Векторни пространства и линейни оператори

матрица $n \times 1$ – вектор-стълб

$1 \times n$ – вектор-ред

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \vec{x}^T = (x_1, x_2 \dots x_n)$$

$A = \{a_{ij}\}$ $A^T = \{a_{ji}\}$ – транспонирана матр.

$\vec{a}\,(a_1, a_2, \dots, a_n)$

$n = 2, 3$

$\vec{a}, \vec{b}$ събиране $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}\,(a_1 + b_1, \dots a_n + b_n)$

умножение с число $\lambda\vec{a} = \vec{d}\,(\lambda a_1, \dots, \lambda a_n)$

линейно пространство
(векторно)

(1) $\vec{a}^1, \vec{a}^2, \dots, \vec{a}^n$

наредени n-торки от числа

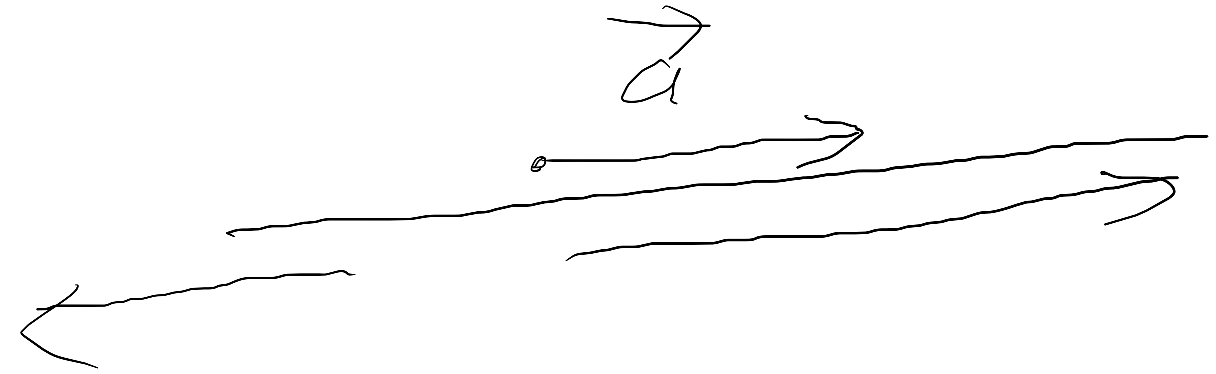
(2) $\underbrace{\alpha_1\vec{a}^1 + \alpha_2\vec{a}^2 + \dots + \alpha_n\vec{a}^n}_{\text{лин. комбин. (ЛК)}} = \vec{0}$

Ако $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n})$, то

казв., че (1) е лин. зависима (ЛЗ)

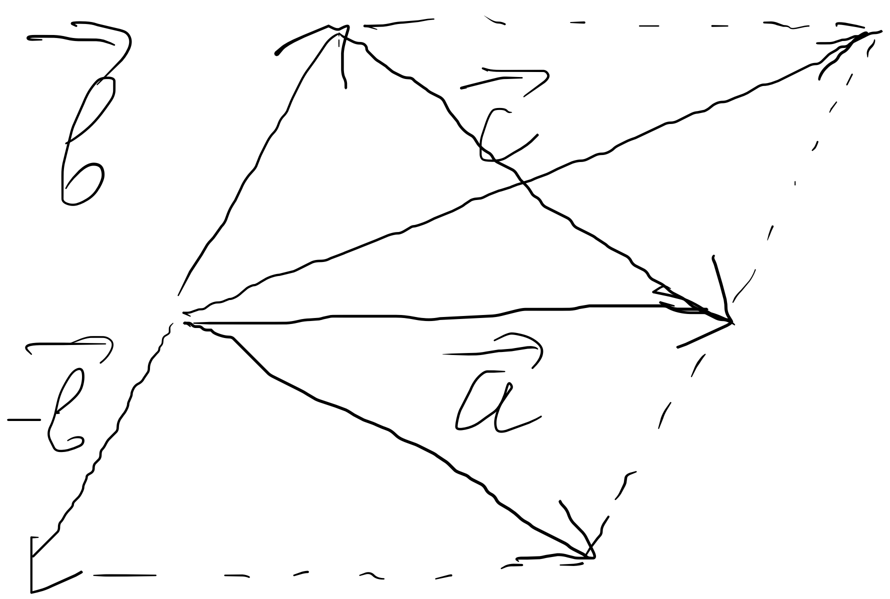
Обратно, ако завис. (2) е възможна $\Longleftrightarrow$

$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (0, 0, \dots, 0)$, то казв., че (1) е лин. незав. (ЛН) (базис). Броят ЛН в-ри определя размерност на вект. п-во.



