$\operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z, \operatorname{th} z, \operatorname{cth} z$ – однозначные неоднолистные

Пр: $\operatorname{sh}(1+i\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}(e^{1+i\frac{\pi}{2}} - e^{-(1+i\frac{\pi}{2})}) = \frac{1}{2}(e(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) - e^{-1}(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}))) = \frac{1}{2}(ei + e^{-1}i) = \frac{e^1+e^{-1}}{2}i = i\operatorname{ch}1.$

Св-ва: $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$; $\operatorname{sh} 2z = 2\operatorname{sh} z \operatorname{ch} z$; $\operatorname{ch} 2z = \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z = 2\operatorname{sh}^2 z + 1 = 2\operatorname{ch}^2 z - 1$; $\operatorname{sh}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2$;

$\operatorname{ch}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$;

$\cos iz = \operatorname{ch} z$; $\sin iz = i\operatorname{sh} z$; $\operatorname{tg} iz = i\operatorname{th} z$; $\operatorname{ctg} iz = -i\operatorname{cth} z$;

$\operatorname{ch} iz = \cos z$; $\operatorname{sh} iz = i\sin z$; $\operatorname{th} iz = i\operatorname{tg} z$; $\operatorname{cth} iz = -i\operatorname{ctg} z$.

Пр: $\operatorname{sh}(3i) = i\sin 3$; $\sin(4+5i) = \frac{e^{i(4+5i)} - e^{-i(4+5i)}}{2i} = \sin 4 \cos 5i + \cos 4 \sin 5i = \sin 4 \operatorname{ch} 5 + i\cos 4 \operatorname{sh} 5.$

8. Элементарные функции комплексного переменного

Ln z: $w = \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k),\ k \in \mathbb{Z}$

– ф., обратная к показательной $z = e^w$

$z = x+iy,\ w = u+iv,\ z = e^w = e^{u+iv} = e^u(\cos v + i\sin v)$

$|z| = e^u,\ \operatorname{Arg} z = v + 2\pi k \Rightarrow u = \ln|z|,\ v = \arg z + 2\pi k$

$w = \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)$

$\ln z$ – главное значение логарифма, соотв. главному значению аргумента, $\ln z = \ln|z| + i\arg z$.

Если $z = x,\ x > 0$, то $\ln z = \ln x$ – главное значение компл. логарифма совпадает с натуральным

w определена при $z \neq 0$

Пр: $\operatorname{Ln}(-2) = \ln 2 + i(\pi + 2\pi k)$; $\operatorname{Ln} 1 = i\cdot 2\pi k$; $\operatorname{Ln}(2+3i) = \ln\sqrt{13} + i(\operatorname{arctg} 3/2 + 2\pi k)$

w многозначна и неоднолистная

$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$; $\operatorname{Ln}(z_1/z_2) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$;

$\operatorname{Ln}(z^n) = n\cdot\operatorname{Ln} z,\ n \in \mathbb{N}$. Эти равенства следует понимать как равенства множеств, а не чисел.

9. Элементарные функции комплексного переменного

Степень с произвольным показателем: $\alpha^\beta = e^{\beta \operatorname{Ln}\alpha} = e^{\beta(\ln\alpha + 2\pi k i)}$,

$\alpha \in \mathbb{C},\ \alpha \neq 0,\ \beta \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{Z}$.

когда β – целое вещ. число, степень α^β имеет одно значение, т.к. $e^{2\pi k i\beta} = 1$. Если же β – несократимая рациональная дробь p/q $(q > 1)$, то степень α^β имеет ровно q различн. значений. Во всех других случаях степень имеет бесконечное множество значений.

$w = a^z$, $w = z^a$ – многозначные ф.

