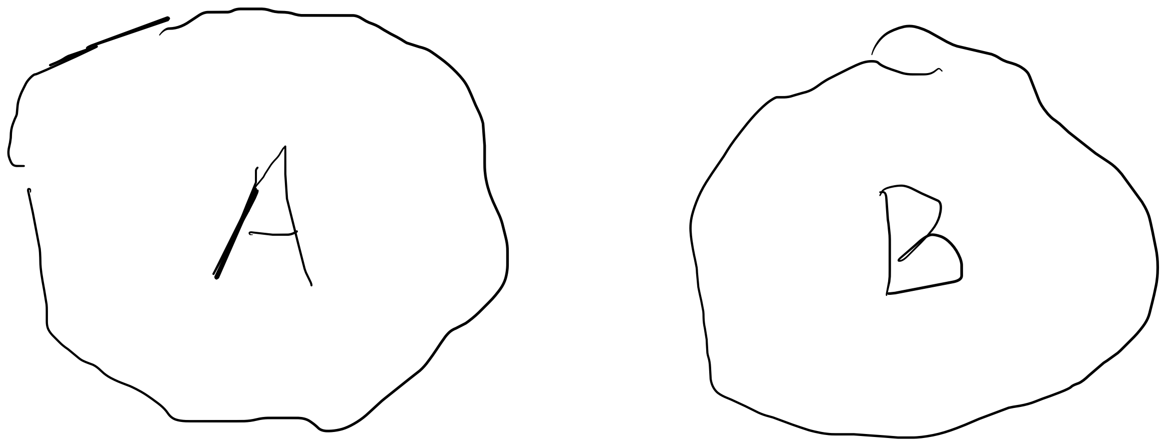
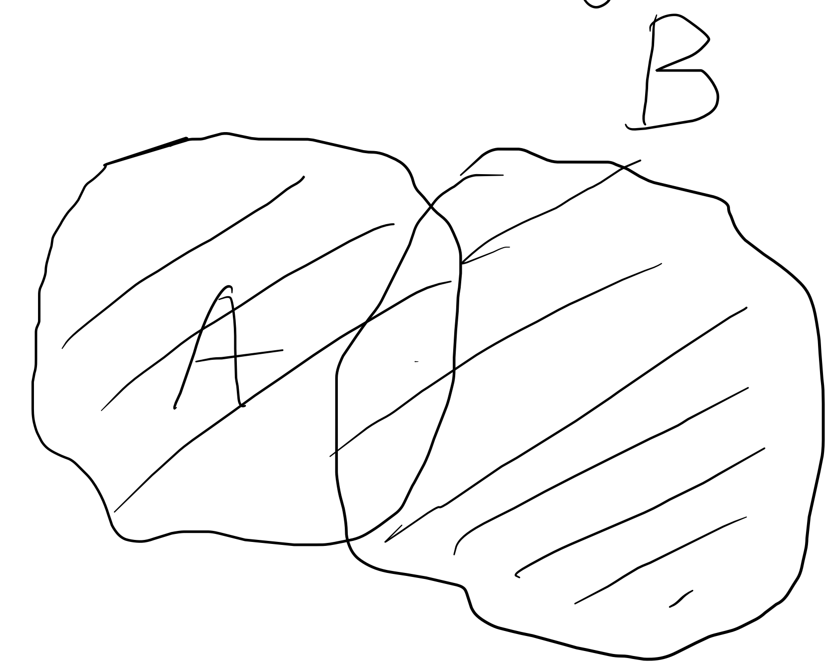
Диференциално смятане на функция на една променлива