$\vec{b} = \lambda \vec{a}$

$\lambda \vec{a} + (-1)\vec{b} = \vec{0}$

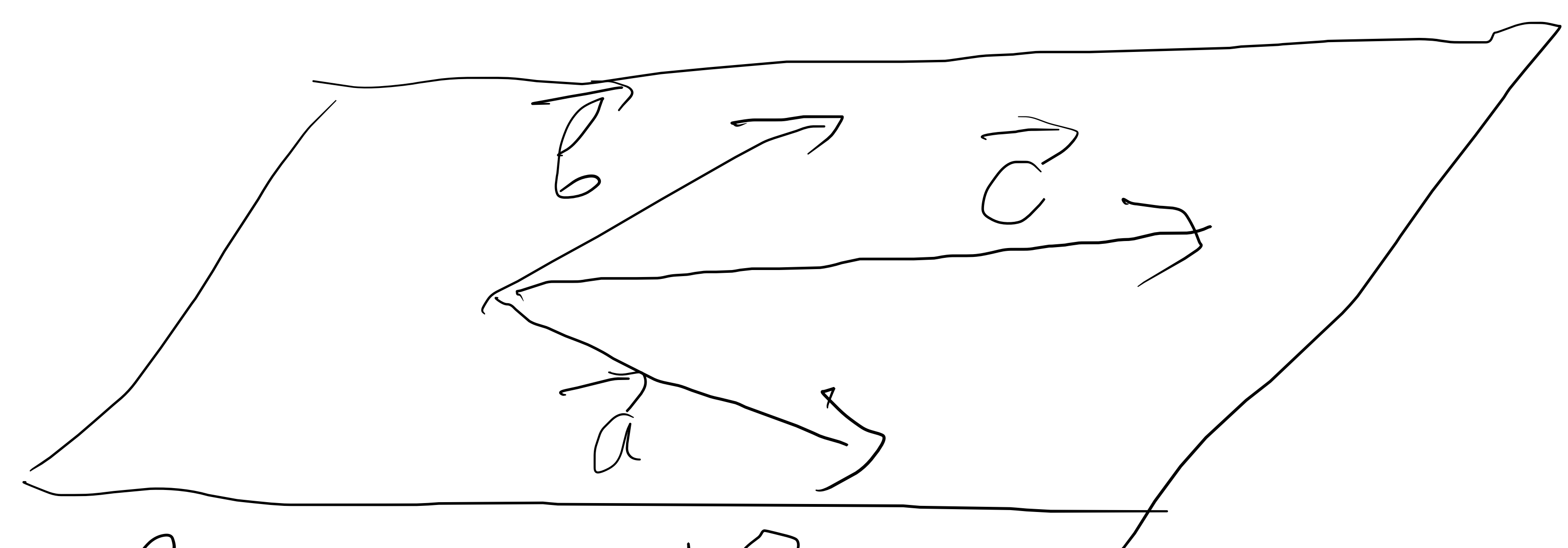


$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

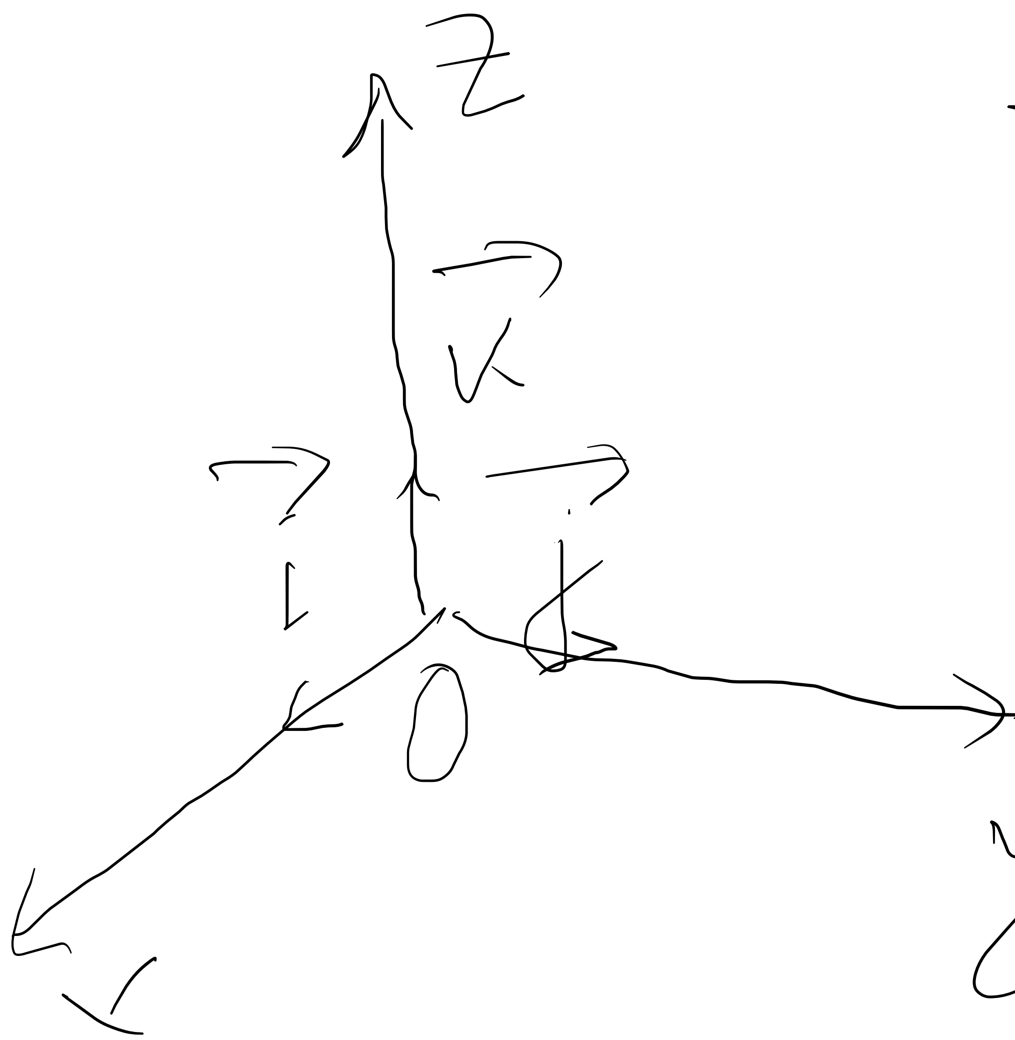
$\vec{a} + (-1)\vec{b} = \vec{a} - \vec{b}$

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b} = \lambda \vec{a}$ са ЛЗ

$\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$



<u>Тв</u> $\forall$ $n+1$ в-ра в n-мерно вект. п-во са ЛЗ.



$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ $\quad |\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$

$\vec{i}\,(1,0,0)$

$\vec{j}\,(0,1,0)$ базис $\mathbb{R}^3$

$\vec{k}\,(0,0,1)$ евклидово пр-во

$$\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}+\gamma\vec{k}=\vec{0}$$

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\alpha=0$

$\beta=0 \Rightarrow \vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$

$\gamma=0$ $\quad\in$ ЛН (базис)

$O\ \vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3$ – базис $\quad \vec{e}^{\,*}=T\vec{e}$

Def Казв., че в лин. п-во L е зад. лин. оператор A, който за $\forall \vec{x} \in L$ е съпоставен еднозначно елемент $\vec{x}' \in L$ (образ на $\vec{x}$): $\vec{x}' = A\vec{x}$, за който са изпълнени условията: 1) $A(\vec{x}+\vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$ (адитивност)

2) $A(\lambda\vec{x}) = \lambda A\vec{x}$ (хомогенност)

Def лин. п-во L и $\vec{x}, \vec{y} \in L$. Скаларно произведение на $\forall \vec{x}, \vec{y} \in L$ се дефинира по следния начин

1) $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$ (комутативност)

2) $(\vec{x}+\vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})$ (асоциат.)

