1. Алгебраическая форма комплексного числа

Выражение $z=x+iy$ назыв. алгебраической формой комплексного числа. x назыв. вещественной частью числа z и обознач. $Re(z)$ или $Re\, z$, y назыв. мнимой частью z и обознач. $Im(z)$ или $Im\, z$.

Пр: $Re(1-2i)=1$, $Im(1-2i)=-2$

Если $y=Im\, z=0$, то $z=x$ явл. вещественным числом

Если $x=Re\, z=0$, $y\neq 0$, то $z=iy$ явл. чисто мнимым числом

Два комплексных числа z_1 и z_2 равны $\Leftrightarrow$ $Re\, z_1=Re\, z_2$ и $Im\, z_1=Im\, z_2$ одновременно.

Сопряженным с комплексным числом $z=x+iy$ назыв. комплексное число вида $\bar z=x-iy$.

Св-ва сопряжения: $\bar{\bar z}=z$, $\overline{z_1 z_2}=\bar z_1 \bar z_2$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar z_1}{\bar z_2}$.

Комплексным числом z назыв. выражение вида $z=x+iy$, где x и y — вещественные числа, i — символ, назыв. мнимой единицей.

Комплексное число $-x-iy=-z$ назыв. противоположным компл. числу $z=x+iy$. Их сумма равна т.к. нулевому комплексному числу $x+iy+(-x-iy)=0+i0$.

Для компл. чисел α, β, γ выполн. след. законы арифметики:

а) коммутативный (переместительный): $\alpha+\beta=\beta+\alpha$, $\alpha\beta=\beta\alpha$

б) ассоциативный (сочетательный): $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)=\beta+(\alpha+\gamma)$; $\alpha\beta\gamma=\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma=\beta(\alpha\gamma)$

в) дистрибутивный (распределительный): $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$.

Действия над компл. числами, записанными в алгебраической форме $\alpha=a+bi$, $\beta=c+di$:

$\alpha\pm\beta=(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$;

$\alpha\beta=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$;

$\alpha\bar\alpha=a^2+b^2$, $\alpha/\beta=\alpha\bar\beta/\beta\bar\beta=(a+bi)(c-di)/(c^2+d^2)=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$.

Пр. $z_1=-3+4i$, $z_2=5-i$, $z_1+z_2=2+3i$, $z_1-z_2=-8+5i$,

$z_1 z_2=-11+23i$, $z_2\bar z_2=26$, $z_1/z_2=-\frac{19}{26}+\frac{17}{26}i$.

Множество всех комплексных чисел с арифметич. операциями образует поле компл. чисел $\mathbb{C}$. Множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ явл. подмножеством множ. компл. чисел $\mathbb{C}$, т.е. $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Тригонометрическая и показательная формы.

Компл. число – это упорядоченная пара вещественных чисел (x, y): $z = x+iy \equiv M(x,y)$. Ось абсцисс – вещественная ось, ось ординат – мнимая ось. Плоскость XOY – компл. (гауссова) плоскость или просто плоскость z.

Компл. число $z = x+iy$ можно также изобразить вектором с проекциями x и y на координатные оси, который, таким образом, равен радиус-вектору т. z.

В полярных координатах:

– полярный радиус (или длина вектора) назыв. модулем компл. числа $z = x+iy$ и равен $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$.

– полярный угол φ назыв. аргументом компл. числа z $\varphi = \mathrm{Arg}\, z$.

Условие равенства двух компл. чисел z_1 и z_2 – равенство их модулей $(|z_1| = |z_2|)$ и аргументов $(\mathrm{Arg}\, z_1 = \mathrm{Arg}\, z_2)$.

Аргумент: определяется из формул $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ с точностью до слагаемого $2\pi k$: $\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Из множества значений аргумента особо выделяется главное значение $\arg z$, удовлетворяющее неравенству $-\pi < \arg z \leq \pi$.

