

Вопросы к экзамену по курсу  
«Теория функций комплексного переменного»  
(3 семестр, 2023/2024 уч.год)

1. Алгебраическая форма комплексного числа. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Тригонометрическая и показательная формы.
2. Умножение и деление комплексных чисел, записанных в различных формах.
3. Возведение в степень и извлечение корня из комплексного числа.
4. Понятие расширенной комплексной плоскости. Сфера Римана. Формулы стереографической проекции.
5. Определение функции комплексного переменного. Однозначные и многозначные функции. Однолистные и многолистные функции.
6. Элементарные функции комплексного переменного:  $e^z$ , тригонометрические функции, гиперболические функции.
7. Элементарные функции комплексного переменного: логарифм.
8. Элементарные функции комплексного переменного: общая степенная и общая показательная функции, обратные тригонометрические функции.
9. Предел и непрерывность функции. Производная.
10. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции комплексного переменного (с доказательством).
11. Аналитические функции. Связь аналитических функций с гармоническими.
12. Восстановление аналитической функции по ее вещественной или мнимой части.
13. Римановы поверхности.
14. Геометрический смысл аргумента и модуля производной функции комплексного переменного.
15. Конформные отображения. Определения, свойства. Необходимые и достаточные условия конформности.
16. Конформные отображения: линейная функция  $w = az + b$ .
17. Конформные отображения: инверсия  $w = \frac{1}{z}$ .
18. Конформные отображения: дробно-линейная функция  $w = \frac{az + b}{cz + d}$ .

19. Конформные отображения: общий вид дробно-линейных функций, переводящих верхнюю полуплоскость на единичный круг, и переводящих единичный круг на единичный круг (с выводом формул).
20. Конформные отображения: целая степенная функция  $w = z^n$ .
21. Конформные отображения: радикал  $w = \sqrt[n]{z}$ , точки разветвления.
22. Конформные отображения: показательная функция  $w = e^z$ , логарифмическая функция  $w = \operatorname{Ln} z$ .
23. Конформные отображения: функция Жуковского  $w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$ .
24. Определение интеграла от функции комплексного переменного. Основные свойства. Теорема об оценке.
25. Интегральная теорема Коши.
26. Следствия интегральной теоремы Коши.
27. Интегральная формула Коши.
28. Производные высших порядков от функции комплексного переменного. Пример.
29. Функциональные ряды, равномерная сходимость, свойства сумм функциональных рядов (без док-в).
30. Степенные ряды. Теорема Абеля. Круг сходимости ряда, радиус сходимости. Теорема Тейлора. Без док-в.
31. Ряд Лорана. Теорема о разложении функции в ряд Лорана.
32. Аналитическое продолжение функции. Пример построения с помощью степенных рядов.
33. Ряд Лорана. Теорема о разложении функции в ряд Лорана (формулировка, доказательство, пример).
34. Нули аналитической функции. Примеры.
35. Изолированные особые точки функции, их классификация (через предел). Примеры.
36. Изолированные особые точки функции, их классификация (через разложение в ряд Лорана). Без док-ва, примеры.
37. Бесконечно удаленная особая точка. Классификация, примеры.
38. Вычеты функции в конечных особых точках. Основная теорема о вычетах.

39. Приложение теории вычетов к вычислению интегралов: определенный интеграл вида  $\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx$  (вывод формулы, пример).
40. Приложение теории вычетов к вычислению интегралов: несобственный интеграл вида  $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$  (вывод формулы (идея), пример).

### Список must know

- Определение и формы комплексных чисел, действия над ними.
- Область.
- Определение функции комплексного переменного.
- Понятие однозначности/многозначности, однолиственности/многолиственности функции.
- Аналитичность функции. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости.
- Определение конформного отображения.
- Интегральная теорема Коши. Интегральная формула Коши.
- Ряд Лорана.

### Литература

1. Алешков Ю.З. Лекции по теории функций комплексного переменного. — СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та. 1999. — 196 с.
2. Алешков Ю.З., Смышляев П.П. Теория функций комплексного переменного и ее приложения. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та. 1986. — 248 с.
3. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
4. Евграфов М.А. Аналитические функции. — М.: Наука, 1965. — 424 с.
5. Маркушевич А.И., Маркушевич Л. А. Введение в теорию аналитических функций. — М.: Просвещение. 1977. — 320 с.
6. Морозова В.Д. Теория функций комплексной переменной. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2009. — 520 с.
7. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. — М.: ГИТТЛ, 1957. — 335 с.
8. Свешников А.Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. — М.: Наука. 1967. — 304 с.
9. Старков В.Н., Степенко Н.А. Теория функций комплексной переменной. — СПб: СОЛО. 2007. — 103 с.