сходимост = монотонност + ограниченост

граници на известни редици $a_n = \frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e$ $\qquad a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

теореми за сравнение $\qquad 1^\infty$

$\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ $\quad n > N \quad a_n \le b_n \le c_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n \le \lim\limits_{n\to\infty} c_n$

<u>зад</u> $a_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) =$

$\infty\,(\underbrace{\infty - \infty})$ $\qquad$ лема за двамата полицаи

неопредел.

$= \sqrt{n}\,\frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\cancel{\sqrt{n}}}{\cancel{\sqrt{n}}}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$

$$a_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2-n-6}\right)^n = \left[\left(1+\frac{n+5}{n^2-n-6}\right)^{\frac{n^2-n-6}{n+5}}\right]^{\frac{n+5}{n^2-n-6}\,n} \to e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+5n}{n^2-n-6}} \to e^1 = e$$

1^∞ – неопредел. $\quad \downarrow e$

$$\frac{\cancel{n^2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(1-\frac{1}{n}-\frac{6}{n^2}\right)} \to 1$$

$$\frac{n^2-1}{n^2-n-6} = \frac{n^2-n-6+n+6-1}{n^2-n-6} = 1+\frac{n+5}{n^2-n-6}$$

$$\frac{n+5}{n^2-n-6} = \frac{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}{1-\frac{1}{n}-\frac{6}{n^2}} \to 0$$

Зад. $\quad a_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+\nu}} \qquad \lim a_n = ?$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} =$$

$$= \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \qquad\qquad = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}_{=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le a_n \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le \lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}, \quad \frac{1}{n}\to 0 \qquad 1 \le \lim_{n\to\infty} a_n \le 1 \qquad \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}, \quad \frac{1}{n^2}\to 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

Зад. $a_1=\frac{1}{2}$; $a_{n+1}=\frac{a_n^2+3}{4}$. Док., че редицата е сход. и намерете границата ѝ.

Зад. $a_1=\frac{1}{2}$; $a_{n+1}=\frac{a_n^2+3}{4}$. Док., че редицата е сход. и намерете границата ѝ.

Принцип на математическата индукция

твърдение 1. непосредствена проверка, че твърдението е вярно за $n=1$
2. Допускаме, че твърд. е вярно за някое $k>1$
3. Ще докажем, че твърд. е вярно и за $k+1$
$\Rightarrow$ твърдението е вярно за $\forall n \in \mathbb{N}$

$a_1=\frac{1}{2}$; $a_2=\frac{\frac{1}{4}+3}{4}=\frac{13}{16}$; $a_3=\frac{\frac{169}{256}+3}{4}=\frac{169+768}{1024}$ $a_n>0$ е д.п. и редицата е огран. отдолу

Доп., че $a_k<1$ за $k>3 \Rightarrow a_k-1<0$

Ще док., че $a_{k+1}-1=\frac{a_k^2+3}{4}-1=\frac{a_k^2-1}{4}=\frac{(\overbrace{a_k+1}^{>0})(\overbrace{a_k-1}^{<0})}{4}<0$

$\Rightarrow a_{k+1}<1 \Rightarrow a_n<1$ за $\forall n\in\mathbb{N}$

$0<a_{k+1}<1$ - ограничена $\Rightarrow$ има поне една точка на сгъстяване (Болцано)

$a_2>a_1 \Rightarrow a_2-a_1>0$ Доп., че $a_k-a_{k-1}>0$ за $k>3$

$a_3>a_2$

Ще док., че $a_{k+1}-a_k=\frac{a_k^2+3}{4}-\frac{a_{k-1}^2+3}{4}=\frac{a_k^2-a_{k-1}^2}{4}=$

$=\frac{(\overbrace{a_k-a_{k-1}}^{>0})(\overbrace{a_k+a_{k-1}}^{>0})}{4}>0 \Rightarrow a_{k+1}>a_k \Rightarrow$

$a_{n+1}>a_n$ за $\forall n \Rightarrow$ редицата е растяща (монотонна)

$\Rightarrow \{a_n\}$ е сходяща, т.е. $\exists l: \lim\limits_{n\to\infty} a_n=l$ $l=?$

т.д.з. $\frac{1}{2}\leq a_n<1$

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2+3}{4} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n^2 + \lim_{n\to\infty} 3}{\lim_{n\to\infty} 4}$$

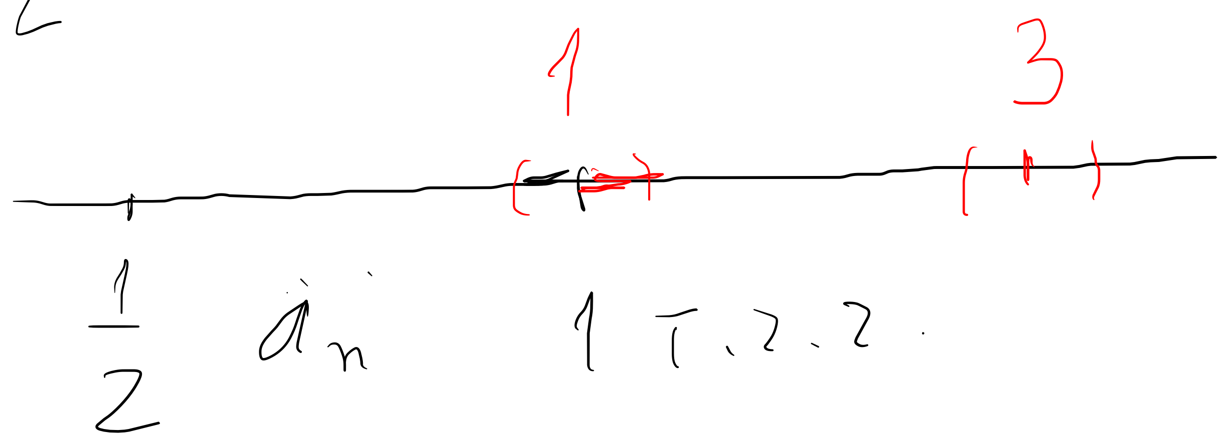
$$\{a_{n+1}\},\ \{a_n^2\},\ \{3\},\ \{4\}$$

$$\{a_{n+1}\} \to l, \quad \{a_n^2\} \to l^2$$

$$l = \frac{l^2+3}{4} \Rightarrow l^2 - 4l + 3 = 0$$

$$l_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = \cancel{3};\ 1$$ — границы т.с.?

$$\frac{1}{2} \le a_n \le 1$$



$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

д.р. №5

① $a_n = n^3\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}} - n\sqrt{2}\right)$, $\lim_{n\to\infty} a_n = ?$

2 $a_n = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\sqrt{1+\frac{\nu}{n^2}} - 1 \right)$ $\lim_{n\to\infty} a_n = ?$

$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$d = 1$, аритм. прогресия