Множества. Изображения. Функции

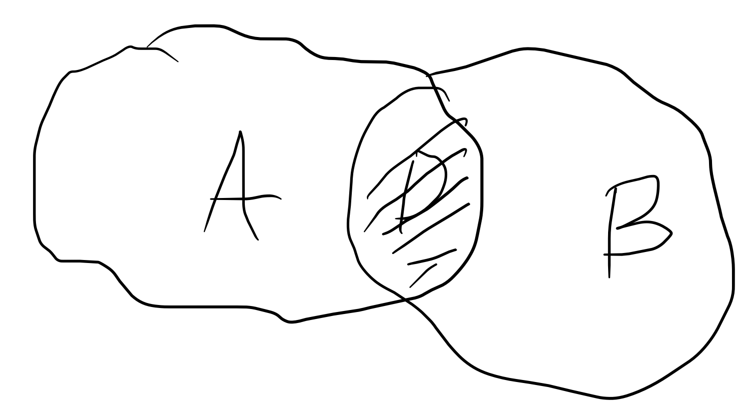


$A \cup B = C$



$\cup$ – обединение (логически сума)
съдържа елементите на <u>поне</u> едно от двете множества (C съдържа елем. на A <u>или</u> B)

$\cap$ – сечение (логическо произведение)
съдържа елементите на A <u>и</u> B



$D = A \cap B = AB$

комутативен закон $A \cap B = B \cap A$; $A \cup B = B \cup A$

асоциативен закон $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

дистрибутивен закон $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

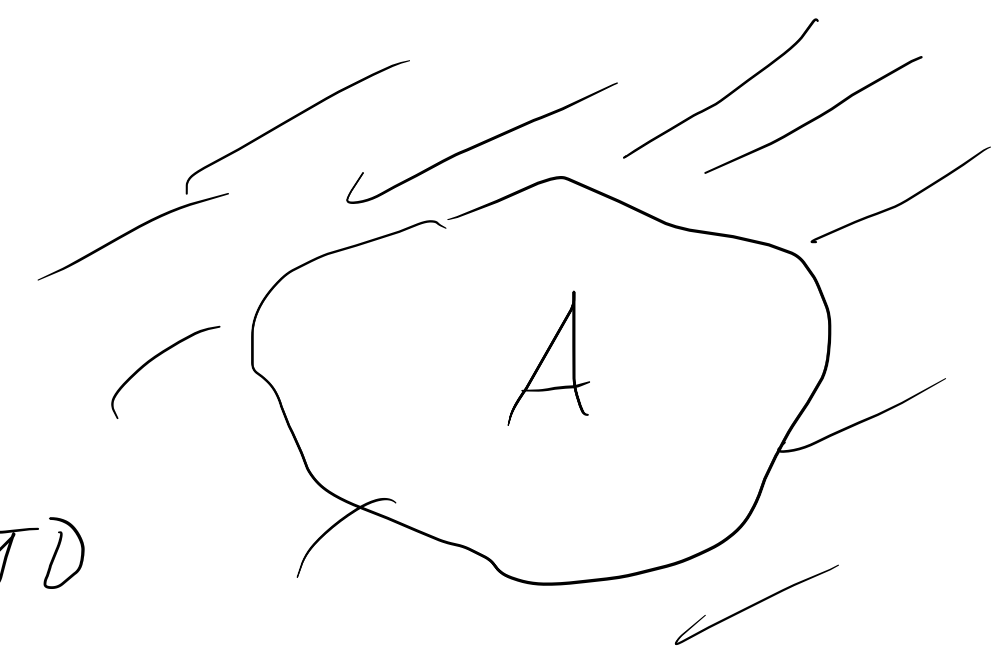
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

брой на елементите в едно множ. се нарича мощност $|A|$

$\emptyset$ - празно множ.