При этом $\arg z = \begin{cases} \mathrm{arctg}\, y/x, & x > 0 \\ \mathrm{arctg}\, y/x + \pi, & x < 0, y \geq 0 \\ \mathrm{arctg}\, y/x - \pi, & x < 0, y < 0 \\ \pi/2 & x = 0, y > 0 \\ 3\pi/2 & x = 0, y < 0 \end{cases}$

Условие сопряжения двух чисел z и $\bar{z}$: $|z| = |\bar{z}|$, $\arg z = -\arg \bar{z}$.

Св-ва модуля: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, $|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$,

$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$.

$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ – тригонометрическая форма записи компл. числа.

По формуле Эйлера $(e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi)$:

$z = re^{i\varphi}$ – показательная форма записи

Пр. Представить z в тригонометрической форме:

$z = 1 - \sin\alpha + i\cos\alpha$, $0 < \alpha < \pi/2$

$|z| = \sqrt{(1-\sin\alpha)^2 + \cos^2\alpha} = \sqrt{2(1-\sin\alpha)}$, $\arg z = \mathrm{arctg}\, \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow z = \sqrt{2(1-\sin\alpha)}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\right)$

3. Умножение и деление комплексных чисел, записанных в различных формах

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

т.к. $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2))$.

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$z_1/z_2 = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)) =$$

$$= r_1/r_2\,(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

$$z_1/z_2 = r_1/r_2\, e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

4. Возведение в степень и извлечение корня из компл. числа

$$z^n = (x+iy)^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

$\Rightarrow$ Формула Муавра: $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$.

Пр: с помощью формулы Муавра выразить $\cos 3\varphi$ и $\sin 3\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$: $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$; $\sin 3\varphi = -4\sin^3\varphi + 3\sin\varphi$.

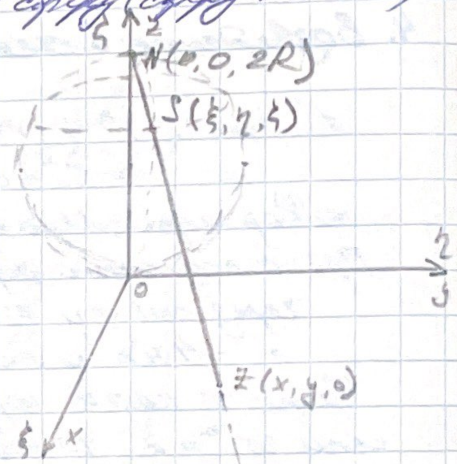
Число w назыв. корнем натуральной степени из числа $z \neq 0$, если $w^n = z$. $w = \sqrt[n]{z}$: пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ $\Rightarrow w^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Приравнивая вещественные составляющие левой и правой частей, находим $\rho^n = r$, а затем $n\theta = \varphi + 2\pi m = \arg z + 2\pi k$. Получаем $\rho = \sqrt[n]{r}$, $\theta = 1/n \operatorname{Arg} z = 1/n(\arg z + 2\pi k)$. Корень n-й степени из компл. числа имеет n различных значений при $k = 0, 1, \dots, n-1$: $w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\arg z + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\arg z + 2\pi k}{n}\right)$. Геометрически эти n значений изображаются вершинами правильного n-угольника с полярными координатами $(\sqrt[n]{r}, \frac{1}{n}(\arg z + 2\pi k))$.

5. Понятие расширенной комплексной плоскости. Сфера Римана. Формулы стереографической проекции.

Определим на компл. плоскости бесконечно удаленную т., координаты которой (одна или обе) – неограниченные величины, т.е. компл. числа вида $z = x + i\cdot\infty$, $z = \infty + iy$ или $z = \infty + i\cdot\infty$. Тогда $z = \infty$ (несобственное компл. число) считают единственной бесконечно удаленной точкой. Для несобственного компл. числа понятия вещ. и мним. части, аргумента не имеют смысла, $|\infty| = +\infty$.

Имеют смысл операции с компл. числом $z = \infty$ и собств. компл. числом a: $\frac{a}{\infty} = 0$, $\frac{\infty}{a} = \infty$, $\frac{a}{0} = \infty$. Операции $\infty \pm \infty$, $0\cdot\infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ объявл. лишенными смысла. Совокупность точек компл. плоскости и бесконечно удаленной т. назыв. расширенной плоскостью компл. переменного.

