НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Факультет прикладної математики

Кафедра прикладної математики

Звіт

Лабораторна робота 2

з дисципліни «Основи Нелінійного Аналізу »

на тему

«Фазові портрети динамічних систем»

Перевірив

доцент кафедри ПМА

Балюнов О.О.

Виконав:

студент групи КМ-73

Звягін М.С.

Київ — 2020

Зміст

Вступ

Мета виконання цієї лабораторної роботи полягає у побудові фазового портрету системи нелінійних диференціальних рівнянь.

Постановка задачі

Побудувати фазовий портрет динамічної системи:

Варіант 5:

$$5.\quad \begin{cases} \dot{x} = \ln \frac{y^2 - y + 1}{3}, \\ \dot{y} = x^2 - y^2. \end{cases}$$

Розв’язання задачі:

В даній роботі перш за все варто звернути увагу на те, що дана система є нелінійна, і як видно з її вигляду буде мати два положення рівноваги. Знайшовши ці положення, варто їх класифікувати та зобразити фазовий портрет. Зауважимо, що для побудова фазового портрету такої системи потребує процесу лінеаризації системи в точках рівноваги.

Лінеаризація звісно дозволяє дослідити положення рівноваги, але вона впливає на точність побудови фазового портрету, тобто, результат можна вважати наближено точним тільки в деякому околі положень рівноваги. Це варто було зауважити, так як, наприклад, в комп'ютерній реалізації добре видно, що власні вектори, на яких лежать лінії сепаратрис ділять площину трохи не так як мали б насправді. Тому, побудований фазовий портрет не є дуже точним.

Треба знайти точки положення рівноваги для цього рівняння:

A (-2;2), B(2;2). Далі потрібно провести лінеарізацію цих точок та встановити їх тип. Будемо використовувати ряд тейлора. Треба отримати лінійну апроксимацію системи в цих точках, що буде зроблено при аналітичному розв’язанні.

Для виконання даної лабораторної роботи було використано мову python, та бібліотеки plotly - для побудови фазових кривих.

Результати виконання програми:

Аналітичний розв'язок:

Хаїн Микита.

Лабораторна робота 2.

Аналітичне розв'язання.

Варіант 5.

$$\begin{cases} x' = \ln\left(\dfrac{y^2 - y + 1}{3}\right) \\ y' = x^2 - y^2 \end{cases}$$

Прирівнюємо частини цього диф. рівняння до 0:

$$\begin{cases} \ln\left(\dfrac{y^2 - y + 1}{3}\right) = 0 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

Точки рівноваги:

Можна побачити, що це $(-2;2)$ та $(2;2)$

$A(-2;2)$; $B(2;2)$

$$L(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$f'_x = 0 \qquad f|_A = 0$

$$f'_y = \left.\frac{\frac{2y-1}{3}}{\frac{y^2-y+1}{3}}\right|_A = 1.$$

$$L_1(x,y) = 0 + 0\cdot(x+2) + 1\cdot(y-2) = y-2.$$

$g'_x = 2x|_A = -4 \qquad g|_A = 0$

$g'_y = -2y = -4$

$$L_2(x,y) = 0 + -4(x+2) + (-4)\cdot(y-2) = -4x \cancel{-8} - 4y \cancel{+8} = -4x - 4y.$$

Лінійна апрокс:

$$\begin{cases} x' = y-2 \\ y' = -4x - 4y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{x}' = \tilde{y} \\ \tilde{y}' = -4\tilde{x} - 4\tilde{y} \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -4 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

$\lambda_{1,2} = -2$

$\upsilon_1 = (-1; 2) \Rightarrow$ Це вузол.

Тепер точка B.

$f'_x\big|_B = 0 \qquad f_B = 0 \qquad\qquad g'_x\big|_B = 4 \qquad g\big|_B = 0$