определены при $z \in \mathbb{C}$

главное значение соотв. главному значению логарифма

Пр: $i^i = e^{i \, Ln\, i} = e^{i(\ln 1 + i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k))} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2\pi k}$

$Ln\, i^i = \left[\begin{array}{l} Ln(e^{-\frac{\pi}{2} - 2\pi k}) = \ln(e^{-\frac{\pi}{2} - 2\pi k}) + i \cdot 2\pi m \text{ – все значения} \\ i Ln\, i = i(\ln 1 + i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)) = -\frac{\pi}{2} - 2\pi k \text{ – нек-е значения} \end{array}\right.$

Arccos z, Arcsin z, Arctg z, Arcctg z:

Явл. многозначными ф.

Пр. решение уравн. $\cos z = 2$:

$\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = 2 \Rightarrow t = e^{iz} \Rightarrow t + \frac{1}{t} = 4 \Rightarrow t = 2 \pm \sqrt{3}$

$e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow iz = Ln(2 \pm \sqrt{3}) \Rightarrow z = -i(\ln(2 \pm \sqrt{3}) + i \cdot 2\pi k) =$

$= 2\pi k - i \ln(2 \pm \sqrt{3}) \Rightarrow z = 2\pi k - i \ln(2 \pm \sqrt{3})$

Формула для Arccos z: $w = Arccos\, z \Rightarrow \cos w = z \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(e^{iw} + e^{-iw}) = z \quad (t = e^{iw}) \Rightarrow t + \frac{1}{t} = 2z$

$t_{1,2} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$ корень из компл. числа имеет два значения

$\Rightarrow t_{1,2} = z + \sqrt{z^2 - 1}$. $e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1} \Rightarrow iw = Ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$

$Arccos\, z = w = -i Ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$; $Arcsin\, z = -i Ln(iz + \sqrt{1 - z^2})$

$Arctg\, z = -\frac{i}{2} Ln \frac{1 + iz}{1 - iz}$; $Arcctg\, z = -\frac{i}{2} Ln \frac{z + i}{z - i}$ $\quad z \in \mathbb{C}$

Пр: $Arcsin(i) = -i Ln(-1 \pm \sqrt{2}) = \left[\begin{array}{l} -i(\ln(-1 + \sqrt{2}) + i \cdot 2\pi k) \\ -i(\ln(1 + \sqrt{2}) + i\pi + 2\pi k i) \end{array}\right.$

Для главного значения выбирается то значение корня из компл. числа, главное значение аргумента которого $\arg \xi \in [0, \pi]$. Тогда все остальные значения будут получаться из главного по формуле:

$Arccos\, z = \pm \arccos z + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

$Arcsin\, z = \pm \arcsin z + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

10. Предел и непрерывность функции. Производная

Пусть $w = f(z)$ – однозначная ф. (для многозначной рассматривается однозначная ветвь) и $f(z)$ определена в окрестности т. z_0 (может быть выколотой).

Компл. число $A = a + ib$ назыв. пределом ф. $f(z)$ при $z \to z_0 = x_0 + iy_0$, если ф. $u(x, y) \xrightarrow[(x,y) \to (x_0, y_0)]{} a$, $v(x, y) \xrightarrow[(x,y) \to (x_0, y_0)]{} b$, где $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$.

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A$$

Для пределов выполняется: $(\lim_{z \to z_0} f_1(z) \neq \infty, \lim_{z \to z_0} f_2(z) \neq \infty)$

– $\lim_{z \to z_0} (f_1(z) + f_2(z)) = \lim_{z \to z_0} f_1(z) + \lim_{z \to z_0} f_2(z)$

– $\lim_{z \to z_0} \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{\lim_{z \to z_0} f_1(z)}{\lim_{z \to z_0} f_2(z)}$, $\lim_{z \to z_0} f_2(z) \neq 0$

- $\lim\limits_{z\to z_0}(f_1(z)\cdot f_2(z)) = \lim\limits_{z\to z_0} f_1(z)\cdot \lim\limits_{z\to z_0} f_2(z)$

Путь, по которому $z \to z_0$ не важен.

A назыв. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$, если $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0,\ \delta=\delta(\varepsilon)$: при $|z-z_0|<\delta$ выполняется $|f(z)-A|<\varepsilon$.