Чтобы получить геом. изображение числа ∞, прибегают к представлению компл. чисел точками сферы. Построим сферу (сферу Римана) радиуса r, касающуюся плоскости z в т. $z = 0$ и отметим т. N сферы, диаметрально противоположную началу координат O. Из т. $N(0,0,2r)$ сферы проведем луч в любую т. $z(x,y,0)$ плоскости (x,y) и отметим т. S пересечения данного луча и сферы. Эта т. $S(\xi,\eta,\zeta)$ явл. новым геом. представлением компл. числа z. В рез-те таких построений лучей между точками плоскости (x,y) и точками сферы устанавливается взаимно однозначное соответствие, назыв. стереографической проекцией, имеющей применение в картографии.



Точкам меридиана NSO соотв. т. луча Oz на плоскости (x,y), различным параллелям – круги на плоскости (x,y). Исключение составляет т. N (Северный полюс) – ей не соотв. никакое компл. число. Однако точкам сферы, достаточно близким к N соотв. т. z, сколь угодно отстоящие от начала координат, т.е. т. z сколь угодно большого модуля. Будем считать, что точке N соотв. единственная т. $z = \infty$.

Положим, что $z = \infty + i\infty$ (или $z = x + i\infty$, $z = \infty + iy$) будет при таком преобразовании переходить в т. $N(0,0,2r)$ и наоборот. Координаты точек на такой сфере (ξ,η,ζ) связаны формулой $\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - r)^2 = r^2$ или $\xi^2 + \eta^2 = \zeta(2r - \zeta)$. Из коллинеарности NZ и NS можно получить представление луча NSZ: $\frac{\xi - 0}{x - 0} = \frac{\eta - 0}{y - 0} = \frac{\zeta - 2r}{0 - 2r}$. Отсюда можно получить координаты точки плоскости через координаты точки сферы:

$x = \frac{2r\xi}{2r-\zeta}$, $y = \frac{2r\eta}{2r-\zeta}$. Составим $x^2+y^2 = \frac{4r^2(\xi^2+\eta^2)}{(2r-\zeta)^2} = \frac{4r^2\zeta}{2r-\zeta}$.
Тогда можно выразить координаты т. на сфере:

$$\xi = \frac{4r^2x}{x^2+y^2+4r^2},\ \eta = \frac{4r^2y}{x^2+y^2+4r^2},\ \zeta = \frac{2r(x^2+y^2)}{x^2+y^2+4r^2}.$$

Устремим $x \to \infty$, $y \to \infty$ (по отдельности или вместе), тогда $\xi \to 0$, $\eta \to 0$, $\zeta \to 2r$, а это и есть т. N.

6. Определение функции комплексного переменного. Однозначные и многозначные функции. Однолистные и многолистные функции.

Возьмем 2 экземпляра расширенной компл. плоскости: плоскость $z = x+iy$ и плоскость $w = u+iv$. Пусть на первой из них задано произвольное множество т. D, а на второй – множество т. G.

Говорят, что на множ. D задана функция $w = f(z)$, если каждой т. $z \in D$ поставлена в соответствие одна или несколько т. плоскости $w \in G$ (ф. назыв. однозначной или многозначной соотв.)

Множ. D назыв. областью определения ф. $f(z)$. Если каждая т. множ. E явл. значением ф. $f(z)$, то говорят, что E – область значений этой ф. или образ множ. D при отображении ф. $f(z)$ ($G = f(D)$). В этом случае говорят еще, что ф. $f(z)$ отображает D на E.

Положив $z = x+iy$, $w = u+iv$, получим $w = u+iv = f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$, где $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$ – вещественные ф. от переменных x, y, $(x,y) \in D$. Таким образом, задание ф. $f(z)$ равносильно заданию двух ф. двух действительных переменных $u(x,y)$ и $v(x,y)$.

Пр: $w = z^2$, $w = (x+iy)^2 = x^2-y^2+i2xy$, $u(x,y) = x^2-y^2$, $v(x,y) = 2xy$.

