в параметрич. форме в интервале (t_0, t_1), если в этом интервале имеет место тождество $F(\varphi(t), \psi(t), \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}) \equiv 0$. Кривую на плоск. (x,y), соотв. реш., назыв. интегральной кривой уравн. (1).

Задача интегрирования уравн. (1) состоит в том, чтобы найти все гладкие кривые, в каждой т. которых направление касат. совпадало бы с одним из направлений поля в этой т.

Реш. ЗК с нач. данными x_0, y_0 единственно, если через т. (x_0, y_0) в достаточно малой окрестности ее проходит столько ИК, сколько направлений поля определяет уравн. (1) в этой т.

Теорема. Если ф. $F(x,y,y')$ удовл. след. 3-м условиям:

1) $F(x,y,y')$ определена и непрерывно дифференцир. вместе со своими частн. произв. в нек-й замкнутой окрестности т. (x_0, y_0, y_0')

2) $F(x, y', y_0') = 0$,

3) $F'_{y'}(x_0, y_0, y_0') = 0$,

уравн. (1) имеет единств. реш. $y = y(x)$, определенное и непрерывно дифференцируемое в нек-й окрестности т. $x = x_0$, удовл. нач. условию $y = y_0$ при $x = x_0$ и такое, что $y'(x_0) = y_0'$.

35. Общий интеграл. Общее решение в параметрич. форме. Частное и особое решения.

$y' = f_k(x,y)$ $(k=1,2,\dots,m)$ $\Rightarrow$ $\psi_k(x,y) = C$ $(k=1,2,\dots,m)$ –
-реш. (1) общий интеграл (1) в обл. D

$$\psi_k(x,y) = C \Leftrightarrow (\psi_1(x,y)-C)(\psi_2(x,y)-C)\dots(\psi_m(x,y)-C) = 0$$

Однопараметрическое семейство ИК $\Phi(x,y,C) = 0$ – общий интеграл уравн. (1). Если семейство задано в виде, разреш. относит. y, $y = \varphi(x, C)$, то оно назыв. общ. реш. (1).

Семейство $\begin{cases} x = \varphi(t,C) \\ y = \psi(t,C) \end{cases}$ назыв. общ. реш. (1) в параметрич. форме.

Реш. $y = \varphi(x)$ уравн. (1) назыв. частн. реш., если в каждой его т. задача Коши имеет единств. реш.

Реш. $y = \varphi(x)$ уравн. (1) назыв. особым реш., если в каждой его т. нарушается единственность реш. задачи Коши.

ИК, соотв. частн. реш., не касаются друг друга внутри обл. D.

Достаточн. признак особ. реш. уравн. (1): когда уравн. распадается на уравн., разреш. относит. произв., реш. $y = y(x)$ будет, наверно, особым реш. этого уравн., если оно будет особым реш. хотя бы одного из уравн., на которые оно распадается.

36. Кривые, подозрительные на особое решение. Дискриминантная кривая. Огибающая семейства интегральных кривых как особое решение.

$y' = f_k(x,y) \Rightarrow \frac{\partial f_k}{\partial y} \to \infty$ - подозрит. на осб. реш.

$\frac{\partial f_k}{\partial y} = \frac{\partial y'}{\partial y} \underset{(1)}{\Rightarrow} \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial y'}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y'}} \to \infty \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$

ИК, подозрит. на особ. реш., могут быть найдены исключением y' из системы $\begin{cases} F(x,y,y') = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \end{cases} \to R(x,y) = 0$ - дискриминантная кривая ДУ (1).

Частн. случ.: $F(x,y,y') = y'^2 + 2P(x,y,y') + Q(x,y) = 0$

$\begin{cases} F = y'^2 + 2P(x,y)y' + Q(x,y) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' + 2P(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow R = P^2(x,y) - Q(x,y) = 0$

в каждой т. дискриминантной кривой мы имеем одно направление поля, определяемое рав. $y' = -P(x,y)$, в то время как через нее может пройти не одна ИК.

Огибающая семейства $\Phi(x,y,C) = 0$ или $y = \varphi(x,C)$ будет особ. реш. уравн. (1).

37. Уравнение, содержащее только производную.

$F(y') = 0 \quad y' = k_i \ (i = 1, 2, \dots) \Rightarrow F(k_i) = 0$

$y = k_i x + C \Rightarrow k_i = \frac{y - C}{x} \Rightarrow F\left(\frac{y-C}{x}\right) = 0$ - общ. интеграл (1)

Замечание. Если корни уравн. (1) заполняют сплошь нек-й интервал, то ДУ (1) может иметь реш., отличн. от ↑.

38. Уравнение, не содержащее искомой функции

$F(x, y') = 0 \quad y' = f_k(x) \ (k = 1, 2, \dots) \Rightarrow y = \int f_k(x)dx + C$ - общ. интеграл (1)

ИК этого уравн. будут такие кривые, смещенные из ИК уравнений $y' = f_k(x)$. Если $F(x,y') = 0$ не разрешимо относит. y', но можно найти такие ф. $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, что $F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0$, то $F(x,y') = 0 \Rightarrow x = \varphi(t), y' = \psi(t)$ - уравн. допускает параметрич. представление.

