

В. И. ТИХОНОВ

Статистическая
радиотехника



ИЗДАТЕЛЬСТВО

• СОВЕТСКОЕ РАДИО •

МОСКВА

1966

621.396

Т 462

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга представляет собой учебное пособие по статистической радиотехнике. В ней приводятся основные сведения из теории вероятностей и случайных процессов, а также излагаются основные проблемы теории помехоустойчивости и теории информации.

Большое внимание уделено рассмотрению конкретных радиотехнических примеров, позволяющих проиллюстрировать методику применения общетеоретических положений к решению частных задач и уяснить целесообразные физические принципы построения современных радиотехнических устройств и систем.

В основу книги положены лекции по статистической радиотехнике, которые читал автор в течение последних 10 лет. Оригинальные научные результаты самого автора нашли лишь частичное отражение (когда они не выходили за рамки учебной программы по данному курсу). Автор стремился изложить основы статистической радиотехники в соответствии с теми требованиями, которые предъявляются к этой области знаний в настоящее время.

Книга предназначена для студентов, инженеров, аспирантов и научных работников, работающих в области радиофизики и автоматики.

3-4-1

6-66

Настоящая книга написана как учебное пособие по статистической радиотехнике. В ней приводятся основные понятия теории вероятностей и случайных процессов, а также сведения из теории помехоустойчивости и теории информации. Этот материал необходимо знать для правильного понимания принципов конструирования и работы современных радиотехнических устройств и систем.

В основу книги положены лекции по статистической радиотехнике, которые читались автором в течение последних 10 лет для студентов радиотехнической специальности. Учет предварительной подготовки студентов по высшей математике и радиотехнике, а также объем книги ограничили круг рассматриваемых вопросов и сказались на характере изложения материала.

Большое внимание уделено рассмотрению конкретных радиотехнических примеров, позволяющих, с одной стороны, проиллюстрировать методику применения общетеоретических положений к решению частных задач, и, с другой, — уяснить целесообразные физические принципы построения современных радиотехнических устройств и систем.

Книга состоит из четырех разделов, содержащих шесть–девять глав, и нескольких приложений. В первом разделе, который включает пять глав, даются основные понятия и методы теории вероятностей и случайных процессов. Второй раздел содержит четыре главы и в основном посвящен анализу работы типовых линейных и нелинейных радиотехнических систем при наличии случайных воздействий. В третьем разделе, состоящем из пяти глав, рассмотрены основные задачи оптимальных методов приема сигналов на фоне белого шума. Четвертый раздел состоит из двух глав, в которых приведены основные предельные теоремы теории информации.

Первоначально предполагалось привести в книге обширную библиографию. Однако ввиду очень большого числа опубликованных работ эта задача оказалась непосильной для автора. В библиографический указатель включены лишь оригинальные источники и работы, использованные при написании книги.

Нумерация рисунков ведется по главам, а формул и таблиц — по главам и параграфам: первая цифра указывает номер главы, вторая — номер параграфа и третья — номер формулы или па-

графе. Исключение составляют ссылки на формулы приложения I, отмеченные буквой П.

Рукопись данной книги была просмотрена коллективом кафедры, возглавляемой чл.-корр. АН СССР В. И. Сифоровым, доктором физико-матем. наук Р. Л. Стратоновичем и доктором техн. наук И. Н. Амиантовым, написавшим по моей просьбе четырнадцатую главу. Большую помощь при написании книги оказали Ю. Н. Бакаев, В. Т. Горяинов, Е. И. Куликов и товарищи по работе, которые явились основными инициаторами создания книги и высказали ряд пожеланий.

Автор выражает искреннюю благодарность всем указанным товарищам за предложения и критические замечания.

При доработке рукописи были учтены все полученные рекомендации. Однако, после того как работа над рукописью была закончена, возникло много предложений по методическому и научному улучшению данного варианта книги. Считая работу в этом отношении незавершенной, постараюсь это выполнить в последующих изданиях с учетом критических замечаний, которые надеюсь получить от читателей.

ВВЕДЕНИЕ

Не касаясь специфических особенностей, характерных для отдельных отраслей радиотехники (радиосвязь, радиолокация, радионавигация, телеметрия, телевидение и др.), в качестве типовой можно указать функциональную схему, представленную на ил. 1. Она состоит из двух симметричных частей: передающей и приемной.

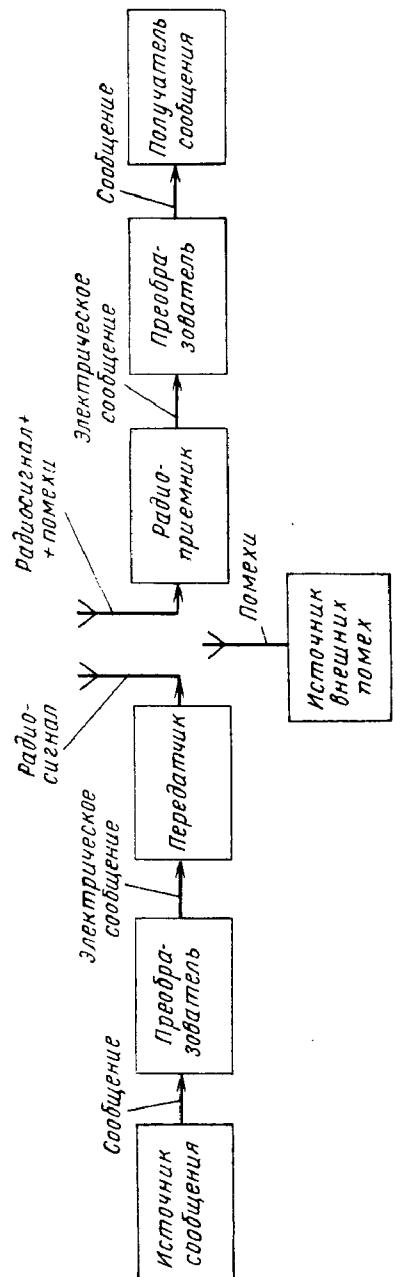
Под сообщением понимаются любые сведения или данные, подлежащие передаче. По своей физической природе сообщения могут быть механическими, тепловыми, световыми и электрическими. Для того чтобы сообщения можно было передавать на большие расстояния, необходимо сформировать радиосигналы, отображающие сообщения. Этой целью неэлектрические сообщения преобразуют в электрические сигналы при помощи соответствующих преобразователей. При этом обычно стремятся к тому, чтобы зависимость между интересующей нас физической величиной (сообщением) и ее электрическим аналогом (сигналом) на выходе преобразователя была линейной. В передатчике сигнал преобразуется в радиосигнал.

Радиосигнал при помощи передающей антенны излучается в окружающее пространство, распространяется в нем и посредством приемной антенны действует на вход радиоприемника. В приемнике радиосигнал усиливается до необходимой величины, превращается в сигнал (при помощи детектирования), преобразуется в нужное сообщение и затем поступает к получателю — конечному устройству или лицу, для которого предназначено сообщение.

Основное требование, обычно предъявляемое к системам радиосвязи, состоит в достоверной и своевременной передаче большого количества информации на большие расстояния при ограниченной мощности передатчика. Ясно, что ложные, запоздалые или неполные сведения обесценивают полученную информацию, так как не позволяют оперативно принимать правильные решения.

Достоинства передачи информации по реальным линиям радиосвязи преодолевают три причины: 1) неизбежное наличие внешних и внутренних помех, 2) искажения радиосигнала при распространении через турбулентную атмосферу и ионосферу, 3) техническое несовершенство устройств.

Искажения сообщения, возникающие в результате прохождения его через технически несовершенную аппаратуру, в принципе



могут быть уменьшены путем ее улучшения. Помехи и искажения радиосигнала при распространении обусловлены неподвластными нам причинами.

Действительно, вследствие распространения электромагнитных волн через турбулентную атмосферу и ионосферу, обладающих случайными коэффициентами поглощения и преломления, неизбежно происходит случайная модуляция радиосигнала по амплитуде, частоте и фазе.

Внешние помехи принимаются антенной вместе с сигналом (рис. 1). Они создаются различными естественными электромагнитными процессами, происходящими в атмосфере, ионосфере и космическом пространстве (космические шумы, атмосферные помехи и т. д.), электроустановками и соседними радиостанциями, а также преднамеренными средствами, применяемыми противником для создания помех (пассивные отражатели и радиостанции помех).

Кроме перечисленных внешних источников помех имеются другие, внутренние, локализованные в различных элементах схемы рис. 1. Сюда можно отнести флуктуационные шумы ламп, полупроводниковых приборов и сопротивлений потерь, микрофонный эффект, обусловленный механическими вибрациями, нестабильности питающих напряжений и др.

Во многих практических случаях прием сигналов должен осуществляться при небольших значениях отношения

сигнал/помеха. Это объясняется следующими обстоятельствами. При ограниченной мощности передатчика сигнал на большой дальности оказывается слабым. С другой стороны, необходимость иметь большую скорость передачи информации (т. е. передачу большого количества сведений в единицу времени) требует расширения полосы рабочих частот, что связано с увеличением уровня помех.

Помехи и искажения радиосигнала уменьшают вероятность правильного приема переданного сообщения. Поэтому принятное сообщение всегда оказывается не предсказуемым, а в той или иной мере случайным. Многие задачи радиотехники становятся бессодержательными без учета наличия помех и искажений радиосигнала.

В дальнейшем мы убедимся, что чем больше предварительных сведений известно о сигнале и помехах, тем лучше можно выполнить указанные выше требования, предъявляемые к системе радиосвязи. Отсюда следует необходимость изучения случайных сигналов и помех.

Математический аппарат, позволяющий описывать и оперировать со случайными величинами и случайными процессами, дает теория вероятностей. Сведения по теории вероятностей и случайным процессам излагаются в первом разделе данной книги.

Второй раздел посвящен анализу работы радиотехнических устройств при наличии помех. Здесь задача ставится так. Предполагая известными характеристики сигнала и помехи, нужно количественно оценить влияние помех на работу радиоустройства. Поскольку радиоустройства представляют различные комбинации линейных и нелинейных элементов, то задача, по существу, сводится к анализу прохождения сигнала и шума через линейные и нелинейные системы. Необходимая степень детальности такого анализа в значительной мере определяется тем количественным критерием, который оценивает влияние помех.

На первый взгляд может показаться, что сформулированная задача анализа работы радиотехнических устройств при наличии помех не имеет особого значения. При разработке радиотехнических устройств всегда стремится к тому, чтобы принятое сообщение было возможно тождественно переданному. Поэтому целесообразно сразу ставить и решать задачу синтеза радиотехнических устройств при работе в условиях помех.

Задача синтеза формулируется следующим образом. Предполагая заранее (априорно) известными некоторые характеристики сигнала и помех, нужно найти функциональную схему идеального радиоприемного или решающего устройства, которое бы воспроизвело переданное сообщение с наименьшими искажениями в определенном смысле. Конкретные варианты этой задачи будут рассмотрены в третьем разделе книги «Оптимальные методы радиоприема».

Решение задачи синтеза позволяет получить два важных результата: во-первых, выяснить схему оптимального радиоприемного или решающего устройства, которое при данном способе передачи обеспечивает наилучшее решение конкретной задачи, и, во-вторых, найти его рабочие характеристики (например, вероятность правильного решения, предельную точность и т. д.). Сравнивая характеристики оптимального радиоприемника с характеристиками реального, можно судить о том, целесообразно ли работать над техническим усовершенствованием последнего. Сравнение же характеристик оптимальных приемников для различных методов передачи позволяет установить наилучшие методы передачи, т. е. выбрать оптимальные виды сигналов. Следовательно, теория оптимальных методов радиоприема позволяет указать рациональные пути при разработке радиотехнических устройств и оценить предельно достижимые точности их работы в заданных условиях.

Однако синтез радиотехнических устройств не исключает задачу анализа. Дело в том, что во многих случаях практики затруднительно точно реализовать оптимальные устройства как по соображениям их сложности, так и ввиду отсутствия элементов, которые бы адекватно осуществляли нужные математические операции. Различие между реальными и оптимальными устройствами приводит к тому, что оценка искажений сигналов в реальных устройствах может быть получена из решения задачи анализа.

Настоящая книга содержит четвертый раздел—«Теория информации». Основное назначение его состоит в установлении теоретически предельных возможностей канала связи в отношении скорости безошибочной передачи информации. Общий смысл этого раздела заключается в том, что при передаче информации по каналу связи возможна безошибочная передача при условии, если скорость передачи не превосходит некоторого максимального значения. При этом в принципе существует способ кодирования, обеспечивающий безошибочную передачу со скоростью, сколь угодно близкой к максимальной.

Материал указанных четырех разделов является необходимой основой для грамотного конструирования различных радиотехнических устройств и систем с учетом случайного характера реальных радиосигналов при наличии помех. Знание этого материала также необходимо при анализе влияния помех на работу конкретных радиоустройств.

Раздел I

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. О ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАКОНОМЕРНОСТЯХ

Все происходящие в мире явления связаны с бесчисленным множеством других явлений. Избрав какое-либо явление объектом изучения, мы обнаруживаем, что среди этих связей есть существенные, действие которых определяет основные черты изучаемого явления, но есть и несущественные, оказывающие влияние лишь на некоторые второстепенные его особенности. При изучении явления необходимо выделить и учесть все существенные связи и одновременно отвлечься от несущественных подробностей, обусловленных побочными связями. Таким образом, анализу подвергается не само явление во всей его сложности, а упрощенная его модель.

Изучение построенной модели приводит к установлению тех или иных количественных закономерностей. Критерием правильности принятой модели являются результаты сравнения выводов теории с данными практики, опыта.

В зависимости от принятой модели возможны два метода изучения ее: детерминистический и вероятностный (статистический).

Детерминистический метод применяется при рассмотрении детерминированной (полностью определенной) модели, для которой заранее точно известны как начальное состояние, так и внешние воздействия. Решение дифференциальных уравнений, описывающих поведение системы (модели), однозначно определяет поведение системы в будущем. Например, зная начальный заряд на конденсаторе C , можно указать закон изменения во времени величины разрядного тока через параллельно присоединенное сопротивление R . Факт детерминированности означает, что при одном и том же комплексе исходных условий мы будем получать каждый раз один и тот же результат.

Детерминированные модели правильно отражают не все реальные явления, и правомерность применения детерминированной модели для одного и того же явления зависит от необходимой степени детальности изучения его. Допустим пока, что мы хотим знать поведение молекулы определенного объема газа. Для этого нужно бы-

ло бы точно указать координаты и скорости всех молекул в некоторый начальный момент времени, по законам механики составить систему дифференциальных уравнений и затем решить ее. На пути реализации такого метода пришлось бы столкнуться с непреодолимыми трудностями. Во-первых, принципиально невозможно указать точно положения и скорости молекул. Во-вторых, полученная система из очень большого числа дифференциальных уравнений практически невозможно решить. К этому следует добавить, что поведение отдельной молекулы ничего не говорит о свойствах газа в целом (давлении, температуре, теплоемкости и др.). А ведь именно эти свойства, характеризующие некоторый усредненный эффект случайно движущихся молекул, представляют практический интерес. В данном примере следует отказаться от детерминистического метода и применить вероятностный, позволяющий получить нужный результат.

При вероятностном методе рассматривается статистическая модель, поведение которой в каждом конкретном испытании не может быть предсказано, но при многократных испытаниях в одних и тех же условиях подчинено определенным закономерностям. Теперь элементы случайного явления не игнорируются, но по-прежнему учитываются только существенные и необходимые взаимозависимости, проявляющиеся как тенденция в массе случайных событий. Конкретные случайности индивидуального события не учитываются вследствие их частного характера.

В соответствии со сказанным выше, теорию вероятностей определяют как математическую науку, изучающую закономерности массовых случайных явлений.

Хотя все реальные процессы и явления в той или иной мере случайны, в тех случаях, когда случайные составляющие процесса не играют заметной роли, допустимо их детерминистическое рассмотрение. Напротив, в тех задачах, где случайные составляющие имеют определяющее значение, необходимо статистическое рассмотрение.

Применительно к радиотехнике роль статистических методов особенно возросла за последние годы. Это объясняется тенденцией увеличения дальности действия и повышения надежности и быстродействия современных радиотехнических устройств. При этом оказывается необходимым учитывать случайный характер передаваемых сигналов, их искажения при распространении и наличие помех.

§ 2. ИСХОДНЫЕ ПОНЯТИЯ. ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ

В теории вероятностей рассматриваются явления (опыты), которые при одном и том же комплексе начальных условий в зависимости от случайных обстоятельств заканчиваются различными исходами (событиями).

При этом, говоря об одном и том же комплексе начальных условий, подразумевают, что остаются без изменения основные существенные обстоятельства опыта.

В связи с тем, что заранее предсказать точный исход случайного опыта нельзя, при изучении случайных явлений возникает следующий кардинальный вопрос: как часто наступает то или иное событие при многократных испытаниях? Например, какая доля заявок (вызовов), поступающих на телефонную станцию, получает отказ; или какая доля электронных ламп, установленных в вычислительной машине, выходит в течение некоторого фиксированного времени из строя?

Пусть при N -кратном повторении опыта некоторое событие A произошло в n случаях. Относительной частотой события A называется отношение числа испытаний, в которых появилось событие A , к общему числу произведенных испытаний:

$$v(A) = n/N.$$

Из-за случайных причин число v при разных значениях N и в разных сериях из N опытов одинаковой длины будет получаться различным. В качестве примера в табл. 1.2.1 приведены результаты некоторого опыта по бросанию монеты в зависимости от числа бросаний. Возможные исходы каждого бросания условно обозначены как 0 и 1. В третьей строке таблицы приведена относительная частота появления единицы.

Таблица 1.2.1.

Результаты опыта по бросанию монеты

Количество бросаний	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Исход бросаний	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0
$v(1)$	1	1	2/3	3/4	3/5	1/2	4/7	1/2	4/9	4/10

Однако повседневная практика и специальные эксперименты говорят о том, что с увеличением числа испытаний сколько-нибудь значительные отклонения относительной частоты от некоторого среднего значения происходят редко. Например, в опыте с 12 000 бросаний монеты относительная частота появления герба оказалась равной 0,5016, а в опыте с 24 000 бросаний — 0,5005.

Число, около которого группируются при многократных испытаниях относительные частоты события, называется его вероятностью. Несколько изменяя формулировку, можно определить вероятность как отношение среднего числа появлений события A в N испытаниях к числу испытаний N .

Практическая ценность понятия вероятности определяется следующим обстоятельством. Хотя тот или иной исход случайного яв-

ления не может быть предугадан, однако можно рассчитывать на то, что в любой достаточно длинной серии испытаний относительная частота события будет мало отличаться от его вероятности. Чем больше вероятность события, тем чаще в достаточно длинной серии испытаний оно происходит, и наоборот.

Это позволяет людям строить свою практическую деятельность так, как если бы рассматриваемые события осуществлялись в соответствии с их вероятностью. Естественно, например, послать на соревнование того спортсмена, который ранее показывал лучшие результаты, или применять тот вид бомбометания, который в аналогичных условиях давал наибольший процент попаданий, или использовать тот метод лечения, который дал наибольший процент выздоровлений, хотя во всех этих примерах нет полной гарантии того, что в данном конкретном случае принятый вариант приведет к наилучшему исходу.

Учитывая органическую связь, существующую между относительной частотой события v и его вероятностью p , а также то, что относительная частота есть неотрицательная величина, не превосходящая единицы, следует считать, что вероятность $p(A)$ некоторого события A удовлетворяет тем же ограничениям, т. е.

$$0 \leq p(A) \leq 1. \quad (1.2.1)$$

Событие, вероятность которого равна единице, называется достоверным, а событие с нулевой вероятностью — невозможным.

Следует иметь в виду, что понятия достоверного и невозможного событий в теории вероятностей несколько шире общепринятых. Хотя событие, имеющее вероятность, равную единице, происходит практически всегда, но в принципе не исключено, что при каком-то частном испытании оно не наступит. Аналогично не исключается принципиальная возможность появления события с нулевой вероятностью. Например, вероятность человеку прожить точно 5 лет, 3 дня, 5 часов и 20 секунд равна нулю, но тем не менее такое событие возможно.

Выше было сформулировано так называемое статистическое определение вероятности. При всей своей практической значимости оно имеет тот недостаток, что не дает указаний к вычислению вероятности некоторого события иначе как путем статистических испытаний. Познакомимся теперь с так называемым классическим определением вероятности.

В любой научной теории, в том числе и в теории вероятностей, существует некоторое число изначальных истин, которые нельзя получить путем логических рассуждений свести к еще более элементарным. Если практика или специально поставленные эксперименты подтверждают их справедливость, то они принимаются без каких-либо дополнительных теоретических выкладок, т. е. как аксиомы.

По существу так были введены статистическое определение вероятности и соотношение (1.2.1), которому она подчиняется. Аналогично обстоит дело с классическим определением вероятности, которое опирается на понятие равновозможных событий, вводимое без доказательств. Классическое определение допускает непосредственный подсчет вероятностей и позволяет придать доказательный характер основным формулам теории. Правда, ситуация равновозможности нескольких событий является относительно редко реализуемой, и в общем случае указанные формулы все равно приходится вводить аксиоматически.

Несколько событий называются равновозможными, если условия опыта налагают на них появление одинаковые ограничения, и, следовательно, нет причин, по которым одно из них могло бы появляться чаще, чем всякое другое из событий рассматриваемого множества. Примерами равновозможных событий могут быть: 1) выпадение 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков при бросании симметричной игральной кости; 2) обрыв какой-нибудь одна из спиц «вполне симметричного» велосипедного колеса; 3) фазное или противофазное включение наугад двух обмоток трансформатора и др.

Введем еще два понятия.

Несколько событий называются несовместимыми, если никакие из них не могут произойти при одном и том же испытании вместе.

Несколько событий называются составляющими полную группу, если в результате испытания обязательно происходит хотя бы одно из них.

Пусть Ω миши (рис. 1.1) производится однократный выстрел. Обозначим через A событие — количество выбитых очков не более трех (т. е. 0, 1, 2 или 3), а через B — количество выбитых очков более трех (т. е. 4 или 5). Нетрудно видеть, что события A и B являются несовместимыми и составляют полную группу, поскольку в результате выстрела обязательно происходит либо событие A , либо событие B . Событие A — выбито не более трех очков, и событие C — выбито не менее трех очков (т. е. 3, 4 или 5), также составляют полную группу, однако в отличие от событий A и B являются совместимыми, поскольку получение в результате выстрела ровно трех очков означает одновременное наступление как события A , так и события C . И, наконец, событие D — выбито не более двух очков (т. е. 0, 1 или 2), и событие B — выбито более трех очков, являются несовместимыми и не составляют полной группы, так как при одиночном выстреле не охватывают всех возможных результатов (а именно, выбивание ровно трех очков).

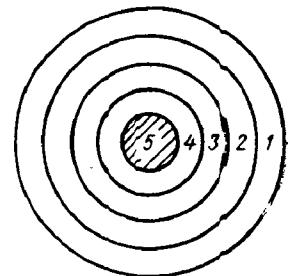


Рис. 1.1. Мишень.

Рассмотрим опыт с N равновозможными исходами, которые несовместимы и составляют полную группу*. Пусть n из них влечут за собой событие A (благоприятствуют событию A). Иначе говоря, событие A распадается на n частных случаев.

Вероятностью события A называется отношение числа исходов, благоприятствующих событию A , к общему числу возможных исходов

$$p(A) = \frac{n}{N}. \quad (1.2.2)$$

Определенную таким образом вероятность можно легко вычислить без проведения испытаний.

Пример 1. Найдем вероятность того, что при бросании симметричной игральной кости число выпавших очков будет нечетным. Интересующее нас событие A — нечетное число выпавших очков, распадается на три частных случая: выпало одно, три или пять очков. При этом все они входят в полную группу из 6 равновозможных, несовместимых событий. Следовательно, $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Пример 2. В партии из N изделий M бракованных. Наудачу выбирают n изделий из этой партии ($n < N$). Чему равна вероятность того, что среди них окажутся m бракованных ($m \leq M$)? Общее число возможных выборов из N изделий по n равно числу сочетаний из N элементов по n :

$$C_N^n = \frac{N!}{(N-n)! n!}.$$

Число возможных выборов m бракованных изделий из общего числа M равно C_M^m . Поэтому число комбинаций, включающих в себя ровно m бракованных изделий, равно числу сочетаний из M по m , умноженному на число сочетаний из $(N - M)$ небракованных изделий по $(n - m)$. Таким образом, в соответствии с классическим определением вероятности получим

$$p(A) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}. \quad (1.2.3)$$

Классическое определение не снимает вопроса о соотношении между вероятностью и его относительной частотой, однако многочисленные эксперименты подтверждают, что относительная частота событий в схеме случаев группируется вокруг величины n/N . В этом и заключена реальная ценность классического определения.

Понятие равновозможности событий применяется к опыту с бесконечным числом исходов. Типовой может служить следующая

* Полную группу равновозможных, несовместимых событий называют схемой случаев или схемой урн.

задача. В область G наугад бросается «точка» Q . Какова вероятность того, что точка Q попадет в область g , являющуюся частью области G (рис. 1.2)?

Хотя каждое из множеств G и g содержит бесчисленное множество точек, естественно считать, что «вместимость» множества G больше и притом во столько раз, во сколько площадь S_g области g превосходит площадь S_G области G . Исходя из равновозможности всех рассматриваемых вариантов, естественно считать, что искомая вероятность $p(A)$ равна $p(A) = S_g/S_G$.

В общем случае множества G и g могут иметь другую размерность (длины — в одномерном случае, объема — в трехмерном и т. д.), но приведенная формула сохраняет свой смысл, с той только разницей, что множества в об-

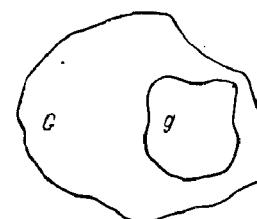


Рис. 1.2. Определение геометрических вероятностей.

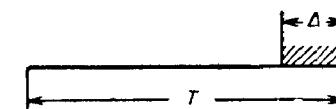


Рис. 1.3. Развертка осциллографа.

щем случае оцениваются так называемой мерой (длиной, площадью, объемом). Таким образом, в общем случае формула принимает вид:

$$p(A) = \frac{\text{мера } g}{\text{мера } G}. \quad (1.2.4)$$

Ввиду явного геометрического смысла вероятности вида (1.2.4) называют также геометрическими.

Пример. Пусть T — полный период развертки осциллографа и Δ — его часть, которую занимает обратный ход. Какова вероятность того, что импульс, длительность которого пренебрежимо мала, появится во время обратного хода развертки (рис. 1.3), если считать, что все моменты появления импульса за период T равновозможны. Очевидно, $p(A) = \Delta/T$.

§ 3. СУММА И ПРОИЗВЕДЕНИЕ СОБЫТИЙ

В применениях теории вероятностей часто возникает необходимость выразить вероятность некоторого сложного события через вероятности составляющих его событий. Например, вероятность безотказной работы самолета в течение некоторого промежутка времени целесообразно выразить через вероятности безотказной работы отдельных его агрегатов. Это позволит часть летных испытаний

самолета заменить стендовыми испытаниями агрегатов. Существуют и другие ситуации, требующие усложнения применявшихся до сих пор методов.

Рассмотрим те взаимоотношения, которые могут возникать между отдельными событиями.

Суммой двух событий A и B называется такое третье событие C , которое состоит в наступлении или события A , или события B , или в наступлении обоих событий A и B . Для обозначения суммы событий применяется запись $C = A + B$.

Пример 1. Пусть обнаружение воздушной цели производится двумя радиолокационными станциями. Обозначим через A обнаружение цели первой станцией, через B — обнаружение цели

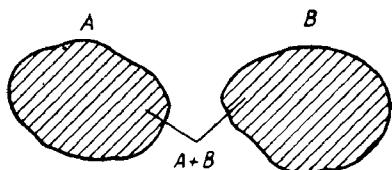


Рис. 1.4. Геометрическая интерпретация суммы двух несовместимых событий.

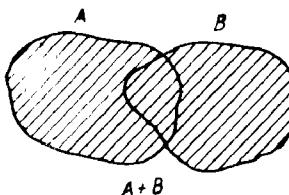


Рис. 1.5. Геометрическая интерпретация суммы двух совместимых событий.

второй станцией. Тогда $C = A + B$ — событие, состоящее в обнаружении цели хотя бы одной станцией (т. е. или первой, или второй, или и первой, и второй).