3) $(\lambda\vec{x}, \vec{y}) = \lambda(\vec{x}, \vec{y})$

4) $(\vec{x}, \vec{x}) > 0$, $\vec{x} \neq \vec{0}$

$\vec{x}^2$ – скаларен квадрат на в-ра $\vec{x}$

Норма (дълж.) на вектор $|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x},\vec{x})} = \sqrt{\vec{x}^2}$

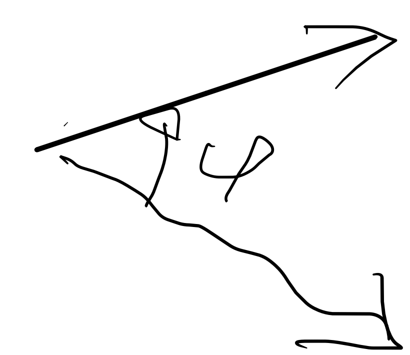
в L_n въвежд. метрика $\Rightarrow$ L_n е метрично п-во

$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ – дълж. на вектор

$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$

единичен вектор $\vec{e} = \dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ $\quad |\vec{e}| = 1$

$(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x}|\,|\vec{y}| \cos\varphi$



$\cos\varphi = \dfrac{(\vec{x}, \vec{y})}{\sqrt{\vec{x}^2}\sqrt{\vec{y}^2}}$

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{x},\vec{y})}{\sqrt{\vec{x}^2}\sqrt{\vec{y}^2}} \qquad \cos\varphi = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_j^2}}$$

Казв., че $\underbrace{\vec{x},\vec{y}}_{\neq\vec{0}} \in L_n$ са ортогонални, ако $(\vec{x},\vec{y}) = 0$

$$\cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$\underbrace{A\vec{x} = \lambda\vec{x}}$, $\vec{x} = \vec{0}$ Интересуваме се от нетрив. решения, т.е. $\exists ?$ $\vec{x} \neq \vec{0}$ и λ

$n \times n$ $\quad \lambda \in \mathbb{C}$

L_n задача за намир. на собств. стойности и собствени в-ри на лин. оператор A

(EVP) eigenvalue problem

$$\underset{n\times n}{A}\,\underset{n\times 1}{\vec{x}} = \lambda \underset{n\times 1}{\vec{x}} \qquad (A-\lambda E)\vec{x} = \vec{0}$$ – лин. хомог. алг. с-ма

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

търсим нетрив. реш. $(\vec{x} \neq \vec{0})$

$r < n \Rightarrow$ б. м.

$$(a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$
$$a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0$$

р. (Руше)

$$x_i = \frac{0}{\underbrace{|A-\lambda E|}_{=0} \neq 0} = 0$$

$|A-\lambda E| = 0 \Rightarrow$ характеристично у-ние на матр. A

$\overset{\parallel}{}$ характеристичен полином

$\deg f(\lambda) = n$

$\underline{n}$ характеристични корени

Собствените стойности на лин. оператор A са характеристични корени.

Релации на еквивалентност

1. За детерминанти умн. с числа $\neq 0$ и събир. на редове (стълбове). Наричат се еквивал. преобразов.
2. За матрици умн. с числа $\neq 0$ и събир. на редове (стълбове). Наричат се елемента. преобразов. Запазват ранга ѝ.

3. $\underset{n\times n}{A}$, $\underset{n\times n}{B}$ и $|\underset{n\times n}{S}| \neq 0$ Ако $B = S^{-1}AS$, ще казваме че матр. A и B са подобни $A \sim B$

Th Подобните матрици имат еднакъв спектър

A $\quad A - \lambda E \quad = -\lambda S^{-1}S = -\lambda E$

$$S^{-1}(A-\lambda E)S = \underbrace{S^{-1}AS}_{B} - \lambda \underbrace{S^{-1}ES}_{E} = B - \lambda E$$

Def Казв., че матр. $\underset{n\times n}{A}$ е диагонализуема, ако $\exists |S| \neq 0$ и такава, че $S^{-1}AS = diag(d_{11}, d_{22}, \dots d_{nn})$

пр.

