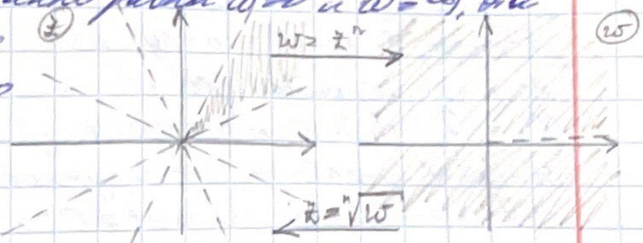
2.2. Конформные отображения: радикал $w=\sqrt[n]{z}$, точки разветвления.

Рассмотрим ф. $w=\sqrt[n]{z}$, обратную степенной ф. $z=w^n$. Примем, что $w=\infty$ при $z=\infty$. Во всех точках расширенной компл. плоскости (z), кроме т. $z=0$ и $z=\infty$ (в которых эта ф. соответственно равна $w=0$ и $w=\infty$), эта ф. n-значна и все ее n различных значений для каждого фиксированного $z=re^{i\varphi}$ ($\neq 0$ и ∞) дает формула:

$$w=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\arg z+2\pi k}{n}}=\sqrt[n]{r}\cdot e^{i\frac{\arg z}{n}}\cdot e^{i\frac{2\pi k}{n}},$$

$k=\overline{0,n-1}$

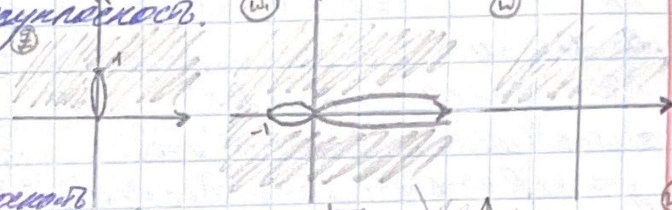


Пр: Найти однолистное и конформное отображение верхней полуплоскости с разрезом $[0,i]$ на верхнюю полуплоскость.

$w_1=z^2$ — плоскость с разрезом от -1 до $+\infty$; $w_2=w_1+1$;

$w_3=\sqrt{w_2}$ $k=0$ — верхняя, $k=1$ — нижняя полуплоскость

Ответ: $w=\sqrt{z^2+1}$.



Угол однолистности ветви:

$w_k=\sqrt[n]{r}\cdot e^{\frac{\varphi}{n}i}\cdot e^{\frac{2\pi k}{n}i}$, $r=|z|$, $\varphi=\arg z$,

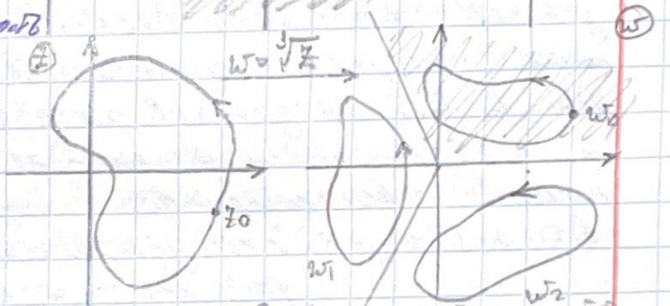
$w_{k+1}=w_k\cdot e^{\frac{2\pi}{n}i}$ $k=\overline{0,n-1}$

Точка при обходе вокруг которой осуществляется переход с одной ветви многозначной ф. на другую ветвь, называется точкой разветвления.

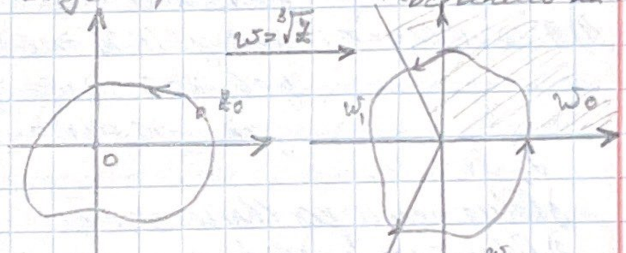
Для $w=\sqrt[n]{z}$ это т. $z=0$.