Пример 2. Оборудование для посадки самолетов при помощи радиосредств состоит из двух основных частей: курсовой системы и глиссадной системы. Пусть A — выход из строя курсовой системы, B — выход из строя глиссадной системы. Тогда $C = A + B$ — отказ системы посадки, независимо от того, чем он обусловлен (или отказом только курсовой системы, или отказом лишь глиссадной системы, или по причине отказа как курсовой, так и глиссадной систем вместе).

Произведением двух событий A и B называется такое третье событие C , которое состоит в осуществлении и события A , и события B . Для обозначения произведения событий применяется общая запись $C = AB$.

Пример 1. По мишеням производятся два выстрела. Пусть событие A — поражение мишени при первом выстреле, B — поражение мишени при втором выстреле. Тогда AB — поражение мишени двумя выстрелами.

Пример 2. Пусть A — безотказная работа приемника, B — безотказная работа передатчика. Тогда AB — безотказная работа приемопередатчика.

Понятия суммы и произведения событий допускают простое геометрическое истолкование. Предположим, что событию A соответствует попадание случайно брошенной «точки» в область A , а событию B — попадание в область B . Тогда событию $A + B$ соответствует попадание в область, которая отмечена на рис. 1.4 и 1.5 штриховкой. При этом на рис. 1.4 представлен случай, когда события A и B несовместимы, а на рис. 1.5 — случай совместимых событий A и B . Произведение двух событий также может быть интерпретировано геометрически. На рис. 1.6 заштрихована область исходов, соответствующая произведению событий AB . Из этого рисунка видно, что понятие произведения событий теряет свой смысл, если они несовместимы.

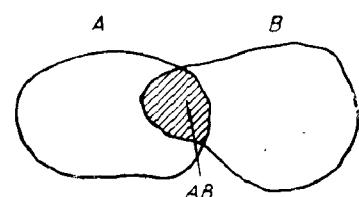


Рис. 1.6. Геометрическая интерпретация произведения двух событий.

§ 4. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Пусть A и B представляют собой несовместимые исходы одного и того же опыта. Для таких событий имеет место следующая теорема.

Теорема сложения. Вероятность суммы двух несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$p(A+B) = p(A) + p(B). \quad (1.4.1)$$

Доказательство теоремы можно провести только для схемы случаев. Пусть общее число равновозможных несовместимых исходов опыта равно N , причем n из них благоприятствуют событию A , а m — событию B , так что $p(A) = n/N$ и $p(B) = m/N$. Так как события A и B совместно не осуществляются, то их сумме $(A + B)$ благоприятствуют все $(n + m)$ событий. Поэтому согласно классическому определению вероятности получим

$$p(A+B) = \frac{n+m}{N} = \frac{n}{N} + \frac{m}{N} = p(A) + p(B).$$

Отметим, что когда вероятностная ситуация не сводится к схеме случаев, теорема сложения принимается за аксиому (без доказательства).

Укажем на два обобщения теоремы сложения. Во-первых, она распространяется на случай нескольких событий, а именно, если события A, B, C, \dots несовместимы, то

$$p(A+B+C+\dots) = p(A) + p(B) + p(C) + \dots \quad (1.4.2)$$

Докажем это для случая трех событий. Пусть события A , B и C несовместимы. Тогда

$$p(A+B+C) = p[(A+B)+C] = p(A+B) + p(C).$$

Но

$$p(A+B) = p(A) + p(B).$$

Следовательно,

$$p(A+B+C) = p(A) + p(B) + p(C).$$

Второе обобщение распространяет теорему на случай совместимых событий.

Предположим, что события A и B совместимы* (рис. 1.5). Из рис. 1.5 непосредственно следует, что событие $A+B$ можно представить в следующем виде:

$$A+B = A+B - AB. \quad (1.4.3)$$

Согласно формуле (1.4.2) имеем

$$p(A+B) = p(A) + p(B) - p(AB). \quad (1.4.4)$$

Докажем теперь два следствия теоремы сложения.

Следствие 1. Сумма вероятностей несовместимых событий, составляющих полную группу, равна единице.

Пусть события A_1, A_2, \dots, A_n несовместимы и составляют полную группу. Запишем для них теорему сложения:

$$p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n) = p(A_1 + A_2 + \dots + A_n).$$

Но событие $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ достоверно, так как оно осуществляется при каждом испытании, и вероятность его равна единице. Следовательно,

$$p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n) = 1. \quad (1.4.5)$$

Два несовместимых события, составляющих полную группу, называются противоположными. Примерами противоположных событий могут служить: попадание в мишень и промах, выпадение четного и нечетного числа очков при бросании игральной кости и т. д.

Событие, противоположное A , обозначается через \bar{A} (читается «не A »). В применении к противоположным событиям формула (1.4.5) приобретает вид

$$p(A) + p(\bar{A}) = 1. \quad (1.4.6)$$

Этот результат принято формулировать в виде специального следствия теоремы сложения.

Следствие 2. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

В заключение рассмотрим пример. Из урны, в которой находятся 3 красных шара, 2 белых и 5 зеленых, наугад вынимается один шар. Чему равна вероятность того, что вынутый шар не белый?

Из трех событий: A — вынутый шар красный, B — вынутый шар белый и C — вынутый шар зеленый, событию D — вынутый шар не белый, благоприятствуют два события: A и C , т. е. $D = A + C$. Поэтому в соответствии с (1.4.1) получим

$$p(D) = p(A) + p(C) = \frac{3}{10} + \frac{5}{10} = \frac{8}{10}.$$

Данную задачу можно решить и другим способом. Заметим, что события D и B являются противоположными, т. е. $D = \bar{B}$. Используя второе следствие теоремы сложения, найдем

$$p(D) = 1 - p(B) = 1 - \frac{2}{10} = \frac{8}{10}.$$

§ 5. ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Несколько событий могут находиться между собой в таких взаимоотношениях, что вероятность одного из них зависит от осуществления других. В связи с этим введем следующие определения.

Событие A называется статистически зависимым от событий B_1, B_2, \dots, B_k , если вероятность события A зависит от того, осуществились события B_1, B_2, \dots, B_k или нет. Если же вероятность A не связана с осуществлением событий B_1, B_2, \dots, B_k , то событие A называется статистически независимым от событий B_1, B_2, \dots, B_k .

Вероятность события A , вычисленная при условии, что произошли события B_1, B_2, \dots, B_k , называется условной и обозначается через $p(A|B_1, B_2, \dots, B_k)$. Если же при вычислении вероятности события A события B_1, B_2, \dots, B_k во внимание не принимаются, то вероятность $p(A)$ называется безусловной.

Согласно определению событие A статистически зависит от события B , если $p(A|B) \neq p(A)$. Если же $p(A|B) = p(A)$, то A не зависит от B *.

Отметим, кстати, что факт зависимости или независимости можно обычно установить без вычисления соответствующих вероятностей, исходя из смысла рассматриваемого явления. Например, вероятность безотказной работы передатчика не зависит от исправности приемника, находящегося на другом конце радиолинии (и наоборот). Однако зависимость будет наблюдаться, если приемник

* В приведенных определениях слово «статистически» иногда опускается, но речь идет именно о статистической закономерности, проявляющейся в том, что событие B влияет на событие A в большом числе опытов, изменяя относительную частоту его появления.

и передатчик входят в комплект одной радиостанции с общим источником питания.

Перейдем теперь непосредственно к теореме умножения.

Теорема умножения. Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что произошло первое:

$$p(AB) = p(A)p(B|A) = p(B)p(A|B). \quad (1.5.1)$$

Доказательство теоремы проведем для схемы случаев. Пусть общее число равновозможных исходов опыта равно N , причем событию A благоприятствуют k исходов, событию B — l исходов, событию AB — m исходов (рис. 1.7).

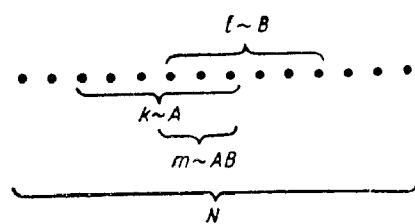


Рис. 1.7. К доказательству теоремы умножения.

Вычислим условную вероятность $p(B|A)$. Если событие A произошло, то общее число равновозможных исходов равно k . Из них событию B благоприятствуют m исходов. Следовательно, $p(B|A) = m/k$. Но $m/k = (m/n)/(k/n)$, т. е.

$$p(B|A) = \frac{p(AB)}{p(A)}, \quad (1.5.2)$$

что и доказывает первую часть формулы (1.5.1). Аналогичным образом можно показать, что

$$p(A|B) = \frac{p(AB)}{p(B)}. \quad (1.5.3)$$

Когда имеется несколько зависимых событий A_1, A_2, \dots, A_n , формула (1.5.1) принимает вид

$$\begin{aligned} p(A_1 A_2 \dots A_n) &= \\ &= p(A_1)p(A_2|A_1)p(A_3|A_1 A_2) \dots p(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}). \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

В общем случае, когда ситуация равновозможности не имеет места, теорема умножения принимается без доказательства.

Рассмотрим следствия теоремы (1.5.1).

Следствие 1. Если событие A не зависит от события B , то и событие B не зависит от A .

Пусть событие A статистически не зависит от события B , так что $p(A|B) = p(A)$, причем предполагается $p(A) \neq 0$. Используя теорему умножения, можно написать

$$p(A)p(B|A) = p(B)p(A|B).$$

При $p(A|B) = p(A)$ получаем

$$p(B|A) = p(B).$$

Но последнее равенство означает, что событие B не зависит от A .

Укажем, что если A и B независимы, то формулу (1.5.1) можно записать в виде

$$p(AB) = p(A)p(B). \quad (1.5.5),$$

Обычно этот результат формулируют в виде специального следствия теоремы умножения.

Следствие 2. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

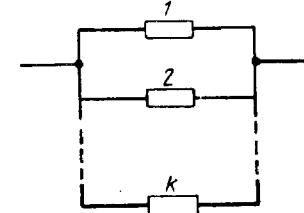
Используя (1.5.5), можно доказать аналогичную формулу для нескольких независимых событий. Если события A_1, A_2, \dots, A_n независимы, то

$$p(A_1 A_2 \dots A_n) = p(A_1)p(A_2) \dots p(A_n). \quad (1.5.6)$$

Справедливость (1.5.6) для случая трех независимых событий A, B, C вытекает из очевидных равенств:

$$p(ABC) = p[(AB)C] = p(AB)p(C) = p(A)p(B)p(C).$$

Пример. Обнаружение воздушной цели производится независимо двумя радиолокационными станциями. Вероятность $p(A)$ обнаружения цели первой станцией равна 0,8. Вероятность $p(B)$ обнаружения цели второй станцией равна 0,9. По формуле (1.5.5) находим вероятность $p(C)$ того, что цель будет обнаружена обеими станциями:



$$p(C) = p(A)p(B) = 0,8 \cdot 0,9 = 0,72.$$



Рис. 1.8. Параллельное соединение элементов в систему.

Рис. 1.9. Последовательное соединение элементов в систему.

В заключение укажем на применение теорем сложения и умножения к проблемам надежности. Надежностью некоторой системы (или ее элемента) называют вероятность того, что система (элемент) в течение установленного времени будет работать без отказов.

При объединении нескольких элементов в систему различают их параллельное и последовательное соединения. Соединение двух или более элементов в систему называется параллельным (рис. 1.8), если отказ системы возможен только при отказе всех элементов. Соединение называется последовательным (рис. 1.9), если отказ системы происходит при отказе любого элемента.

Определим надежность параллельного соединения двух элементов. Обозначим надежность первого элемента через p_1 , второго — через p_2 , надежность их параллельного соединения — через p .

Пусть A — событие, состоящее в отказе первого элемента, B — событие, состоящее в отказе второго элемента. Вероятности этих событий соответственно равны:

$$p(A) = 1 - p_1, \quad p(B) = 1 - p_2.$$

Обозначим через C событие, состоящее в отказе параллельного соединения первого и второго элементов, т. е. в отказе и первого и второго элементов, в соответствии с чем $C = AB$. Если события A и B статистически независимы, то

$$p(C) = p(A)p(B) = (1 - p_1)(1 - p_2).$$

Безотказная работа системы есть событие, противоположное ее отказу. Поэтому

$$p = 1 - p(C) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2).$$

Аналогичным образом можно установить, что надежность параллельного соединения k элементов с независимыми отказами равна

$$p = 1 - \prod_{i=1}^k (1 - p_i). \quad (1.5.7)$$

Определим надежность последовательного соединения нескольких элементов, имеющих надежности p_1, p_2, \dots, p_k . В данном случае надежная работа системы представляет собой произведение событий, состоящих в безотказной работе каждого элемента. Если, как и в предыдущем примере, отказы элементов независимы, то

$$p = \prod_{i=1}^k p_i. \quad (1.5.8)$$

§ 6. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Во многих реальных ситуациях то или иное событие A может появиться лишь как случайное следствие одного из несовместимых событий H_1, H_2, \dots, H_n , которые входят в некоторую полную группу событий (но могут ее и не составлять) и называются гипотезами. При этом термин «случайное следствие» означает, что каждая из гипотез H_1, H_2, \dots, H_n может повлечь за собой не только исход A , но и какие-то другие исходы. Схематически такая ситуация изображена на рис. 1.10. Предполагается, что вероятности гипотез $p(H_1), p(H_2), \dots, p(H_n)$ и условные вероятности события A при каждой из гипотез, т. е. вероятности $p(A|H_i)$, известны. Ставится задача,

задача, определить безусловную вероятность события A , т. е. вероятность $p(A)$, при вычислении которой принимаются во внимание все случаи появления события A .

Отметим, что событие A появляется тогда и только тогда, когда осуществляются события AH_1, AH_2, \dots, AH_n (см. рис. 1.10), причем события AH_1, AH_2, \dots, AH_n несовместимы так же, как и сами гипотезы H_1, H_2, \dots, H_n . Поэтому согласно теореме сложения можем написать

$$p(A) = p(AH_1) + p(AH_2) + \dots + p(AH_n). \quad (1.6.1)$$

Для определения вероятности событий AH_i можно применить теорему умножения:

$$p(AH_i) = p(H_i)p(A|H_i).$$

В результате вместо (1.6.1) получим

$$p(A) = \sum_{i=1}^n p(H_i)p(A|H_i). \quad (1.6.2)$$

Полученная формула носит название формулы полной вероятности.

Пример. Однотипная продукция трех рабочих упакована в три одинаковых ящика. Из одного, взятого произвольно, ящика наугад вынимается одна деталь. Чему равна вероятность $p(A)$ того, что деталь окажется бракованной, если есть основания считать, что в первом ящике из 100 деталей негодных 4, во втором из 120 — негодных 6, в третьем из 80 — негодных 8?

Рассмотрим следующие гипотезы: H_1 — деталь взята из первого ящика; H_2 — деталь взята из второго ящика; H_3 — деталь взята из третьего ящика. По условию задачи все гипотезы равновозможны, т. е.

$$p(H_1) = p(H_2) = p(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Условные вероятности события A при каждой из гипотез H_1, H_2 и H_3 в соответствии с (1.2.2) равны:

$$p(A|H_1) = \frac{4}{100}, \quad p(A|H_2) = \frac{6}{120}, \quad p(A|H_3) = \frac{8}{80}.$$

Подставляя найденные значения $p(H_i)$ и $p(A|H_i)$ в формулу полной вероятности, находим

$$p(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{120} + \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{80} = \frac{19}{300}.$$

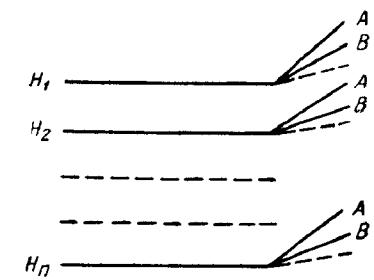


Рис. 1.10. К теореме полной вероятности и теореме гипотез.

§ 7. ФОРМУЛА ОБРАТНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Ситуация, приводящая к формуле обратной вероятности, может быть описана следующим образом. Пусть интересующее нас событие A может появиться лишь как случайное следствие одной из несовместимых гипотез H_1, H_2, \dots, H_n , составляющих полную группу событий (рис. 1.10). Вероятности гипотез $p(H_1), p(H_2), \dots, p(H_n)$ и условные вероятности события A при этих гипотезах $p(A|H_1), p(A|H_2), \dots, p(A|H_n)$ известны. Пусть произведено испытание, и результатом его явилось событие A . Спрашивается, с какой из гипотез следует связывать появление события A ?

Отметим прежде всего, что поскольку изложенная ситуация является вероятностной, то ответ на поставленный вопрос не может быть дан в детерминированной форме и тоже будет иметь вероятностный характер. Для решения необходимо вычислить условную вероятность каждой гипотезы при условии, что произошло событие A , и той из гипотез, которая будет иметь наибольшую вероятность $p(H_i|A)$, следует отдать предпочтение.

Объясним порядок вычисления вероятностей $p(H_1|A), p(H_2|A), \dots, p(H_n|A)$. На основании теоремы умножения вероятностей можно для вероятности совместного появления события A и гипотезы H_i написать

$$p(AH_i) = p(A)p(H_i|A) = p(H_i)p(A|H_i).$$

Последнее равенство дает

$$p(H_i|A) = \frac{p(H_i)p(A|H_i)}{p(A)}.$$

Но по формуле полной вероятности имеем

$$\begin{aligned} p(A) &= p(H_1)p(A|H_1) + p(H_2)p(A|H_2) + \dots + p(H_n)p(A|H_n) = \\ &= \sum_{k=1}^n p(H_k)p(A|H_k). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$p(H_i|A) = \frac{p(H_i)p(A|H_i)}{\sum_{k=1}^n p(H_k)p(A|H_k)}. \quad (1.7.1)$$

Формула (1.7.1) называется формулой обратной вероятности или формулой Байеса. Она имеет основополагающее значение для многих задач радиолокации, радионавигации и связи.

Рассмотрим, например, простейший канал связи с помехами, по которому могут передаваться сигналы только двух видов, условно обозначаемые далее как 0 и 1. Примером подобных сигналов могут

служить сигналы телеграфного кода, представляющие собой определенную последовательность токовых и бестоковых посылок (рис. 1.11).

Относительную частоту следования символов 1 и 0 на передающем конце обозначим как $p(1)$ и $p(0)$; эти вероятности можно найти путем изучения статистики сообщений. Вероятность получения единицы на приемном конце обозначим через $p(1')$, а нуля — через $p(0')$. Здесь и далее штрих при единице или нуле указывает на то, что рассмотрение относится к приемному концу системы.

Особенность работы линии связи в условиях помех состоит в том, что из-за влияния помех сигналы в канале связи искажаются и могут переходить один в другой. Например, токовая посылка телеграфного сигнала в канале связи может «погаснуть» помехой и быть принята за бестоковую, и наоборот.

Вероятность приема 0 при передаче 1 (или, как еще говорят, вероятность перехода 1 в 0) обозначим через $p(0'|1)$; вероятность приема 1 при передаче 1 — через $p(1'|1)$. Аналогичный смысл имеют вероятности $p(1'|0)$, $p(0'|0)$, показанные на рис. 1.12. Все они могут быть найдены изучением механизма воздействия помех на посылаемые сигналы и тоже предполагаются известными.

Ставится вопрос, в каком проценте случаев на приемном конце не будет совершаться ошибки, если при приеме единицы утверждать, что передавалась единица?

Решение задачи мы получим, вычислив условную вероятность $p(1|1')$ того, что передавалась единица при условии получения единицы на приемном конце. Согласно формуле (1.7.1) имеем

$$p(1|1') = \frac{p(1)p(1'|1)}{p(1)p(1'|1) + p(0)p(0'|1)}. \quad (1.7.2)$$

Аналогичным образом вычисляются вероятности $p(0|0')$, $p(0|1')$, $p(1|0')$.

Дляяснения используемой иногда терминологии приведем еще один пример чисто иллюстративного характера. Пусть гражда-

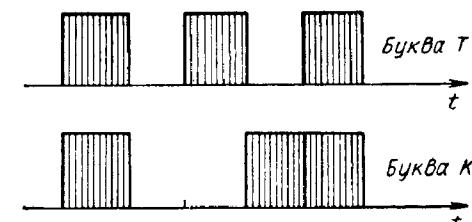


Рис. 1.11. Представление букв Т и К кодом Бодо.

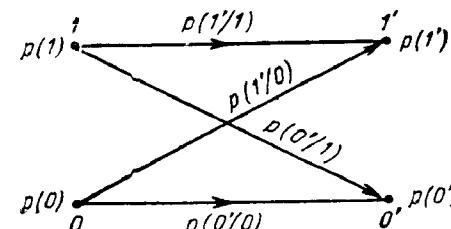


Рис. 1.12. Обозначения вероятностей.

нин N ведет переписку только с двумя корреспондентами H_1 и H_2 . При этом замечено, что на каждое письмо от H_1 приходится в среднем три письма от H_2 , так что $p(H_1) = 1/4$, $p(H_2) = 3/4$. Установлено также, что H_1 половину всех писем для N отправляет в голубых конвертах, а половину — в желтых, т. е. $p(\Gamma | H_1) = 1/2$ и $p(\mathcal{X} | H_1) = 1/2$; H_2 в 90% всех случаев посыпает письма для N в голубых конвертах и только в 10% — в желтых, т. е. $p(\Gamma | H_2) = 9/10$, $p(\mathcal{X} | H_2) = 1/10$. Какому корреспонденту обязан N письмом, если известно, что в ящик ему опущено письмо в желтом конверте?

По формуле (1.7.1) найдем

$$p(H_1 | \mathcal{X}) = 0,625, \quad p(H_2 | \mathcal{X}) = 0,375.$$

Примечательно то, что вероятность события получить письмо от H_1 , первоначально равная 0,25, после опыта (получено письмо в желтом конверте) приобрела иное значение, в данном случае выросла до 0,625. Поэтому в подобных случаях часто говорят о доопытной (априорной) и послеопытной (апостериорной) вероятностях события.

Таким образом, согласно формуле Байеса (1.7.1) при определении того, имела или не имела место гипотеза H_i , следует принять во внимание первоначальные сведения о ней, характеризуемые априорной вероятностью $p(H_i)$, и результаты опыта, т. е. что произошло именно событие A (а не событие B или какое-то другое событие, которым может сопровождаться гипотеза H_i).

§ 8. ТЕОРЕМА О ПОВТОРЕНИИ ОПЫТОВ

Начнем рассмотрение с частного примера. Пусть некто, поражающий мишень в среднем в 8 случаях из 10, делает по ней 3 выстрела. В результате в мишени может оказаться или три пробоины, или две, или одна, или ни одной. Необходимо определить вероятности указанных событий при условии, что результат одного выстрела не влияет на результат другого. Способ решения подобных задач дает теорема о повторении опытов. Такое ее название связано с тем, что изложенную выше ситуацию можно рассматривать как повторение (в данном случае трехкратное) одного и того же опыта в неизменных условиях.

В отвлеченной форме рассматриваемую задачу можно сформулировать следующим образом. Чему равна вероятность того, что при N независимых испытаниях событие A появится ровно n раз, если при каждом испытании вероятность события A одинакова и равна p ?

Заметим, что интересующее нас событие — при N испытаниях A появилось ровно n раз, распадается на несколько частных случаев следующего вида.

1. Событие A появилось в первых n испытаниях и не появилось при $(N - n)$ последующих. Если q — вероятность события, противоположного событию A , т. е. вероятность того, что событие A не появится при некотором испытании, то согласно теореме умножения вероятность такого варианта равна

$$\underbrace{p(A)p(A)\dots p(A)}_{n \text{ раз}} \cdot \underbrace{p(\bar{A})p(\bar{A})\dots p(\bar{A})}_{(N-n) \text{ раз}} = p^n q^{N-n}.$$

2. Событие A не появилось при первом испытании, появилось при n следующих и не появилось при остальных $(N - n - 1)$ испытаниях. Вероятность такого исхода равна

$$\underbrace{p(\bar{A})p(A)p(A)\dots p(A)}_{n \text{ раз}} \underbrace{p(\bar{A})p(\bar{A})\dots p(\bar{A})}_{(N-n-1) \text{ раз}} = p^n q^{N-n}.$$

Всего подобных вариантов, отличающихся один от другого лишь порядком появления события A (что по условиям задачи не имеет значения), сколько можно составить сочетаний из N элементов по n . Следовательно, для искомой вероятности $P_N(n)$ справедлива формула

$$P_N(n) = C_N^n p^n q^{N-n}. \quad (1.8.1)$$

Полученный результат составляет содержание так называемой частной теоремы о повторении опытов. Известно несколько обобщений ее. Одно из них относится к случаю, когда вероятность p меняется от одного испытания к следующему (общая теорема о повторении опытов). Другое имеет в виду, что каждое испытание может иметь не два, а большее число исходов. Особенности этих случаев здесь не рассматриваются.

С помощью формулы (1.8.1) можно решить, кроме рассмотренной, также следующую задачу: чему равна вероятность того, что при N независимых испытаниях событие A , имеющее вероятность p , появится не менее n раз.

В самом деле, рассматриваемое событие распадается на следующие несовместимые случаи: событие A при N испытаниях произошло n раз, событие A произошло $(n+1)$ раз, ..., событие A произошло N раз. Всего таких случаев будет $[N - (n - 1)]$. Вероятность каждого может быть найдена по формуле (1.8.1). Используя далее теорему сложения, получим

$$P_N(m \geq n) = \sum_{m=n}^N C_N^m p^m q^{N-m}. \quad (1.8.2)$$

Аналогичным образом вычисляется вероятность события C , состоящего в том, что при n независимых испытаниях событие A , имеющее вероятность p , появится не более n раз. Она равна

$$P_N(m \leq n) = \sum_{m=0}^n C_N^m p^m q^{N-m}. \quad (1.8.3)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. ОНТИ, 1936.
2. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. Физматгиз, 1962.
3. Левин Б. Р. Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике. Изд-во «Советское радио», 1960.
4. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. Физматгиз, 1961.
5. Боеv Г. П. Теория вероятностей. Гостехиздат, 1950.
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Изд-во «Мир», 1964.
7. Лебедев В. Л. Случайные процессы в электрических и механических системах. Физматгиз, 1958.
8. Сифоров В. И. О методах расчета надежности работы систем, содержащих большое число элементов. «Известия АН СССР», ОТН, 1954, № 6.
9. Саати Т. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. Пер. с англ. Изд-во «Советское радио», 1965.
10. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности. Изд-во «Наука», 1965.

Глава 2

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

§ 1. СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Разным исходам случайного опыта на практике, как правило, приходится придавать различную значимость. По этой причине целесообразно оценивать исход случайного опыта некоторой случайной величиной. Переход от качественного описания явлений к количественному позволяет значительно усилить познавательную ценность применяемых методов и получить ряд новых результатов.

Понятие случайной величины вводится в теории вероятностей следующим образом. Случайной называется величина, которая в результате опыта принимает то или иное значение, какое именно — зависит от случайных обстоятельств опыта и заранее предсказано быть не может.

Примерами случайных величин могут быть: 1) число очков, появляющихся при бросании игральной кости; 2) число искажений в кодовой комбинации из n символов при приеме ее по каналу с помехами; 3) число выстрелов до первого попадания в мишень; 4) время безотказной работы электронной лампы и др.

В первых трех примерах случайная величина является дискретной, а в последнем — непрерывной. Множество значений, которое в результате опыта может принять случайная величина, в первом и втором примерах конечно, а в третьем и четвертом бесконечно. Бесконечное множество бывает счетным (т. е. его элементы, как в примере 3, можно пронумеровать) или несчетным (пример 4).

Для описания случайной величины нужно указать ее возможные значения. Однако характер случайной величины одним таким перечислением ее возможных значений полностью не определяется. Необходимо еще знать, насколько часто будут осуществляться одни значения случайной величины и насколько редко — другие, или, что то же самое, насколько вероятно наступление тех или иных зна-

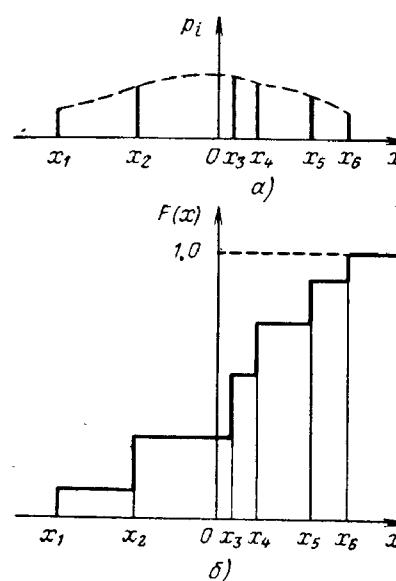


Рис. 2.1. Многоугольник распределения вероятностей (а) и интегральная функция распределения вероятностей (б) дискретной случайной величины.