Если ф. $f(z)$ однозначна на множ. D и при этом двум различным т. D всегда соотв. различные т. E, то такое отображение назыв. взаимно однозначным или однолистным в D. В этом случае существует обратная ф. $z = g(w)$, отображающая множ. E на D. При этом $g(f(z)) = z$.

Пр.: ф. $w = z^2$ не однолистная, т.к. $z_1 = -1$, $w_1 = 1$, $z_2 = 1$, $w_2 = 1 \Rightarrow$ двум различным $z_1 \neq z_2$ соотв. одна т. $w = w_1 = w_2 = 1$.

7. Элементарные функции комплексного переменного:

e^z: $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = u + iv$ $x, y, u, v \in R$

ф. определена при $z \in \mathbb{C}$

$\arg w = y + 2\pi k$, $|w| = e^x$

$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2}$; $(e^z)^m = e^{zm}$, $m \in N$

Пр: $e^{\pi i} = -1$, $e^{2+3i} = e^2(\cos 3 + i\sin 3)$, $Re\,w = e^2\cos 3$, $Im\,w = e^2\sin 3$

$\forall z \to !w$ (однозначная);

$z_1 = \pi i$, $z_2 = 3\pi i$, $w_1 = w_2 = -1 \Rightarrow$ неоднолистная ф.

$w = e^z$ - периодическая ф. с периодом $T = 2\pi i$;

$e^{z+2\pi i} = e^x(\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)) = e^x(\cos y + i\sin y)$.

$\sin z, \cos z, tg\, z, ctg\, z$:

$\sin z, \cos z$ – периодические, $T = 2\pi$;

$tg\, z, ctg\, z$ – периодические, $T = \pi$

$\sin(z+2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}}{2i} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z$

w однозначная, но не однолистная

$\begin{cases} e^{iz} = \cos z + i\sin z \\ e^{-iz} = \cos z - i\sin z \end{cases} \Rightarrow \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$; $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

$tg\, z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})}$; $ctg\, z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\,\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}$.

$\sin z, \cos z$ определены при $z \in \mathbb{C}$, $tg\, z$, $ctg\, z$ при $z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ и πk соотв.

$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$*; $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$;

$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$

Пр: $\cos 2i = (e^2 + e^{-2})\cdot\frac{1}{2} = ch\, 2$; $\sin(1-i) = \frac{1}{2i}(e^{i(1-i)} - e^{-i(1-i)}) =$

$= \frac{1}{2i}(e^{i+1} - e^{-i-1}) = \frac{1}{2i}(e(\cos 1 + i\sin 1) - e^{-1}(\cos(-1) + i\sin(-1))) =$

$= \frac{1}{2i}(e\cos 1 - \frac{1}{e}\cos 1 + i(e\sin 1 + \frac{1}{e}\sin 1)) = \frac{1}{i}(\cos 1\cdot sh\, 1 + i\sin 1\cdot ch\, 1) =$

$= \sin 1\cdot ch\, 1 - i\cos 1\, sh\, 1$.

*$\sin^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{4}(e^{2iz} - 2 + e^{-2iz})$;

$\cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(e^{2iz} + 2 + e^{-2iz})$

$\Rightarrow \sin^2 z + \cos^2 z = 1$, ч.т.д.

$sh\, z, ch\, z, th\, z, cth\, z$:

$sh\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$; $ch\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$; $th\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$; $cth\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$

$sh\, z, ch\, z$ определены при $z \in \mathbb{C}$;

$th\, z$ определена z: $ch\, z \neq 0$, $cth\, z$ – z: $sh\, z \neq 0$

$sh\, z, ch\, z$ – периодические $T = 2\pi i$: $\sin(z+2\pi i) = \frac{e^{z+2\pi i} - e^{-z-2\pi i}}{2} =$

$= \frac{e^z - e^{-z}}{2} = sh\, z$; $th\, z, cth\, z$, $T = \pi i$: $th(z+\pi i) =$

$= \frac{e^{z+\pi i} - e^{-z-\pi i}}{e^{z+\pi i} + e^{-z-\pi i}} = \frac{-e^z + e^{-z}}{-e^z - e^{-z}} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = th\, z$.