотами для фазових кривих. Лінії ізоклін можна знайти з рівняння яким задають поле напрямків:

$$Q(x, y)dx - P(x, y)dy = 0$$

Прирівнявши по черзі коефіцієнти при диференціалах до нуля можна знайти лінії ізоклін та кут який буде направляти фазові криві при проходженні через лінії ізоклін.

Для виконання даної лабораторної роботи було використано мову python, та бібліотеки plotly - для побудови фазових кривих та numpy - для знаходження власних чисел та векторів.

Результати виконання програми:

Аналітичний розв'язок.

Завдання: Аналітичний розв'язок:

$$\begin{cases} x' = 4x + y \\ y' = 2x + 5y \end{cases} \quad \left| \begin{array}{cc|c} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 5-\lambda & 0 \end{array} \right|; \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 6 \end{matrix}$$

$\lambda_1, \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ вузол

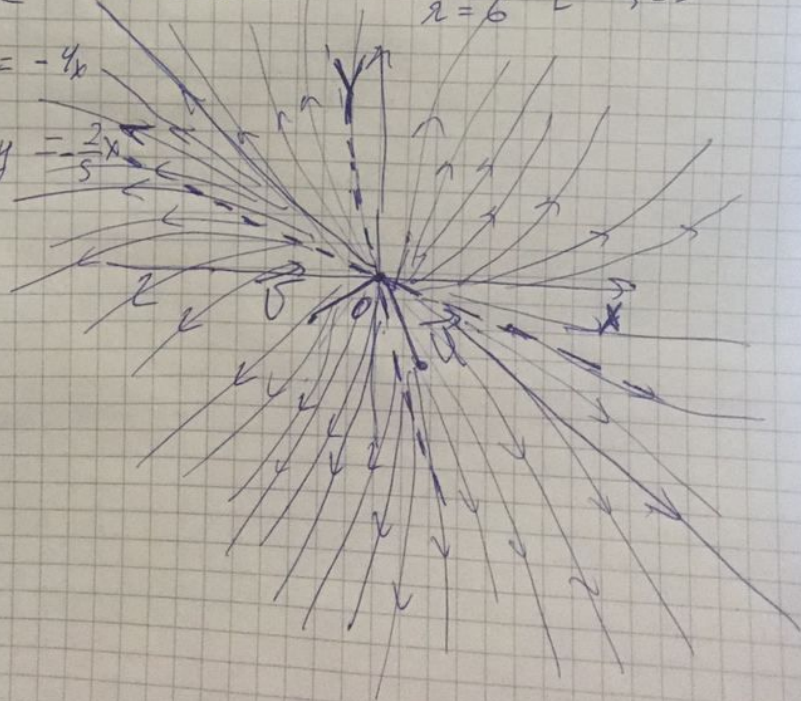
$\begin{matrix} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 > 0 \end{matrix} \Rightarrow$ нестійкий

$$\lambda_1 = 3: \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} v_1 = \begin{bmatrix} -0,7 \\ -0,44 \end{bmatrix} \\ \lambda = 3 \end{matrix}$$

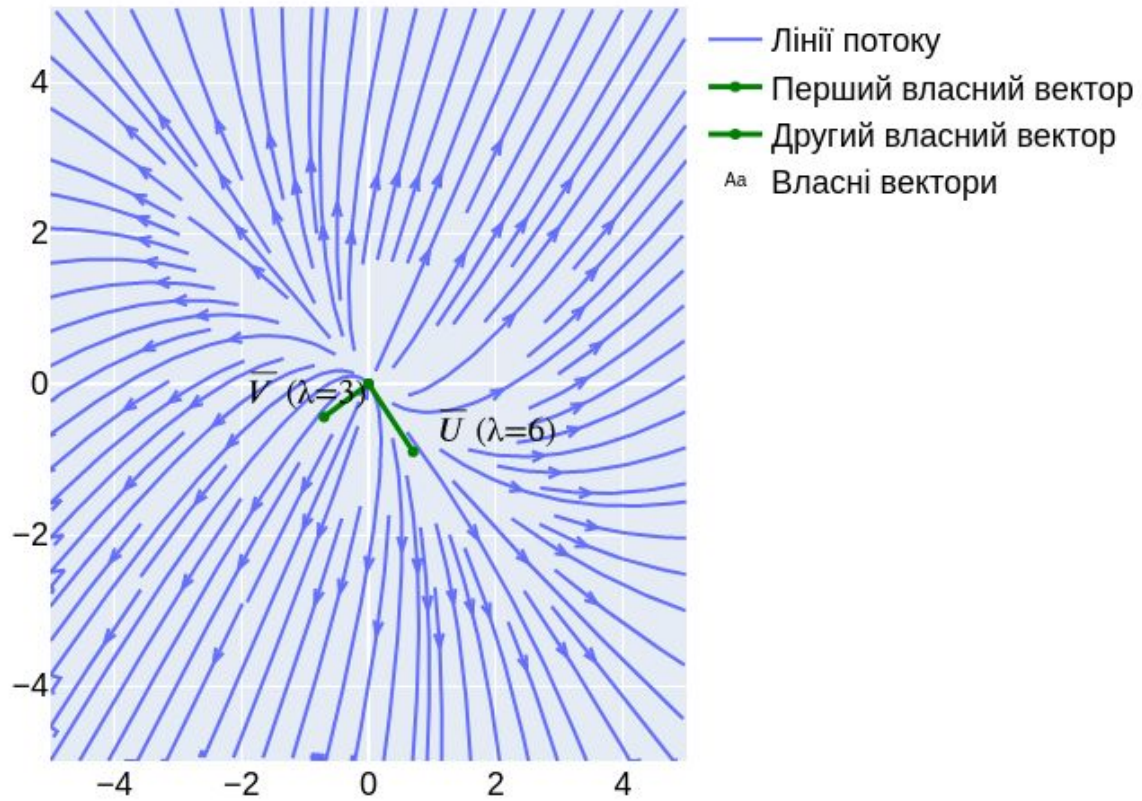
$$\lambda_2 = 6: \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} v_2 = \begin{bmatrix} 0,7 \\ -0,9 \end{bmatrix} \\ \lambda = 6 \end{matrix}$$

При $dx=0$; $y = -4x$

При $dy=0$; $y = -\frac{2}{5}x$



Програмний розв'язок.