ной величины может служить формула (1.8.1), позволяющая для любого значения x_i указать соответствующее значение вероятности.

Таблица 2.1.1.
Ряд распределения

x_1	x_2	x_3	...	x_i	...	x_n
p_1	p_2	p_3	...	p_i	...	p_n

Заметим, что если n — число различных возможных значений случайной величины X , то в силу первого следствия теоремы сложения имеем

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1. \quad (2.1.1)$$

Условие (2.1.1) называют условием нормировки закона распределения.

чений случайной величины. Так, в примере 3 для хорошего стрелка наиболее вероятное число выстрелов до первого попадания равно 1 или 2; у плохого эти цифры могут быть большими.

Соотношение, устанавливающее зависимость между возможными значениями дискретной случайной величины и их вероятностями, называется законом распределения этой величины.

Обозначим случайную величину через X , ее возможные значения — через x_i , а соответствующие им вероятности — через p_i . Тогда закон распределения дискретной случайной величины можно задать или графически в виде так называемого многоугольника распределения (рис. 2.1, а), или в виде таблицы (табл. 2.1.1), называемой иногда рядом распределения, или аналитически. Примером аналитического задания закона распределения дискретной случайной величины может служить формула (1.8.1), позволяющая для

любого значения x_i указать соответствующее значение вероятности.

Закон распределения представляет собой полную статистическую характеристику случайной величины. Можно предложить и другие способы ее описания, но они будут либо менее исчерпывающими, либо (в смысле полноты) эквивалентными закону распределения.

Пример 1. Пусть опыт состоит в бросании симметричной игральной кости. Найти закон распределения вероятностей для числа выпавших очков. Возможными значениями случайной величины являются: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Так как события, состоящие в появлении указанного числа очков, равновозможны, то все искомые вероятности одинаковы. Из условия нормировки $\sum_{i=1}^6 p_i = 6p_i = 1$ находим $p_i = 1/6$, $i = 1, 2, \dots, 6$.

Пример 2. Стрельба в мишень производится до первого попадания.

Найти ряд распределения для числа выстрелов, если вероятность попадания равна p . Положив $1 - p = q$, можно составить табл. 2.1.2.

Таблица 2.1.2

Ряд распределения

1	2	3	...	i	...
p	qp	q^2p	...	$q^{i-1}p$...

Действительно, вероятность попадания при первом выстреле равна p . Чтобы поражение цели произошло со второго выстрела, необходимо промахнуться при первом выстреле и попасть при втором. Вероятность такого события по теореме умножения равна qp и т. д.

§ 2. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Понятие закона распределения, введенное в § 1, утрачивает смысл для непрерывных величин. Пусть, например, наугад разрезается пачка некоторой длины L . Поскольку точек, в которых может быть сделан разрез, бесконечно много, то вероятность разрезу совпасть с некоторой конкретной точкой оказывается исчезающе малой (равной нулю).

Универсальной характеристикой, одинаково пригодной как для дискретных, так и для непрерывных случайных величин, является функция распределения.

Функцией распределения или интегральным законом распределения вероятностей называется функция $F(x)$, определяющая вероятность того, что случайная величина X принимает значения меньше x (т. е. из интервала от $-\infty$ до x):

$$F(x) = P(X < x). \quad (2.2.1)$$

Рассмотрим сначала, как строится функция распределения для дискретной случайной величины. Пусть вероятности отдельных значений заданы графиком рис. 2.1, а. Пока аргумент функции $F(x)$ остается меньшим или равным x_1 , функция распределения $F(x)$, очевидно, равна нулю, так как нет ни одного значения x , которое было бы меньше x_1 . В точке $(x_1 + 0)$ функция $F(x)$ скачком принимает значение p_1 и остается постоянной в интервале от x_1 до x_2 . $F(x)$ в точке $(x_2 + 0)$ скачком возрастает до величины $(p_1 + p_2)$, так как событие — принять случайной величине значение, меньшее $(x_2 + 0)$, — распадается на два несовместимых события: принять с вероятностью p_1 значение x_1 и с вероятностью p_2 — значение x_2 . Аналогичным образом производится построение функции распределения при остальных x (рис. 2.1, б).

Укажем свойства функции распределения:

1) $F(-\infty) = 0$. Это свойство отражает тот факт, что нет значений случайной величины, которые были бы меньше, чем отрицательная бесконечность.

2) $F(x)$ — неубывающая функция. Действительно, пусть $x_2 > x_1$. Тогда

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leq X < x_2)$$

или

$$F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 \leq X < x_2). \quad (2.2.2)$$

Так как вероятность не может быть отрицательной величиной, то из последнего соотношения имеем

$$F(x_2) \geq F(x_1), \quad x_2 > x_1.$$

3) $F(\infty) = 1$. Это свойство отражает тот факт, что событие — принять случайной величине значение, меньшее положительной бесконечности, достоверно.

До сих пор речь шла о функции распределения дискретных величин. Однако все рассуждения полностью сохраняют свой смысл и для непрерывных случайных величин. Вернемся, в частности, к примеру по разрезанию нити. Если считать, что любые координаты из интервала от 0 до L равновозможны, то вероятность того, что разрез придется на участок от нуля до x будет равна x/L и, следовательно, $F(x) = x/L$.

В общем случае $F(x)$ будет представлять собой некоторую функцию более сложного вида, удовлетворяющую указанным выше свой-

ствам. У непрерывной случайной величины функция распределения $F(x)$ либо непрерывна (рис. 2.2), либо имеет в некоторых точках разрывы первого рода и непрерывные участки возрастания функции.

Всякая функция распределения обладает еще одним свойством, играющим особую роль для непрерывных случайных величин.

4) Вероятность попадания случайной величины на интервал от x_1 до x_2 равна разности функций распределения в этих точках. Чтобы убедиться в этом, достаточно переписать равенство (2.2.2) иначе:

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) \quad (2.2.3)$$

Это свойство остается в силе и тогда, когда случайная величина является дискретной или дискретно-непрерывной, но при этом необходимо иметь в виду, что под словом «интервал» здесь подразумевается участок, включающий в себя крайнюю левую точку и не включающей правую.

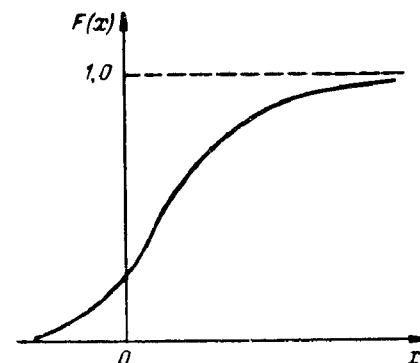


Рис. 2.2. Функция распределения непрерывной случайной величины.

§ 3. ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ

Поставим задачу — найти такую характеристику непрерывной случайной величины, которая позволяла бы судить, насколько одно значение случайной величины более вероятно (или менее вероятно), чем другие. Напомним, что такой характеристикой для дискретных случайных величин является закон распределения.

Ввиду того, что вероятность какого-либо конкретного значения непрерывной случайной величины равна нулю, рассмотрим малый интервал, включающий в себя интересующее значение x , и затем устремим длину этого интервала к нулю.

Итак, пусть задано то или иное значение x . Возьмем некоторое Δx . Предполагая, что функция $F(x)$ дифференцируема и применяя к правой части выражения (2.2.3) теорему Лагранжа, имеем

$$P(x \leq X < x + \Delta x) = F'(x + \theta \Delta x) \Delta x. \quad (2.3.1)$$

Здесь штрих означает символ дифференцирования, θ — число, заключенное между нулем и единицей.

При заданном Δx вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал от x до $x + \Delta x$ тем больше, чем больше

F' в точке $(x + \theta\Delta x)$. Таким образом F' может служить искомой характеристикой. Однако пока эта характеристика не является вполне определенной, так как ее аргумент зависит от произвольно назначаемого Δx . Чтобы устранить эту неопределенность, перейдем в (2.3.1) к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$. Получим

$$dP = F'(x) dx. \quad (2.3.2)$$

Функция $F'(x)$ имеет специальное название плотности вероятности. Введем для нее обозначение $W(x)$:

$$W(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \quad (2.3.3)$$

Учитывая смысл функции $F(x)$, на основании (2.3.3) можно дать следующее определение. Плотностью вероятности случайной величины называется такая функция $W(x)$, которая, будучи умноженной на малую величину Δx , дает вероятность попадания случайной величины в интервал от x до $x + \Delta x$.

Пример. На вход осциллографа с длительностью развертки T в случайные моменты времени поступает узкий импульс засвета. Найти плотность вероятности для координаты точки засвета, если моменты прихода импульса по отношению к началу развертки равновероятны, а временем обратного хода можно пренебречь.

Вероятность прихода импульса в интервал времени от нуля до t пропорциональна t и равна t/T . Следовательно, $F(t) = t/T$. По формуле (2.3.3) найдем

$$W(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{1}{T} = \text{const}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Плотность вероятности $W(t)$ равномерна на интервале $(0, T)$; она изображена на рис. 2.3.

Укажем свойства плотности вероятности.

1. Плотность вероятности неотрицательна. Действительно, плотность вероятности $W(x)$ является производной функции распределения $F(x)$, которая не убывает ни при каких x . Следовательно, $W(x)$ не может быть отрицательной.

2. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал (x_1, x_2) равна интегралу от плотности вероятности в этих пределах:

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} W(x) dx. \quad (2.3.4)$$

Здесь последнее равенство получено путем интегрирования обеих частей соотношения (2.3.3). Графически искомую вероятность можно интерпретировать как площадь, заключенную между кривой $W(x)$ и осью абсцисс в пределах от x_1 до x_2 (рис. 2.4).

3. Интеграл от плотности вероятности, взятый в бесконечных пределах, равен единице. Действительно, из (2.3.3) находим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} W(x) dx &= F(\infty) - \\ &- F(-\infty) = 1 - 0 = 1. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

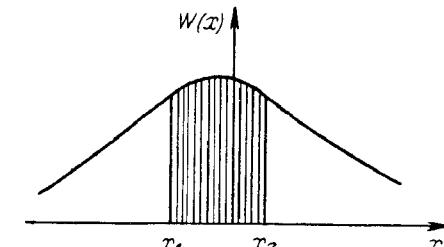


Рис. 2.4. Определение вероятности попадания непрерывной случайной величины в интервал (x_1, x_2) .

Условие (2.3.5) называется условием нормировки плотности вероятности. Из (2.3.5) следует, что $W(x)$ имеет размерность, обратную размерности x .

Заметим, что постоянную величину $a = \text{const}$ можно рассматривать как частный случай случайной величины X , принимающей с вероятностью $p = 1$ одно единственное значение $x = a$. Поэтому плотность вероятности постоянной величины можно формально записать в виде

$$W(x) = \delta(x - a), \quad (2.3.6)$$

где $\delta(z)$ — дельта-функция, определенная соотношением (П.1).

§ 4. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ

В некоторых приложениях полное описание случайной величины при помощи закона распределения может быть заменено более грубым, но зато и более удобным указанием отдельных параметров (числовых характеристик) этого распределения. Наиболее простыми и важными числовыми характеристиками случайной величины являются математическое ожидание и дисперсия.

Математическое ожидание случайной величины X является вероятностным обобщением понятия среднего арифметического. Пусть один и тот же опыт воспроизводится в неизменных условиях N раз, и при этом случайная величина m_1 раз приняла значение x_1 , m_2 раз приняла значение x_2 , ..., m_n раз приняла значение x_n , где $m_1 + m_2 + \dots + m_n = N$.

Найдем среднее арифметическое $M_N(X)$ значений случайной величины X в произведенных N опытах:

$$M_N(X) = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{N} = x_1 \frac{m_1}{N} + x_2 \frac{m_2}{N} + \dots + x_n \frac{m_n}{N}.$$

В достаточно длинной серии испытаний относительные частоты $m_1/N, m_2/N, \dots, m_n/N$ событий, состоящих соответственно в том, что случайная величина принимает значения x_1, x_2, \dots, x_n , группируются около вероятностей $p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_n)$ этих значений. Следовательно, среднее арифметическое значение случайной величины в достаточно длинной серии опытов будет группироваться вокруг величины

$$M(X) = x_1 p(x_1) + x_2 p(x_2) + \dots + x_n p(x_n), \quad (2.4.1)$$

которая называется средним значением или математическим ожиданием случайной величины. Математическое ожидание случайной величины X часто обозначают через m_x .

Итак, математическим ожиданием случайной величины называется значение, около которого группируются в опытах достаточно длины средние арифметические ее наблюдаемых значений.

При этом слово «группируются» следует понимать в том же смысле, в каком оно употреблялось в отношении относительных частот событий, которые группируются при больших N вокруг соответствующих вероятностей. Это значит, что сколько-нибудь существенные отклонения среднего арифметического значений случайной величины в N опытах от математического ожидания при достаточно больших N будут случаться достаточно редко.

Формулу (2.4.1) далее будем записывать в виде

$$M(X) = m_x = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i). \quad (2.4.2)$$

Из (2.4.2) видно, что математическое ожидание имеет размерность исходной случайной величины.

Рассмотрим пример. Предположим, что случайная величина принимает только два значения: единицу с вероятностью p и нуль с вероятностью $(1 - p)$. Чему равно среднее значение случайной величины? По формуле (2.4.2) находим

$$M(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p. \quad (2.4.3)$$

В ряде практических задач бывает необходимо знать математическое ожидание некоторой детерминированной функции случайной величины $\varphi(X)$.

Очевидно, что функция от случайной величины $\varphi(X)$ представляет случайную величину, причем конкретное значение функции $\varphi(x_i)$ осуществляется тогда, когда случайная величина X принимает конкретное значение x_i (табл. 2.4.1).

Таблица 2.4.1

Ряд распределения

x_i	x_1	x_2	\dots	x_n
p_i	p_1	p_2	\dots	p_n
$\varphi(x_i)$	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	\dots	$\varphi(x_n)$

Исходя из формулы (2.4.2) и имея в виду табл. 2.4.1, можно непосредственно найти

$$M(\varphi(X)) = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) p(x_i). \quad (2.4.4)$$

Полагая в этой формуле $\varphi(X) = CX$, где C — постоянная, получим

$$M(CX) = CM(X). \quad (2.4.5)$$

Следовательно, математическое ожидание произведения постоянной величины на случайную равно произведению постоянной на математическое ожидание случайной величины.

Если случайная величина X является непрерывной, то можно привести аналогичные рассуждения, рассматривая непрерывную величину как предельный случай дискретной. Разобъем интервал при приемлемых случайной величиной значений на неперекрывающиеся отрезки достаточно малой длины Δx_i (рис. 2.5). В качестве значений дискретной случайной величины примем значения непрерывной случайной величины в средних точках соответствующих интервалов Δx_i . Вероятность попадания случайной величины в интервал от x_i до $x_i + \Delta x_i$ равна $W(x_i + 1/2\Delta x_i)\Delta x_i$. Для математического ожидания построенной таким образом дискретной случайной величины получим значение $\sum_{i=1}^n x_i W(x_i + 1/2\Delta x_i)\Delta x_i$. Переходя к пределу при $\Delta x_i \rightarrow 0$, для непрерывной случайной величины найдем

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x W(x) dx. \quad (2.4.6)$$

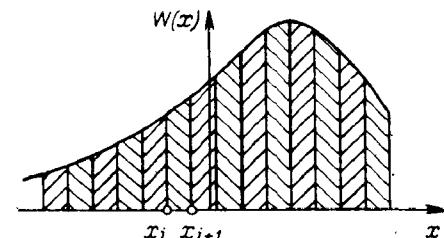


Рис. 2.5. К выводу формулы для математического ожидания непрерывной случайной величины.

Эта формула принимается за определение математического ожидания непрерывной случайной величины.

Формуле (2.4.6) можно дать следующую механическую интерпретацию. Рассмотрим стержень (вообще говоря, бесконечной длины), масса которого меняется по длине пропорционально $W(x)$. Тогда $M(X)$ дает координату центра тяжести этого стержня.

Вычислим среднее значение непрерывной случайной величины, имеющей на отрезке (a, b) равномерное распределение. Учитывая, что плотность вероятности на интервале (a, b) постоянна $W(x) = W_0 = \text{const}$, а вне его равна нулю, из условия нормировки найдем

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x) dx = \int_a^b W_0 dx = (b - a) W_0 = 1; \quad W_0 = 1/(b - a).$$

Поэтому

$$M(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{1}{2}(a+b).$$

Таким образом, математическое ожидание $M(X)$ совпадает с серединой отрезка.

Воспользовавшись плотностью вероятности постоянной величины (2.3.6), из формулы (2.4.6) получим, что среднее значение постоянной величины равно этой постоянной.

Рассуждения, аналогичные тем, которые применялись при получении из (2.4.2) формулы (2.4.6), можно применить и к формуле (2.4.4). Тогда получим следующее выражение для математического ожидания функции от непрерывной случайной величины:

$$M(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) W(x) dx. \quad (2.4.7)$$

При этом размерность $M(\varphi(X))$ совпадает с размерностью $\varphi(X)$.

Довольно часто приходится встречаться с суммой (разностью) и произведением случайных величин. Приведем теоремы для математического ожидания суммы и произведения случайных величин.

Теорема 1. Математическое ожидание суммы (разности) случайных величин равно сумме (разности) их математических ожиданий:

$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y). \quad (2.4.8)$$

Для упрощения вывода предположим, что каждая из случайных величин X и Y имеет лишь два возможных значения: x_1, x_2 с вероятностями p_1, p_2 и y_1, y_2 с вероятностями q_1, q_2 . При этом возможными значениями величины $X \pm Y$ будут $x_1 \pm y_1, x_1 \pm y_2, x_2 \pm y_1, x_2 \pm y_2$. Обозначим вероятности этих значений соответственно через $p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}$.

Из определения математического ожидания (2.4.2) имеем

$$M(X \pm Y) = (x_1 \pm y_1)p_{11} + (x_1 \pm y_2)p_{12} + (x_2 \pm y_1)p_{21} + (x_2 \pm y_2)p_{22}$$

или

$$M(X \pm Y) = x_1(p_{11} + p_{12}) + x_2(p_{21} + p_{22}) \pm y_1(p_{11} + p_{21}) \pm y_2(p_{12} + p_{22}).$$

Покажем, что $p_{11} + p_{12} = p_1$. Событие, состоящее в том, что X примет значение x_1 (вероятность этого события равна p_1), влечет за собой событие, которое состоит в том, что $X \pm Y$ примет значение $x_1 \pm y_1$ или $x_1 \pm y_2$ (вероятность этого события по теореме сложения равна $p_{11} + p_{12}$), и обратно. Отсюда следует, что $p_{11} + p_{12} = p_1$. Аналогично доказываются равенства $p_{21} + p_{22} = p_2, p_{11} + p_{21} = q_1, p_{12} + p_{22} = q_2$. С учетом этих равенств получим формулу (2.4.8):

$$M(X \pm Y) = x_1 p_1 + x_2 p_2 \pm (y_1 q_1 + y_2 q_2) = M(X) \pm M(Y).$$

Аналогичным образом формула (2.4.8) доказывается для суммы (разности) двух случайных величин не только с двумя, а с большим числом возможных значений, а также для суммы (разности) нескольких случайных величин.

Теорема 2. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин X и Y равно произведению их математических ожиданий, т. е. если X и Y независимы, то

$$M(XY) = M(X)M(Y). \quad (2.4.9)$$

Приведем доказательство. Пусть X и Y независимы, причем X принимает значения x_1, x_2, \dots, x_n , вероятности которых p_1, p_2, \dots, p_n , а Y принимает значения y_1, y_2, \dots, y_m с вероятностями q_1, q_2, \dots, q_m . Вероятность того, что X примет значение x_k и одновременно Y примет значение y_l , т. е. вероятность того, что произведение XY примет значение $x_k y_l$, по теореме умножения равна $p_k q_l$. По формуле (2.4.2) найдем

$$M(XY) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m x_k y_l p_k q_l = \left(\sum_{k=1}^n x_k p_k \right) \left(\sum_{l=1}^m y_l q_l \right) = M(X)M(Y).$$

Методом математической индукции эта теорема обобщается на случай нескольких величин.

В заключение введем понятие центрированной случайной величины. Случайная величина называется центрированной, если ее значения отсчитываются относительно математического ожидания. Для центрированной случайной величины применяется обозначение \hat{X} . Таким образом,

$$\hat{X} = X - M(X). \quad (2.4.10)$$

Среднее значение центрированной случайной величины, очевидно, равно нулю. Действительно,

$$M(\hat{X}) = M(X) - M[M(X)] = M(X) - M(X) = 0. \quad (2.4.11)$$

§ 5. МОМЕНТЫ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ. ДИСПЕРСИЯ

Имеются задачи, достаточно полный ответ на которые дает знание только среднего значения случайной величины. Если, например, перегорает осветительная лампа, то обычно это не приводит к каким-нибудь тяжелым последствиям. Заменив ее второй, потом третьей и т. д., интересуются обычно только тем, сколько лампа служит в среднем. Если же элемент является ответственным, то целесообразно предупредить последствия, заменив его несколько раньше ожидаемого выхода из строя. Однако для этого необходимо знать, насколько велик разброс времени безотказной работы относительно его среднего значения.

Другим аналогичным примером могут служить артиллерийские стрельбы. Может оказаться, что математические ожидания двух стрельб совпадают, но в одном из этих случаев стрельба будет кучной, а в другом — чрезмерно рассеянной.

В качестве меры рассеяния случайной величины в теории вероятностей вводится специальная характеристика — дисперсия.

Дисперсией называется математическое ожидание квадрата соответствующей центрированной случайной величины. Дисперсия случайной величины обозначается через σ_x^2 [иногда ее обозначают $D(X)$]. Согласно определению и формулам (2.4.4) и (2.4.7), дисперсия дискретной случайной величины определяется выражением

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 p_i, \quad (2.5.1)$$

а дисперсия непрерывной случайной величины — формулой

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 W(x) dx. \quad (2.5.2)$$

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины. В связи с этим часто пользуются еще одной характеристикой рассеяния — средним квадратичным отклонением случайной величины, которое определяется как квадратный корень из дисперсии. Среднее квадратичное отклонение (СКО) обозначается через σ_x и имеет размерность, совпадающую с размерностью случайной величины.

Пусть случайная величина принимает только два значения: единицу с вероятностью p и нуль с вероятностью $q = 1 - p$. Чему

равна дисперсия случайной величины? Согласно (2.4.3) математическое ожидание рассматриваемой случайной величины равно p . Поэтому по формуле (2.5.1) получим

$$\sigma^2 = (1 - p)^2 p + (0 - p)^2 (1 - p) = p(1 - p) = pq. \quad (2.5.3)$$

Видно, что дисперсия максимальна при $p = q = 1/2$.

Пользуясь формулами (2.5.1) и (2.5.2), нетрудно убедиться, что дисперсия случайной величины $Y = CX$, где C — постоянная, равна:

$$\sigma_y^2 = C^2 \sigma_x^2. \quad (2.5.4)$$

Следовательно, постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат.

Приведем выражение, устанавливающее связь дисперсии с математическим ожиданием нецентрированной случайной величины. Используя теорему о математическом ожидании суммы, найдем

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= M[(X - m_x)^2] = M(X^2 - 2m_x X + m_x^2) = \\ &= M(X^2) - 2m_x M(X) + m_x^2 \end{aligned}$$

или

$$\sigma_x^2 = M(X^2) - m_x^2. \quad (2.5.5)$$

Формулой (2.5.5) часто пользуются при вычислении дисперсии.

Весьма полезным является соотношение, связывающее дисперсию суммы с дисперсиями слагаемых. Дисперсия суммы (разности) независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$\sigma_{(x \pm y)}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2. \quad (2.5.6)$$

Докажем формулу (2.5.6). В соответствии с определением

$$\begin{aligned} \sigma_{(x \pm y)}^2 &= M[(X \pm Y - M(X \pm Y))^2] = M[(X - m_x \pm Y \mp m_y)^2] = \\ &= M(\hat{X}^2) + M(\hat{Y}^2) \pm 2M(\hat{X}\hat{Y}). \end{aligned}$$

Так как X и Y независимы, то $M(\hat{X}\hat{Y}) = M(\hat{X})M(\hat{Y})$. Но математическое ожидание любой центрированной величины равно нулю, т. е. $M(\hat{X}) = M(\hat{Y}) = 0$. Поэтому

$$\sigma_{(x \pm y)}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2.$$

Отметим, что в отличие от математического ожидания дисперсия разности независимых случайных величин равна сумме, а не разности дисперсий слагаемых.

Рассмотрим пример. Пусть производится N независимых измерений некоторой физической величины. Результат x_i каждого

измерения можно рассматривать как случайную величину с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2 . Требуется найти математическое ожидание m_x и дисперсию σ_x^2 среднего арифметического результата измерений

$$X = \frac{1}{N} (x_1 + x_2 + \dots + x_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (2.5.7)$$

Пользуясь свойствами математического ожидания (2.4.5) и (2.4.8), получим

$$m_x = M(X) = m. \quad (2.5.8)$$

При вычислении дисперсии случайной величины X нужно к центрированной случайной величине

$$\hat{X} = \frac{1}{N} (\overset{\circ}{x}_1 + \overset{\circ}{x}_2 + \dots + \overset{\circ}{x}_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \overset{\circ}{x}_i$$

применить формулы (2.5.4) и (2.5.6). В результате получим

$$\sigma_x^2 = \sigma^2/N. \quad (2.5.9)$$

Следовательно, дисперсия среднего арифметического N взаимно независимых одинаковых случайных величин в N раз меньше дисперсии каждой из величин.

Более общими числовыми характеристиками, чем математическое ожидание и дисперсия, являются моменты случайной величины. Различают начальные и центральные моменты.

Начальным моментом k -го порядка случайной величины называется математическое ожидание k -й степени случайной величины. Центральным моментом k -го порядка называется математическое ожидание k -й степени от центрированной случайной величины.

По определению для начального момента k -го порядка дискретной и непрерывной величин можем написать соответственно формулы:

$$M(X^k) = \sum_{i=1}^n x_i^k p_i, \quad (2.5.10)$$

$$M(X^k) = m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k W(x) dx. \quad (2.5.11)$$

Аналогично записываются формулы для центральных моментов k -го порядка:

$$M(\overset{\circ}{X}^k) = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^k p_i, \quad (2.5.12)$$

$$M(\overset{\circ}{X}^k) = \mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k W(x) dx. \quad (2.5.13)$$

Согласно приведенным определениям математическое ожидание случайной величины представляет собой начальный момент первого порядка, а дисперсия—центральный момент второго порядка. Формулы (2.5.10) —(2.5.13) позволяют выразить центральные моменты через начальные, и наоборот.

Зная плотность вероятности случайной величины или ее закон распределения, можно по формулам (2.5.10)—(2.5.13) найти момент любого порядка. Оказывается, можно решить также и обратную задачу. Для того чтобы по моментам определить закон распределения дискретной случайной величины, принимающей n значений, достаточно знать n первых (нижних) моментов. Для точного определения плотности вероятности непрерывной величины необходимо, вообще говоря, бесчисленное множество моментов.

§ 6. БИНОМИАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

К биномиальному закону приводят чрезвычайно распространенная задача повторения опытов. Если вероятность некоторого события A равна p , то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A при n опытах появится k раз определяется формулой (1.8.1) и равна $C_n^k p^k q^{n-k}$, где $q = 1 - p$. Распределение, общий член которого равен

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! k!} p^k q^{n-k}, \quad (2.6.1)$$

называется биномиальным. Такое название связано с тем, что вероятности $P_n(k)$ можно рассматривать как коэффициенты при k -й степени разложения бинома $(pv + q)^n$ в ряд по степеням вспомогательной величины v :

$$(pv + q)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} v^k. \quad (2.6.2)$$

Полагая в формуле (2.6.2) $v = 1$, получаем условие нормировки биномиального распределения

$$\sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = 1. \quad (2.6.3)$$

Вычислим математическое ожидание $M(k)$ числа появлений события A при n испытаниях. Для этого проинтегрируем обе части равенства (2.6.2) по v . В результате получим

$$np(pv + q)^{n-1} = \sum_{k=0}^n k C_n^k p^k q^{n-k} v^{k-1}. \quad (2.6.4)$$

Положив $v=1$, найдем

$$np = \sum_{k=0}^n k P_n(k) = M(k). \quad (2.6.5)$$

Следовательно, математическое ожидание равняется np . Этот результат можно было предсказать заранее из физических соображений.