$f'_y\big|_B = 1 \qquad\qquad\qquad\qquad g'_y\big|_B = -4,$

$L_1(x,y) = 0 + 0\cdot(x-2) + 1\cdot(y-2) = y-2$

$L_2(x,y) = 0 + 4(x-2) + (-4)(y-2) =$

$= 4x - \cancel{8} - 4y + \cancel{8} = 4x - 4y;$

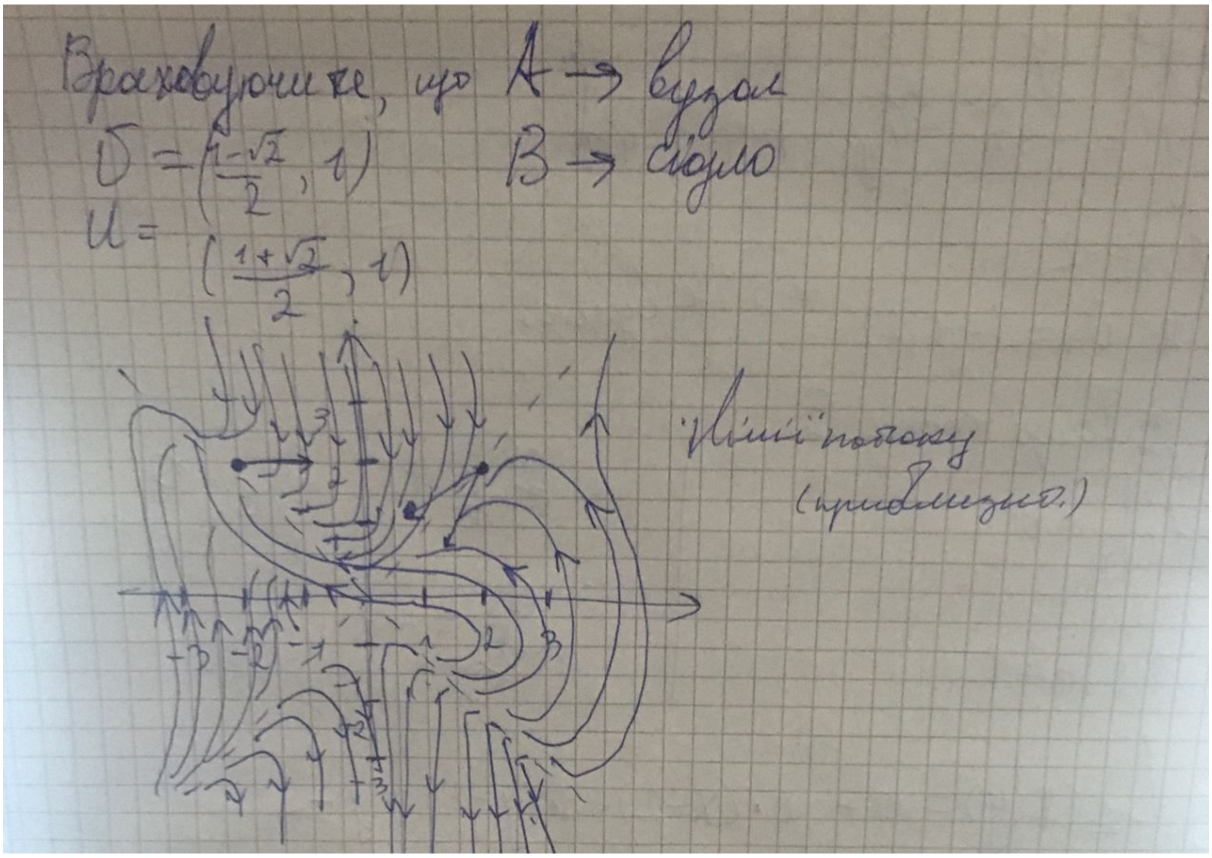
Лінійна апр.-я: $\begin{cases} x' = y-2 \\ y' = 4x-4y; \end{cases}$

$$\begin{cases} \tilde{x}' = \tilde{y} \\ \tilde{y}' = 4\tilde{x} - 4\tilde{y} \end{cases}$$

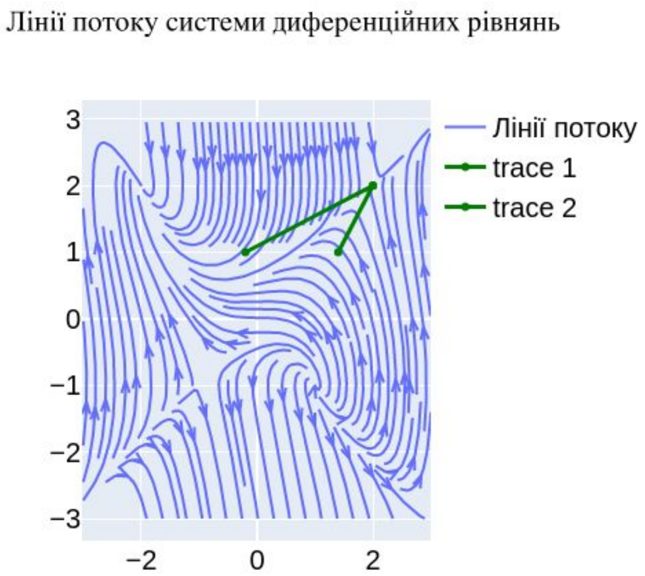
$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 4 & -4-\lambda \end{vmatrix}$ Це Сідло.