$w=\sqrt[n]{z}$, $w_k=\sqrt[n]{r}\cdot e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}$ — однолистна;

$\exists w'(z)\neq 0$ для $z\neq 0$, $z\neq\infty$ => каждая ветвь w_k — конформное отображение компл. плоскости (z) на сектор в плоскости (w).



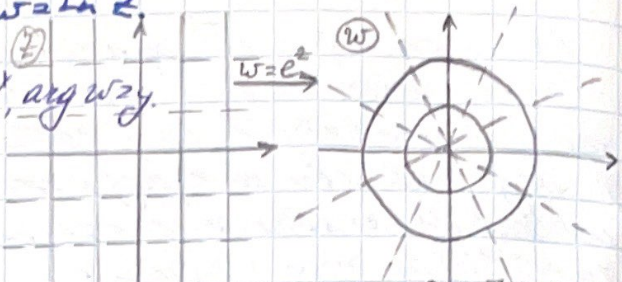
$\Delta\arg z=0$ при обходе замкнутой кривой => остаемся на той же ветви



$\Delta\arg z=2\pi$ => переход на следующую (предыдущую) ветвь

Угол с вершиной в $z=0$ уменьшается в n раз.

23. Конформные отображения: показательная функция $w=e^z$, логарифмическая функция $w=\text{Ln}\, z$.



прямоугольная сетка → полярная сетка

$w=e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$, $|w|=e^x$, $\arg w=y$.

(z): $y=C \to$ (w): $w=e^x(\cos C+i\sin C)$

x - любое, C - const ⇒ w - луч из начала координат под ∠C.

(z): $x=D \to$ (w): $w=e^D(\cos y+i\sin y)$

D = const, y - любое ⇒ w - окружность $R=e^D$.

$z=\infty \to w=\infty$, $w'=e^z\neq 0$

Для конформности на плоскости (z) рассмотрим горизонтальные полосы y_1-y_2 шириной меньше 2π. Если $y_2=y_1+2\pi k$, $w_2=e^{x+iy_2}=e^{x+i(y_1+2\pi k)}=e^{x+iy_1}=w_1$ ⇒ нет однолистности.

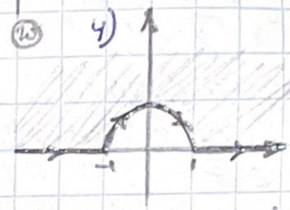
Пр. 1) $w=e^z$

1) D: $0<\text{Im}\, z<\pi$: $y=0,\ x\in R$ ⇒

⇒ $w=e^x(\cos 0+i\sin 0)=e^x>0$ $\left(\begin{smallmatrix}u>0\\ v=0\end{smallmatrix}\right)$

$y=\pi,\ x\in R$ ⇒ $w=e^x(\cos\pi+i\sin\pi)=-e^x<0$ $\left(\begin{smallmatrix}u<0\\ v=0\end{smallmatrix}\right)$

полоса (z) → верхняя полуплоскость (w)



2) D: $0<\text{Im}\, z<2\pi$: $y=0,\ x\in R$ ⇒ $w=e^x$ $\left(\begin{smallmatrix}u>0\\ v=0\end{smallmatrix}\right)$

$y=2\pi,\ x\in R$ ⇒ $w=e^x(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=e^x$ $\left(\begin{smallmatrix}u>0\\ v=0\end{smallmatrix}\right)$

полоса (z) → вся плоскость (w)

3) D: $x<0,\ 0<y<\pi$: $x=0,\ y\in(0;\pi)$ ⇒ $w=e^0(\cos y+i\sin y)=\cos y+i\sin y$

$y=0,\ x<0$ ⇒ $w=e^x\in(0;1)$

$y=\pi,\ x<0$ ⇒ $w=-e^x\in(-1;0)$

4) D: $x>0,\ 0<y<\pi$: $x=0,\ y\in(0;\pi)$ ⇒ $w=\cos y+i\sin y$

$y=0,\ x>0$ ⇒ $w=e^x\in(1;\infty)$

$y=\pi,\ x>0$ ⇒ $w=-e^x\in(-\infty;-1)$

2) ?w:

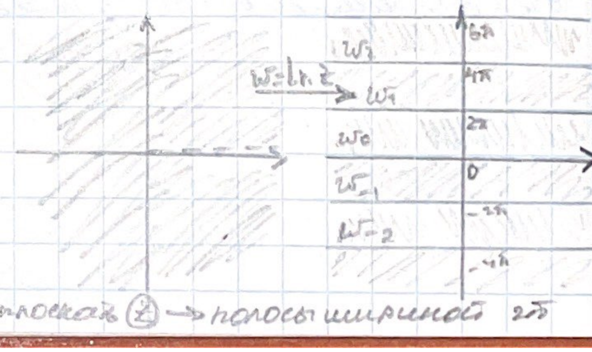
1) Сдвиг полосы на 1 влево: $w_1=z-1$

2) Поворот на $\frac{\pi}{2}$ против ч.с.: $w_2=w_1\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$

3) Полоса ширины 1 → ширины π: $w_3=\pi w_2$

4) Полоса шириной π → верхняя полуплоскость:

$w_4=e^{w_3}$ ⇒ $w=e^{\pi i(z-1)}$.



$w=\text{Ln}\, z$ - ф. обратная к $w=e^z$

многозначная ф. ⇒ берем однозначные ветви $w_k=\ln|z|+i\arg z+2\pi k i$, $k=0,\pm1,\pm2,\dots$ $z=0$ - т. разветвления (аналогично радикалу)

плоскость (z) → полосы шириной 2π

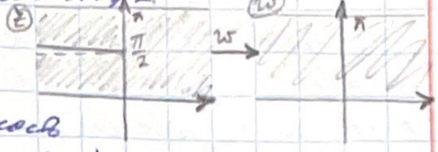
$\exists w'(z) \neq 0$ для $z \neq 0$, $z \neq \infty$. Для $z=0$ и $z=\infty$: $\nexists\, Ln(0)=\infty$, $Ln(\infty)=\infty$.

Пр: 1) $w = Ln\, z$ ($w_k = ln_k\, z$) всю плоскость → полосу (горизонт) шириной 2π

$z_0 = i \rightarrow w_0 = \frac{5\pi}{2}i$; $ln_k\, z = ln|z| + i\arg z + i\cdot 2\pi k$

$ln_k\, i = \underbrace{ln\, 1}_{0} + i\cdot\frac{\pi}{2} + i\cdot 2\pi k = \frac{5\pi}{2}i \Rightarrow k=1 \Rightarrow w = ln_1 z$

2) ? w: однолистное и конформное отображение полосы с разрезом → полосу без разреза:



1) $w_1 = e^z$: полоса → верхняя полуплоскость

разрез: $x<0$, $y=\frac{\pi}{2}$ → разрез на мнимой оси $(0;1)$

2) $w_2 = \sqrt{w_1^2+1}$ — без разреза

3) $w_3 = ln\, w_2$ $(k=0)$ $\Rightarrow w = ln\sqrt{e^{2z}+1}$

24. Конформные отображения: функция Жуковского $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

Ф. $w = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ (1) $w' = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$ — конечна и $\neq 0$ во всех т. плоскости (z), кроме т. $z=0, \pm 1$, в силу чего отображение конформно в плоскости (z), исключая эти 3 точки. Установим условие однолистности отображения. Пусть $z_1 \neq z_2$, но $w_1 = w_2$, т.е. $\frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right) = \frac{1}{2}\left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right) \Leftrightarrow$
$\Rightarrow (z_1 - z_2)\left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right) = 0 \Rightarrow z_1 z_2 = 1$. Следовательно, отображение будет однолистным в любой области, не содержащей никаких двух точек, связанных равенством $z_1 z_2 = 1$. Этому условию удовлетворяют, в частности, круг $|z|<1$ и внешность круга $|z|>1$. Пусть $z = re^{i\varphi}$, $w = u + iv \Rightarrow$ в (1): $u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi$, $v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi$. Рассмотрим области $|z|<1$ и $|z|>1$.