Вдоль всякой ИК ДУ 1$^{\text{го}}$ порядка должно выполн. основное соотнош. $dy = y'dx$. Тогда $y' = \psi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$, $dy = \psi(t)\varphi'(t)dt$
$\Rightarrow y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C \Rightarrow$ общ. реш. в параметрич. форме:
$x = \varphi(t), \ y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C$.

Если сущ. такое конечное a, что $\lim\limits_{y' \to +\infty} F(a, y') = 0$ или $\lim\limits_{y' \to -\infty} F(a, y') = 0$, то $x = a$ - реш. ДУ и может оказ. особым.

Если $F(x,y') = 0 \Rightarrow x = \varphi(y')$ (ДУ разрешимо относит. x), то, положив $y' = \psi(t)$: $x = \varphi(\psi(t)), y' = \psi(t)$

$y' = t$: $x = \varphi(t), \ y' = t \Rightarrow y = \int t \varphi'(t) dt + C$

Уравн. $x=\varphi(y')$ может иметь особ. реш. вида $x=a$, где $\lim \varphi(y')=a$ при $y'\to+\infty$ или $-\infty$.

Замеч. 1. Общ. реш. всегда получ. из параметрич. представления уравн. непосредств. использованием основного соотнош. $dy=y'dx$.

Замеч. 2. $F(x,y')$ на плоскости (x,y') соотв. нек-я кривая. Тогда задача нахождения параметрич. представления равносильна задаче нахожд. параметрич. уравн. соотв. плоской кривой.

39. Уравнения, не содержащие независимой переменной.

$F(y,y')=0$ если $y'=f_k(y)$, то общ. интеграл $\int\frac{dy}{f_k(y)}=x+C$

Особ. реш. могут быть прямые $y=b_i$, где b_i — корни уравн. $f_k(b)=0$, или уравн. $F(b,0)=0$.

Если не разреш. относит. y', но допускает параметрич. представление: $y=\varphi(t)$, $y'=\psi(t)$, то, используя $dy=y'dx$: $\varphi'(t)dt=\psi(t)dx$

$\Rightarrow dx=\frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}$, $x=\int\frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}+C \Rightarrow$ общ. реш. в параметрич. форме: $x=\int\frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}+C$, $y=\varphi(t)$

Если разреш. относит. y, т.е. $y=\varphi(y')$, то $y=\varphi(\psi(t))$, $y'=\psi(t)$

Может иметь особ. реш. $y=b$, где $b=\varphi(0)$.

40. Уравнения высших порядков. Геометрическое истолкование.

Каждое уравн. $n^{го}$ порядка выражает собою нек-е общее геом. св-во всех его ИК.

$F(x,y,y',y'')=0 \Leftrightarrow F\left(x,y,y',(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F_1\left(x,y,y',\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right)=0$ — представл. собою связь между координатами, наклоном касат. и кривизной в каждой т. ИК.

41. Задача Коши. Краевая задача.

ЗК: требуется среди всех реш. уравн. $y^{(n)}=f(x,y,y',y'',\dots,y^{(n-1)})$ (1) найти реш. $y=y(x)$, в котором ф. $y(x)$ вместе с ее произв. до $(n-1)^{го}$ порядка включ. принимает знач. $y_0,y_0',\dots,y_0^{(n-1)}$ при заданном знач. x_0 независим. перемен. x, т.е. $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0',\dots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$, где $x_0,y_0,y_0',\dots,y_0^{(n-1)}$ — заданные числа, так что реш. $y=y(x)$ удовл. условиям: $y=y_0$, $y'=y_0',\dots,y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}$ при $x=x_0$. Характерная особенность ЗК состоит в том, что условия, которые налагаются на искомое реш. при постановке ее, задаются при одном и том же знач. незав. перемен.

Геом.: задача нахождения такой ИК, которая проходила бы через заданную т. $M_0(x_0,y_0)$ и имела бы в этой т. заданное направление касат., $tg\,\alpha_0 = y_0'$

Для уравн. 2-го порядка единствен. ЗК означает, что через т. $M_0(x_0, y_0)$ проходит единств. ИК — это ДУ, обладающая тем свойством, что касат. к ней в этой т. составляет с + направл. Ox угол α_0, тангенс которого равен заданному нач. знач. y_0': $tg\,\alpha_0 = y_0'$, в то время как через т. (x_0, y_0) наряду с этой ИК, как правило, проходит еще бесчисленное множ. ИК, но уже с другими наклонами касат. в этой т.

Теорема Пикара. Пусть дано уравн. (1)

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

и поставлены нач. условия $y = y_0$, $y' = y_0'$, $\dots$, $y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ при $x = x_0$. Предположим, что ф. $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ определена в нек-й замкнутой огранич. области R: $|x - x_0| \le a$, $|y - y_0| \le b$, $|y' - y_0'| \le b$, $\dots$, $|y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}| \le b$ с т. $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$ внутри и удовл. в этой обл. след. условиям:

I. Ф. $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ непрерывна по всем своим аргументам и, следов., ограничена, т.е. $|f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})| \le M$,

II. Ф. $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ имеет огранич. частн. произв. по аргументам $y, y', \dots, y^{(n-1)}$, т.е. $\left|\frac{\partial f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})}{\partial y^{(k)}}\right| \le K$ $(k = 0, 1, \dots, n-1;\ y^{(0)} = y)$.