Мал. 1

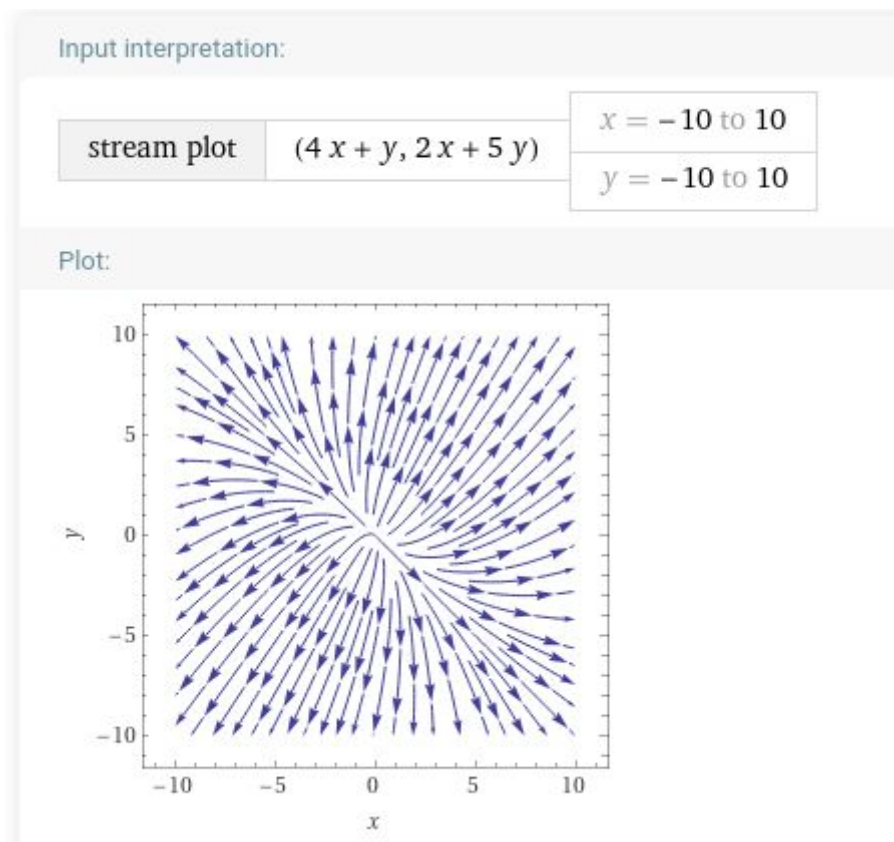
```
[mykvtazviahin@localhost Non-linear analysis]$ python lab1.py
Власні значення: [3. 6.]
Власні вектори: [[-0.70710678 -0.4472136 ]
 [ 0.70710678 -0.89442719]]
```

Мал. 2

Висновок:

В результаті лабораторної роботи було досліджено положення рівноваги та побудовані фазові криві відповідно до варіанту. Було досліджено стаціонарну точку $(0, 0)$ та знайдено власні вектори відповідно до варіанту.

Щоб переконатися в коректності виконання програми порівняємо аналітичний та програмний результат з результатом Wolfram Alpha:



Мал.3

Як бачимо, результати (малюнок фазових кривих) збігаються, а отже можна вважати що розв'язок правильний.

Додаток А. Код програми

```
import plotly
import plotly.figure_factory as ff
import plotly.graph_objects as go
import numpy as np
np.random.seed(1)

def eigs():
    vals, vecs = np.linalg.eig([[4,1],[2,5]])
    print('Власні значення: ', vals)
    print('Власні вектори: ', vecs)

def to_plot():
    x_source, y_source = 0.0, 0.0
    x = np.linspace(-5, 5, 500)
    y = np.linspace(-5, 5, 500)
    X, Y = np.meshgrid(x, y)
    dx = 4*X + 1*Y
    dy = 2*X + 5*Y
    figure = ff.create_streamline(x, y, dx, dy, arrow_scale = .2,
    density = 1.5, name = "Лінії потоку")

    figure.add_trace(go.Scatter(x=[0, -0.7], y=[0,-0.44],
    mode='lines+markers',
    name = "Перший власний вектор",
    line=dict(color='green',width=3)))

    figure.add_trace(go.Scatter(x=[0, 0.7], y=[0, -0.9],
    mode='lines+markers',
    name = "Другий власний вектор",
    line=dict(color='green',width=3)))

    figure.add_trace(go.Scatter(x=[-1, 2], y=[0, -0.5],
    text=[r"$\overline{V}$ \text{ (}\lambda=3\text{) }$",
    r"$\overline{U}$ \text{ (}\lambda=6\text{) }$"],
```



```
mode="text", name="Власні вектори"))
```

```
figure.update_layout(  
    title=r"dsadasd",  
    font=dict(  
        family="Arial",  
        size=18,  
        color="black"  
    )  
)
```

```
figure.update_xaxes(range=[-5, 5])  
figure.update_yaxes(range=[-5, 5])  
figure['layout'].update(width=700, height=600, autosize=False)  
figure.show()
```

```
to_plot()  
eigs()
```