$A \cup \emptyset = A$

$A \emptyset = \emptyset$



закони на де Морган

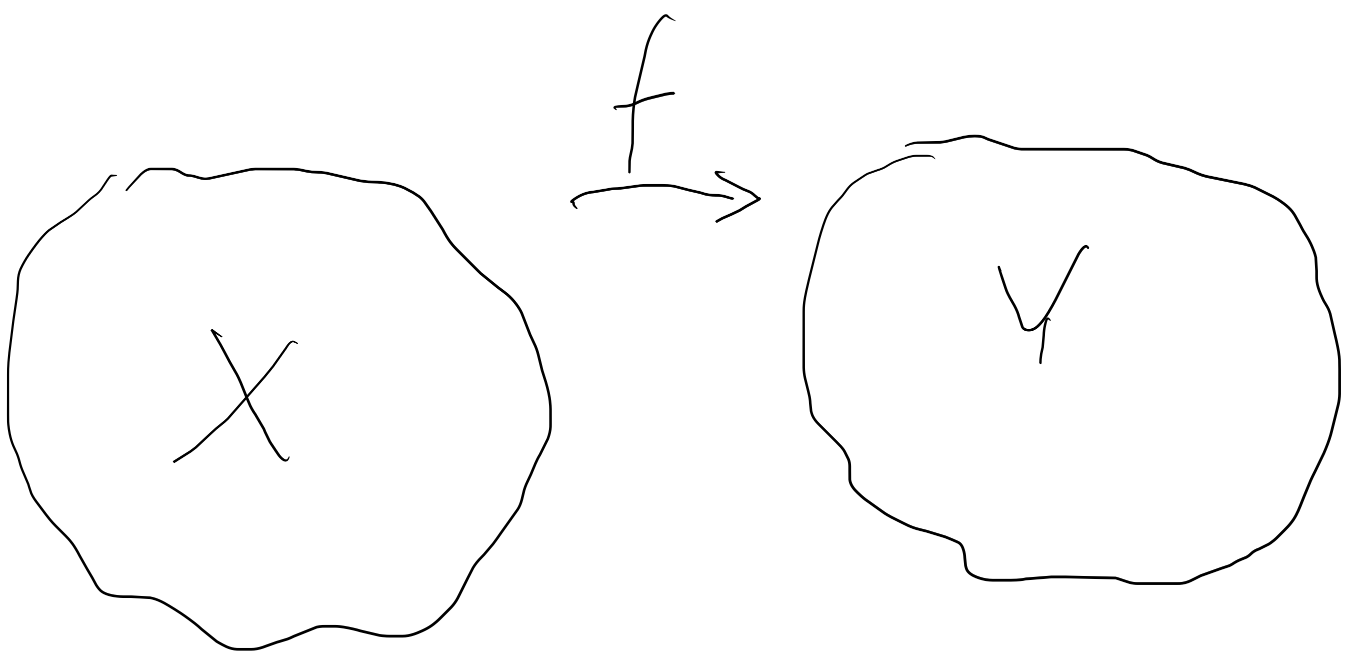
допълнение $\bar{A}$ - елем., които не принадлежат на A

$A \cup B = C \quad \overline{C} = \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$A \cap B = D \quad \overline{D} = \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$f : X \to Y$

изображение



$x_1 \neq x_2 \in X$

$f(x_1) \neq f(x_2)$

$y_1 \in Y \quad y_2 \in Y$

— изображение на м-вото X "в" Y

(инекция)