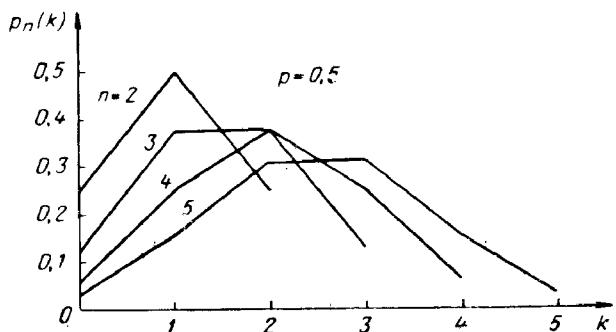


Рис. 2.6. Биномиальный закон распределения вероятностей дискретной случайной величины.

Умножим обе части равенства (2.6.4) на v и вновь продифференцируем по v полученное произведение. Тогда придем к равенствам:

$$npv(pv+q)^{n-1} = \sum_{k=0}^n k C_n^k p^k q^{n-k} v^k,$$

$$n(n-1)p^2v(pv+q)^{n-2} + np(pv+q)^{n-1} = \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k p^k q^{n-k} v^{k-1}.$$

Положив $v=1$, получим

$$n(n-1)p^2 + np = \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^n k^2 P_n(k) = M(k^2).$$

Отсюда по формуле (2.5.5) определяем дисперсию числа появлений события A при n испытаниях:

$$\sigma_k^2 = M(k^2) - M^2(k) = npq. \quad (2.6.6)$$

Как следует из полученных формул, отношение среднего квадратичного отклонения числа k появлений события A к математическому ожиданию обратно пропорционально квадратному корню из n . Иными словами, с увеличением числа опытов относительное рассеяние величины k уменьшается, в то время как абсолютное — увеличивается.

Примеры биномиального распределения приведены на рис. 2.6.

В качестве одного из приложений биномиального закона рассмотрим задачу о случайнных блужданиях. Пусть частица, имеющая возможность перемещаться лишь вдоль оси X (рис. 2.7), испытывает случайные толчки. В результате каждого толчка частица перемещается либо на единицу масштаба влево, либо на единицу масштаба вправо. Считается, что каждый из таких шагов происходит совершенно независимо от других, причем вероятность того, что перемещение произойдет на шаг вправо, равна p , а на шаг в противоположном направлении равна $q = 1 - p$. После n шагов частица, находящаяся первоначально в начале отсчета, может оказаться в одной из точек: $-n, -n+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, n-1, n$. Ставится задача — найти вероятность $P_n(m)$ того, что после n шагов частица окажется в точке m .

Обозначим через k число шагов, которые совершила частица вправо. Тогда число шагов, сделанных влево, равно $(k-m)$ (см. рис. 2.7). Учитывая, что общее число шагов равно n , т. е.

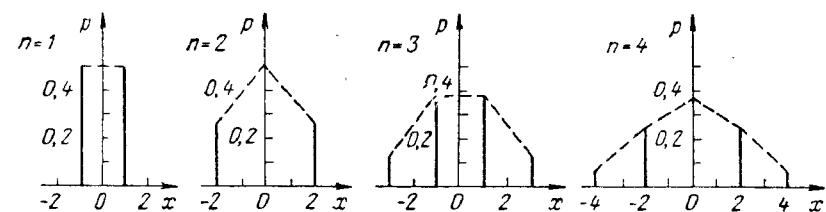


Рис. 2.8. Эволюция закона распределения для координаты частицы, совершающей случайное блуждание.

$k + (k-m) = n$, найдем, что число шагов, сделанных вправо, должно быть равно $(n+m)/2$, а число шагов, сделанных влево, равно $(n-m)/2$.

Таким образом, событие, состоящее в том, что после n шагов частица придет в точку m , осуществляется тогда и только тогда, когда из общего числа n шагов вправо будет сделано ровно $(n+m)/2$ шагов. Так как порядок, в котором следуют друг за другом шаги в одном и другом направлениях, не играет роли, то вероятность такого события равна

$$P_n(m) = C_n^{(n+m)/2} p^{\frac{n+m}{2}} q^{\frac{n-m}{2}}. \quad (2.6.7)$$

Учитывая свойства биномиального распределения, заключаем, что с увеличением числа шагов n дисперсия числа m (координаты

частицы) возрастает. Любопытно проследить эволюцию формы распределения, начиная с $n = 1$. Случаи $n = 1, 2, 3, 4$ при $p = q = \frac{1}{2}$ изображены на рис. 2.8. Можно показать, что при неограниченном увеличении n распределение (2.6.6) сходится к так называемому нормальному закону (см. § 8).

§ 7. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

Биномиальный закон распределения весьма часто приходится применять в условиях, когда число независимых испытаний n велико. Вычисления по формуле (2.6.1) при этом усложняются. Поэтому представляют интерес асимптотические приближения для биномиального закона, справедливые при больших n . Здесь могут встретиться следующие два случая:

1) Когда $n \rightarrow \infty$, np тоже неограниченно возрастает (случай постоянного p); при этом биномиальное распределение сходится к нормальному закону.

2) При $n \rightarrow \infty$ произведение $np = \lambda$, т. е. математическое ожидание рассматриваемой величины, остается конечным (это означает, что вероятность события $p = \lambda/n$ мала); в данном случае биномиальное распределение сходится к закону Пуассона.

Рассмотрим здесь второй случай, начав с примера. Пусть известно, что на телефонную станцию в течение одного часа поступит 120 вызовов. Вызовы независимы один от другого и поступают в случайные моменты времени. Чему равна вероятность того, что за некоторую минуту этого часа поступит 0, 1, 2, ..., k ... вызовов?

Сформулированную задачу можно рассматривать как последовательность из 120 независимых испытаний, каждое из которых состоит в том, что проверяется, попал или нет в заданный интервал (здесь длиной в 1 мин) 1-й вызов, 2-й вызов и т. д. Вероятность того, что некоторое случайное событие, происходящее на интервале T , попадает на его часть длиной t , равна t/T (см. пример в конце § 3) и в данном случае составляет $1/60$. Эта вероятность в условиях задачи мала, однако математическое ожидание такого события при большом числе испытаний ($n = 120$) сохраняет конечное значение ($np = 120 \cdot \frac{1}{60} = 2$).

Итак, рассмотрим асимптотическое представление биномиального закона (2.6.1), когда n — велико, p — мало, а $np = \lambda$ имеет конечное значение. Если в формулу (2.6.1) подставить $p = \lambda/n$, то можно написать

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)]}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

Имея в виду, что n имеет очень большое значение, вместо $P_n(k)$ найдем $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(k)$:

$$\begin{aligned} P_n(k) &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \right] = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}. \end{aligned}$$

Воспользуемся хорошо известными из теории пределов формулами:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n &= e^{-\lambda}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} &= 1. \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

Тогда окончательно получим

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \quad (2.7.2)$$

Распределение вероятностей, определяемое формулой (2.7.2), называется распределением Пуассона. Несколько примеров этого распределения приведены на рис. 2.9.

Как указывалось ранее, параметр $\lambda = np$ имеет смысл математического ожидания. В этом нетрудно убедиться непосредственным вычислением по формуле (2.4.2). Действительно,

$$\begin{aligned} m_k &= \sum_{k=0}^{\infty} k P_n(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\mu}}{\mu!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda. \end{aligned} \quad (2.7.3)$$

Покажем, что дисперсия пуассоновского распределения тоже равна λ . Для этого по формуле (2.5.6) вычислим сначала второй начальный момент:

$$\begin{aligned} M(k^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} [(k-1)+1] \times \\ &\times \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \left[\sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} \right]. \end{aligned}$$

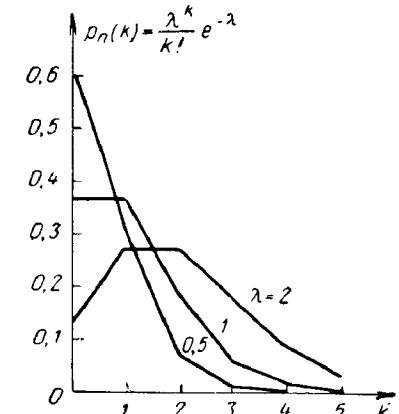


Рис. 2.9. Закон Пуассона.

Но

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \mu \frac{e^{\lambda}}{\mu!} e^{-\lambda} = \lambda, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = 1.$$

Поэтому

$$M(k^2) = \lambda(\lambda+1).$$

Дисперсия величины k равна

$$\sigma_k^2 = M(k^2) - m_k^2 = \lambda(\lambda+1) - \lambda^2 = \lambda. \quad (2.7.4)$$

Следовательно, дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона, равна ее математическому ожиданию.

Следует указать, что распределение Пуассона (2.7.2) в ряде задач выступает не как асимптотическое, а как совершенно точное. Нетрудно, например, убедиться в том, что для рассмотренного выше примера распределение Пуассона дает точное решение, если считать, что указанное в условии число вызовов представляет собой среднее число вызовов за 1 час. Действительно, как всякое среднее значение, это число должно выводиться из результатов наблюдений на интервале времени, значительно превышающем 1 час. При этом общее число испытаний $n \rightarrow \infty$ и, следовательно, условия применимости закона Пуассона точно выполняются.

Однако наиболее часто приходится сталкиваться с распределением событий во времени (появление импульсов или электронов, поступление заявок или требований и т. д.). В этой связи приведем еще один вывод закона Пуассона, который позволит более четко установить условия его возникновения и пределы применимости.

Последовательность событий, происходящих друг за другом в некоторые моменты времени t_1, t_2, t_3, \dots , принято называть потоком. Геометрически поток событий можно изобразить в виде точек на оси времени. Различают регулярные и случайные потоки. Рассмотрим случайный поток, обладающий тремя специальными свойствами: стационарности, отсутствия последействия и ординарности.

В стационарном потоке вероятность наступления некоторого числа событий в течение заданного отрезка времени τ зависит только от величины этого отрезка и не зависит от начала отсчета времени; в геометрической трактовке имеет значение только длина отрезка τ и не имеет значения — далеко или близко он расположен по отношению к началу отсчета.

Отсутствие последействия в потоке означает, что отдельные события в нем происходят независимо одно от другого, так что «сгущения» событий на одном интервале не приводят к обязательным их «разрежениям» на другом. Математически это требование формулируется следующим образом: для любых неперекрывающихся

отрезков времени число событий на одном из них не зависит от числа событий на другом.

Наконец, свойство ординарности потока заключается в том, что вероятность наступления двух или более событий на достаточно малом интервале времени является исчезающе малой в сравнении с вероятностью наступления одного события. Иными словами, ординарным следует считать поток относительно редких событий.

Покажем теперь, что для вероятности наступления за время τ ровно k событий справедлива формула

$$P(k, \tau) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad (2.7.5)$$

где λ — среднее число событий в потоке, приходящееся на интервал длительности τ .

Если обозначить через v среднее число событий в потоке за единицу времени, то формулу (2.7.5) можно записать в виде

$$P(k, \tau) = \frac{(v\tau)^k}{k!} e^{-v\tau}. \quad (2.7.6)$$

Докажем ее справедливость при $k = 0$. Предположим, что вероятность $P(0, \tau)$ отсутствия событий на интервале τ известна. Вычислим вероятность $P(0, \tau + \Delta\tau)$, где $\Delta\tau$ — достаточно малый отрезок. Заметим, что отсутствие точек на отрезке $\tau + \Delta\tau$ есть событие, которое можно представить в виде произведения двух событий A и B : одно из них есть отсутствие точек на интервале τ , второе — отсутствие точек на интервале $\Delta\tau$. В силу независимости этих событий (отсутствие последействия в потоке) имеем

$$P(0, \tau + \Delta\tau) = P(0, \tau)P(0, \Delta\tau). \quad (2.7.7)$$

Но

$$P(0, \Delta\tau) = 1 - P(1, \Delta\tau) - P(2, \Delta\tau) - \dots \approx 1 - P(1, \Delta\tau),$$

так как в силу ординарности потока вероятностью наступления за время $\Delta\tau$ двух и более событий можно пренебречь.

Остается найти $P(1, \Delta\tau)$. С этой целью запишем выражение для математического ожидания числа точек на интервале $\Delta\tau$. С одной стороны, оно равно $v\Delta\tau$, а с другой, —

$$0 \cdot P(0, \Delta\tau) + 1 \cdot P(1, \Delta\tau) + 2 \cdot P(2, \Delta\tau) + \dots \approx P(1, \Delta\tau).$$

Следовательно,

$$P(0, \Delta\tau) = 1 - v\Delta\tau \quad (2.7.8)$$

и

$$P(0, \tau + \Delta\tau) = P(0, \tau)(1 - v\Delta\tau). \quad (2.7.9)$$

При $\Delta\tau \rightarrow 0$ из последнего соотношения имеем

$$\frac{dP(0, \tau)}{d\tau} = -vP(0, \tau). \quad (2.7.10)$$

Интегрирование этого уравнения при очевидном начальном условии $P(0, 0)=1$ дает

$$P(0, \tau) = e^{-vt}, \quad (2.7.11)$$

что совпадает с (2.7.6) при $k = 0$. Аналогичным образом могут быть получены формулы для других k .

§ 8. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Как уже отмечалось, при некоторых условиях биномиальный закон сходится к дискретному нормальному (или гауссову) распределению. Неограниченным уменьшением интервала между соседними значениями случайной величины от дискретного распределения можно перейти к непрерывному. Однако нормальный закон распределения вероятностей применим в гораздо более широких условиях и вследствие этого он играет совершенно особую роль среди других законов распределения.

В теории вероятностей доказывается, что плотность вероятности суммы независимых или слабо зависимых, равномерно малых (т. е. играющих примерно одинаковую роль) слагаемых при неограниченном увеличении их числа как угодно близко приближается к нормальному закону распределения независимо от того, какие законы распределения имеют эти слагаемые (центральная предельная теорема А. М. Ляпунова).

Если принять во внимание, что необходимость в вероятностном описании явлений чаще всего возникает тогда, когда приходится учитывать большое число случайных факторов, имеющих примерно одинаковый порядок малости, то станет ясным, как часто встречается при описании случайных величин нормальный закон. Он, кроме того, имеет ряд других замечательных свойств, которые будут указаны позже.

Плотность вероятности нормально распределенной случайной величины в ненормированной форме имеет вид

$$w(x) = C \exp \left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right], \quad (2.8.1)$$

где m и σ — параметры распределения (имеющие конечные значения);

C — некоторая постоянная.

Произведем нормировку распределения. Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx = C \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right] dx = 1.$$

Полагая $t = (x-m)/\sigma\sqrt{2}$, приведем последнее соотношение к виду

$$C\sigma\sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = 1. \quad (2.8.2)$$

Так как $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, то из (2.8.2) найдем

$$C = 1/\sigma\sqrt{2\pi}.$$

Распределение (2.8.1) примет теперь свою стандартную форму

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right]. \quad (2.8.3)$$

Остается выяснить смысл параметров m и σ . В этой связи найдем математическое ожидание случайной величины X , плотность вероятности которой определяется формулой (2.8.3):

$$\begin{aligned} M(X) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp \left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right] dx = \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m) \exp \left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right] dx + \\ &\quad + m \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right] dx. \end{aligned}$$

Первый из полученных интегралов равен нулю, так как подынтегральная функция является нечетной. Выражение

$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right] dx$ по условию нормировки равно единице.

Таким образом,

$$M(X) = m, \quad (2.8.4)$$

т. е. параметр m имеет смысл среднего значения.

Найдем также дисперсию нормально распределенной случайной величины:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 \exp \left[-\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2} \right] dx.$$

Обозначая $t = (x - m)/\sigma \sqrt{2}$, приведем это выражение к виду

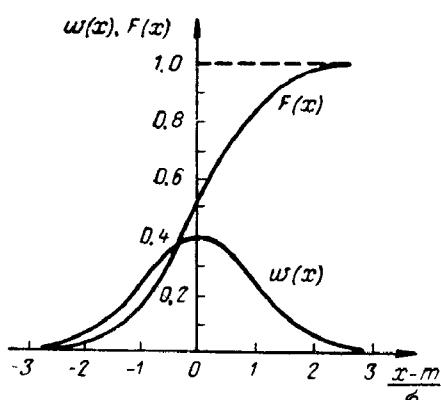


Рис. 2.10. Плотность вероятности $w(x)$ и функция распределения вероятностей $F(x)$ непрерывной случайной величины при нормальном законе распределения.

Функция распределения вероятностей случайной величины согласно (2.3.3) записывается следующим образом:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp \left[-\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2} \right] dx \quad (2.8.6)$$

и тоже изображена на рис. 2.10.

Вычислим вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал. Согласно (2.3.4) имеем

$$P(a \leq X < b) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp \left[-\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2} \right] dx.$$

Переходя к новой переменной $t = (x - m)/\sigma$, получим

$$P(a \leq X < b) = \Phi \left(\frac{b - m}{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{a - m}{\sigma} \right), \quad (2.8.7)$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{1}{2} t^2} dt \quad (2.8.8)$$

— табулированный интеграл вероятности (см. приложение IV).

Пользуясь таблицами функции $\Phi(z)$ и формулой (2.8.7), можно установить, что вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в интервал от $-\sigma$ до σ относительно среднего значения равна 0,683, в интервал $(-2\sigma, 2\sigma)$ равна 0,954 и в интервал $(-3\sigma, 3\sigma)$ равна 0,997.

§ 9. ДРУГИЕ ЧАСТО ВСТРЕЧАЮЩИЕСЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Кроме нормального распределения и распределения Пуассона при теоретическом и экспериментальном изучении случайных величин могут встречаться распределения других видов. Число возможных распределений очень велико, так как любую неотрицательную функцию $W(x) \geq 0$, удовлетворяющую условию нормировки, можно рассматривать как плотность вероятности некоторой случайной величины. Ниже приведены наиболее часто встречающиеся в приложениях распределения и кратко указаны некоторые условия их применения.

1. **Логарифмически нормальное распределение.** Предположим, что большое число n независимых импульсов ξ_1, \dots, ξ_n действует на некоторое устройство в порядке возрастания их индексов. Обозначим через x_i суммарный эффект, достигнутый в результате действия импульсов ξ_1, \dots, ξ_i . В некоторых случаях можно считать, что прирост, вызванный импульсом ξ_{i+1} , достаточно мал и пропорционален ξ_{i+1} и некоторой функции $g(x_i)$:

$$x_{i+1} - x_i = \xi_{i+1} g(x_i).$$

Рассмотрим сумму

$$\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{g(x_i)}.$$

Так как прирост от каждого импульса мал, то приближенно

$$\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n = \int_{x_0}^x \frac{ds}{g(s)}, \quad (2.9.1)$$

где $x = x_n$ обозначает окончательный эффект, а x_0 — начальное значение.

Согласно центральной предельной теореме Ляпунова при большом числе n независимых импульсов ξ_i сумма (2.9.1) будет распределена нормально. Полагая $g(s) = s$ (прирост от каждого импульса прямо пропорционален уже накопившемуся эффекту и воздействующему импульсу), получим, что величина $\lg x$ распределена нормально.

Случайная величина x называется распределенной логарифмически нормально, если логарифм этой случайной величины распределен нормально. Используя известное свойство инвариантности дифференциала вероятности, нетрудно записать логарифмически нормальную плотность вероятности:

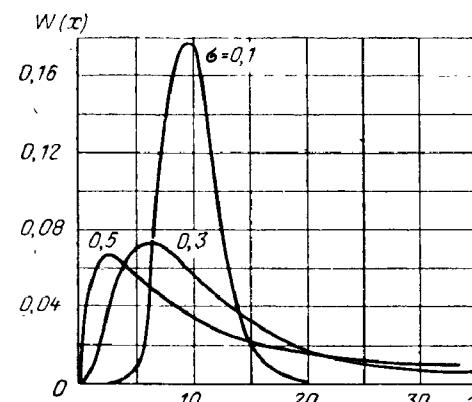


Рис. 2.11. Графики плотности вероятности логарифмически нормального распределения при $\lg m = 1$ и $\sigma = 0,1; 0,3; 0,5$.

где $\mu = \lg e = 0,4343$. Абсцисса, соответствующая максимуму плотности вероятности, равна $m \cdot 10^{-\sigma^2/\mu}$. Угловые скобки обозначают операцию математического ожидания.

На рис. 2.11 изображены три кривые плотности логарифмически нормального распределения для $\lg m = 1$ и трех значений σ . Для $\sigma = 0,5$ и $0,3$ кривые заметно асимметричны, а при $\sigma = 0,1$ плотность вероятности не сильно отличается от нормальной.

2. Гамма-распределение. Гамма-распределение задается плотностью вероятности

$$W(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta \Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha e^{-\frac{x}{\beta}} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0, \end{cases} \quad (2.9.4)$$

где действительные числа $\alpha > -1$ и $\beta > 0$ представляют параметры распределения и $\Gamma(\alpha+1)$ — гамма-функция:

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^\alpha dt.$$

На основании общей формулы начальные моменты равны

$$\langle x^n \rangle = \beta^n (\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + n). \quad (2.9.5)$$

Нетрудно установить, что два параметра гамма-распределения α и β определяются через среднее значение m_x и дисперсию σ_x^2 по формулам

$$\alpha = \left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right)^2 - 1, \quad \beta = \frac{\sigma_x^2}{m_x}. \quad (2.9.6)$$

Графики плотности вероятности (2.9.4) при $\beta = 1$ для трех значений $\alpha = 0, 1, 3$ представлены на рис. 2.12. При больших значениях α гамма-распределение переходит в нормальное. Этот результат следует из того факта, что гамма-распределение (2.9.4) справедливо для суммы $(\alpha+1)$ независимых величин $x = \sum_{i=1}^{\alpha+1} x_i$, каждая из которых имеет одинаковую плотность вероятности $W(x_i) = \frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{x_i}{\beta}\right)$, $x_i > 0$, получающуюся из (2.9.4) при $\alpha = 0$. Согласно центральной предельной теореме плотность вероятности суммы при увеличении числа слагаемых стремится к нормальному.

Если в формуле (2.9.4) положить $\beta = 1/\lambda$ и $\alpha = k$, где k — целое положительное число, то получим плотность вероятности Эрланга:

$$W(x) = \frac{\lambda^k (x\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda x}, \quad x > 0. \quad (2.9.7)$$

Эта формула широко используется в теории надежности и массового обслуживания.

3. χ^2 -распределение. Пусть имеется n независимых нормально-распределенных случайных величин x_1, x_2, \dots, x_n , причем все они нормированы (имеют нулевое среднее значение и одинаковую дисперсию $\sigma_i^2 = 1$). Сумма квадратов этих случайных величин обозначается через χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad (0 \leq \chi^2 < \infty) \quad (2.9.8)$$

и n называется числом степеней свободы χ^2 .

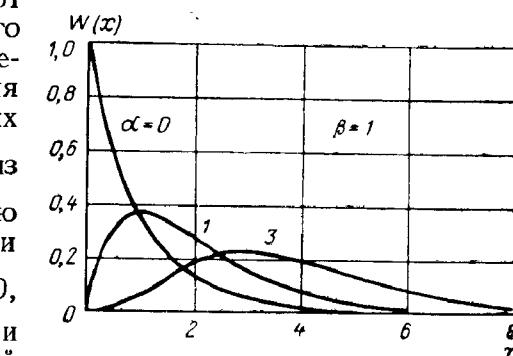


Рис. 2.12. Графики плотности вероятности гамма-распределения при $\beta=1$ и $\alpha=0; 1; 3$.

Плотность вероятности $W(\chi^2)$ зависит только от n , так как рассматривается сумма квадратов нормированных случайных величин. Она определяется формулой

$$W(\chi^2) = \frac{1}{\frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} (\chi^2)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}\chi^2}, \quad \chi^2 \geq 0. \quad (2.9.9)$$

Из выражения (2.9.8) видно, что $\langle \chi^2 \rangle = n$, т. е. среднее значение χ^2 равно числу степеней свободы. Непосредственной проверкой

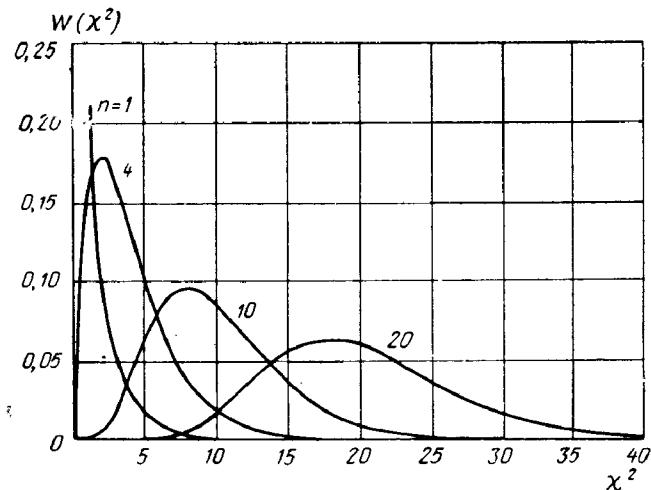


Рис. 2.13. Графики плотности вероятности χ^2 при $n=1, 4, 10$ и 20 .

нетрудно установить, что плотность вероятности χ^2 -распределения (2.9.9.) является частным случаем гамма-распределения (2.9.4) со значениями параметров $\alpha = \frac{n}{2} - 1$ и $\beta = 2$.

Графики плотности вероятности χ^2 для $n = 1, 4, 10$ и 20 приведены на рис. 2.13. Из основной формулы (2.9.9) при $n = 1$ имеем

$$W(\chi^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\chi^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \quad (n=1).$$

Плотность вероятности всюду убывает, причем оси координат являются асимптотами. При $n = 2$ получим

$$W(\chi^2) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \quad (n=2).$$

В данном случае плотность вероятности является убывающей экспоненциальной кривой. При $n = 3$ имеем

$$W(\chi^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\chi^2)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \quad (n=3).$$

Кривая плотности вероятности начинается в начале координат и возрастает до абсциссы $\chi^2 = 1$, после чего убывает, асимптотически приближаясь к оси абсцисс. При дальнейшем увеличении числа степеней свободы асимметричность кривой уменьшается.

