28. Первообразная. Теорема о первообразной.

$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ – первообразная $f(z)$

Теорема (о первообразной). Ф. $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ аналитическая в области D и $F'(z) = f(z)$.

Док-во: $F'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z}\left(\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(t)\,dt - \int_{z_0}^{z} f(t)\,dt\right) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(t)\,dt \overset{*}{=} \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z}\left(\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\,dt + \int_{z}^{z+\Delta z} \eta(t)\,dt\right) =$

* $f(t)$ – непрерывна, $f(t) = f(z) + \eta(t)$, $\eta(t) \xrightarrow[t \to z]{} 0$

$= \lim\limits_{\Delta z \to 0}\left(\frac{1}{\Delta z} \cdot f(z) \cdot \Delta z + \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} \eta(t)\,dt\right) \overset{**}{=} F'(z) = f(z)$. ч.т.д.

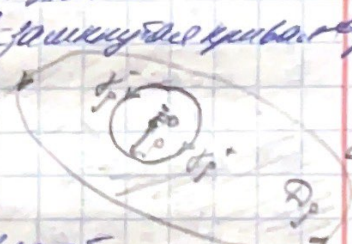
** $\left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} \eta(t)\,dt\right| \underset{\text{т. об оценке}}{\le} \frac{1}{\Delta z} \max|\eta(t)| \cdot \Delta z = \max|\eta(t)| \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} 0$

Замечание. Если $f(z)$ – аналитическая ф., то верны
- – формула Ньютона-Лейбница $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1)$
- – таблица интегралов
- – интегрирование по частям
- – замена переменной

29. Интегральная формула Коши.

Теорема. Пусть $f(z)$ – однозначная аналитическая в области D и на ее границе C функция. Пусть $z_0 \in D$, $z_0 \notin C$. Тогда

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz \quad (C \text{ – замкнутая кривая-граница}).$$



Док-во: $\varphi(z) = f(z)/z - z_0$.

γ_ρ: $|z - z_0| = \rho$ – достаточно маленькое, чтоб $|z - z_0| < \rho \in D \Rightarrow D_\rho$ – двусвязная область с границами C и γ_ρ^+; φ – аналитическая в D_ρ и на границе D_ρ. По теореме Коши для многосвязной области $\int_C \varphi(z)\,dz + \int_{\gamma_\rho^+} \varphi(z)\,dz = 0 \Rightarrow \oint_C \varphi(z)\,dz = -\int_{\gamma_\rho^+} \varphi(z)\,dz = \int_{\gamma_\rho^-} \varphi(z)\,dz \Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho^-} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$. Оценим разность

$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho^-} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho^-} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,dz$ (*).

$f(z)$ – непрерывна в D

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \delta = \delta(\varepsilon)$: $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ при $|z - z_0| < \delta$.

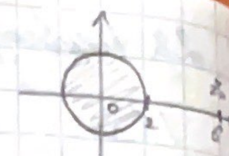
Учтём $|z - z_0| = \rho < \delta$. Оценим (*):

$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho^-} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,dz\right| \le \frac{1}{2\pi} \cdot \max\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right| \cdot 2\pi\rho < \rho \cdot \frac{\varepsilon}{\rho} = \varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{\rho \to 0} \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho^-} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = f(z_0) \Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = f(z_0)$

Итог: $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = \begin{cases} f(z_0), & z_0 \in D,\ z_0 \notin C \\ 0, & z_0 \notin D \\ \text{не имеет смысла}, & z_0 \in C \end{cases}$

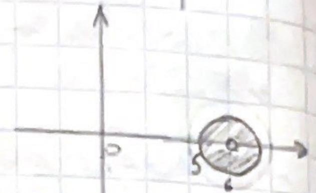
Пр: а) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z-6}\,dz$



в $D: |z|<2$ $\varphi(z)=\frac{e^z}{z-6}$ аналитическая

$\Rightarrow \oint\limits_{|z|=2}\frac{e^z}{z-6}\,dz=0.$

б) $\oint\limits_{|z-6|=1}\frac{e^z}{z-6}\,dz=2\pi i\, f(z_0)=2\pi i\, e^6.$



$z_0=6\in D;\ D: |z-6|<1$

$f(z)=e^z$ - аналитическая в D.