$\forall\, y \in Y \ \exists\, x \in X$ и

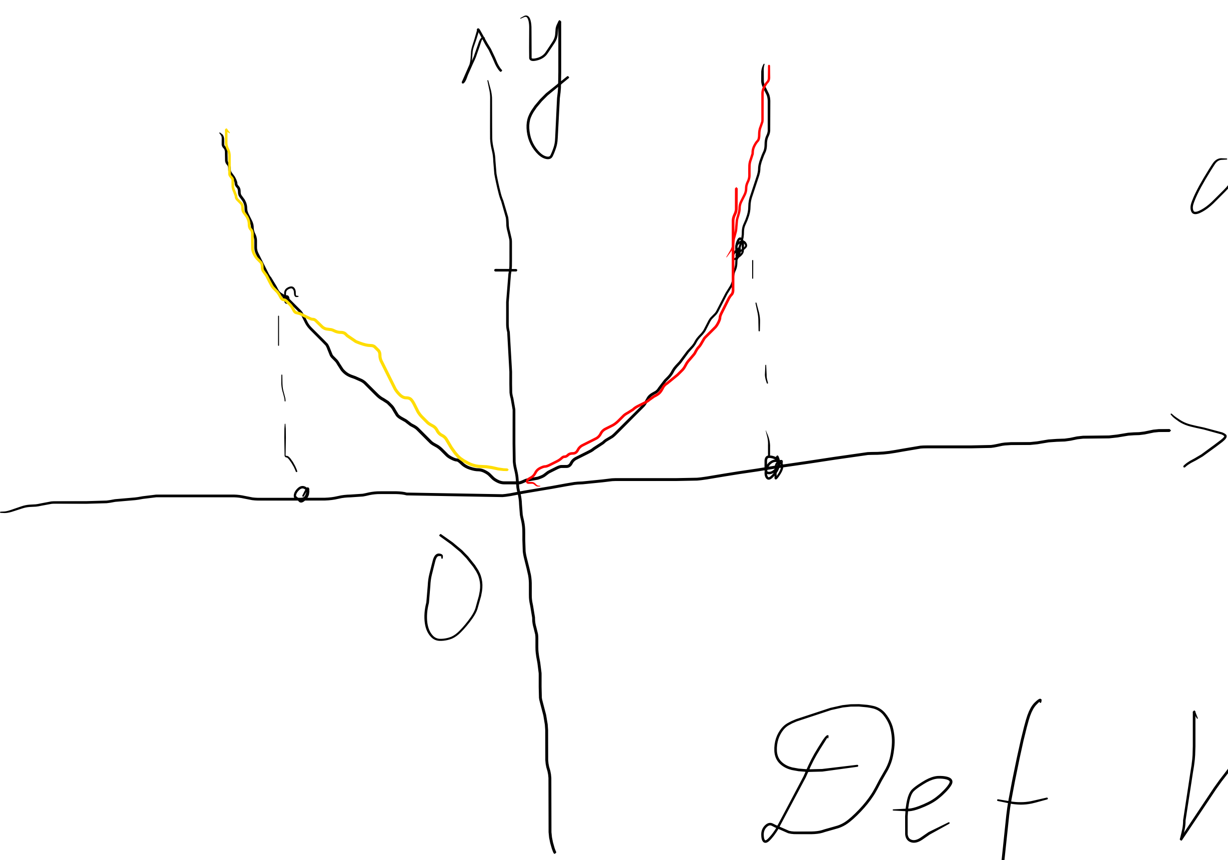
такъв, че $f(x) = y$ $\quad X$ "върху" Y

(сюрекция)

инекция + сюрекция = биекция

(взаимно-еднозначно изображ., 1-1-значно, функция)

$y = x^2$, $x \geq 0$ или $x < 0$



Th НДУ изображ. $y = f(x)$ да е функция, е то да е монотонна

НДУ – необх. и достат. условие

$\Longleftrightarrow$

Def Казваме, че изображение $y = f(x)$ то е монот.

ако $\forall x_1 \neq x_2$: $x_1 \geq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ $(\leq)$ (монотонно растящо)

монотонно намаляв|

монотонни функции

Числови редици. Сходимост и разходимост

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

Def $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^1$ – реална числова редица

$n \to \infty$
асимптотика

Видове редици   ограничени редици

$\exists M: \ a_n < M, \ n > N \Rightarrow$ Казв., че M е горна граница на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

конст.

min M – т.г.г.
точна горна гран.

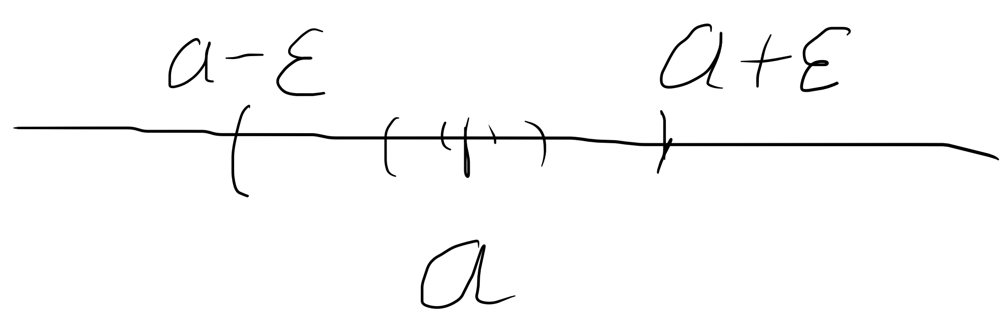
$\exists m \quad a_n > m \quad n > N \Rightarrow$ Казв., че $\underline{m}$ е долна гран. на редицата $\{a_n\}$

конст.

max m – т.д.г.
точна долна гран.