$\lambda_1 = -2(1+\sqrt{2}) < 0 \qquad \upsilon = \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, 1\right)$

$\lambda_2 = 2(\sqrt{2}-1) > 0 \qquad u = \left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2}, 1\right)$



Лінії потоку та власні вектори побудовані програмою:

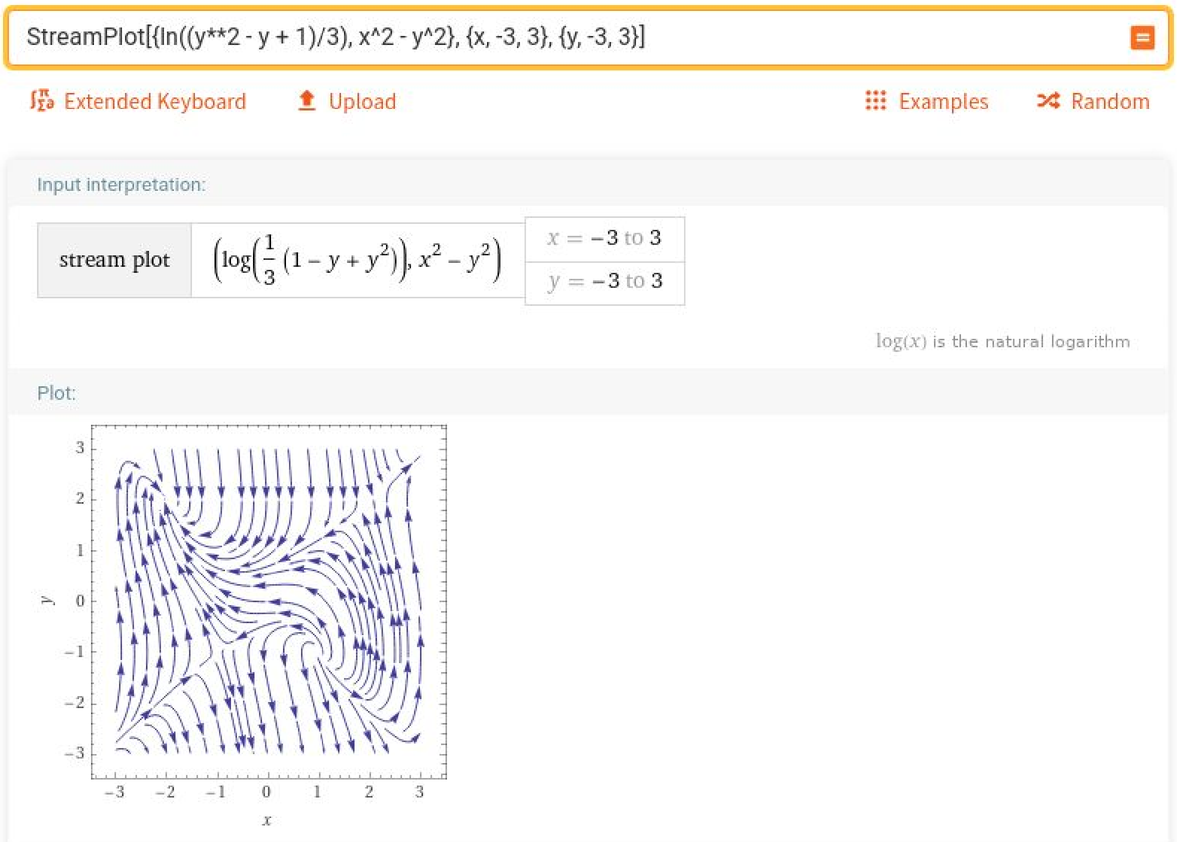


Висновок

В результаті лабораторної роботи було досліджено положення рівноваги за першим наближенням та побудовані фазові криві відповідно до варіанту.

Було побудовано аналітичний та програмний розв’язки задачі. Для отримання типу стаціонарних точок було використано лінеарізацію стаціонарних точок та проведено аналіз їх власних чисел та векторів.

Для перевірки коректності результатів порівнюємо результат з результатом, отриманим в програмі Wolfram Alpha:



Як можна побачити, лінії потоку приблизно співпадають з отриманими при розв’язанні, отже можна зробити висновок, що результат коректний.

Додаток А. Результат роботи програми

```
import plotly
import plotly.figure_factory as ff
import plotly.graph_objects as go
import numpy as np
import math
np.random.seed(1)

def stream_plot():
    x = np.linspace(-3,3,200)
    y = np.linspace(-3,3,200)
    X,Y = np.meshgrid(x, y)
    dy = X**2 - Y**2
    dx = np.log((Y**2 - Y + 1)/3)



    figure = ff.create_streamline(x, y, dx, dy, arrow_scale = .2,
    density = 1.5, name = "Лінії потоку")

    figure.add_trace(go.Scatter(x=[2, -0.2], y=[2, 1],
                        mode='lines+markers',
                        line=dict(color='green',width=3)))

    figure.add_trace(go.Scatter(x=[2, 1.4], y=[2, 1],
                        mode='lines+markers',
                        line=dict(color='green',width=3)))



    figure.update_layout(
        title=r"$\text{Лінії потоку системи диференційних рівнянь}$",
        font=dict(
        family="Arial",
        size=20,
        color="black"
        )
    )
    figure['layout'].update(width=500, height=500, autosize=False)
    figure.show()
stream_plot()
```