1. $|z|<1$: $|z|=r$, $0<r<1 \xrightarrow[(1)]{w}$ софокусные эллипсы, фокусы которых находятся в точках $(\pm 1, 0)$. w однолистно и конформно отображает круг $|z|<1$ на всю плоскость w с разрезом вдоль вещественной оси от т. $w=-1$ до $w=1$. При этом верхняя полуокружность переходит в нижний берег разреза, а нижняя полуокружность — в верхний берег. Верхний единичный полукруг $|z|<1$, $Im\, z>0$ w отображает на нижнюю полуплоскость $Im\, w<0$, а нижний полукруг $|z|<1$, $Im\, z<0$ — на верхнюю полуплоскость $Im\, w>0$.

2. $|z|>1$: $|z|=r$, $1<r<+\infty$. Аналогично, эти окружности отображаются w на те же самые эллипсы, но проходимые в положительном направлении. При $r \to 1+0$ эти эллипсы вырождаются в разрез $[-1;1]$ вещественной оси и, а при $r \to +\infty$ эллипсы, округляясь, увеличиваются и заполняют всю плоскость (w). Таким образом, ф. $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ однолистно и конформно отображает область $|z|>1$ на всю плоскость (w) с разрезом вдоль вещественной оси от $w=-1$ до $w=1$. При этом верхний полукруг отображается на верхнюю полуплоскость, а нижний полукруг — на нижнюю полуплоскость.

Обратная к ф. Жуковского ф. $w = z + \sqrt{z^2-1}$ двузначна, что обусловлено двузначностью квадратного корня. Каждую т. z она отображает в 2 т. w_1 и w_2, связанные условием $w_1 w_2 = 1$. Легко показать, что т. $z = \pm 1$ будут т. разветвления этой ф. Таким образом, в любой области, не содержащей замкнутых кривых, обходящих лишь одну из этих точек, можно выделить две однозначные ветви обратной ф. Этому условию, в частности, удовлетворяет вся плоскость z с разрезом вдоль отрезка $[-1; 1]$ вещественной оси. Ветви обратной ф. однолистно отображают плоскость (z) с указанным разрезом либо на круг $|w| < 1$, либо на круг $|w| > 1$ и аналитичны.

25. Определение интеграла от функции комплексного переменного. Основные свойства. Теорема об оценке

$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, l — кусочно-гладкая линия с началом в т. $z_0 = a$ и концом в т. $z = b$, целиком лежащая в области D. Задание начала и конца ориентирует линию l, т.е. устанавливает на ней положительное направление. Линия l может быть незамкнутой или замкнутой (тогда $z_n = z_0$).

Непрерывная кривая назыв. кривой Жордана, если отображение взаимно однозначно, за исключением, может быть, одной точки на кривой, в которую могут отображаться концы отрезка $[a, b]$ (в таком случае кривая замкнута). Другими словами, кривая Жордана — непрерывная кривая без самопересечений. Кривая Жордана назыв. гладкой, если в каждой т. существует касательная (отображение $z(t)$ — непрерывно дифференцируемо, т.е. $x, y \in C^1$, причем $z'(t) \neq 0$)

Разобьем l на n дуг в направлении от a к b точками $z_1, \dots, z_{n-1}$, где $z_k = x_k + iy_k$. Обозн. $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$; $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, $k = 1, \dots, n$. Δz_k — вектор из z_{k-1} в z_k, $|\Delta z_k|$ — его длина. $t_k = \xi_k + i\eta_k$.