$m < a_n < M$ – огранич. редица

Def Казв., че т. a е точка на сгъстяване за $\{a_n\}$, ако във $\forall$ нейна околност се съдържат безброй много членове (по номер) от редицата.

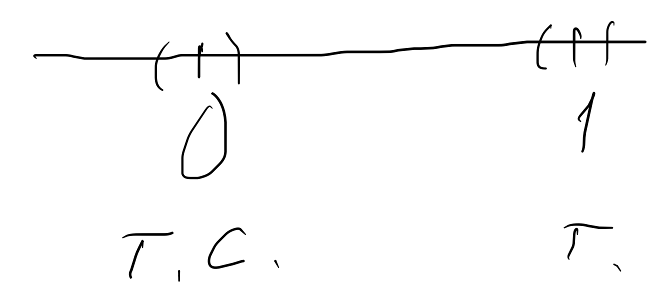


$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ - околност на a

$\varepsilon > 0$

th (Болцано) $\forall$ ограничена редица има поне една точка на сгъстяване.

пр. $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$ $\quad 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$



$0 \le a_n \le 1$ - огран.

Def Казваме, че $\{a_n\}$ е сходяща, ако има точно една точка на сгъстяване и тази точка се нарича нейна граница.

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ – граница
(т. сгъстяв.)

Th НДУ $\{a_n\}$ да е ходяща, е да е ограничена и монотонна.

Def $\{a_n\}$ $a_{n+1} \geq a_n$ за $\forall n$ (монотонно растяща

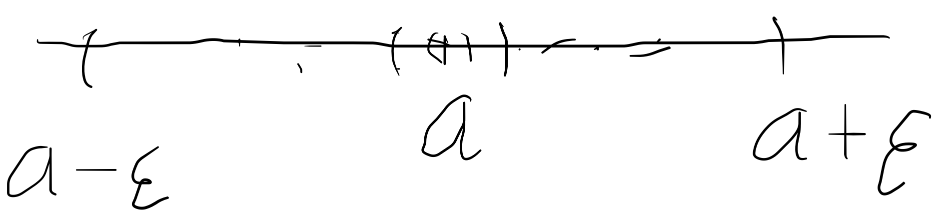
$a_{n+1} \leq a_n$ за $\forall n$ (— || — намаляв

монотонни редици

Def (Коши / Cauchy) Казваме, че $\{a_n\}$ е ходяща и $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, ако за $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) : n > N$ да е изпълнено условието $|a_n - a| < \varepsilon$.

$|a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \quad -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$

$n > N$



$\forall \varepsilon$ квантор за общств.

$\exists \quad \forall$

<u>Отрицание на дефин.</u>

Казваме, че $\{a_n\}$ не е сходяща и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq a$, ако $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ и такова, че за $\forall N(\varepsilon_0)$: $\exists\, n > N$ така, че $|a_n - a| \geq \varepsilon_0$