При этих предполож. уравн. (1) имеет единств. реш. $y = y(x)$, удовл. нач. усл. Это реш. заведомо определено и непрерывно вместе с произв. до порядка n включит. в интервале $|x - x_0| \le h$, $h = \min\{a, \overline{\max(M, |y'|, \dots, |y^{(n-1)}|)}\}$.

Следствие. Если правая часть (1) — полином от своих аргументов, то какие бы нач. данные ни взять, сущ. единств. реш. уравн. (1) с этими нач. данными.

Граничные (краевые) задачи: условия налагаются на концах нек-го интервала $[a; b]$ и ищется реш., определенное внутри этого интервала. Эти условия назыв. граничными (краевыми) условиями. Граничная задача не всегда имеет реш., а если имеет, то, весьма часто, не единств.

42. Общее решение. Общий интеграл.

Семейство реш. уравн. (1), зависящее от n произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$ — $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, назыв. обычно общ. реш. этого уравн. Геом. оно представляет собою семейство ИК на плоскости (x, y), зависящее от n параметров $C_1, C_2, \dots, C_n$, причем уравнение этого семейства разрешено относит. y.

Ф. $y=\varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, определенную в нек-й области изменения переменн. $x, C_1, C_2, \dots, C_n$, имеющую непрерывн. частн. произв. по x до порядка n включит., будем называть общ. реш. (1) в обл. D, если система уравн. разрешима относит. произв. постоянных

$$\begin{cases} y=\varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \\ y'=\varphi'(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \\ y^{(n-1)}=\varphi^{(n-1)}(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \end{cases}$$

$C_1, C_2, \dots, C_n$ в области D, так что при любых знач. $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$, принадлеж. обл. D, этой системой определ. знач. $C_1, \dots, C_n$ по формулам:

$$\begin{cases} C_1 = \psi_1(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ C_2 = \psi_2(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ \dots\dots\dots \\ C_n = \psi_n(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \end{cases}$$

и если ф. $y=\varphi(x, C_1, \dots, C_n)$ явл. реш. уравн. (1) при всех знач. произвольных постоянн. $C_1, C_2, \dots, C_n$, получаемых из системы, когда т. $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ пробегает обл. D.

Общ. реш. в неявном виде $\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n)=0$ назыв. общ. интегралом.

43. Общее решение в параметрической форме. Частное решение. Особое решение.

$$\begin{cases} x = \varphi(t, C_1, C_2, \dots, C_n) \\ y = \psi(t, C_1, C_2, \dots, C_n) \end{cases}$$ – общ. реш. в параметрич. форме

Если реш. (1) состоит только из т. единственности реш. ЗК для этого уравн., то такое реш. назыв. частным реш.

Реш., получающееся из формулы общ. реш. при частн. числовых знач. произв. постоян. $C_1, \dots, C_n$, включая $\pm\infty$, будет частн. реш.

Реш., в каждой т. которого нарушается единственность реш. ЗК, назыв. особым реш. Уравн. n-го порядка может иметь семейство особых реш., зависящее от произвольных постоянных, причем число последних может доходить до $n-1$.

44. Уравнение, содержащее только независимую переменную и производную порядка n.

1. $y^{(n)} = f(x)$, где $f(x)$ непрерывна на (a, b).

$(y^{(n-1)})' = f(x) \Rightarrow y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C_1$, $x_0 \in (a, b)$

$$\Rightarrow \dots\ y = \underbrace{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\dots\int_{x_0}^{x}}_{n\ \text{раз}} f(x)\,dx\,dx\dots dx + \frac{C_1}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2} + \dots + C_{n-1}(x-x_0) + C_n$$

$y_0^{(n-1)} = C_1$, $y_0^{(n-2)} = C_2$, $\dots$, $y_0' = C_{n-1}$, $y_0 = C_n$

$$y = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}\,dt$$ – формула Коши замены повторных интегралов одним и т.д.

2. $F(x, y^{(n)}) = 0$ неразрешимо относит. $y^{(n)}$

$\Rightarrow x = \varphi(t)$, $y^{(n)} = \psi(t)$: $F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0$

$dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx = \psi(t)\varphi'(t)dt \Rightarrow$

$y^{(n-1)} = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C_1 = \psi_1(t, C_1)$

$\ldots\ y = \psi_n(t, C_1, \ldots, C_n),\ x = \varphi(t)$

а. $x = \varphi(y^{(n)}) \Rightarrow x = \varphi(\psi(t)),\ y^{(n)} = \psi(t)$

б. $P(x, y^{(n)}) + Q(x, y^{(n)}) = 0$ P и Q - однородн. ф. k и m.

$y^{(n)} = tx \Rightarrow x = \varphi(t) \Rightarrow y^{(n)} = t\varphi(t)$

45. Типы уравнений, допускающих понижение порядка. Уравнение, не содержащее независимой переменной.