Если независимые случайные величины x_1, x_2, \dots, x_n нормально распределены и каждая из них имеет нулевое среднее значение и одинаковую дисперсию $\sigma_i^2 = \sigma^2$, то плотность вероятности для суммы квадратов этих величин

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (2.9.10)$$

будет иметь вид

$$W(\chi^2) = \frac{1}{\frac{n}{2} \sigma^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} (\chi^2)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\chi^2/2\sigma^2}, \quad \chi^2 \geq 0. \quad (2.9.11)$$

4. Распределение Накагами (m -распределение). При распространении радиоволн через среду со случайными неоднородностями (в частности, ионосферу или тропосферу) сигнал в точке приема подвержен замираниям (фдингам). Это объясняется тем, что принимаемый сигнал представляет собой сумму нескольких составляющих $r_i e^{j\theta_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), проходящих различные пути, причем амплитуды r_i и фазы θ_i отдельных составляющих изменяются во времени случайным образом. Определим огибающую сигнала в точке приема R равенством

$$R = \left| \sum_{i=1}^n r_i e^{j\theta_i} \right| = |a + jb|, \quad a = \sum_{i=1}^n r_i \cos \theta_i, \quad b = \sum_{i=1}^n r_i \sin \theta_i. \quad (2.9.12)$$

При некоторых предположениях относительно статистических характеристик величин r_i и θ_i плотность вероятности огибающей приближенно дается формулой Накагами:

$$W(R) = \frac{2}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\Omega} \right)^m R^{2m-1} e^{-\frac{m}{\Omega} R^2}, \quad R \geq 0, \quad m \geq \frac{1}{2}. \quad (2.9.13)$$

Два параметра этого распределения m и Ω определяются соотношениями

$$m = \frac{\langle R^2 \rangle^2}{\langle [R^2 - \langle R^2 \rangle]^2 \rangle} \geq \frac{1}{2}, \quad \Omega = \langle R^2 \rangle, \quad (2.9.14)$$

а для начальных моментов справедлива следующая формула:

$$\langle R^n \rangle = \frac{\Gamma\left(m + \frac{n}{2}\right)}{\Gamma(m)} \left(\frac{\Omega}{m}\right)^{\frac{n}{2}}. \quad (2.9.15)$$

При $m = 1/2$ формула (2.9.13) переходит в одностороннюю нормальную плотность вероятности

$$W(R) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\Omega 2\pi}} \exp\left(-\frac{R^2}{2\Omega}\right), & R \geq 0, \\ 0, & R < 0. \end{cases} \quad (2.9.16)$$

Если $m=1$, то из (2.9.13) получим плотность вероятности Релея:

$$W(R) = \frac{2R}{\Omega} \exp\left(-\frac{R^2}{\Omega}\right), \quad R \geq 0. \quad (2.9.17)$$

При $m > 1$ формула (2.9.13) дает хорошую аппроксимацию для плотности вероятности Райса:

$$W(R) = \frac{2R}{\sigma} \exp\left(-\frac{R^2 + R_0^2}{\sigma}\right) I_0\left(\frac{2RR_0}{\sigma}\right), \quad R \geq 0, \quad (2.9.18)$$

где $I_0(z)$ — функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента

$$I_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^z \cos(\varphi - \psi) d\varphi. \quad (2.9.19)$$

При этом между параметрами m , Ω и σ , R_0 имеется следующая связь:

$$\Omega = \sigma + R_0^2, \quad m = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - R_0^4}; \quad R_0^2 = \frac{\Omega}{m} \sqrt{m^2 - m},$$

$$\sigma = \frac{\Omega}{m} (m - \sqrt{m^2 - m}).$$

Если в формуле (2.9.13) перейти от R к новой переменной $X = R/\sqrt{\Omega}$, то получим

$$W(X) = \frac{2m^m}{\Gamma(m)} X^{2m-1} e^{-mX^2}, \quad X \geq 0. \quad (2.9.20)$$

Вид плотностей вероятностей $W(X)$ для нескольких значений параметра m приведен на рис. 2.14.

Отметим, что формально m -распределение (2.9.13) можно привести к виду χ^2 -распределения (2.9.11). Для этого в формуле (2.9.13) нужно перейти от R к новой переменной $\sqrt{Z} = R$ и положить $m = n/2$, где n — целое положительное число.

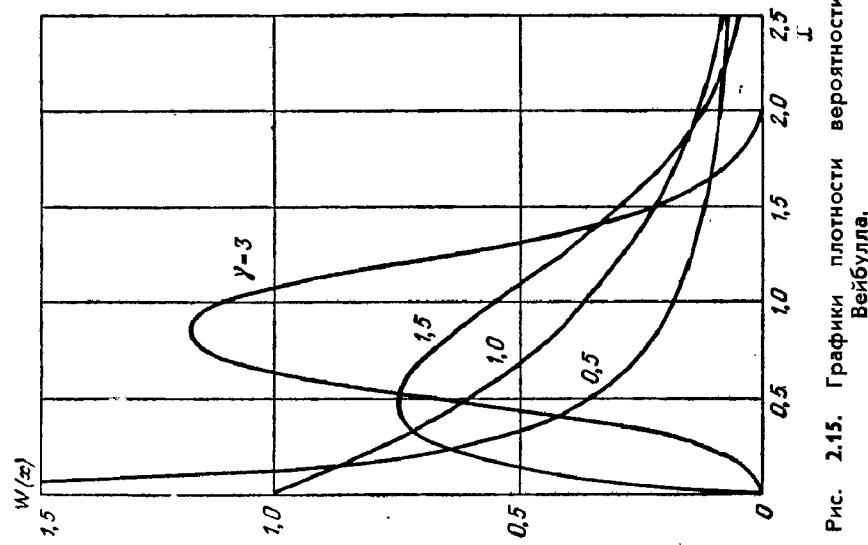


Рис. 2.15. Графики плотности вероятности Вейбулла.

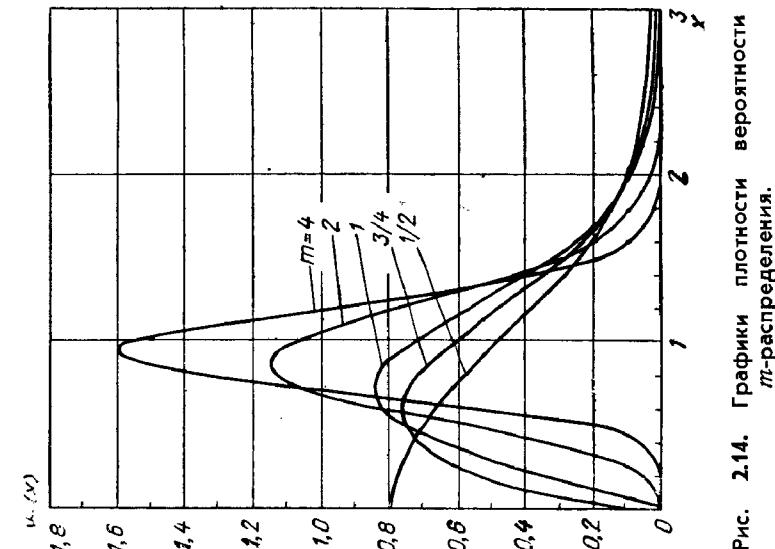


Рис. 2.14. Графики плотности вероятности m-распределения.

5. Распределение Вейбулла. В теории надежности и массового обслуживания применяется распределение Вейбулла; соответствующую плотность вероятности можно привести к следующей стандартной форме:

$$W(x) = \gamma x^{\gamma-1} \exp(-x^\gamma), \quad x > 0, \quad \gamma > 0. \quad (2.9.21)$$

Начальные моменты определяются формулой

$$\langle x^n \rangle = \Gamma\left(\frac{n}{\gamma} + 1\right). \quad (2.9.22)$$

Отсюда получаем выражения для среднего значения и дисперсии:

$$\langle x \rangle = \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right), \quad \sigma^2 = \Gamma\left(\frac{\gamma+2}{\gamma}\right) - \Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right).$$

На рис. 2.15 приведены графики плотности вероятности (2.9.21) для $\gamma = 0,5; 1,0; 1,5; 3$. При $\gamma = 1$ плотность вероятности является экспоненциальной функцией; при $\gamma \approx 3$ она близка к нормальной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гумурман В. Е. Введение в теорию вероятностей и математическую статистику. Изд-во «Высшая школа», 1963.
2. Пугачев В. С. Теория случайных функций. Физматгиз, 1960.
3. Крамер Г. Математические методы статистики. Изд-во иностранной литературы, 1948.
4. Дунин-Барковский И. В., Смирнов Н. В. Теория вероятностей и математическая статистика в технике. Гостехиздат, 1955.
5. Хальд А. Математическая статистика. Изд-во иностранной литературы, 1956.
6. Nakagami M. The m-distribution—a general formula of intensity distribution of rapid fading. Statistical methods in radio wave propagation. Pergamon Press, 1960.
7. Lehman E. H. Shapes, moments and estimators of the Weibull distribution. Trans. IEEE, 1963, R-12, N 3.

Глава 3

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

§ 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССАХ

Случайный процесс характеризуется тем, что какая-либо физическая величина изменяется в некотором абстрактном пространстве случайным образом. Конкретный вид случайного процесса (т. е. единичная фотография или осциллограмма) в определенном опыте называется реализацией случайного процесса. В качестве синонимов употребляются также термины «выборочная функция» и «траектория случайного процесса».

В радиотехнике наиболее часто приходится оперировать со случайными процессами, зависящими от одного аргумента — времени. При этом под случайным (стохастическим) процессом обычно понимается электрическая величина (ток, напряжение, напряженность поля и др.), изменяющаяся случайно во времени.

Для формального обозначения зависимости случайного процесса от аргументов применяются случайные функции. Если $\xi(t)$ есть случайная функция, представляющая случайный процесс, то ее значение $\xi(t_1)$ при фиксированном значении аргумента является случайной величиной. Это означает, что при неизменных условиях опыта значения $\xi(t_1)$ в реализациях, полученных для идентичных систем, будут различными. В этом состоит существенное отличие случайной функции от детерминированной (регулярной), значение которой однозначно определяется значениями аргументов.

В зависимости от характера изменения во времени и методов рассмотрения случайные процессы можно разделить на три группы: импульсные, флуктуационные и специального вида.

Импульсные процессы представляют собой последовательность одиночных импульсов в общем случае разной формы, следующих друг за другом через случайные промежутки времени. Как правило, реализации импульсного процесса представляют собой кусочно-разрывные функции времени. К импульсным процессам можно отнести искусственно создаваемые импульсные помехи, а также некоторые

виды атмосферных помех (например, грозовые разряды) и помех от электрических аппаратов.

Флуктуационные процессы представляют собой результирующий эффект очень большого числа часто следующих элементарных импульсов, налагающихся друг на друга. Реализации флуктуационного процесса имеют вид непрерывных функций времени. К числу флуктуационных процессов относятся тепловые и космические шумы, шумы электронных ламп, полупроводниковых приборов и др.

Случайные процессы специального вида могут быть весьма разнообразными. Можно привести следующий пример. Пусть гармоническое колебание $A \cos(\omega t + \phi)$ модулируется по амплитуде флуктуационным напряжением, а по частоте — случайными импульсами. Тогда получим случайный процесс специального вида $A(t) \cos[\omega(t) + \phi(t)]$.

Укажем способы описания случайных процессов.

§ 2. ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ

Предположим мысленно, что имеется большое число N полностью одинаковых систем (рис. 3.1), образующих некоторый «ансамбль» систем (т. е. полную группу событий). Пусть все системы работают одновременно при одинаковых условиях. На выходе этих систем наблюдается случайный процесс $\xi(t)$. Если к каждой системе подключить одинаковые регистрирующие приборы (например, осциллографы) и на всех приборах в одно и то же время отсчитать мгновенные значения, то получим отличающиеся друг от друга значения

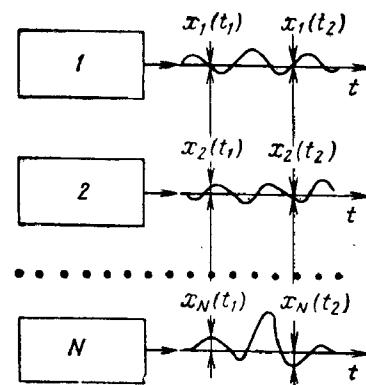


Рис. 3.1. «Ансамбль» одинаковых систем.

стремится к некоторой определенной величине, пропорциональной $\Delta\xi$ и зависящей от t_1 как от параметра. Следовательно, можем написать

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_1}{N} = W_1(\xi, t_1) \Delta\xi. \quad (3.2.1)$$

Функция $W_1(\xi, t_1)$ называется одномерной плотностью вероятности случайного процесса.

Одномерная плотность вероятности является важной, но не полной характеристикой случайного процесса. Она дает представление о процессе лишь в отдельные, фиксированные моменты времени, не указывая, например, как значения $x(t_1)$ в момент времени t_1 влияют на дальнейшее поведение процесса при $t_2 > t_1$. Можно сказать, что одномерная плотность вероятности характеризует процесс статистически и не дает представления о динамике его развития.

Более полной характеристикой случайного процесса является двумерная плотность вероятности, характеризующая вероятностную связь между значениями случайной функции в два произвольных момента времени t_1 и t_2 .

Двумерная плотность вероятности определяется аналогично одномерной. Предположим, что на выходе рассматриваемых N идентичных систем в два момента времени t_1 и t_2 берутся отсчеты мгновенных значений:

$$x_1(t_1), x_2(t_1), \dots, x_N(t_1), \\ x_1(t_2), x_2(t_2), \dots, x_N(t_2).$$

Выделим из этих отсчетов ту часть n_2 значений, которые в момент времени t_1 заключены в пределах $(\xi_1, \xi_1 + \Delta\xi_1)$ и одновременно в момент времени t_2 находятся в пределах $(\xi_2, \xi_2 + \Delta\xi_2)$. Тогда можно написать

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_2}{N} = W_2(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2) \Delta\xi_1 \Delta\xi_2. \quad (3.2.2)$$

Функция $W_2(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2)$ называется двумерной плотностью вероятности.

В общем случае двумерная плотность вероятности также не дает исчерпывающего описания случайного процесса. Она позволяет судить о связи между вероятными значениями случайной функции лишь в два момента времени.

Достаточно полное и детальное описание случайного процесса дается многомерными плотностями вероятности. Плотность вероятности $W_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, t_1, t_2, \dots, t_n)$, называемая n -мерной, определяет вероятность того, что значения случайной функции $\xi(t)$ в n моментов времени t_1, t_2, \dots, t_n заключены соответственно в интервалах $(\xi_1, \xi_1 + \Delta\xi_1), (\xi_2, \xi_2 + \Delta\xi_2), \dots, (\xi_n, \xi_n + \Delta\xi_n)$. При достаточно малых $\Delta\xi_i$ эта вероятность равна $W_n(\xi_1, \dots, \xi_n, t_1, \dots, t_n) \Delta\xi_1 \dots \Delta\xi_n$. Плотность вероятности $W_n(\xi_1, \dots, \xi_n, t_1, \dots, t_n)$ позволяет судить о связи между вероятными значениями случайной функции в n произвольных моментах времени.

Таким образом, случайный процесс в общем случае описывается при помощи n -мерной плотности вероятности и тем детальнее, чем больше n .

Плотности вероятности должны удовлетворять следующим условиям [1]:

1) условию положительной определенности

$$W_n(\xi_1, \dots, \xi_n, t_1, \dots, t_n) \geq 0; \quad (3.2.3)$$

2) условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} W_n(\xi_1, \dots, \xi_n, t_1, \dots, t_n) d\xi_1 \dots d\xi_n = 1; \quad (3.2.4)$$

3) условию симметрии (функции $W_n(\xi_1, \dots, \xi_n, t_1, \dots, t_n)$ являются симметричными относительно своих аргументов, т. е. не должны изменяться при любой перестановке аргументов ξ_1, \dots, ξ_n);

4) условию согласованности: при любом $m < n$

$$W_m(\xi_1, \dots, \xi_m, t_1, \dots, t_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} W_n(\xi_1, \dots, \xi_m, \xi_{m+1}, \dots, \xi_n, t_1, \dots, t_n) d\xi_{m+1} \dots d\xi_n. \quad (3.2.5)$$

Формула (3.2.5) показывает, что если известна n -мерная плотность вероятности W_n , то путем интегрирования ее по «лишним» аргументам легко находятся все другие плотности вероятности меньшей кратности. В этой связи можно отметить, что исчерпывающим было бы описание случайного процесса одной плотностью вероятности максимального порядка, если бы последняя существовала. Вследствие непрерывности аргумента t такого конечного максимального порядка не существует. Однако иногда [см. (10.3.21)] оказывается возможным рассматривать функционал вероятности $W[\xi(t)]$.

Введем условную плотность вероятности. Предположим, что нам известно значение ξ_2 . В общем случае знание ξ_2 дает также некоторую информацию о случайной величине ξ_1 . Теперь случайная величина ξ_1 будет иметь плотность вероятности

$$W(\xi_1, t_1 | \xi_2, t_2) = \frac{W_2(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2)}{W_1(\xi_2, t_2)}, \quad (3.2.6)$$

где

$$W_1(\xi_2, t_2) = \int W_2(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2) d\xi_1.$$

Плотность вероятности $W(\xi_1, t_1 | \xi_2, t_2)$ называется условной плотностью вероятности для ξ_1 при заданной величине ξ_2 . Условная плотность вероятности $W(\xi_1, t_1 | \xi_2, t_2)$ содержит больше (по крайней мере не меньше) сведений о ξ_1 , чем безусловная плотность вероятности $W_1(\xi_1, t_1)$. Для условной плотности вероятности должно выполняться условие нормировки

$$\int W(\xi_1, t_1 | \xi_2, t_2) d\xi_1 = 1. \quad (3.2.7)$$

На сколько именно увеличилась информация о ξ_1 в результате того, что стала известной реализация ξ_2 , зависит от конкретных условий. В некоторых случаях информация о ξ_1 вообще не прибавляется, какой бы ни оказалась ξ_2 . Это значит, что

$$W(\xi_1, t_1 | \xi_2, t_2) = W_1(\xi_1, t_1). \quad (3.2.8)$$

Как следует из (3.2.6), в данном случае двумерная плотность вероятности равна произведению одномерных плотностей вероятности:

$$W_2(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2) = W_1(\xi_1, t_1) W_1(\xi_2, t_2)^*. \quad (3.2.9)$$

Эта формула выражает необходимое и достаточное условие независимости двух случайных величин ξ_1 и ξ_2 .

В другом противоположном крайнем случае, когда величины ξ_1 и ξ_2 связаны функциональной зависимостью, т. е. $\xi_1 = g(\xi_2)$, знание величины ξ_2 полностью определяет другую случайную величину ξ_1 . В данном случае двумерная плотность вероятности содержит дельта-функцию:

$$W_2(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2) = \delta(\xi_1 - g(\xi_2)) W_1(\xi_2, t_2). \quad (3.2.10)$$

Между указанными крайними случаями возможно большое число промежуточных случаев.

Формулы (3.2.6)–(3.2.10) можно обобщить на несколько случайных величин.

§ 3. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Вместо плотностей вероятностей для описания случайного процесса можно задавать характеристические функции. Характеристическая функция представляет собой преобразование Фурье от соответствующей плотности вероятности:

$$\Theta_n(u_1, \dots, u_n, t_1, \dots, t_n) = \int \dots \int W_n(\xi_1, \dots, \xi_n, t_1, \dots, t_n) e^{i(u_1 \xi_1 + \dots + u_n \xi_n)} d\xi_1 \dots d\xi_n. \quad (3.3.1)$$

Отсюда видно, что характеристическую функцию можно определить как математическое ожидание экспоненты:

$$\Theta_n(u_1, \dots, u_n, t_1, \dots, t_n) = \langle \exp(iu_1 \xi_1 + \dots + iu_n \xi_n) \rangle. \quad (3.3.2)$$

Здесь и в дальнейшем угловые скобки обозначают операцию математического ожидания или, иначе, операцию статистического усреднения (т. е. усреднения по ансамблю реализаций).

* В данной записи $W_1(\xi_1, t_1)$ и $W_1(\xi_2, t_2)$ — в общем случае разные функции, а не одна и та же функция с измененными аргументами. Такая система записи иногда будет применена и в дальнейшем.

Из формул (3.2.9) и (3.3.2) видно, что характеристическая функция независимых случайных величин равна произведению характеристических функций отдельных величин. Этот результат часто используют при вычислении плотности вероятности суммы независимых случайных величин.

Для характеристических функций также справедливо условие симметрии, а условия нормировки и согласованности принимают соответственно вид

$$\Theta(0, \dots, 0) = 1, \quad (3.3.3)$$

$$\Theta_m(u_1, \dots, u_m, t_1, \dots, t_m) = \Theta_n(u_1, \dots, u_m, 0, \dots, 0, t_1, \dots, t_m). \quad (3.3.4)$$

Иногда вместо плотностей вероятностей рассматривают функции распределения вероятностей. Одномерная функция распределения вероятностей определяет относительную долю значений $x_i(t_1)$, $i = 1, 2, \dots, N \rightarrow \infty$, меньших некоторой величины ξ_1 :

$$F_1(\xi_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\xi_1} W_1(x, t_1) dx. \quad (3.3.5)$$

Очевидно, что для значений ξ_1 , в которых функция $F_1(\xi_1, t_1)$ дифференцируема, справедливо равенство

$$W_1(\xi_1, t_1) = \frac{\partial F_1(\xi_1, t_1)}{\partial \xi_1}. \quad (3.3.6)$$

Двумерная функция распределения вероятностей определяется соотношением

$$F_2(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\xi_1} \int_{-\infty}^{\xi_2} W_2(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2, \quad (3.3.7)$$

из которого следует, что

$$W_2(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_2(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}. \quad (3.3.8)$$

Аналогично определяются другие функции распределения вероятностей.

Так как между функциями W_n , Θ_n и F_n существует взаимодно-значная связь, то случайный процесс считается определенным на некотором интервале времени, если для любых t_1, \dots, t_n из этого интервала заданы или многомерные плотности вероятности W_n , или характеристические функции Θ_n , или функции распределения вероятностей F_n .

§ 4. МОМЕНТНЫЕ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ

Хотя полное описание случайного процесса дается многомерными плотностями вероятности, однако в ряде случаев целесообразно оперировать с другими, более простыми характеристиками случайного процесса. Это объясняется несколькими соображениями.

1. Во многих задачах нужно рассматривать преобразование случайных процессов линейными и нелинейными инерционными системами. Пусть из рассмотрения физической модели источника процесса получены выражения для плотностей вероятностей. Тогда за исключением так называемых марковских процессов и линейного преобразования нормальных процессов нельзя указать метод «пересчета» непосредственно самих плотностей вероятностей при инерционных преобразованиях случайных процессов. Эта задача решается приближенно путем пересчета отдельных характеристик случайного процесса, позволяющих в принципе найти плотность вероятности для преобразованного процесса.

2. Предположим, что нам неизвестен физический механизм устройства, создающего процесс. Тогда для выяснения характера случайного процесса необходимо экспериментально определять соответствующие плотности вероятности. Экспериментально сравнительно просто можно определить частные характеристики процесса. Экспериментальное же определение самих плотностей вероятностей в большинстве практических случаев оказывается очень сложным и дорогостоящим делом. Здесь исключение составляет одномерная плотность вероятности, для определения которой в настоящее время имеются приборы. Однако она не содержит временных характеристик, обычно необходимых для решения практических задач.

3. Имеются часто встречающиеся случайные процессы, плотности вероятности для которых определяются небольшим числом параметров.

4. Ответ на ряд практических задач может быть получен из рассмотрения отдельных, частных характеристик случайного процесса. С аналогичным положением мы часто встречаемся в случае регулярных сигналов. Если, например, синусоидально-модулированное колебание $A(1 + m \cos \Omega t) \sin(\omega t + \phi)$ воздействует на радиоприемник с амплитудным детектором, то обычно не интересуются значением начальной фазы и рассматривают лишь воспроизведение закона модуляции.

5. Иногда ограничиваются получением ориентировочных оценок процесса по его отдельным характеристикам, а не точного результата, даваемого соответствующими плотностями вероятности.

В качестве характеристик случайного процесса, более простых, чем плотности вероятности, можно использовать моментные или корреляционные функции. Ценным свойством моментных и корреляционных функций является то, что функции более низкого по-

рядка несут больше сведений о случайном процессе, чем функции высокого порядка.

Под моментными функциями случайного процесса $\xi(t)$, заданного на некотором интервале, понимаются функции $M_{i_1}(t)$, $M_{i_1 i_2}(t_1, t_2)$, ..., $M_{i_1 i_2 \dots i_n}(t_1, t_2, \dots, t_n)$, симметричные относительно всех своих аргументов, являющиеся статистическими средними (математическими ожиданиями) произведений

$$\begin{aligned} M_{i_1}(t) &= \langle \xi^{i_1}(t) \rangle = \int \xi^{i_1} W_1(\xi, t) d\xi, \\ M_{i_1 i_2}(t_1, t_2) &= \langle \xi^{i_1}(t_1) \xi^{i_2}(t_2) \rangle = \int \int \xi^{i_1} \xi^{i_2} W_2(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2) d\xi_1 d\xi_2, \\ &\dots \\ M_{i_1 i_2 \dots i_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) &= \langle \xi^{i_1}(t_1) \dots \xi^{i_n}(t_n) \rangle = \\ &= \int \dots \int \xi^{i_1} \dots \xi^{i_n} W_n(\xi_1, \dots, \xi_n, t_1, \dots, t_n) d\xi_1 \dots d\xi_n. \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

Момент $M_{i_1 i_2 \dots i_n}(t_1, t_2, \dots, t_n)$, зависящий от n несовпадающих аргументов t_1, t_2, \dots, t_n , называется n -мерным моментом $(i_1 + i_2 + \dots + i_n)$ -го порядка. Так, $M_{i_1}(t) = \langle \xi^{i_1}(t) \rangle$, есть одномерный момент i_1 -го порядка, $M_{i_1 i_2}(t_1, t_2) = \langle \xi^{i_1}(t_1) \xi^{i_2}(t_2) \rangle$ при $t_1 \neq t_2$ есть двумерный момент $(i_1 + i_2)$ -го порядка и т. д.

Вместо моментов $M_{i_1 i_2 \dots i_n}(t_1, t_2, \dots, t_n)$, называемых начальными, можно рассматривать центральные моменты, которые определяются соотношением

$$\begin{aligned} \mu_{i_1 i_2 \dots i_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) &= \langle [\xi(t_1) - M_1(t_1)]^{i_1} \dots [\xi(t_n) - M_1(t_n)]^{i_n} \rangle = \\ &= \int \dots \int [\xi_1 - M_1(t_1)]^{i_1} \dots [\xi_n - M_1(t_n)]^{i_n} \times \\ &\quad \times W_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, t_1, \dots, t_n) d\xi_1 \dots d\xi_n. \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Моментные функции можно также получить из характеристической функции путем ее дифференцирования. Проиллюстрируем это для одномерного случая. На основании определения характеристической функции (3.3.1) и разложения в ряд экспоненты, получим

$$\begin{aligned} \Theta_1(u) &= \int e^{ju\xi} W_1(\xi, t) d\xi = \\ &= 1 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(ju)^v}{v!} \int \xi^v W_1(\xi, t) d\xi = 1 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{M_v(t)}{v!} (ju)^v. \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Отсюда следует, что

$$M_v(t) = \frac{1}{j^v} \cdot \left. \frac{d^v \Theta_1(u)}{du^v} \right|_{u=0}. \quad (3.4.4)$$

Можно показать, что формулы, аналогичные (3.4.3) и (3.4.4), справедливы и для многомерных моментов $M_{i_1 i_2 \dots i_n}$ [2].

Перейдем к определению корреляционных функций. Корреляционные функции $K_1(t_1)$, $K_2(t_1, t_2)$, $K_3(t_1, t_2, t_3)$, ... определяются при помощи разложения в ряд Маклорена не самой характеристической функции, а ее логарифма. Как и моментные функции, они должны быть симметричными относительно всех аргументов. Аналогами корреляционных функций в одномерном случае являются так называемые кумулянты или семиинварианты. Приведем определение кумулянтов и установим их связь с одномерными моментами. Для функции $\ln(1+z)$ ряд Маклорена имеет вид

$$\ln(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \dots$$

Заменяя $1+z$ на $\Theta_1(u)$, т. е. полагая $z = \Theta_1(u) - 1$ и используя формулу (3.4.3), можем написать

$$\begin{aligned} \ln \Theta_1(u) &= (\Theta_1 - 1) - \frac{1}{2}(\Theta_1 - 1)^2 + \frac{1}{3}(\Theta_1 - 1)^3 - \frac{1}{4}(\Theta_1 - 1)^4 + \dots = \\ &= \sum_{v=1}^{\infty} \frac{M_v}{v!} (ju)^v - \frac{1}{2} \left[\sum_{v=1}^{\infty} \frac{M_v}{v!} (ju)^v \right]^2 + \frac{1}{3} \left[\sum_{v=1}^{\infty} \frac{M_v}{v!} (ju)^v \right]^3 - \dots \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Правая часть этого выражения представляет многочлен относительно ju . Совершая перестановки слагаемых в этом многочлене, его можно представить в виде следующего ряда:

$$\ln \Theta_1(u) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\kappa_v}{v!} (ju)^v \quad (3.4.6)$$

или

$$\Theta_1(u) = \exp \left[\sum_{v=1}^{\infty} \frac{\kappa_v}{v!} (ju)^v \right], \quad (3.4.7)$$

где коэффициенты κ_v называются кумулянтами или семиинвариантами.