Ф. $f(z)$ назыв. непрерывной в т. z_0, если для нее выполняется $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$; $w=f(z)$ однозначна и определена в окрестности z_0.

Непрерывность ф. $f(z)$ в т. z_0 эквивалентна непрерывности ф. $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в т. (x_0,y_0).

Ф. $w=f(z)$ назыв. непрерывной в области D, если она непрерывна в каждой точке этой области.

В окрестности т. z_0 возьмем т. $z_0+\Delta z \Rightarrow \Delta w = f(z_0+\Delta z)-f(z_0)$, Δz - приращение аргумента функции

$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0)$ назыв. производной (если существует) $f(z)$ в т. z_0.

$\Delta w = A\cdot\Delta z + o(\Delta z)$ - если приращение можно представить в таком виде, где $A\in\mathbb{C}$, не зависит от Δz, но может зависеть от z_0, $o(\Delta z)$ - бесконечно малая ф. при $\Delta z\to 0$ более высокого порядка, чем Δz, то ф. $w=f(z)$ назыв. дифференцируемой в т. z_0.

Дифференцируемость $\Leftrightarrow$ существование производной.

Если $f'(z_0)\neq 0$, то $f'(z_0)\Delta z$ явл. главной частью приращения ф., обознач. $f'(z_0)\Delta z = df(z_0)$ и назыв. дифференциалом ф. $w=f(z)$.

11. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции комплексного переменного.

Теорема. Пусть ф. $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ определена в некоторой окрестности $z_0=(x_0,y_0)\in D$, причем в этой т. ф. $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывно дифференцируемы по x и y. Тогда для дифференцируемости ф. $f(z)$ необходимо, а при существовании полных дифференциалов $du(x,y)$ и $dv(x,y)$ и достаточно, чтобы в этой т. z_0 имели место условия Коши-Римана (Эйлера-Д'Аламбера):

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Док-во: $\overset{\text{необход.}}{\Rightarrow}$) $\exists f'(z)$, докажем условия Коши-Римана:

$\Delta w = f(z_0+\Delta z)-f(z_0) = u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)+i\,(v(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)) = \Delta u + i\Delta v$.

$\Delta w = \underset{\| f'(z_0)=\alpha+i\beta}{A}\cdot\Delta z + o(\Delta z) = (\alpha+i\beta)(\Delta x+i\Delta y)+\underbrace{\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)+i\,\varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)}_{o(\Delta z)} =$

$= \alpha\Delta x - \beta\Delta y + \varepsilon_1 + i(\beta\Delta x + \alpha\Delta y + \varepsilon_2) = \Delta u + i\Delta v = du + i\,dv$

$\Rightarrow \begin{cases} du = \alpha\Delta x - \beta\Delta y + \varepsilon_1 \\ dv = \beta\Delta x + \alpha\Delta y + \varepsilon_2 \end{cases}$, в то же время $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$, $dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\beta,\ \frac{\partial v}{\partial x} = \beta,\ \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -\beta$ ч.т.д.

Достат.

$\Leftarrow)$ Пусть выполнены условия Коши-Римана. Докажем, что ф. $f(z)$ имеет производную.

$\Delta w = \Delta u + i\Delta v$, $du = \alpha\Delta x - \beta\Delta x + \varepsilon_1(\Delta z)$, $dv = \beta\Delta x + \alpha\Delta y + \varepsilon_2(\Delta z)$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – бесконечно малые более высокого порядка, чем Δz, $\Delta z \to 0$

$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}(\alpha\Delta x - \beta\Delta y + \varepsilon_1(\Delta z) + i\alpha\Delta y + i\beta\Delta x + i\varepsilon_2(\Delta z)) =$

$= \lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}(\alpha\Delta z + i\beta\Delta z + \varepsilon_1 + i\varepsilon_2) = \lim\limits_{\Delta z\to 0}(\alpha + i\beta + \underbrace{\frac{\varepsilon}{\Delta z}}_{\to 0}) = \alpha + i\beta = f'(z_0)$ ч.т.д.