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} (u(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k) + i\sum_{k=1}^{n} (v(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k).$$

При $\max|\Delta z_k| \underset{n\to\infty}{\to} 0$ $u(x,y), v(x,y) \to$ конечн. предел

$$\lim_{n\to\infty} (\text{правая часть}) = \int_l u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_l v(x,y)dx + u(x,y)dy.$$

криволинейный интеграл II рода

$$\lim_{\substack{\max|\Delta z_k| \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta z_k = \int_l f(z)dz = \int_l u\,dx - v\,dy + i\int_l v\,dx + u\,dy.$$

$l: z(s) = x(s) + iy(s)$, $s_1 < s < s_2$: $\displaystyle\int_l f(z)dz = \int_{s_1}^{s_2} f(z(s))z'(s)ds.$

Свойства контурных интегралов:

1. $\oint_l (f_1+f_2)dz = \oint_l f_1 dz + \oint_l f_2 dz$
2. $\oint_l a f(z) dz = a \oint_l f(z) dz, \ a \in \mathbb{C}$
3. $\int_{l^-} f(z)dz = -\int_l f(z)dz$
4. $\oint_{l_1 \cup l_2} f(z)dz = \oint_{l_1} f(z)dz + \int_{l_2} f(z)dz$
5. Теорема об оценке: имеет место оценка

$$\left|\int_l f(z)dz\right| \le \int_l |f(z)|\cdot|dz| \le M\lambda,$$ где $M = \max |f(z)|$ на l, λ - длина l

Док-во:

$$\left|\sum_{k=1}^n f(t_k)\Delta z_k\right| \le \sum_{k=1}^n |f(t_k)|\cdot|\Delta z_k| \le M\cdot \sum_{k=1}^n |\Delta z_k| \le M\cdot\lambda$$

$$\left|\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f(t_k)\Delta z_k\right| = \left|\int_l f(z)dz\right| \le M\lambda$$

Пр: $\oint_{|z-a|=R} (z-a)^n dz \ominus$ окружность $|z-a|=R$ обходится против часовой стрелки 1 раз, $n \in \mathbb{Z}$

$z = a + Re^{i\varphi}, \ 0 \le \varphi \le 2\pi \Rightarrow dz = Rie^{i\varphi}d\varphi$

$\ominus \int_0^{2\pi} R^n e^{in\varphi}\cdot Rie^{i\varphi}d\varphi$

1) $n=-1$: $\ominus \oint_{|z-a|=R} \frac{1}{z-a}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{i\varphi}}\cdot Rie^{i\varphi}d\varphi = \int_0^{2\pi} i\,d\varphi = 2\pi i$

2) $n \ne -1$: $\ominus \oint_{|z-a|=R} (z-a)^n dz = \int_0^{2\pi} R^{n+1} i e^{i(n+1)\varphi} d\varphi = iR^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi}d\varphi =$

$= iR^{n+1}\frac{1}{i(n+1)}e^{i(n+1)\varphi}\Big|_0^{2\pi} = \frac{R^{n+1}}{n+1}(\underbrace{e^{i(n+1)2\pi}}_{=1} - \underbrace{e^0}_{=1}) = 0.$

$\Rightarrow \oint_{|z-a|=R} (z-a)^n dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=-1 \\ 0, & n \ne -1, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$ Если окружность обходится k раз, то $2\pi i k$

26. Интегральная теорема Коши.

Теорема. Пусть $f(z)$ - аналитическая и однозначная функция в односвязной области D. Пусть l — замкнутая кусочно-гладкая кривая Жордана, целиком лежащая в области D. Тогда $\oint_l f(z)dz = 0$.

Док-во: Используем формулу Грина - Остроградского:

$\int_l Pdx + Qdy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$ (*), где l ограничивает G

Тогда $\oint_l f(z)dz = \int_l \overset{P}{u}dx \overset{Q}{- v}dy + i\int_l \overset{P}{v}dx + \overset{Q}{u}dy = \iint_G \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy +$

$+ i\iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy =$ (условие Коши - Римана) $= 0$.

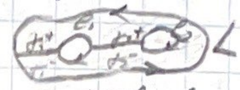
Пр: $\oint_l z\sin^2 z\,dz$, $l: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ - замкнутая кривая $\Rightarrow$

$\Rightarrow \oint_l z\sin^2 z\,dz = 0.$

27. Следствия интегральной теоремы Коши.