Очевидно, что кумулянт κ_n есть полином от моментов M_1, \dots, M_n , и, наоборот, момент M_n есть полином от $\kappa_1, \dots, \kappa_n$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях (ju) в правых частях выражений (3.4.5) и (3.4.6), получаем:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= M_1, \quad \kappa_2 = M_2 - M_1^2 = \mu_2, \\ \kappa_3 &= M_3 - 3M_1 M_2 + 2M_1^3 = \mu_3, \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

$$\kappa_4 = M_4 - 3M_2^2 - 4M_1 M_3 + 12M_1^2 M_2 - 6M_1^4 = \mu_4 - 3\mu_2^2,$$

Первый кумулянт совпадает с первым моментом (средним значением)

$$\kappa_1 = M_1 = \langle \xi(t) \rangle.$$

Второй кумулянт

$$\kappa_2 = \langle \xi^2(t) \rangle - \langle \xi(t) \rangle^2$$

согласно формуле (2.5.5) представляет собой дисперсию σ^2 .

Не останавливаясь на значениях других, более высоких кумулянтов, укажем, что отношения

$$\gamma_1 = \frac{\kappa_3}{\kappa_2^{3/2}}, \quad \gamma_2 = \frac{\kappa_4}{\kappa_2^2} \quad (3.4.9)$$

называются соответственно коэффициентами асимметрии и эксцесса.

Следует заметить, что кумулянты не совпадают с центральными моментами. Как видно из формул (3.4.8), расхождение между ними начинает проявляться с κ_4 .

Корреляционные функции $K_1(t_1)$, $K_2(t_1, t_2)$, $K_3(t_1, t_2, t_3)$, ... подобно кумулянтам, определяются разложением в ряд Маклорена логарифма многомерных характеристических функций. Не приводя здесь формальных разложений, укажем окончательные формулы для первых трех корреляционных функций [2]:

$$\begin{aligned} K_1(t) &= \kappa_1 = M_1(t) = \langle \xi(t) \rangle, \\ K_2(t_1, t_2) &= \langle [\xi(t_1) - M_1(t_1)] [\xi(t_2) - M_1(t_2)] \rangle = \\ &= \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \rangle - \langle \xi(t_1) \rangle \langle \xi(t_2) \rangle, \\ K_3(t_1, t_2, t_3) &= \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \xi(t_3) \rangle - M_1(t_1) K_2(t_2, t_3) - M_1(t_2) \times \\ &\quad \times K_2(t_1, t_3) - M_1(t_3) K_2(t_1, t_2) + 2M_1(t_1) M_1(t_2) M_1(t_3). \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

Нетрудно убедиться, что при $t_1 = t_2 = t_3$ формулы (3.4.10) совпадают с формулами (3.4.8).

По моментным и корреляционным функциям можно восстановить характеристическую функцию и, следовательно, плотность вероятности. Поэтому моментные функции, так же, как и корреляционные, могут быть использованы для описания случайных процессов.

Отметим, что в дальнейшем особую роль будут играть одномерный момент $M_1(t)$ и корреляционная функция $K_2(t_1, t_2)$, совпадающая с двумерным центральным моментом второго порядка. Раздел теории, посвященный изучению лишь тех свойств случайных процессов, которые определяются этими характеристиками, называется корреляционной теорией случайных процессов.

§ 5. СТАЦИОНАРНЫЕ И НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Важным классом случайных процессов являются стационарные случайные процессы. Случайный процесс $\xi(t)$ называется стационарным в узком смысле, если его плотности вероятности $W_n(\xi_1, \dots, \xi_n, t_1, \dots, t_n)$ произвольного порядка n не меняются при любом сдвиге всей группы точек t_1, \dots, t_n вдоль оси времени, т. е. если при любых n и t_0 справедливо равенство

$$W_n(\xi_1, \dots, \xi_n, t_1, \dots, t_n) = W_n(\xi_1, \dots, \xi_n, t_1 - t_0, \dots, t_n - t_0). \quad (3.5.1)$$

Иначе говоря, случайный процесс называется стационарным если выражения для плотностей вероятностей не изменяются при изменении начала отсчета времени. Это означает, что стационарный процесс ведет себя однородно во времени. Разумеется, что в случае стационарных процессов равенство, аналогичное (3.5.1), справедливо для функций распределения вероятностей, а также для характеристических, моментных и корреляционных функций.

Стационарные случайные процессы, аналогично установленным детерминированным процессам, получаются в установленном режиме работы системы при неизменных внешних условиях. Стационарные процессы являются частным случаем нестационарных процессов. Примером нестационарного случайного процесса может быть любой случайный процесс в переходном режиме работы систем (например, дробовой шум в диоде в начальном периоде после включения анода катода, случайный процесс на выходе инерционной системы в начальный период при воздействии на вход системы даже стационарного случайного сигнала и т. д.).

Из равенства (3.5.1), в частности, следует:

$$\begin{aligned} W_1(\xi, t_1) &= W_1(\xi, t_1 - t_1) = W_1(\xi), \\ W_2(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2) &= W_2(\xi_1, \xi_2, \tau), \quad \tau = t_2 - t_1, \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

Таким образом, для стационарного случайного процесса n -мерная плотность вероятности, n -мерные моменты и корреляционные функции зависят не от n , а от $(n - 1)$ моментов времени, так как один из выбранных моментов времени можно всегда принять за начало отсчета времени (например, положить $t_1 = 0$).

Как видно из первой формулы (3.5.2), одномерная плотность вероятности стационарного процесса не зависит от выбранного момента времени. Поэтому одномерная плотность вероятности и одномерные моменты не учитывают временных характеристик стационарного случайного процесса. Например, изменение масштаба времени в произвольное число α раз не изменяет одномерной плотности вероятности, т. е. процесс, протекающий в α раз быстрее или медленнее, будет иметь одну и ту же одномерную плотность вероятности. Грубо говоря, описание случайного процесса при

помощи одномерной плотности вероятности подобно заданию лишь амплитуды гармонического колебания $A \cos(\omega t + \phi)$ без указания его частоты и фазы. Отсюда ясно, что описание процесса при помощи одномерной плотности вероятности является неполным.

Будем обозначать моментные и корреляционные функции стационарного случайного процесса строчными буквами. Математическое ожидание (среднее значение) стационарного процесса $m = M_1$ не зависит от времени

$$m = \langle \xi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \xi W_1(\xi) d\xi. \quad (3.5.3)$$

Двумерная корреляционная функция $k(t_1, t_2) = K_2(t_1, t_2)$ зависит лишь от разности времен $\tau = t_2 - t_1$ и определяется формулой

$$\begin{aligned} k(\tau) &= \langle [\xi(t_1) - m] [\xi(t_2) - m] \rangle = \langle \xi(t_1) \xi(t_1 + \tau) \rangle - m^2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi_1 - m)(\xi_2 - m) W_2(\xi_1, \xi_2, \tau) d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

Дисперсия стационарного процесса

$$\sigma^2 = k(0) = \langle [\xi(t) - m]^2 \rangle = \langle \xi^2(t) \rangle - m^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - m)^2 W_1(\xi) d\xi \quad (3.5.5)$$

постоянна и равна значению корреляционной функции при нулевом значении аргумента.

При решении некоторых практических задач многомерные плотности вероятности не рассматриваются и используется лишь постулат математического ожидания и зависимость функции корреляции $k(t_1, t_2)$ только от разности $\tau = t_2 - t_1$. В связи с этим введено понятие стационарности в широком смысле.

Случайный процесс $\xi(t)$ называется стационарным в широком смысле, если его математическое ожидание постоянно (т. е. не зависит от времени), а корреляционная функция $k(t_1, t_2)$ зависит только от разности аргументов t_1 и t_2 :

$$k(t_1, t_2) = k(t_2 - t_1) = k(\tau), \quad \tau = t_2 - t_1. \quad (3.5.6)$$

В общем случае стационарность в широком смысле не тождественна стационарности в узком смысле. Случайные процессы, стационарные в узком смысле, будут всегда стационарны в широком смысле, но не наоборот.

Однако имеется один весьма важный и часто встречающийся класс стационарных процессов, для которых понятия стационарности в узком и широком смысле полностью совпадают. Это — нормальные стационарные процессы (см. § 15), плотности вероятности которых полностью определяются математическим ожиданием и корреляционной функцией.

§ 6. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

Функция корреляции между значениями одного случайного процесса в два разных момента времени называется автокорреляционной функцией. Общее определение автокорреляционной функции дается вторым соотношением (3.4.10), а применительно к стационарным процессам — формулой (3.5.4):

$$k(\tau) = \langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle - m^2. \quad (3.6.1)$$

Если имеются два стационарных случайных процесса $\xi(t)$ и $\eta(t)$ с математическими ожиданиями m_ξ и m_η , то можно рассматривать функции корреляции между этими процессами:

$$\begin{aligned} K_{\xi\eta}(t_1, t_2) &= \langle [\xi(t_1) - m_\xi] [\eta(t_2) - m_\eta] \rangle, \\ k_{\eta\xi}(t_1, t_2) &= \langle [\eta(t_1) - m_\eta] [\xi(t_2) - m_\xi] \rangle. \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

Если функции корреляции $k_{\xi\eta}(t_1, t_2)$ и $k_{\eta\xi}(t_1, t_2)$ зависят лишь от разности $\tau = t_2 - t_1$, то процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ называются стационарно связанными. Очевидно, что для стационарно связанных процессов справедлива формула

$$k_{\xi\eta}(t_1, t_2) = k_{\xi\eta}(\tau) = k_{\eta\xi}(-\tau). \quad (3.6.3)$$

В отличие от автокорреляционной функции функции корреляции (3.6.2) между значениями разных процессов называются взаимными корреляционными функциями.

Формулы (3.6.1) и (3.6.2) обобщаются на комплексные случайные процессы. Если $\xi(t)$ и $\eta(t)$ комплексные случайные функции с математическими ожиданиями m_ξ и m_η , то автокорреляционная и взаимно корреляционная функции определяются формулами [3]:

$$k(\tau) = \langle [\xi(t_1) - m_\xi] [\xi^*(t_1 + \tau) - m_\xi^*] \rangle, \quad (3.6.4)$$

$$k_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \langle [\xi(t_1) - m_\xi] [\eta^*(t_2) - m_\eta^*] \rangle, \quad (3.6.5)$$

где звездочкой обозначены комплексно-сопряженные величины.

Для выяснения физического смысла корреляционной функции рассмотрим два частных случая, когда две действительные стационарные случайные функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$ независимы или, наоборот, «жестко» связаны. Если случайные функции $\xi(t)$ и $\eta(t + \tau) = \eta_\tau$ независимы, то по формуле (3.2.9) можно написать

$$W_2(\xi, \eta_\tau) = W_1(\xi) W_1(\eta_\tau).$$

Подставим это выражение в формулы (3.6.2) и воспользуемся соотношением (2.4.11), согласно которому

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\xi - m_{\xi}) W_1(\xi) d\xi = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} (\eta - m_{\eta}) W_1(\eta) d\eta = 0.$$

В результате получим $k_{\xi\eta}(\tau) = 0$.

Пусть случайные функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$ связаны детерминированной линейной зависимостью $\xi(t) = \pm a\eta(t) + b$, где a и b — постоянные величины. В данном случае

$$m_{\xi} = \langle \xi(t) \rangle = \pm am_{\eta} + b, \quad \sigma_{\xi}^2 = \langle [\xi(t) - m_{\xi}]^2 \rangle = a^2 \sigma_{\eta}^2.$$

Для функции взаимной корреляции получим

$$k_{\xi\eta}(t, t) = \langle [\xi(t) - m_{\xi}] [\eta(t) - m_{\eta}] \rangle = \pm a\sigma_{\eta}^2 = \pm \sigma_{\xi}\sigma_{\eta}, \quad (3.6.6)$$

Таким образом, если стационарные случайные функции независимы, то функция корреляции между ними равна нулю для всех значений τ . Функция взаимной корреляции для линейно связанных случайных функций равна произведению их среднеквадратичных значений, взятому с соответствующим знаком. Поэтому можно сказать, что корреляционная функция дает качественное представление о линейной зависимости между значениями одной или двух случайных функций в выбранные моменты времени.

В дальнейшем нам придется часто оперировать с автокорреляционной функцией стационарных случайных процессов. Автокорреляционная функция стационарного процесса обладает следующими свойствами:

1. Она является четной, т. е.

$$k(\tau) = k(-\tau). \quad (3.6.7)$$

Это следует из определения стационарного процесса, т. е. из условия независимости его характеристик от начала отсчета времени. Поэтому

$$k(\tau) = \langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle - m^2 = \langle \xi(t-\tau)\xi(t) \rangle - m^2 = k(-\tau).$$

2. Абсолютное значение автокорреляционной функции при любом τ не может превышать ее значения при $\tau = 0$, т. е.

$$|k(\tau)| \leq k(0) = \sigma^2. \quad (3.6.8)$$

Этот результат следует из очевидного неравенства, что математическое ожидание положительной функции не может быть отрицательным:

$$\langle [\xi(t) - m] \pm [\xi(t+\tau) - m] \rangle^2 \geq 0.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \langle [\xi(t) - m]^2 \rangle &\pm 2\langle [\xi(t) - m][\xi(t+\tau) - m] \rangle + \langle [\xi(t+\tau) - m]^2 \rangle = \\ &= 2\sigma^2 \pm 2k(\tau) \geq 0 \end{aligned}$$

и, следовательно, $\sigma^2 \geq |k(\tau)|$.

3. Для многих практически интересных стационарных случайных процессов справедливо соотношение

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} k(\tau) = 0. \quad (3.6.9)$$

Физически этот результат объясняется тем, что случайные процессы, наблюдавшиеся в стационарно и устойчиво работающих системах, обычно имеют конечное время корреляции (см. § 7). Реакция таких систем на мгновенное внешнее воздействие типа δ -функции

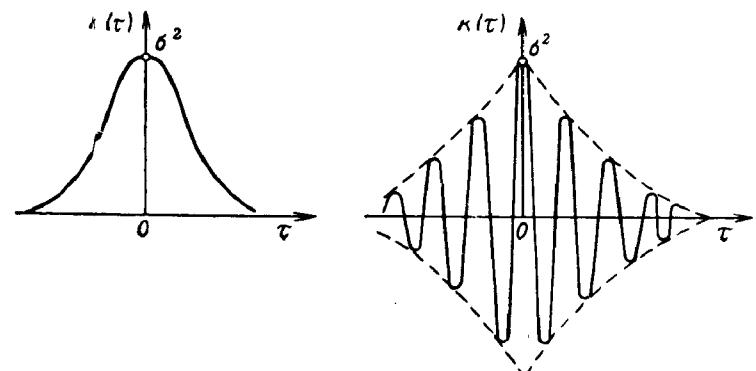


Рис. 3.2. Графики двух корреляционных функций.

имеет конечное время затухания. Поэтому последующее значение процесса оказывается практически независимым или некоррелированным с предыдущим значением, если они разделены интервалом времени, превышающим время корреляции.

Таким образом, автокорреляционная функция стационарного случайного процесса является четной функцией τ , имеет максимум при $\tau = 0$, равный дисперсии σ^2 , и, как правило, убывает до нуля при $\tau \rightarrow \pm \infty$. На рис. 3.2 приведены две функции, удовлетворяющие этим условиям,

$$k(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha\tau^2}, \quad k(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau.$$

4. Однако не всякая функция, удовлетворяющая указанным прием условиям, может быть корреляционной функцией. Можно показать [см. формулу (3.10.7)], что корреляционная функция

стационарного процесса должна удовлетворять дополнительному условию

$$\int_0^{\infty} k(\tau) \cos \omega t d\tau \geq 0. \quad (3.6.10)$$

Отметим, что функции взаимной корреляции не обладают указанными свойствами. Свойства автокорреляционной функции (3.6.7) и (3.6.8) могут быть обобщены на нестационарные процессы. Для нестационарных процессов они принимают вид

$$K(t_1, t_2) = K(t_2, t_1), \quad |K(t_1, t_2)| \leq \sigma(t_1) \sigma(t_2). \quad (3.6.11)$$

§ 7. КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ

Формулы (3.6.2) и (3.6.6) показывают, что корреляционные функции характеризуют не только степень связи между случайными функциями, но и зависят от их дисперсий. Действительно, если, например, одна из функций $\xi(t)$ или $\eta(t)$ весьма мало отклоняется от своего математического ожидания (почти постоянна), то корреляционная функция будет мала, независимо от степени связи между функциями.

Для количественной характеристики степени линейной зависимости случайных функций целесообразно ввести нормированные автокорреляционные и взаимно корреляционные функции. Они определяются соответственно формулами

$$R(\tau) = \frac{k(\tau)}{\sigma^2}, \quad R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \frac{k_{\xi\eta}(t_1, t_2)}{\sigma_{\xi} \sigma_{\eta}}. \quad (3.7.1)$$

Нормированные корреляционные функции $R_{\xi\eta}$ и R называются коэффициентами взаимной корреляции и автокорреляции.

Из формулы (3.6.6) следует, что если случайные функции связаны детерминированной линейной зависимостью, то коэффициент корреляции между ними в любой момент времени равен ± 1 ; если же случайные функции независимы, то коэффициент корреляции равен нулю. Поэтому можно сказать, что коэффициент корреляции характеризует линейную (а не всякую) зависимость между значениями одной или двух случайных функций в выбранные моменты времени.

Стационарные случайные функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$, для которых коэффициент корреляции между $\xi(t)$ и $\eta(t + \tau)$ равен нулю при любом значении τ , называются некоррелированными.

Выше мы убедились, что независимые случайные функции всегда являются некоррелированными. Однако обратное утверждение не верно, так как условие независимости является более жестким, чем условие некоррелированности. В самом деле, равенство нулю корреляционной функции еще ничего не говорит о поведении многомерных моментов высших порядков вида $\langle \xi^{i_1}(t_1) \eta^{i_2}(t_2) \rangle$, характеризующих нелинейные зависимости между $\xi(t_1)$ и $\eta(t_2)$. Зависимость между случайными функциями может выражаться через моментные функции.

Из перечисленных ранее свойств автокорреляционной функции стационарных процессов (3.6.7)–(3.6.10) вытекают следующие свойства коэффициента автокорреляции:

$$R(\tau) = R(-\tau), \quad |R(\tau)| \leq R(0) = 1, \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) = 0, \quad \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega \tau d\tau \geq 0. \quad (3.7.2)$$

В дальнейшем будет применяться термин «время корреляции». В большинстве радиотехнических задач встречаются коэффициенты автокорреляции в виде монотонно убывающих функций $R(\tau) = \rho(\tau)$ и в виде быстро осциллирующих затухающих функций. Примером коэффициента корреляции второго вида может служить функция

$$R(\tau) = \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau, \\ \rho(\tau) = e^{-\alpha |\tau|}, \quad \alpha \ll \omega_0.$$

В обоих случаях под временем корреляции понимается величина τ_k , определяемая соотношением

$$\tau_k = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\rho(\tau)| d\tau = \int_0^{\infty} |\rho(\tau)| d\tau.$$

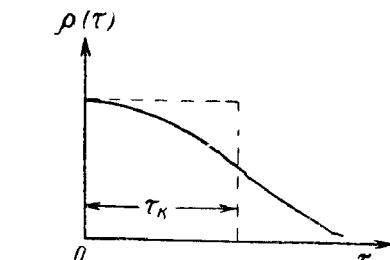


Рис. 3.3. Определение времени корреляции τ_k .

Геометрически время корреляции равно основанию прямоугольника с высотой $\rho(0) = 1$, имеющему ту же площадь, что и площадь, заключенная между кривой $|\rho(\tau)|$ при $\tau > 0$ и осью абсцисс (рис. 3.3). Величина τ_k дает ориентированное представление о том, на каком интервале времени в среднем имеет место коррелированность между значениями случайного процесса.

§ 8. ЭРГОДИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

До сих пор характеристики случайного процесса (плотности вероятности, моментные функции и др.) были определены через соответствующие статистические средние значения, т. е. средние значения большого числа реализаций в ансамбле идентичных систем. Оказывается, что для большинства случайных процессов, являющихся стационарными в узком смысле, указанные характеристики можно получить путем усреднения соответствующих величин для одной реализации за достаточно большой промежуток времени,

Такая возможность физически может быть оправдана тем, что стационарный случайный процесс протекает однородно во времени. Поэтому одна реализация достаточно большой продолжительности может содержать все сведения о свойствах случайного процесса. Про такие стационарные случайные процессы говорят, что они обладают эргодическим свойством. Соотношение между различными видами случайных процессов иллюстрируется рис. 3.4.

Не касаясь здесь строгих математических обоснований эргодичности процесса, укажем, что необходимое и достаточное условие

эргодичности стационарного процесса $\xi(t)$ состоит в том, чтобы его корреляционная функция удовлетворяла предельному соотношению (3.6.9)

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} k(\tau) = 0. \quad (3.8.1)$$

Укажем теперь те частные результаты, которые следуют из эргодического свойства стационарных процессов [4, 5]. Пусть $Z(t)$ есть некоторая

функция стационарного эргодического случайного процесса $\xi(\tau)$. Будем считать, что случайный процесс $Z(t)$ является также стационарным и удовлетворяет условию эргодичности. Тогда с вероятностью, равной единице, среднее статистическое значение $\langle Z(t) \rangle$ равно среднему по времени:

$$\langle Z(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T Z(t) dt. \quad (3.8.2)$$

Чтобы доказать эту формулу, рассмотрим случайную величину \bar{Z}_T , представляющую среднее значение одной реализации за конечный интервал времени T :

$$\bar{Z}_T = \frac{1}{T} \int_0^T Z(t) dt. \quad (3.8.3)$$

Статистически усредня обе части этого равенства и учитывая, что операции интегрирования и статистического усреднения переместимы, получим

$$\langle \bar{Z}_T \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \langle Z(t) \rangle dt = \langle Z(t) \rangle \frac{1}{T} \int_0^T dt = \langle Z(t) \rangle. \quad (3.8.4)$$

Здесь среднее значение $\langle Z(t) \rangle$ вынесено из-под знака интеграла, так как случайный процесс $Z(t)$, по предположению, является ста-



Рис. 3.4. Иллюстрация соотношения между различными видами случайных процессов.

ционарным, и поэтому его статистическое среднее значение не зависит от времени.

Покажем, что дисперсия $\sigma^2(T)$ случайной величины \bar{Z}_T стремится к нулю с ростом T . Для этого вычтем из обеих частей равенства (3.8.3) средние значения (3.8.4):

$$\bar{Z}_T - \langle \bar{Z}_T \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \{Z(t) - \langle Z(t) \rangle\} dt.$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат и статистически усредняя, имеем

$$\sigma^2(T) = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T k_z(t_2 - t_1) dt_1 dt_2, \quad (3.8.5)$$

где $k_z(t_2 - t_1) = \sigma_z^2 R_z(t_2 - t_1)$ — корреляционная функция стационарного процесса $Z(t)$,

$R_z(t_2 - t_1)$ — коэффициент корреляции.

Сделаем замену переменных (рис. 3.5)

$$\tau = t_2 - t_1, \quad t_0 = (t_1 + t_2)/2;$$

$$\left(t_2 = t_0 + \frac{\tau}{2}, \quad t_1 = t_0 - \frac{\tau}{2} \right).$$

Учитывая четность корреляционной функции $k_z(\tau) = k_z(-\tau)$ и выполнив интегрирование по t_0 , получим

$$\begin{aligned} \sigma^2(T) &= \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) k_z(\tau) d\tau = \\ &= \frac{2\sigma_z^2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R_z(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.8.6)$$

Формула (3.8.6) показывает, что для вычисления среднеквадратичной ошибки $\sigma(T)$ временного среднего значения \bar{Z}_T , необходимо знать корреляционную функцию $k_z(\tau)$. Однако в двух частных случаях (для малых и больших временных интервалов T) можно получить приближенные оценки $\sigma(T)$. При $T \ll \tau_k$, где τ_k — определенное формулой (3.7.3) время корреляции случайного процесса $Z(t)$, можно приближенно положить $R_z(\tau) \approx 1$ и из (3.8.6) получим

$$\sigma^2(T) \approx \sigma_z^2. \quad (3.8.7)$$

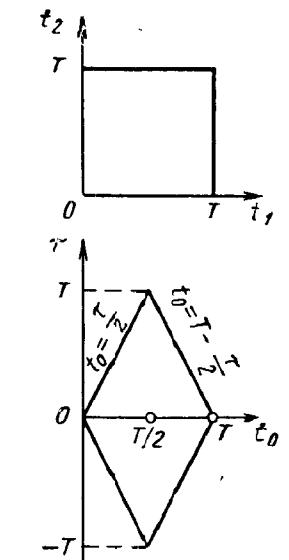


Рис. 3.5. Область интегрирования.

Когда T велико ($T \gg \tau_k$), формула (3.8.6) несколько упрощается

$$\sigma^2(T) \leq \frac{2\sigma_z^2}{T} \int_0^\infty |R_z(\tau)| d\tau = \frac{2\sigma_z^2 \tau_k}{T}. \quad (3.8.8)$$

Отсюда видно, что если стационарный процесс $Z(t)$ удовлетворяет условию (3.8.1), т. е. имеет конечную дисперсию σ_z^2 и конечное время корреляции τ_k , то $\lim_{T \rightarrow \infty} \sigma^2(T) = 0$. Это означает, что с ростом T случайная величина \bar{Z}_T стремится к неслучайной величине, равной статистическому среднему значению $\langle Z(t) \rangle$:

$$\langle Z(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T Z(t) dt. \quad (3.8.9)$$

При этом из равенства (3.8.8) получаем оценку быстроты сходимости

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T Z(t) dt - \langle Z(t) \rangle \right| \leq \sigma_z \left(2 \frac{\tau_k}{T} \right)^{1/2}. \quad (3.8.10)$$

Из сопоставления формул (3.8.10) и (2.5.9) следует, что среднее по времени (3.8.3) имеет такую же быстроту сходимости, как и среднее арифметическое

$$\bar{Z}_T = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z(i\Delta), \quad (3.8.11)$$

одинаковых взаимно независимых случайных величин $Z(i\Delta)$, число которых равно $N = T/2\tau_k$. Поэтому для облегчения фактического вычисления среднего значения $\langle Z(t) \rangle$ целесообразно вместо интеграла (3.8.3) пользоваться суммой (3.8.11), взяв интервал разбиения по времени $\Delta \geq 2\tau_k$.

Путем временного усреднения можно определить различные статистические характеристики стационарного эргодического случайного процесса.

§ 9. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИСПЕРСИИ И КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

Для стационарного случайного процесса, обладающего эргодическим свойством, можно указать простые методы экспериментального определения основных статистических характеристик. При этом используется тот важный результат, что эти характеристики могут быть определены посредством временного усреднения одной достаточно длинной реализации.

Предположим, что время наблюдения T за стационарным эргодическим процессом $\xi(t)$ значительно превышает время корреляции τ_k ($T \gg \tau_k$). Полагая в формуле (3.8.3) $Z(t) = \xi(t)$ и $Z(t) = [\xi(t) - m][\xi(t + \tau) - m]$, где τ — фиксировано, можем написать следующие формулы для среднего значения, дисперсии и функции корреляции:

$$m = \bar{m}_T = \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) dt, \quad (3.9.1)$$

$$\sigma^2 = \bar{\sigma}_T^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [\xi(t) - m]^2 dt, \quad (3.9.2)$$

$$k(\tau) = \bar{k}_T(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T [\xi(t) - m][\xi(t + \tau) - m] dt. \quad (3.9.3)$$

Если $\xi(t)$ представляет флюктуационное напряжение (ток) в каком-либо радиотехническом устройстве, находящемся в стационарном состоянии, то согласно формуле (3.9.1) среднее значение m равно постоянной составляющей напряжения (тока), которая экспериментально легко может быть определена при помощи соответствующих приборов магнитоэлектрической системы. Дисперсия σ^2 равна квадрату эффективного значения переменной составляющей напряжения (тока) и может быть определена при помощи термоэлектрических или тепловых приборов [6].

Функцию корреляции, определенную формулой (3.9.3), в литературе часто называют кратковременной функцией автокорреляции. Для экспериментального определения этой функции применяются специальные счетно-решающие устройства, называемые коррелометрами или коррелаторами [7, 8, 9]. Основными элементами коррелометра являются линия задержки, перемножитель, интегратор и регистрирующий прибор. В зависимости от того, выполняется ли умножение цифровым методом или путем моделирования, различают коррелометры дискретного и непрерывного действия.