$A = \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ $\qquad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -10 \\ 3 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad -(4+\lambda)(7-\lambda) + 30 = 0$

$-(28 + 7\lambda - 4\lambda - \lambda^2) + 30 = 0$ $\qquad \lambda_1 = 2 \ ; \ \lambda_2 = 1$ – собств. стойн. на A

$|B - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) = 0$

$\lambda_1 = 2 \ ; \ \lambda_2 = 1$ – собств. стойн. на B

$\Rightarrow A \sim B$ $\qquad S = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad B = S^{-1} A S$

$$SE = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{2}p_1 + p_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{3p_2 + p_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\overset{3p_2+p_1}{\sim}\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{2}p_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\overset{S^{-1}}{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = B$$

$$S = ? \quad \underset{n\times n}{A} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n \end{pmatrix}}_{D} \qquad D - \lambda E = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & & \\ & \lambda_2 - \lambda & 0 \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n - \lambda \end{pmatrix}$$

$$|D - \lambda E| = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\dots(\lambda_n - \lambda)$$

Ако $\underset{n\times n}{A}$ и $\lambda_i, \ i = \overline{1,n}$ са собств. стойн., то

$\exists \ |S| \neq 0 : S = [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n]$ $\quad \vec{v}_i$ са собств. в-ри на A

$A=\begin{pmatrix}-4 & -10\\ 3 & 7\end{pmatrix}$ $\quad \lambda_1=1$, $\lambda_2=2$ $\quad A-E=\begin{pmatrix}-4-1 & -10\\ 3 & 7-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & -10\\ 3 & 6\end{pmatrix}\sim$

$$\sim\begin{array}{cc} x_1 & x_2=p\\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2p\\ p\end{pmatrix}=p\underbrace{\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}}_{\vec v_1}$$

$r=1$

$$\lambda_2=2:\quad A-2E=\begin{pmatrix}-4-2 & -10\\ 3 & 7-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -10\\ 3 & 5\end{pmatrix}\sim\begin{array}{cc} x_1 & x_2=q\\ \end{array}\begin{pmatrix}3 & 5\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{3}q\\ q\end{pmatrix}=\frac{q}{3}\underbrace{\begin{pmatrix}-5\\ 3\end{pmatrix}}_{\vec v_2}$$

$O\vec v_1\vec v_2$ — собств. п-во

$\alpha_1\vec v_1+\alpha_2\vec v_2=\vec 0 \quad \alpha_1=\alpha_2=0$

$\vec v_1\,\vec v_2$ — базис (ЛН в-ры)

$$S = [\vec{v}_1\ \vec{v}_2] = \begin{pmatrix}-2 & -5\\ 1 & 3\end{pmatrix} \qquad SE = \left(\begin{array}{cc|cc}-2&-5&1&0\\1&3&0&1\end{array}\right) \overset{\frac{1}{2}p_1 + p_2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc}-2&-5&1&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{array}\right) \overset{2p_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc}-2&-5&1&0\\0&1&1&2\end{array}\right) \overset{5p_2+p_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc}-2&0&6&10\\0&1&1&2\end{array}\right) \overset{-\frac{1}{2}p_1}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c}1&0&\underbrace{\begin{matrix}-3&-5\\1&2\end{matrix}}_{S^{-1}}\\0&1&\end{array}\right) \qquad S^{-1}AS \overset{?}{=} \begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-3&-5\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&-10\\3&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-5\\1&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3&-5\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-5\\1&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix} =$$

$D = S^{-1}AS \mid S$ отляво

$SD = \underbrace{SS^{-1}}_{E}AS = AS \mid S^{-1}$ отд.

обд.
собств. стойн.

$SDS^{-1} = A\underbrace{SS^{-1}}_{E} = A \Longrightarrow A = SDS^{-1}$

$A: A^k = SD^kS^{-1}$

$D^k = \begin{pmatrix} d_{11}^k & & 0 \\ & d_{22}^k & \\ 0 & & \ddots \; d_{nn}^k \end{pmatrix}$

<u>зад.</u> $A = \begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 18 & 11 \end{pmatrix}$

$A^3 = ?$

$A^5 = ?$