<u>пр.</u> $a_n = \dfrac{4n^2+1}{3n^2+2}$. Док., че числото $\dfrac{4}{3}$ е гран. на редицата

$$\left|\frac{4n^2+1}{3n^2+2}-\frac{4}{3}\right|<\varepsilon,\quad \varepsilon>0$$

$$\left|\frac{3(\cancel{4n^2}+1)-4(\cancel{3n^2}+2)}{3(3n^2+2)}\right|=\left|\frac{3-8}{3(3n^2+2)}\right|=$$

$$=\frac{5}{3(3n^2+2)}<\varepsilon \qquad \frac{3(3n^2+2)}{5}>\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow 3n^2+2>\frac{5}{3\varepsilon}\Rightarrow$$

$$n^2>\frac{\frac{5}{3\varepsilon}-2}{3}=\frac{5-6\varepsilon}{9\varepsilon}\Rightarrow \qquad n>\sqrt{\frac{5-6\varepsilon}{9\varepsilon}}$$

$$\varepsilon\ll 1$$

$$N(\varepsilon)=\left[\sqrt{\frac{5-6\varepsilon}{9\varepsilon}}\right] \qquad n>N(\varepsilon) \qquad [x]$$

ф-ция цяла част

$$\varepsilon=10^{-1} \qquad \sqrt{\frac{5-6\cdot 10^{-1}}{9\cdot 10^{-1}}}=\sqrt{\frac{\left(5-\frac{6}{10}\right)10}{9}}=\sqrt{\frac{44}{9}}\approx\frac{6,\ldots}{3} \qquad N(10^{-1})=2$$

$$n>2$$

$$\frac{4}{3}-\frac{1}{10} \qquad \frac{4}{3} \qquad \frac{4}{3}+\frac{1}{10}$$

$N(\varepsilon) = \left[\sqrt{\frac{5-6\varepsilon}{9\varepsilon}}\right]$ $\quad n > N(\varepsilon)$ $\quad \varepsilon = 10^{-2}$

$$\sqrt{\frac{5-6\cdot 10^{-2}}{9\cdot 10^{-2}}} = \sqrt{\frac{\left(5-\frac{6}{100}\right)100}{9}} = \sqrt{\frac{4,94\cdot 100}{9}} = \sqrt{\frac{494}{9}} \approx \frac{22,\dots}{3}$$

$$\begin{array}{r} 23\cdot 23 \\ \hline 69 \\ 46 \\ \hline 29 \end{array}$$

$N(10^{-2}) = 7$ $\quad n > 7$

$\frac{4}{3} - \frac{1}{100}$ $\quad \frac{4}{3}$ $\quad \frac{4}{3} + \frac{1}{100}$

$a_8, a_9 \dots$

$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $\quad$ сходимост – ограниченост + монотонно

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Нютонов бином

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1.2\dots k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n!}{(n-k)!\,k!}\frac{1}{n^k} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-(n-1))}{n!}\frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1-\frac{1}{n}}{2!} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!} + \dots$$

$$\dots + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!} + \dots + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{n!} \leq$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\leq 1 + 1 + \frac{1-\frac{1}{n+1}}{2!} + \dots + \frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)}{k!} + \dots + \frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)}{n!} = a_{n+1} -$$

$$- \underbrace{\frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)}{(n+1)!}}_{\otimes} \Rightarrow \quad a_n = a_{n+1} - \underset{0 <}{\otimes} \Rightarrow a_n \leq a_{n+1} \Rightarrow$$

$\{a_n\} \nearrow$ монот. рас.

$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $\qquad a_n > 0$ – огран. отдолу

$\{a_n\}\nearrow \qquad a_1 = (1+1)^1 = 2 \qquad a_n \geq 2 = a_1$ и е т.д.?.

$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < 1 \Rightarrow \underset{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\overset{\shortparallel}{a_n}} \leq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!} \leq$

$k! = \underbrace{k\overbrace{(k-1)\ldots 3}^{\geq 2}.2}_{k-1 \text{ множ.}} \geq 2^{k-1} \qquad \leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} =$

геометрична прог.

$3! = \underset{2}{\underbrace{3}}.2 \geq 2.2 = 2^2 \qquad S_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q}$ с $q = \frac{1}{2}$

$= 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} = 1+2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 3-\frac{1}{2^{n-1}} < 3 \Rightarrow 2 < a_n < 3$

огран.

$\Rightarrow a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ е сходяща

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}7172\ldots$$

Неперово число – трансцендентно число

(експонента)