30. Производные высших порядков от функции компл. переменного.

Теорема (обобщение интегральной формулы Коши).

Пусть $f(z)$ - однозначная и аналитическая в области D и на ее границе C функция. Пусть $z_0\in D$, $z_0\notin C$. Тогда

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

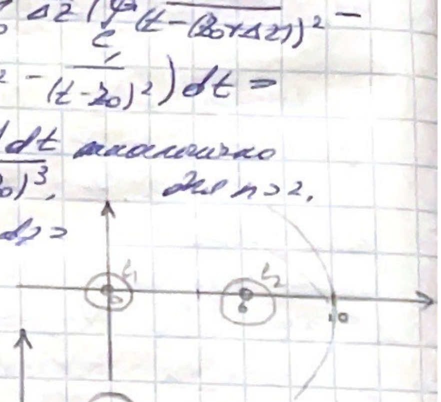
Док-во:

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\left(\oint_C\frac{f(t)\,dt}{t-(z_0+\Delta z)}-\oint_C\frac{f(t)\,dt}{t-z_0}\right)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\oint_C f(t)\cdot\left(\frac{1}{t-z_0-\Delta z}-\frac{1}{t-z_0}\right)dt=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\cdot\oint_C\frac{f(t)\,\Delta z\,dt}{(t-z_0-\Delta z)(t-z_0)}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(t)}{(t-z_0)^2}\,dt=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^2}$$

$$f''(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f'(z_0+\Delta z)-f'(z_0)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\left(\oint_C\frac{f(t)\,dt}{(t-(z_0+\Delta z))^2}-\oint_C\frac{f(t)\,dt}{(t-z_0)^2}\right)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\oint_C f(t)\cdot\left(\frac{1}{(t-z_0-\Delta z)^2}-\frac{1}{(t-z_0)^2}\right)dt=$$

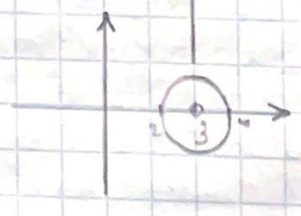
$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(t)\cdot 2(t-z_0)}{(t-z_0)^4}\,dt=\frac{2}{2\pi i}\oint_C\frac{f(t)\,dt}{(t-z_0)^3},$$ аналогично для $n>2$.

Пр: $\oint\limits_{|z|=10}\frac{e^z}{z^2(z-6)}\,dz=\oint\limits_{C_1}\frac{e^z}{z^2(z-6)}\,dz+\oint\limits_{C_2}\frac{e^z}{z^2(z-6)}\,dz=$



$=\oint\limits_{C_1}\frac{\frac{e^z}{z-6}}{z^2}\,dz+\oint\limits_{C_2}\frac{\frac{e^z}{z^2}}{z-6}\,dz.$

Пр: $\oint\limits_{|z-3|=1}\frac{e^z\,dz}{(z-3)^4}=\frac{f^{(3)}(3)}{3!}\,2\pi i=$



$=\frac{e^3}{6}\cdot 2\pi i=\frac{\pi e^3}{3}i.$

$D: |z-3|<1$ $z_0=3\in D$

$f(z)=e^z$ - аналитическая в D

$n=3.$

31. Функциональные ряды, равномерная сходимость, свойства суммы функциональных рядов

$\{a_n\}_1^\infty$, $a_n \in R$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (*) – числовой ряд.

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ – частичная сумма ряда.

Если $\exists \lim_{n\to\infty} S_n$ и конечен, то ряд (*) сходится и $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ называется суммой ряда. Если $\nexists \lim_{n\to\infty} S_n$ или $=\infty$, то ряд расходится.

$R_n = S - S_n$ – остаток ряда. Для сходящегося ряда $R_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Сходимость ряда:

– $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \{a_n = \alpha_n + i\beta_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(1)} + i \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(2)}$ сходится $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} (1) \text{ сходится} \\ (2) \text{ сходится} \end{cases}$

– Необходимый признак: если ряд (*) сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

– Признак Д'Аламбера: $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = p$

$p<1 \Rightarrow$ (*) сходится, $p>1 \Rightarrow$ (*) расходится, $p=1 \Rightarrow$?