Замечание 1. $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$.

Пр: $w = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) \Rightarrow w' = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 + i\cdot 6xy =$
$= 3(x^2 - y^2 + 2xyi) = 3z^2$.

Замечание 2. Если зависимость дана в виде $w = f(z)$, то w' можно найти непосредственным дифференцированием или по таблице производных + св-вам $(f \pm g)' = f' \pm g'$; $(fg)' = f'g + g'f$; $(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$; $(f(h(z)))' = f'_h \cdot h'_z$.

Пр: $w = z^3 \Rightarrow w' = 3z^2$.

12. Аналитические функции. Связь аналитических функций с гармоническими

Ф. $f(z)$ назыв. аналитической (или голоморфной, или регулярной) в конечной точке z_0, если она дифференцируема в каждой т. некоторой окрестности т. z_0.

Если ф. $f(z)$ однозначна и дифференцируема в каждой т. области D, то она назыв. аналитической (регулярной, голоморфной) в этой области.

Точки плоскости z, в которых однозначная ф. $f(z)$ аналитична, назыв. правильными точками $f(z)$; точки, в которых ф. $f(z)$ не явл. аналитической, назыв. особыми точками этой ф.

Ф. назыв. целой, если она аналитична во всей комплексной плоскости (при $z \in \mathbb{C}$). Целыми явл. ф. $w = e^z$, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, z^n, $w = P_n(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$.

Пр: $w = e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \Rightarrow u = e^x \cos y,\ v = e^x \sin y$
Условие Коши-Римана: $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow$
$\Rightarrow w = e^z$ дифференцируема для $\forall (x,y)$ $(\forall z \in \mathbb{C}) \Rightarrow$
$\Rightarrow e^z$ - целая.

Ф. $w = z \cdot \bar{z}$ и любая другая ф. содержащая $\bar{z}$, которое нельзя упростить, не явл. аналитичной: $w = x^2 + y^2 \Rightarrow u = x^2 + y^2,\ v = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial v}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y,\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0$, тогда условие Коши-Римана выполняются только для т. $(0,0)$. Ф. дифференцируема только в т. $(0,0)$, но не в ее окрестности $\Rightarrow$ неаналитична $\forall z$ кроме 0.

Замечание: Если $f_1(z), f_2(z)$ - аналитические ф. в т. или области $\Rightarrow f_1 \pm f_2,\ f_1 \cdot f_2,\ f_1/f_2\ (f_2 \neq 0)$ также аналитические.

Ф. $\varphi(x,y)$ назыв. гармонической, если она удовлетворяет уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$ $\quad \varphi(x,y),\ x,y \in \mathbb{R}$

Если $w = f(z)$ - аналитическая, значит выполняются условия Коши-Римана: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ (1) и $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ (2).

Пусть $u(x,y),\ v(x,y)$ - бесконечно дифференцируемые ф.:

$$\frac{\partial(1)}{\partial x}: \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \oplus \quad \frac{\partial(2)}{\partial y}: \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \overset{\shortparallel}{=} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial(1)}{\partial y}: \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \ominus \quad \frac{\partial(2)}{\partial x}: -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \overset{\shortparallel}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

Получаем, что если $f(z) = u + iv$ - аналитическая, то ф. $u(x,y)$ и $v(x,y)$ - гармонические.

Ф. $\varphi_1(x,y)$ и $\varphi_2(x,y)$, удовлетворяющие уравнению Лапласа и условиям Коши-Римана назыв. взаимно сопряженными $\Rightarrow$
$\Rightarrow u$ и v - взаимно сопряженные.

13. Восстановление аналитической функции по ее вещественной или мнимой части

$f(z)$ - аналитическая $\Leftrightarrow \begin{cases} u, v \text{ - выполн. условия Коши-Римана} \\ u, v \text{ - гармонические} \end{cases}$
$\Leftrightarrow u, v$ - взаимно сопряженные $\Leftrightarrow f(z) = u + iv$ - аналитическая

Задача: Дана ф. $u(x,y)$ (или $v(x,y)$) - гармоническая. Требуется найти ф. $f(z)$ аналитическую, $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ с точностью до константы.