1) Обобщение теоремы Коши: пусть $f(z)$ – аналитическая и однозначная в односвязной области D. Пусть L – граница D, L – замкнутая кусочно-гладкая кривая Жордана. Пусть $f(z)$ непрерывна на L. Тогда $\oint\limits_L f(z)dz = 0$.

2) Теорема Коши для многосвязной области: пусть $f(z)$ – аналитическая однозначная ф. в многосвязной области D. Пусть $f(z)$ непрерывна на границе области D. Пусть граница D состоит из контура L и контуров l_i, лежащих внутри L. Тогда $\oint\limits_C f(z)dz = 0$. (обходим границу в положительном направлении)



$C = L \cup l_1 \cup l_2 \cup \dots$

Док-во: $\tilde{C} = L + \gamma_1^+ + l_1 + \gamma_2^+ + l_2 + \gamma_2^- + \gamma_1^-$

$\Rightarrow D$ – односвязная область с границей $\tilde{C}$ $\Rightarrow$ выполняется условие интегральной теоремы Коши $\Rightarrow \oint\limits_{\tilde{C}} f(z)dz = 0$.

$$\oint\limits_{\tilde{C}} f(z)dz = \oint\limits_L f\,dz + \oint\limits_{l_1} f\,dz + \oint\limits_{l_2} f\,dz + \int\limits_{\gamma_1^+} f\,dz + \int\limits_{\gamma_1^-} f\,dz + \int\limits_{\gamma_2^+} f\,dz + \int\limits_{\gamma_2^-} f\,dz = 0 \Rightarrow \oint\limits_L f(z)dz + \oint\limits_{l_1} f(z)dz + \oint\limits_{l_2} f(z)dz = 0.$$ ч.т.д.

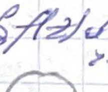
3) Теорема для составного контура: пусть $f(z)$ – аналитическая и однозначная функция в многосвязной области D. Пусть $f(z)$ непрерывна на границе области D. Пусть граница D состоит из контура L и контуров l_i, лежащих внутри L. Тогда

$$\oint\limits_L f(z)dz = \oint\limits_{l_1} f(z)dz + \dots + \oint\limits_{l_n} f(z)dz$$

(все контуры обходятся против часовой стрелки).

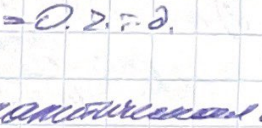
Док-во: из док-ва предыдущей теоремы: $\oint\limits_C f(z)dz = \oint\limits_L + \sum\limits_{k=1}^{n} \oint\limits_{l_k} f(z)dz = 0 \Rightarrow \oint\limits_L f(z)dz = -\sum\limits_{k=1}^{n} \oint\limits_{l_k}^{c} f(z)dz = \sum\limits_{k=1}^{n} \oint\limits_{l_k} f(z)dz.$ ч.т.д.

Частный случай – кольцо: $\oint\limits_L f(z)dz = \oint\limits_l f(z)dz$



4) Теорема о независимости интеграла от пути интегрирования.

Интеграл от аналитической в области D ф. $f(z)$ зависит только от начальной и конечной точки контура.



Док-во: $l = \gamma_1^+ + \gamma_2^- \Rightarrow \oint\limits_l f(z)dz = \int\limits_{\gamma_1^+} f\,dz + \int\limits_{\gamma_2^-} f\,dz = 0$

$= \int\limits_{\gamma_1^+} f\,dz - \int\limits_{\gamma_2^+} f\,dz = 0 \Rightarrow \int\limits_{\gamma_1^+} f\,dz = \int\limits_{\gamma_2^+} f\,dz$

Замечание к теоремам (интегральная теорема Коши, обобщенная интегральная теорема Коши, теорема Коши для многосвязной области, теорема для составного контура): $f(z)$ – аналитическая в D и непрерывна на границе
непрерывная