Простейшая функциональная схема коррелометра непрерывного действия изображена на рис. 3.6. Определение корреляционной функции выполняется по формуле

$$k(\tau) \approx \frac{1}{T-\tau} \int_{-\tau}^T [\xi(t) - m][\xi(t - \tau) - m] dt. \quad (3.9.4)$$

Часто интегрирование осуществляется при помощи цепочки RC , не идеальным интегратором. Ввиду этого и из-за конечного вре-

мени интегрирования возникают методические ошибки в определении функции корреляции, которые можно вычислить, зная аналитическое выражение четырехмерного момента $\langle \xi(t_1)\xi(t_2)\xi(t_3)\xi(t_4) \rangle$.

В коррелометрах дискретного действия определение корреляционной функции производится по формуле

$$k(i\Delta) = \frac{1}{N-i} \sum_{\mu=i}^N [\xi(\mu\Delta) - m][\xi(\mu\Delta - i\Delta) - m], \quad \Delta = \frac{T}{N}. \quad (3.9.5)$$

Для надежного определения корреляционной функции число точек должно быть достаточно велико. Выбор длины элементарного

интервала Δ в значительной степени определяется характером изменения случайной функции. Если случайная функция изменяется сравнительно плавно, то Δ можно выбирать большей, чем когда она совершает резкие и частые колебания.

Вычисления корреляционной функции по формулам (3.9.4) и (3.9.5)

производят последовательно, начиная с малых значений τ , и продолжают до таких значений τ , при которых она становится практически равной нулю или начинает совершать очень малые колебания около нуля. Общий ход функции $k(\tau)$ воспроизводят по отдельным точкам (рис. 3.7).

При подборе аналитической кривой для функции корреляции необходимо руководствоваться не только необходимой точностью аппроксимации, но и иметь в виду, что корреляционная функция стационарного процесса должна удовлетворять условиям (3.6.7) и (3.6.8).

В радиотехнических приложениях часто приходится иметь дело с высокочастотными флюктуационными токами и напряжениями. При разработке коррелометров для подобных процессов возникают практические затруднения, связанные с получением большого числа фиксированных задержек τ при небольших разностях $\Delta\tau$ между

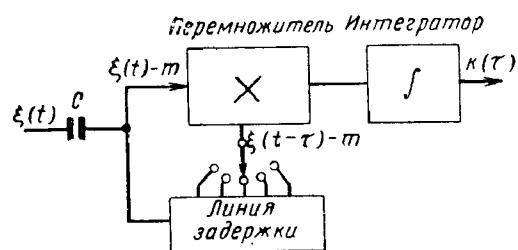


Рис. 3.6. Функциональная схема коррелометра.

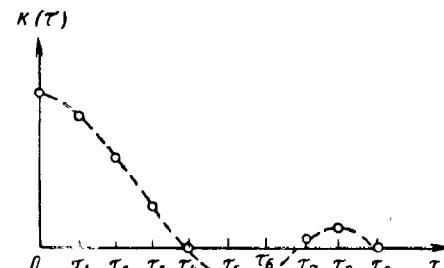


Рис. 3.7. Аппроксимация корреляционной функции.

ними. В таких случаях чаще измеряют при помощи спектроанализаторов энергетический спектр случайного процесса, по которому можно однозначно определить аналитическую корреляционную функцию.

§ 10. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ

Введем важное понятие спектральной плотности (интенсивности) $S(\omega)$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$, определив ее как преобразование Фурье от автокорреляционной функции:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (3.10.1)$$

На основании обратного преобразования Фурье можем написать

$$k(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (3.10.2)$$

Положив здесь $\tau=0$, получим выражение для дисперсии

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega. \quad (3.10.3)$$

Из (3.6.10) следует, что спектральная плотность $S(\omega)$ при всех частотах неотрицательна. Если понимать под $\xi(t)$ флюктуационный ток (напряжение), то величину σ^2 можно рассматривать как среднюю мощность, выделяемую этим током (напряжением) на сопротивлении 1 ом. Часть этой мощности $S(\omega)d\omega/2\pi$ выделяется составляющими спектра, заключенными между ω и $\omega + d\omega$. Поэтому функция $S(\omega)$ характеризует распределение мощности по спектру. Функцию $S(\omega)$ иногда называют спектром мощности или энергетическим спектром, так как она имеет размерность энергии.

Формулы (3.10.1) и (3.10.2) были одновременно получены советским ученым А. Я. Хинчиной и американским ученым Н. Винером, и поэтому называются формулами Винера — Хинчина.

Корреляционная функция $k(\tau)$ и спектральная плотность $S(\omega)$ стационарного случайного процесса обладают всеми свойствами, характерными для пары преобразований Фурье. В частности, чем «шире» спектр $S(\omega)$, тем «уже» корреляционная функция $k(\tau)$, и наоборот.

Введем энергетическую ширину спектра Δf_s , определив ее формулой

$$\Delta f_s = \frac{1}{S_0} \int_0^{\infty} S(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{1}{S_0} \int_0^{\infty} S(f) df, \quad (3.10.4)$$

где $S_0 = S(f_0)$ — значение спектральной плотности при некоторой характерной частоте (рис. 3.8). Обычно берут S_0 равной максимуму спектральной плотности. Тогда произведение времени корреляции τ_k на ширину спектра Δf_s есть приближенно постоянная величина.

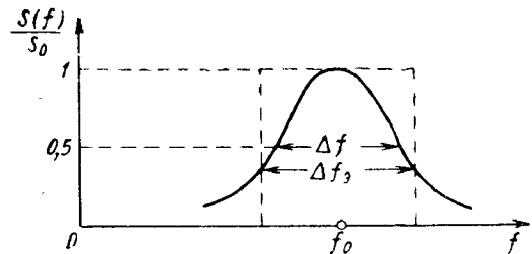


Рис. 3.8. Энергетическая ширина спектра Δf_0 и $s(\omega) = \sigma^{-2} S(\omega)$.
ширина спектра Δf на уровне $0,5S_0$. (3.10.5)

Разделив правые и левые части формул (3.10.1) и (3.10.2) на σ^2 , убеждаемся, что нормализованный спектр и коэффициент корреляции связаны аналогичными соотношениями

$$s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (3.10.6)$$

Используя свойство четности автокорреляционной функции (3.6.7), формулы Винера — Хинчина (3.10.1) и (3.10.2) можно записать иначе:

$$S(\omega) = 2 \int_0^{\infty} k(\tau) \cos \omega\tau d\tau, \quad (3.10.7)$$

$$k(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega\tau \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (3.10.8)$$

Заметим, что в формулах (3.10.1), (3.10.2), (3.10.7) и (3.10.8) спектральная плотность $S(\omega)$ определена для положительных и отрицательных значений круговой частоты ω , причем $S(\omega) = S(-\omega)$. В отличие от такого двустороннего «математического» спектра, введем одностороннюю «физическую» спектральную плотность $S(f)$, отличную от нуля лишь при положительных частотах $f > 0$:

$$S(f) = [S(\omega) + S(-\omega)] = 2S(\omega). \quad (3.10.9)$$

На рис. 3.8 через Δf обозначена ширина спектральной плотности $S(f)$ на уровне $0,5S_0$. Иногда вместо спектральной плотности $S(\omega)$ рассматривают нормализованную спектральную плотность

Тогда из (3.10.7) и (3.10.8) получим следующие окончательные формулы Винера — Хинчина:

$$S(f) = 4 \int_0^{\infty} k(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau, \quad (3.10.10)$$

$$k(\tau) = \int_0^{\infty} S(f) \cos 2\pi f\tau df. \quad (3.10.11)$$

При выполнении конкретных вычислений следует пользоваться именно этими формулами.

В отличие от спектрального анализа детерминированных сигналов спектральная плотность случайного процесса не дает возможности восстановить какую-либо реализацию процесса, так как она не содержит сведений о фазах отдельных спектральных составляющих. Можно найти множество различных случайных функций (например, путем трансформации фазового спектра), имеющих одинаковую спектральную плотность и функцию корреляции.

Укажем, что спектральную плотность можно определить следующим образом. Рассмотрим ансамбль реализаций стационарной функции с нулевым средним значением, причем каждая реализация имеет достаточно большую длительность T .

Введем формально спектральную функцию

$$F(\omega) = \int_0^T \xi(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (3.10.12)$$

Обозначим через $F^*(\omega)$ функцию, комплексно-сопряженную $F(\omega)$. Тогда можем написать

$$|F(\omega)|^2 = F(\omega) F^*(\omega) = \int_0^T \int_0^T \xi(t) \xi^*(t') e^{-i\omega(t-t')} dt dt'. \quad (3.10.13)$$

Статистически усредним левую и правую части этого равенства:

$$\langle |F(\omega)|^2 \rangle = \int_0^T \int_0^T k(t-t') e^{-J\omega(t-t')} dt dt'.$$

Вместо t введем новую переменную $\tau = t - t'$. Выполнив интегрирование по t' , получим

$$\langle |F(\omega)|^2 \rangle = T \int_{-T}^T k(\tau) e^{-J\omega\tau} d\tau.$$

Поделив обе части этого выражения на $T \rightarrow \infty$ и учитывая определение спектральной плотности (3.10.1), приходим к формуле

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle |F(\omega)|^2 \rangle. \quad (3.10.14)$$

Эту формулу можно рассматривать как определение спектральной плотности стационарной функции. Она будет применена для вычисления спектральной плотности случайной последовательности прямоугольных импульсов (§ 4 гл. 4).

§ 11. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ

Спектральная плотность выше была определена формально через корреляционную функцию при помощи формулы (3.10.1). Выясним метод экспериментального определения спектральной плотности, что позволит уточнить ее физический смысл.

Интеграл Фурье, строго говоря, применим к абсолютно интегрируемым функциям и к функциям с интегрируемым квадратом. Имея ввиду второе условие, можно утверждать, что интеграл Фурье сходится в среднем к функции $x(t)$, если для нее является сходящимся интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty.$$

Для стационарной случайной функции $\xi(t)$ аналогичный интеграл расходится даже в том случае, когда среднее значение функции $\xi(t)$ равно нулю. Поэтому непосредственная запись случайной функции в виде интеграла Фурье

$$\xi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (3.11.1)$$

где

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (3.11.2)$$

носит несколько формальный характер. Спектральная функция $f(\omega)$ является случайной функцией частоты. Если даже рассматривать различные реализации случайной функции $\xi(t)$ конечной длительности T , то для них функция $f(\omega)$ будет изменяться случайно от одной реализации к другой, в общем случае не стремясь к какому-либо конечному пределу при $T \rightarrow \infty$ [4, 10, 11].

Однако в реальных условиях с точным спектром функции не приходится иметь дело, так как экспериментально нельзя получить точной гармоники, а можно выделить лишь сумму гармонических составляющих, лежащих в конечной, хотя и малой полосе частот. В соответствии с этим рассмотрим функцию

$$F(\omega_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t_0 - \tau) \xi(\tau) d\tau, \quad (3.11.3)$$

представляющую собой установившийся случайный процесс на выходе линейного фильтра с импульсной характеристикой $G(t)$, когда на фильтр воздействует стационарный случайный процесс $\xi(t)$. В дальнейшем предполагается, что фильтр является узкополосным с центральной частотой ω_0 .

Используя известное соотношение между импульсной характеристикой и передаточной функцией (6.1.2), можем написать

$$G(t_0 - \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega(t_0 - \tau)} d\omega. \quad (3.11.4)$$

Подставляя (3.11.4) в (3.11.3), меняя порядок интегрирования и учитывая (3.11.2), имеем

$$F(\omega_0, t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) K(j\omega) e^{j\omega t_0} d\omega.$$

Умножив это выражение на аналогичное, но комплексно-сопряженное, можем написать

$$\begin{aligned} F(\omega_0, t_0) F^*(\omega_0, t_0) &= |F(\omega_0, t_0)|^2 = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int \int f(\omega') f^*(\omega) K(j\omega) K^*(j\omega') e^{j\omega_0(\omega - \omega')} d\omega d\omega'. \end{aligned}$$

Статистически усредним левую и правую части. Операции интегрирования и усреднения переместимы, так как среднее значение суммы случайных величин (интеграла) равно сумме средних значений слагаемых. Поэтому

$$|F(\omega_0, t_0)|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int \int \langle f(\omega) f^*(\omega') \rangle K(j\omega) K^*(j\omega') e^{j\omega_0(\omega - \omega')} d\omega d\omega'. \quad (3.11.5)$$

Для статистического среднего под знаком интеграла согласно (3.11.2) можем написать

$$\begin{aligned} \langle f(\omega) f^*(\omega') \rangle &= \int \int \langle \xi(t) \xi(t') \rangle e^{j\omega t - j\omega' t'} dt dt' = \\ &= \int \int k(t - t') e^{j\omega t - j\omega' t'} dt dt'. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных

$$\tau = t - t', \quad t_0 = (t + t')/2; \quad \left(t = t_0 + \frac{\tau}{2}, \quad t' = t_0 - \frac{\tau}{2} \right).$$

Воспользовавшись формулой (П.9) и выполнив интегрирование по t_0 , получим

$$\begin{aligned} \langle f(\omega) f^*(\omega') \rangle &= 2\pi \delta(\omega' - \omega) \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) e^{-j(\omega+\omega')\tau/2} d\tau = \\ &= 2\pi \delta(\omega' - \omega) S\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.11.6)$$

Здесь последнее равенство написано на основании (3.10.1).

Подставив (3.11.6) в (3.11.5) и выполнив интегрирование с дельта-функцией согласно (П. 4), получим

$$\langle |F(\omega_0, t_0)|^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) |K(j\omega)|^2 d\omega. \quad (3.11.7)$$

Обозначим максимальное значение модуля передаточной функции фильтра при центральной частоте $\omega = \omega_0$ через $K_0 = |K(j\omega_0)|$, а его энергетическую полосу пропускания — через Δf_0 :

$$\Delta f_0 = \frac{1}{K_0^2} \int_0^{\infty} |K(j\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (3.11.8)$$

Предположим, что модуль передаточной функции настолько узко сконцентрирован около частоты ω_0 , что в пределах полосы частот Δf_0 спектральную плотность можно считать практически постоянной:

$$S(\omega) \approx S(\omega_0). \quad (3.11.9)$$

Тогда в (3.11.7) ее можно вынести за знак интеграла:

$$\langle |F(\omega_0, t_0)|^2 \rangle = S(\omega_0) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K(j\omega)|^2 d\omega.$$

Реальные линейные фильтры имеют действительную импульсную характеристику $G(t)$. Поэтому передаточная функция $K(j\omega)$ отлична от нуля не только при $\omega > 0$, но и в симметричной области при $\omega < 0$. С учетом этого можем написать

$$\langle |F(\omega_0, t_0)|^2 \rangle = 2S(\omega_0) \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} |K(j\omega)|^2 d\omega = 2S(\omega_0) K_0^2 \Delta f_0. \quad (3.11.10)$$

Отсюда для односторонней спектральной плотности (3.10.9) получим следующую окончательную формулу:

$$S(f_0) = \frac{1}{K_0^2} \lim_{\Delta f_0 \rightarrow 0} \frac{\langle |F(\omega_0, t_0)|^2 \rangle}{\Delta f_0}. \quad (3.11.11)$$

Для большинства стационарных случайных процессов статистическое усреднение можно заменить усреднением за достаточно большой интервал времени:

$$\langle |F(\omega_0, t_0)|^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |F(\omega_0, t_0)|^2 dt_0.$$

Поэтому

$$S(f_0) = \frac{1}{K_0^2} \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{\Delta f_0 \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta f_0 T} \int_0^T |F(\omega_0, t_0)|^2 dt_0 \quad (3.11.12)$$

или приближенно

$$S(f_0) \approx \frac{1}{K_0^2 \Delta f_0 T} \int_0^T |F(\omega_0, t_0)|^2 dt_0. \quad (3.11.13)$$

В соответствии с формулой (3.11.13) для экспериментального определения спектральной плотности стационарного эргодического случайного процесса нужно его пропустить через достаточно узкополосный фильтр, выходной сигнал возвести в квадрат и затем

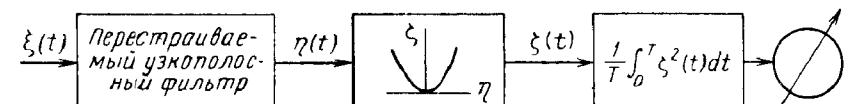


Рис. 3.9. Блок-схема прибора для экспериментального определения спектральной плотности.

усреднить за большой интервал времени (рис. 3.9). При некоторых условиях последние две операции выполняются приближенно в термоприборах или же раздельно при помощи двухстороннего квадратичного элемента и усредняющего фильтра [6, 12]. Перестраивая фильтр по частоте, можно определить спектральную плотность процесса в любой части спектра.

Допустимая величина Δf_0 определяется характером спектральной плотности $S(f)$. Чем быстрее изменяется спектральная плотность в частоте, тем меньше необходимо брать Δf_0 . Однако следует иметь в виду, что при уменьшении Δf_0 увеличивается не только длительность переходного процесса, но и время корреляции процесса на выходе фильтра. Поэтому с уменьшением Δf_0 нужно увеличивать время интегрирования T .

§ 12. ВЗАЙМНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ

Пусть имеется два стационарно связанных случайных процесса $\xi(t)$ и $\eta(t)$ с функциями взаимной корреляции $k_{\xi\eta}(\tau)$ и $k_{\eta\xi}(\tau)$, которые были определены формулами (3.6.2). По аналогии со спектральной плотностью (3.10.1) можно рассматривать взаимные спектральные плотности

$$S_{\xi\eta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k_{\xi\eta}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad S_{\eta\xi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k_{\eta\xi}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (3.12.1)$$

На основании обратного преобразования Фурье можем написать

$$k_{\xi\eta}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi\eta}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad k_{\eta\xi}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\eta\xi}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (3.12.2)$$

Поскольку функции взаимной корреляции не обязательно являются четными, то взаимные спектральные плотности не обязательно будут действительными функциями. Однако если случайные функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$ действительные, а не комплексные, то взаимные корреляционные функции будут также действительными. Воспользовавшись далее формулой (3.6.3), легко убедиться в справедливости следующих соотношений:

$$S_{\xi\eta}(\omega) = S_{\eta\xi}(-\omega), \quad S_{\xi\eta}^*(\omega) = S_{\eta\xi}(\omega). \quad (3.12.3)$$

Рассмотрим два частных примера [13].

1. **Спектральная плотность суммы двух стационарных и стационарно связанных случайных процессов.** Найдем спектральную плотность $S_\zeta(\omega)$ суммы двух стационарных и стационарно связанных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$, имеющих известные авто- и взаимно корреляционные функции $k_\xi(\tau)$, $k_\eta(\tau)$, $k_{\xi\eta}(\tau)$, $k_{\eta\xi}(\tau)$:

$$\zeta(t) = \xi(t) + \eta(t). \quad (3.12.4)$$

Корреляционная функция $k_\zeta(\tau)$ суммарного процесса, очевидно, равна

$$k_\zeta(\tau) = k_\xi(\tau) + k_\eta(\tau) + k_{\xi\eta}(\tau) + k_{\eta\xi}(\tau). \quad (3.12.5)$$

По определению (3.10.1) находим спектральную плотность

$$S_\zeta(\omega) = S_\xi(\omega) + S_\eta(\omega) + S_{\xi\eta}(\omega) + S_{\eta\xi}(\omega), \quad (3.12.6)$$

где $S_{\xi\eta}(\omega)$ и $S_{\eta\xi}(\omega)$ — взаимные спектральные плотности (3.12.1).

Для действительных случайных функций $\xi(t)$ и $\eta(t)$ справедлива формула (3.12.3) и поэтому соотношение (3.12.6) можно записать иначе:

$$S_\zeta(\omega) = S_\xi(\omega) + S_\eta(\omega) + [S_{\xi\eta}(\omega) + S_{\xi\eta}(-\omega)]. \quad (3.12.7)$$

Если два стационарных и стационарно связанных случайных процесса некоррелированы между собой ($k_{\xi\eta}(\tau) = k_{\eta\xi}(\tau) = 0$), то их взаимные спектральные плотности равны нулю и спектральная плотность их суммы равна сумме спектральных плотностей этих процессов.

Отметим, что суммарный процесс $\zeta(t)$ может быть стационарным в широком смысле, если даже процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ сами по себе не являются стационарными. Например, пусть случайные процессы $A_c(t)$ и $A_s(t)$ независимы, стационарны, имеют нулевые средние значения и одинаковые автокорреляционные функции. Тогда $\xi(t) = A_c(t)\cos\omega t$ и $\eta(t) = A_s(t)\sin\omega t$ не являются процессами стационарными в широком смысле. Тем не менее суммарный процесс $\zeta(t) = \xi(t) + \eta(t)$ будет стационарен (см. § 1 гл. 7).

2. **Спектральная плотность произведения двух стационарных некоррелированных процессов.** Пусть случайный процесс $\zeta(t, \tau_0)$ равен произведению двух стационарных некоррелированных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t + \tau_0)$:

$$\zeta(t, \tau_0) = \xi(t) \eta(t + \tau_0), \quad (3.12.8)$$

где τ_0 — фиксировано.

Зная корреляционную функцию

$$k_\zeta(\tau) = \langle \xi(t) \xi(t + \tau) \eta(t + \tau_0) \eta(t + \tau + \tau_0) \rangle = k_\xi(\tau) k_\eta(\tau), \quad (3.12.9)$$

по формуле (3.10.1) находим спектральную плотность

$$S_\zeta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k_\zeta(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (3.12.10)$$

Подставив сюда

$$k_\zeta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\zeta(\omega') e^{j\omega'\tau} d\omega'$$

и изменив порядок интегрирования, получим

$$S_\zeta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega - \omega') S_\eta(\omega') d\omega'. \quad (3.12.11)$$

Интеграл в правой части (3.12.11) называется сверткой двух спектральных плотностей.

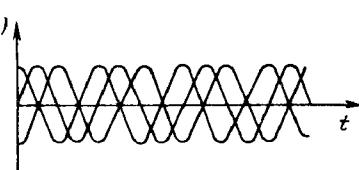
Таким образом, спектральная плотность произведения двух стационарных некоррелированных случайных процессов равна свертке спектральных плотностей перемножаемых процессов.

§ 13. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

Найдем сначала корреляционную функцию случайного сигнала

$$s(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (3.13.1)$$

у которого амплитуда A_0 и частота ω_0 известны, а начальная фаза φ является случайной величиной, равномерно распределенной на интервале 2π , т. е. имеет плотность вероятности



$$W(\varphi) = \begin{cases} 1/2\pi & \text{при } -\pi \leq \varphi \leq \pi, \\ 0 & \text{при других } \varphi. \end{cases} \quad (3.13.2)$$

Рис. 3.10. Три реализации случайного сигнала $A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$.

Несколько реализаций случайного сигнала $s(t)$ приведены на рис. 3.10.

Так как в данном случае среднее значение равно нулю

$$m_s = \langle s(t) \rangle = A_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega_0 t + \varphi) d\varphi = 0,$$

то для функции корреляции можем написать

$$\begin{aligned} k_s(\tau) &= \langle s(t)s(t+\tau) \rangle = A_0^2 \langle \cos(\omega_0 t + \varphi) \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \varphi) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} A_0^2 \cos \omega_0 \tau + A_0^2 \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} A_0^2 \cos \omega_0 \tau. \end{aligned} \quad (3.13.3)$$

В данном случае корреляционная функция оказывается периодической и имеет такой же период, как и исходный сигнал (см. рис. 3.11). В отличие от обычного флукуационного шума в данном случае корреляционная функция при $\tau \rightarrow \infty$ не стремится к нулю. Этот факт можно использовать для обнаружения и выделения достаточно длинного, но слабого сигнала $s(t)$ на фоне более интенсивного шума [14].

Действительно, пусть имеется сумма сигнала $s(t)$ и стационарного шума $n(t)$:

$$\eta(t) = s(t) + n(t). \quad (3.13.4)$$

Если сигнал и шум статистически независимы, то корреляционная функция суммарного колебания $\eta(t)$ равна сумме автокорреляционных функций слагаемых (рис. 3.11):

$$k_\eta(\tau) = k_s(\tau) + k_n(\tau). \quad (3.13.5)$$

Для большинства стационарных шумов, встречающихся на практике, автокорреляционная функция $k_n(\tau)$ удовлетворяет условию (3.6.9): она приближенно равна нулю при τ больше некоторого значения τ_0 . Поэтому $k_\eta(\tau) = k_s(\tau)$ при $\tau > \tau_0$.

Следовательно, ответ на вопрос о наличии или отсутствии в колебании $\eta(t)$ гармонического сигнала $s(t)$ часто можно получить из анализа корреляционной функции $k_\eta(\tau)$. Если при достаточно больших τ она является периодической функцией, то в $\eta(t)$ присутствует сигнал $s(t)$, и наоборот.

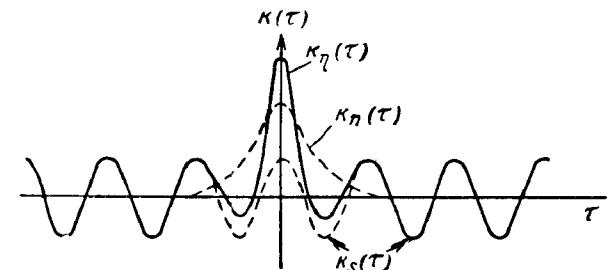


Рис. 3.11. Автокорреляционная функция суммы гармонического сигнала и шума.

Спектральная плотность случайного сигнала $s(t)$ по формуле (3.10.1) равна

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{1}{2} A_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega_0 \tau e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{4} A_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} [\cos \omega_0 \tau + \sin \omega_0 \tau] e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{\pi}{2} A_0^2 [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)], \end{aligned}$$

где последнее равенство написано согласно формуле (П.9). Вспомнив определение одностороннего спектра (3.10.9) и учитя (П.11), окончательно получим

$$S(f) = \frac{1}{2} A_0^2 \delta(f - f_0). \quad (3.13.6)$$

Такой результат вполне логичен. Спектральная плотность сигнала (3.13.1) представляется в виде дискретной линии, расположенной на оси частот в точке $f = f_0$, высота этой линии равна квадрату эффективного значения.

Предположим теперь, что имеется случайный сигнал

$$s(t) = \sum_{k=1}^n A_k \sin(\omega_k t + \varphi_k), \quad (3.13.7)$$

в котором случайны лишь фазы φ_k , причем φ_k и φ_m при $k \neq m$ независимы и равномерно распределены на интервале 2π .

Повторив приведенные выше вычисления, найдем, что функция корреляции и спектральная плотность сигнала (3.13.7) равны соответственно

$$k_s(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n A_k^2 \cos \omega_k \tau, \quad S(f) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n A_k^2 \delta(f - f_k). \quad (3.13.8)$$

Найдем функцию корреляции сигнала, модулированного по амплитуде случайному напряжением:

$$s(t) = A_0 \xi(t) \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (3.13.9)$$

где $\xi(t)$ — стационарный случайный процесс с нулевым средним значением и функцией корреляции $k_\xi(\tau)$;

φ — случайная начальная фаза с плотностью вероятности (3.13.2), не зависящая от $\xi(t)$.

Так как среднее значение сигнала равно нулю, то для функции корреляции по формуле (3.12.9) можем написать

$$\begin{aligned} k_s(\tau) &= A_0^2 \langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle_\xi \langle \cos(\omega_0 t + \varphi) \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \varphi) \rangle_\varphi = \\ &= \frac{1}{2} A_0^2 k_\xi(\tau) \cos \omega_0 \tau. \end{aligned} \quad (3.13.10)$$

Здесь индексом указанна величина, по которой должно выполняться статистическое усреднение.

Функции корреляции и спектральные плотности других, более сложных сигналов, модулированных случайными процессами, рассмотрены в работах [15—20].

Отметим, что если в (3.13.9) начальную фазу φ считать точно известной, то сигнал $s(t)$ будет периодически нестационарным. В отличие от стационарного процесса, статистические характеристики которого не меняются при любом сдвиге начала отсчета времени, характеристики периодически нестационарного процесса не изменяются лишь при сдвиге на величину t_0 , кратную периоду $T_0 = 2\pi/\omega_0$, т. е. при $t_0 = mT_0$, где m — целое число. Поэтому в общем случае плотности вероятности, моментные и корреляционные функции периодически нестационарного процесса зависят не только от разности времен, но и от абсолютного времени, причем последняя зависимость является периодической.

В тех случаях, когда начальная фаза сигнала несущественна (некогерентные системы), при вычислении статистических характеристик периодически нестационарных процессов допустимо применять временное усреднение по периоду [21, 22].