Задача решается с помощью условий Коши-Римана.

Пр: восстановить аналитическую ф. $w=f(z)$, для которой $u(x,y)=x^2-y^2$.

1) Проверка гармоничности: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ $\Rightarrow$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Rightarrow u(x,y)$ гармоническая $\Rightarrow \exists$ аналитическая ф. $f(z)$

2) Находим $v(x,y)$: используя условия Коши-Римана:
$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y}=2x$, $\frac{\partial v}{\partial x}=2y \Rightarrow v=\int 2x\,dy+C(x)=$
$=2xy+C(x) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}=2y+C'(x)=2y \Rightarrow C'(x)=0 \Rightarrow C(x)=C \Rightarrow$
$\Rightarrow v=2xy+C$, $C\in\mathbb{R}$. Тогда $f(z)=x^2-y^2+i(2xy+C)=$
$=(x+iy)^2+iC=z^2+iC$.

Общая схема решения:

Даны $u(x,y)$ — гармоническая. Найти $f(z)=u+iv$ — аналитическую.
Находим $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$. Тогда $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$.
$dv=\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{P(x,y)}dx+\underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{Q(x,y)}dy$ — полный дифференциал, т.к. $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$
($P=-\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $Q=\frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ т.к. ф. u — гармоническая)

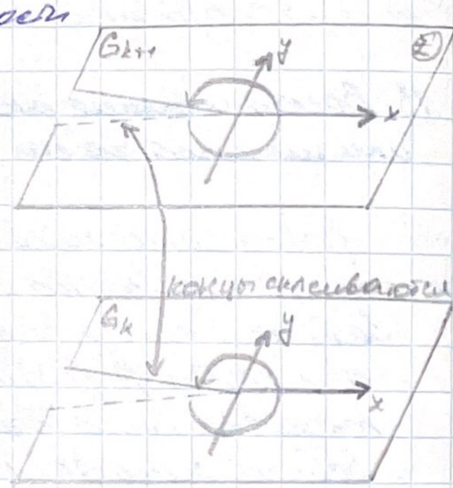
$v=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}(P\,dx+Q\,dy)+C=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy\right)+C=$
$=\int_{x_0}^{x}(P(x,y_0)dx+0)+\int_{y_0}^{y}(0+Q(x,y)dy)+C$, т.к. криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования, когда подынтегральная ф. полного дифференциала.

Значит, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=u(x,y)+i\left(\int_{x_0}^{x}-\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(x,y_0)}dx+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(x,y)}dy+C\right)$. Аналогично находим $u(x,y)$, если дана ф. $v(x,y)$.

14. Римановы поверхности.

Рассмотрим модель Римановой поверхности на примере $w=\sqrt[n]{z}$.
$w_k=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi k\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi k\right)\right)$,
$\varphi=\arg z$, $k=\overline{0,n-1}$. $\operatorname{Arg} z=\arg z+2\pi k$.
G_k: $\operatorname{Arg}_k z=\arg z+2\pi k$
$-\frac{\pi}{n}+\frac{2\pi k}{n}<\arg w_k\le\frac{\pi}{n}+\frac{2\pi k}{n}$
G_{k+1}: $\operatorname{Arg}_{k+1} z=\arg z+2\pi+2\pi k$
$-\frac{\pi}{n}+\frac{2\pi}{n}+\frac{2\pi k}{n}<\arg w_{k+1}\le\frac{\pi}{n}+\frac{2\pi(k+1)}{n}$
$\frac{\pi}{n}+\frac{2\pi k}{n}<\arg w_{k+1}\le\frac{\pi}{n}+\frac{2\pi(k+1)}{n}$

разрез верхний в G_{n-1} склеивают с нижним G_0. На каждом листе G_k ф. $w=\sqrt[n]{z}$ явл. однозначной.



Римановы поверхности