– Признак Коши: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$; $q<1 \Rightarrow$ (*) сходится, $q>1 \Rightarrow$ (*) расходится

абсолютная сходимость ($\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$)

$\{f_n(z)\}_1^\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ (**) – функциональный ряд. $S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$

Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ при $z \in D$ сходится, то функциональный ряд сходится в области D (Если в каждой т. z области D функциональный ряд (**) становится сходящимся числовым рядом $\Rightarrow$ ряд (**) сходится в D).

$S(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z)$ – сумма сходящегося ряда. $R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)$

Сходящийся функциональный ряд (**) называется равномерно сходящимся в D, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon)$: при $n > N(\varepsilon)$ $|R_n(z)| < \varepsilon$.

Признак равномерной сходимости (Вейерштрасса):

Если ряд (**) сходится в D, $|f_k(z)| < a_k$, где $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходящийся числовой ряд $\Rightarrow$ ряд (**) равномерно сходится в D.

Док-во: $|R_n| = |f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \dots| \le |f_{n+1}(z)| + \dots <$
$< a_{n+1} + a_{n+2} + \dots < \varepsilon$ для $n > N(\varepsilon)$.

Свойства равномерно сходящихся рядов ($\sum_{k=1}^{\infty} f_n(z)$ равномерно сходится к $S(z)$):

1. $f_n(z)$ – непрерывные функции $\Rightarrow S(z)$ – непрерывная ф.
2. $f_n(z)$ – непрерывные ф. $\Rightarrow$ ряд можно почленно интегрировать по любому контуру l, лежащему в D:

$$\int_l S(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_l f_k(z)\,dz$$

3. $f_n(z)$ – аналитические ф. $\Rightarrow S(z)$ – аналитическая ф. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ ряд можно почленно дифференцировать: $\frac{d^n S(z)}{dz^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f_k(z)}{dz^k}$.

32. Степенные ряды. Теорема Абеля. Круг сходимости ряда, радиус сходимости.

Степенные ряды - это ряды вида $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ (*)

Теорема (Абеля). Если ряд (*) сходится в т. $z=z_1$, то он сходится в круге $|z-z_0|<|z_1-z_0|$ и в $\forall$ круге $|z-z_0|\le\rho<|z_1-z_0|$ ряд сходится равномерно.

$|z-z_0|<R$ - круг сходимости степенного ряда, R радиус сходимости: $R=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{|c_k|}{|c_{k+1}|}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|c_k|}}$

Для степенных рядов выполняются свойства 1-3 функцион. рядов.

Теорема (Тейлора). Аналитическую в $|z-z_0|<R$ ф. $f(z)$ можно разложить в сходящийся степенной ряд $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$, причем это разложение единственно. Такой ряд назыв. рядом Тейлора $c_k=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$.

33. Ряд Лорана. Теорема о разложении функции в ряд Лорана.

Рассмотрим ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{-n-1}|\cdot|z-z_0|^n}{|z-z_0|^{n+1}\cdot|c_{-n}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{-n-1}|}{|c_{-n}||z-z_0|}<1 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow |z-z_0|>\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|c_{-n-1}|}{|c_{-n}|}=r$ - область сходимости ряда

Ряд вида $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n}_{\text{правильная часть}}+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}}_{\text{главная часть}}$

назыв. рядом Лорана.

$r<|z-z_0|<R$ - область сходимости ряда Лорана.

Возможны случаи $r=0$ и/или $R=\infty$.

Пр: $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$, $z_0=0$, $D_1: |z|<1$, $D_2: 1<|z|<2$, $D_3: |z|>2$.

Теорема (Лорана). Ф. $f(z)$, аналитическую в кольце $r<|z-z_0|<R$ можно разложить в ряд Лорана $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$, причем единственным образом,

$$c_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{f(t)}{(t-z_0)^{k+1}}dt,\quad k=0,\pm1,\pm2\dots,$$ γ - окружность с центром z_0, целиком лежащая в кольце

т.к. $f^{(k)}(z_0)=\frac{k!}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{f(t)}{(t-z_0)^{k+1}}dt$.