§ 14. ЧАСТО ВСТРЕЧАЮЩИЕСЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ

Можно привести много конкретных выражений для корреляционных функций и спектральных плотностей. Если, например, стационарный шум, имеющий постоянную спектральную плотность $N_0/2$ (белый шум, см. § 16), воздействует на линейную систему с передаточной функцией $K(j\omega)$, то спектральная плотность шума на выходе системы, как будет показано в § 1 гл. 6, есть $\frac{N_0}{2} |K(j\omega)|^2$. Из преобразования Фурье (3.10.2) можно найти корреляционную функцию. Таким образом, для каждой конкретной системы будет получена своя корреляционная функция выходного шума.

Однако в дальнейшем наиболее часто будут встречаться несколько типовых функций корреляций. Выражения для нормированных функций корреляции и соответствующие им спектральные плотности приведены в табл. 3.14.1. Указанные функции корреляции получены путем пропускания белого шума через формирующие линейные фильтры.

В таблице указаны также значения второй производной от коэффициента корреляции в нулевой точке и отношения энергетической ширины полосы Δf_0 к ширине полосы Δf на уровне 0,5 от максимума спектральной плотности.

§ 15. НОРМАЛЬНЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС

Случайный процесс $\xi(t)$ называется нормальным (гауссовым), если при любом n и любых t_1, t_2, \dots, t_n из области изменения аргумента t плотности вероятности для совокупности случайных величин $\xi_\mu = \xi(t_\mu)$, $\mu = 1, 2, \dots, n$, являются нормальными (гауссовыми), т. е. определяются формулами

$$\begin{aligned} w_n(\xi_1, \dots, \xi_n, t_1, \dots, t_n) &= \frac{1}{\sigma_1 \dots \sigma_n \sqrt{(2\pi)^n D}} \times \\ &\times \exp \left[-\frac{1}{2D} \sum_{\mu, \nu=1}^n D_{\mu\nu} \frac{(\xi_\mu - m_\mu)}{\sigma_\mu} \frac{(\xi_\nu - m_\nu)}{\sigma_\nu} \right]. \end{aligned} \quad (3.15.1)$$

Здесь $m_\mu = \langle \xi(t_\mu) \rangle$ — математическое ожидание случайной величины $\xi(t_\mu)$;

$\sigma_\mu^2 = \langle (\xi_\mu - m_\mu)^2 \rangle$ — дисперсия случайной величины $\xi(t_\mu)$;
 D — определитель n -го порядка, составленный из коэффициентов корреляции $R_{\mu\nu} = R(t_\mu, t_\nu) = \langle (\xi_\mu - m_\mu)(\xi_\nu - m_\nu) \rangle / \sigma_\mu \sigma_\nu$;

Таблица 3.14.1

Корреляционные функции и

№ №/п.	Процесс или формирующий фильтр	$k(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$	
		Аналитическое выражение	График
1.	Белый шум	$\frac{N_0}{2} \delta(\tau)$	
2.	Низкочастотный RC-фильтр	$e^{-\alpha \tau }$	
3.	Два низкочастотных RC-фильтра	$(1 + \alpha \tau) e^{-\alpha \tau }$	
4.	Три низкочастотных RC-фильтра	$\left[1 + \alpha \tau + \frac{(\alpha\tau)^2}{3}\right] e^{-\alpha \tau }$	
5.	Гауссов низкочастотный фильтр	$e^{-\alpha\tau^2}$	
6.	Идеальный низкочастотный фильтр	$\frac{\sin \Delta\omega\tau}{\Delta\omega\tau}$	

спектральные плотности

	$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k(z) e^{-j\omega z} dz$		
$-R''(0) = -\frac{k''(0)}{\sigma^2}$	Аналитическое выражение	График	$\frac{\Delta f_s}{\Delta f}$
∞	$\frac{N_0}{2}$		1
∞	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}, \quad \alpha = \frac{1}{RC}$		1,571
α^2	$\frac{4\alpha^3}{(\alpha^2 + \omega^2)^2}$		1,221
$\frac{\alpha^2}{3}$	$\frac{16\alpha^5}{3(\alpha^2 + \omega^2)^3}$		1,155
2α	$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$		1,065
$\frac{\Delta\omega^2}{3}$	$\frac{\pi}{\Delta\omega}$ при $ \omega \leq \Delta\omega$ 0 при $ \omega > \Delta\omega$		1

№ № п/п.	Процесс или формирующий фильтр	$k(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} dt$	
		Аналитическое выражение	График
7.	Идеальный высокочастотный фильтр	$\frac{\pi}{\Delta\omega} \delta(\tau) - \frac{\sin \Delta\omega\tau}{\Delta\omega\tau}$	
8.	Высокочастотный RL-фильтр	$\delta(\tau) - \frac{1}{2\beta} e^{- \tau /\beta}$	
9.	Синусоида со случайной фазой	$\frac{1}{2} A_0^2 \cos \omega_0 \tau$	
10.	Колебательный контур	$e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$	
11.	Колебательный контур	$e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$	
12.	Гауссов радиофильтр	$e^{-\alpha\tau^2} \cos \omega_0 \tau$	
13.	Идеальный радиофильтр	$\frac{\sin \frac{1}{2} \Delta\omega\tau}{\frac{1}{2} \Delta\omega\tau}$	

	$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$		
$-R''(0) = -\frac{k''(0)}{\sigma^2}$	Аналитическое выражение	График	$\frac{\Delta f_2}{\Delta f}$
∞	0 при $ \omega \leq \Delta\omega$ $\frac{\pi}{\Delta\omega}$ при $ \omega > \Delta\omega$		1
∞	$\frac{(\beta\omega)^2}{1 + (\beta\omega)^2}, \beta = \frac{L}{R}$		-
$\frac{1}{2} A_0^2 \omega_0^2$	$\frac{\pi}{2} A_0^2 [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$		1
∞	$\alpha \left[\frac{1}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right]$		1,571
$\omega_0^2 + \alpha^2$	$\frac{4\alpha(\omega_0^2 + \alpha^2)}{[\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2][\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2]}$		1,571
$\omega_0^2 + 2\alpha$	$\sqrt{\frac{\pi}{4\alpha}} \times \left[e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{4\alpha}} + e^{-\frac{(\omega + \omega_0)^2}{4\alpha}} \right]$		1,065
$\omega_0^2 + \frac{\Delta\omega^2}{12}$	$\frac{\pi}{\Delta\omega}$ при $ \omega \pm \omega_0 \leq \frac{\Delta\omega}{2}$ 0 при $ \omega \pm \omega_0 > \frac{\Delta\omega}{2}$		1

$$D = \begin{vmatrix} 1 & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & 1 & \dots & R_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & 1 \end{vmatrix}, \quad (R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}, R_{\mu\mu} = 1); \quad (3.15.2)$$

$D_{\mu\nu}$ — алгебраическое дополнение элемента $R_{\mu\nu}$ определителя D .

Характеристическая функция, соответствующая плотности вероятности (3.15.1), имеет вид

$$\Theta_n(u_1, \dots, u_n, t_1, \dots, t_n) = \exp \left\{ j \sum_{\mu=1}^n m_\mu u_\mu - \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^n K(t_\mu, t_\nu) u_\mu u_\nu \right\}, \quad (3.15.3)$$

где

$$\begin{aligned} K(t_\mu, t_\nu) &= \langle [\xi(t_\mu) - m_\mu] [\xi(t_\nu) - m_\nu] \rangle = \\ &= \sigma_\mu \sigma_\nu R(t_\mu, t_\nu) \text{ — функция корреляции.} \end{aligned} \quad (3.15.4)$$

Видно, что в выражения для плотностей вероятностей (характеристических функций) нормального случайного процесса входят только математические ожидания и корреляционные функции. Следовательно, если из физических соображений известно, что случайный процесс является нормальным, то он исчерпывающим образом определяется указанием закона изменения во времени математического ожидания и корреляционной функции. Поэтому корреляционная теория дает полное описание нормальных процессов.

Для нормальных процессов все высшие кумулянты и корреляционные функции, начиная соответственно с κ_3 и K_3 , равны нулю. Поэтому нормальные процессы могут отличаться друг от друга значением математического ожидания и видом корреляционной функции (спектральной плотности).

Если значения случайного процесса $\xi(i)$ в точках t_1, t_2, \dots, t_n некоррелированы, то $R_{\mu\nu} = 0$ при $\mu \neq \nu$ и $R_{\mu\mu} = 1$. Поэтому $D = 1$, а $D_{\mu\nu} = 1$ при $\mu = \nu$ и $D_{\mu\nu} = 0$ при $\mu \neq \nu$. В данном случае формула (3.15.1) принимает вид

$$\begin{aligned} w_n(\xi_1, \dots, \xi_n) &= w_1(\xi_1) \dots w_n(\xi_n) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma_1 \dots \sigma_n} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^n \frac{(\xi_\mu - m_\mu)^2}{\sigma_\mu^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.15.5)$$

Следовательно, если нормально распределенные случайные величины $\xi(t_\mu)$ некоррелированы, то они независимы.

Полагая в формулах (3.15.1) и (3.15.3) $n = 1$ и $n = 2$, получим частные соотношения:

$$w_1(\xi_1) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\xi_1 - m_1)^2}{2\sigma_1^2} \right], \quad (3.15.6)$$

$$\Theta_1(u_1) = \exp \left[jm_1 u_1 - \frac{1}{2} \sigma_1^2 u_1^2 \right], \quad (3.15.7)$$

$$\begin{aligned} w_2(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-R^2}} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-R^2)} \left[\frac{(\xi_1 - m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2R \frac{(\xi_1 - m_1)(\xi_2 - m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(\xi_2 - m_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.15.8)$$

$$\Theta_2(u_1, u_2) = \exp \left\{ j(m_1 u_1 + m_2 u_2) - \frac{1}{2} [\sigma_1^2 u_1^2 + 2R\sigma_1\sigma_2 u_1 u_2 + \sigma_2^2 u_2^2] \right\}, \quad (3.15.9)$$

где

$$R = R_{12} = R(t_1, t_2) = R(t_2, t_1).$$

Формулы (3.15.3) и (3.15.7) позволяют прийти к важному заключению. По определению, характеристическая функция случайных величин ξ_1, \dots, ξ_n равна

$$\Theta_n(u_1, u_2, \dots, u_n, t_1, \dots, t_n) = \langle \exp(ju_1\xi_1 + \dots + ju_n\xi_n) \rangle.$$

Поэтому для характеристической функции суммы

$$\xi = \xi_1 + \dots + \xi_n \quad (3.15.10)$$

можем написать

$$\begin{aligned} \Theta(u, t_1, \dots, t_n) &= \langle \exp ju\xi \rangle = \langle \exp ju(\xi_1 + \dots + \xi_n) \rangle = \\ &= \Theta_n(u, \dots, u, t_1, \dots, t_n). \end{aligned}$$

Если случайные величины ξ_1, \dots, ξ_n являются нормальными и имеют характеристическую функцию (3.15.3), то можем написать

$$\Theta(u, t_1, \dots, t_n) = \exp \left(jMu - \frac{1}{2} \sigma^2 u^2 \right), \quad (3.15.11)$$

где

$$M = \sum_{\mu=1}^n m_\mu, \quad \sigma^2 = \sum_{\mu, \nu=1}^n K(t_\mu, t_\nu). \quad (3.15.12)$$

Эта формула по виду совпадает с формулой (3.15.7), только теперь t и σ^2 зависят от n моментов времени. Так как формула (3.15.7) описывает нормальный случайный процесс, то и случайный процесс ξ будет также нормальным.

Таким образом, сумма конечного числа нормально распределенных случайных величин (зависимых или независимых) является также нормальной случайной величиной.

Применив формулу (3.2.6) к нормальному процессу и воспользовавшись (3.15.6) и (3.15.8), находим условную плотность вероятности

$$W(\xi_2 | \xi_1) = \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi(1-R^2)}} \exp \left[-\frac{1}{2(1-R^2)} \left(\frac{\xi_1 - m_1}{\sigma_1} R - \frac{\xi_2 - m_2}{\sigma_2} \right)^2 \right]. \quad (3.15.13)$$

Предположим, что выполняются соотношения

$$m_\mu = \langle \xi(t_\mu) \rangle = m, \quad K(t_\mu, t_\nu) = k(|t_\mu - t_\nu|), \quad \mu, \nu = 1, 2, \dots, n, \quad (3.15.14)$$

т. е. математическое ожидание не зависит от выбора момента времени и является постоянным, а корреляционная функция зависит лишь от абсолютного значения расстояния между рассматриваемыми моментами времени. Тогда, по определению (см. § 5), нормальный процесс будет стационарным в широком смысле. Однако он будет одновременно стационарным в узком смысле, так как плотности вероятности (3.15.1) не меняются при любом сдвиге группы точек t_1, \dots, t_n вдоль оси времени на произвольную постоянную величину. При этом n -мерная плотность вероятности нормального стационарного процесса зависит лишь от $(n-1)$ параметров $\tau_{\mu\nu} = |t_\mu - t_\nu|$, так как один из рассматриваемых моментов t_1, \dots, t_n можно взять за начало отсчета времени.

Для нормального стационарного процесса формулы (3.15.1) и (3.15.3) можно записать так:

$$\omega_n(\xi_1, \dots, \xi_n) = \frac{1}{V(2\pi\sigma^2)^n D} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2 D} \sum_{\mu, \nu=1}^n D_{\mu\nu} (\xi_\mu - m)(\xi_\nu - m) \right], \quad (3.15.15)$$

$$\Theta_n(u_1, \dots, u_n) = \exp \left[jm \sum_{\mu=1}^n u_\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \sum_{\mu, \nu=1}^n R(\tau_{\mu\nu}) u_\mu u_\nu \right], \quad (3.15.16)$$

где $\sigma^2 = \langle [\xi(t) - m]^2 \rangle$ — дисперсия процесса $\xi(t)$.

Приведем явные выражения для одномерных и двумерных плотностей вероятностей и характеристических функций нормального

стационарного процесса, которые легко получаются из формул (3.15.6) — (3.15.9):

$$\omega_1(\xi) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\xi - m)^2}{2\sigma^2} \right], \quad (3.15.17)$$

$$\Theta_1(u) = \exp \left(jmu - \frac{1}{2} \sigma^2 u^2 \right), \quad (3.15.18)$$

$$\begin{aligned} \omega_2(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2 \sqrt{1-R^2(\tau)}} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{(\xi_1 - m)^2 - 2R(\tau)(\xi_1 - m)(\xi_2 - m) + (\xi_2 - m)^2}{2\sigma^2 [1 - R^2(\tau)]} \right\}, \end{aligned} \quad (3.15.19)$$

$$\Theta_2(u_1, u_2) = \exp \left\{ jm(u_1 + u_2) - \frac{1}{2} \sigma^2 [u_1^2 + 2R(\tau)u_1 u_2 + u_2^2] \right\}. \quad (3.15.20)$$

Если среднее значение стационарного процесса равно нулю ($m = 0$), то из (3.15.18) имеем

$$\Theta_1(u) = \exp \left(-\frac{1}{2} \sigma^2 u^2 \right).$$

Воспользовавшись формулой (3.4.4), находим одномерные моменты стационарного нормального процесса

$$\langle \xi^n(t) \rangle = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-1) \sigma^n & \text{при } n \text{ четном,} \\ 0 & \text{при } n \text{ нечетном.} \end{cases} \quad (3.15.21)$$

Для нормального стационарного процесса $\xi(t)$ с нулевым средним значением ($m = 0$) все многомерные моменты нечетного порядка равны нулю, а четного порядка выражаются через произведение значений корреляционной функции $k(\tau)$:

$$\left. \begin{aligned} m_{2n-1}(t_1, \dots, t_{2n-1}) &= \langle \xi(t_1) \dots \xi(t_{2n-1}) \rangle = 0, \\ m_{2n}(t_1, \dots, t_{2n}) &= \sum_{\text{Все пары}} \left[\prod_{i \neq j}^n \langle \xi(t_i) \xi(t_j) \rangle \right] = \\ &\quad \sum_{\text{Все пары}} [\langle \xi(t_i) \xi(t_j) \rangle \langle \xi(t_k) \xi(t_l) \rangle \dots \langle \xi(t_p) \xi(t_q) \rangle] \end{aligned} \right\} \quad (3.15.22)$$

В частности,

$$\left. \begin{aligned} m_{1111}(t_1, t_2, t_3, t_4) &= \langle \xi(t_1) \xi(t_2) \xi(t_3) \xi(t_4) \rangle = \\ &= k(t_2 - t_1) k(t_4 - t_3) + k(t_3 - t_1) k(t_4 - t_2) + \\ &\quad + k(t_4 - t_1) k(t_3 - t_2), \\ m_{22}(t_1, t_2) &= \langle \xi^2(t_1) \xi^2(t_2) \rangle = \sigma^4 + 2k^2(t_2 - t_1). \end{aligned} \right\} \quad (3.15.23)$$

Двумерную нормальную плотность вероятности (3.15.19) при $m = 0$ можно представить в виде следующего ряда [23]:

$$w_2(\xi_1, \xi_2) = \sigma^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^{(n+1)}\left(\frac{\xi_1}{\sigma}\right) \Phi^{(n+1)}\left(\frac{\xi_2}{\sigma}\right) \cdot \frac{R^n(\tau)}{n!}. \quad (3.15.24)$$

Здесь $\Phi(z)$ — интеграл вероятности (2.8.8), а $\Phi^{(n)}(z)$ — производная n -го порядка от интеграла вероятности (см. приложение V). Формулой (3.15.24) часто пользуются при рассмотрении нелинейных безынерционных преобразований нормальных стационарных процессов.

Разложение (3.15.24) позволяет сравнительно просто находить различные двумерные моменты нормального процесса. Действительно, для двумерных моментов можем написать

$$\begin{aligned} m_{\mu\nu}(\tau) &= \langle \xi^\mu(t) \xi^\nu(t + \tau) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_1^\mu \xi_2^\nu w_2(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \\ &= \sigma^{\mu+\nu} \sum_{k=0}^{\infty} N_{\mu,k} N_{\nu,k} \frac{R^k(\tau)}{k!}, \end{aligned} \quad (3.15.25)$$

где

$$N_{\mu,k} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^\mu \Phi^{(k+1)}(\xi) d\xi. \quad (3.15.26)$$

Совокупность коэффициентов $N_{i,k}$ образует матрицу, приведенную в табл. 3.15.1.

Таблица 3.15.1

Значения коэффициентов $N_{i,k}$

i	$k=0$	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	-1	0	0	0	0	0
2	1	0	2.1	0	0	0	0
3	0	-3.1	0	-3.2.1	0	0	0
4	3.1	0	4.3.1	0	4.3.2.1	0	0
5	0	-5.3.1	0	-5.4.3.1	0	-5.4.3.2.1	0
6	5.3.1	0	6.5.3.1	0	6.5.4.3.1	0	6.5.4.3.2.1

Можно указать следующее правило заполнения матрицы $\{N_{i,k}\}$:

1. Элементы выше главной диагонали ($i < k$) равны нулю.

2. Ниже главной диагонали и на самой диагонали ($i \geq k$) отличны от нуля только элементы с индексами i и k одинаковой четности.

3. Элемент $N_{i,k}$ строится так.

К заданному числу i добавляем в качестве сомножителей числа $(i-1), (i-2), (i-3)$ и т. д. так, чтобы всего было k сомножителей. Затем добавляем в качестве сомножителей все нечетные числа от $(i-k+1)$ до 1, исключая само $(i-k+1)$. Например,

$$N_{6,2} = \underbrace{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}_{2 \text{ сомнож.}}$$

4. Знак элемента $N_{i,k}$ зависит от четности k : для нечетных k это минус, для четных k — плюс.

Применяя это правило, нетрудно получить следующие формулы:

$$m_{24}(\tau) = \sigma^6 [3 + 12R^2(\tau)], \quad m_{44}(\tau) = \sigma^8 [9 + 72R^2(\tau) + 24R^4(\tau)].$$

Можно показать [18], что трехмерная нормальная плотность вероятности может быть представлена рядом, аналогичным (3.15.24). Использовав такое представление трехмерной плотности вероятности, можно указать правило вычисления трехмерных моментов.

Нормальные случайные процессы наиболее часто встречаются на практике и поэтому занимают особое положение среди других случайных процессов.

Большинство встречающихся на практике электрических случайных процессов, таких, например, как дробовой шум, тепловые флуктуации, собственный шум типового радиоприемника от детектора, атмосферные и космические шумы, представляют собой результатирующий эффект (сумму) большого числа сравнительно слабых элементарных импульсов, возникающих в случайные моменты времени.

Оказывается, что плотность вероятности суммы неограниченно приближается к нормальней с увеличением числа слагаемых, независимо от того, какие плотности вероятности имеют отдельные слагаемые. При этом важно лишь то, чтобы влияние отдельных слагаемых на сумму было равномерно малым (приблизительно одинаковым).

Математические условия применимости нормального закона распределения даются центральной предельной теоремой, доказательство которой при весьма общих условиях принадлежит А. М. Ляпунову.

Укажем, что при линейных преобразованиях нормальных случайных сигналов свойство нормальности сохраняется. Если на вход линейной системы воздействует нормальный случайный процесс, то на выходе системы получается также нормальный процесс. Поэтому можно сказать, что нормальные процессы обладают свойством «устойчивости» по отношению к линейным преобразованиям.

При нелинейных преобразованиях свойство нормальности теряется. Если нормальный процесс $\xi(t)$ подвергается нелинейному преобразованию $\eta = f(t, \xi)$, где f — нелинейная функция относи-

тельно ξ , то процесс $n(t)$ будет ненормальным. В частности, в результате перемножения двух нормальных процессов получается ненормальный процесс [см. формулу (5.2.11)].

Однако если ненормальный случайный процесс с временем корреляции τ_k воздействует на инерционную линейную систему (с постоянной времени τ_c), то процесс на выходе такой системы приближается к нормальному. Это приближение тем лучше, чем сильнее выполняется неравенство $\tau_c \gg \tau_k$.

Тенденция к нормализации случайного процесса является характерным свойством линейных систем. Количественные характеристики степени приближения процесса кциальному рассмотриваются в § 17.

§ 16. БЕЛЫЙ ШУМ

Рассмотрим стационарный случайный процесс $n(t)$, функция корреляции которого равна дельта-функции, умноженной на некоторую постоянную величину $N_0/2$ (рис. 3.12, а):

$$k(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau). \quad (3.16.1)$$

Как известно (см. приложение I), дельта-функция равна нулю всюду, за исключением точки $\tau = 0$, где $\delta(0) = \infty$, причем интеграл от дельта-функции по любому интервалу, содержащему особую точку $\tau = 0$, равен единице.

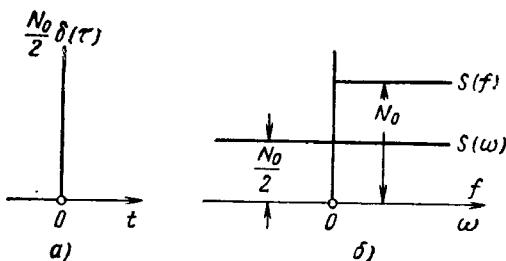
Отсюда следует, что рассматриваемый случайный процесс характеризуется тем, что значения $n(t)$ в любые два, сколь угодно близкие моменты времени некоррелированы. Поэтому такой процесс $n(t)$ можно назвать абсолютно случайным процессом.

Рис. 3.12. Корреляционная функция (а) и спектральная плотность (б) белого шума.

По формулам (3.10.1) и (3.10.9) с учетом (П.4) находим спектральную плотность абсолютно случайного процесса

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{N_0}{2} = \text{const}, \quad S(f) = N_0. \quad (3.16.2)$$

Таким образом, спектральная плотность абсолютно случайного процесса постоянна при всех частотах (рис. 3.12, б).



Случайный процесс $n(t)$, обладающий равномерным спектром в очень широком диапазоне частот, обычно называют «белым шумом» по аналогии с белым светом, имеющим в видимой части равномерный сплошной спектр.

Для белого шума формула (3.10.3) дает физически непонятный результат: дисперсия (средняя мощность) такого шума $\sigma^2 = \infty$. Этот результат объясняется тем, что белый шум следует рассматривать как идеализацию, так как реальные процессы всегда имеют энергетический спектр, убывающий с частотой, и, следовательно, обладают конечным временем корреляции $\tau_k \neq 0$ и ограниченной средней мощностью. Белый шум является полезной математической идеализацией, применимой в тех случаях, когда время корреляции шума много меньше всех существенных постоянных времени системы, на которую воздействует шум, или, иначе, когда в пределах амплитудно-частотной характеристики системы спектральную плотность воздействующего реального шума можно приближенно считать постоянной.

Можно указать следующее приближенное условие и правило замены реального шума (процесса) на белый шум $n(t)$. Пусть рассматривается воздействие на некоторую систему с постоянной времени τ_c реального шума с функцией корреляции $k(\tau) = \sigma^2 R(\tau)$, характеризуемой достаточно широким спектром $S(\omega)$ и, следовательно, малым, но конечным временем корреляции $\tau_k \ll \tau_c$. В данном случае реальный шум можно рассматривать как белый шум. За значение спектральной плотности $N_0/2$ «эквивалентного» белого шума можно взять значение $S(\omega = 0) = S(0)$, которое по формуле (3.10.1) равно

$$\frac{N_0}{2} = S(\omega = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) d\tau = 2 \int_0^{\infty} k(\tau) d\tau = 2\sigma^2 \tau_k. \quad (3.16.3)$$

Укажем, что если белый шум $n(t)$ представляет случайное напряжение, то величина N_0 имеет размерность $[N_0] = [\sigma^2 / \text{сек}] = [\text{в}^2 \text{ сек}]$.

Приведем два конкретных примера флуктуационных шумов, которые часто рассматривают как белый шум [24—28].

1. **Дробовой шум ламп.** Спектральную плотность флуктуаций анодного тока лампы в ряде случаев можно представить формулой

$$S_a(f) = 2eI_a \Gamma^2 F^2 (2\pi f \tau_0), \quad (3.16.4)$$

где $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ к}$ — заряд электрона;

I_a — средний анодный ток;

Γ^2 — коэффициент депрессии из-за пространственного заряда;

F^2 — коэффициент частотной депрессии;

τ_0 — время пролета электронов в лампе.

Исходя из часто применяемой методики измерения флюктуаций (путем сравнения с дробовым шумом «насыщенного» диода), целесообразно спектральную плотность записать иначе:

$$S_a(f) = 2eI_s F^2(2\pi f \tau_0), \quad (3.16.5)$$

где I_s — эквивалентный ток насыщенного диода.

Можно показать, что коэффициент частотной депрессии дробовых флюктуаций при наличии в лампе пространственного заряда определяется приближенной формулой

$$F^2(\theta) = 360^{-6} \left[2 + \frac{1}{4} \theta^4 + (\theta^2 - 2) \cos \theta - 2\theta \sin \theta \right], \quad (3.16.6)$$

где $\theta = \omega \tau_0 = 2\pi f \tau_0$ — угол пролета электронов в лампе (рис. 3.13).

Из формул (3.16.5) и (3.16.6) путем разложения $\cos \theta$ и $\sin \theta$ в ряды можно найти значение дисперсии флюктуаций анодного тока лампы:

$$\sigma_a^2 = \int_0^\infty S_a(f) df = \frac{eI_s}{\pi} \int_0^\infty F^2(\omega \tau_0) d\omega \approx 2eI_s \tau_0^{-1}. \quad (3.16.7)$$

Если лампа работает при частотах ω , для которых угол пролета электронов в лампе мал, т. е. $\theta = \omega \tau_0 \ll 1$, то $F^2(\theta) \approx 1$ и при таких углах пролета спектральная плотность шума равномерна:

$$S_a(f) = 2eI_s, \quad (N_0 = 2eI_s). \quad (3.16.8)$$

Отсюда следует, что флюктуации анодного тока лампы можно рассматривать как белый шум лишь при частотах, для которых угол пролета электронов в лампе много меньше единицы.

2. **Тепловой шум.** Известно, что спектральная плотность напряжения теплового шума омического сопротивления R определяется формулой Найквиста:

$$S_u(f) = 4kTR, \quad (N_0 = 4kTR), \quad (3.16.9)$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ дж/град — постоянная Больцмана;

T — температура сопротивления в градусах Кельвина (при $T = 290^\circ$, постоянная $kT = 4 \cdot 10^{-21}$ вт/гц).

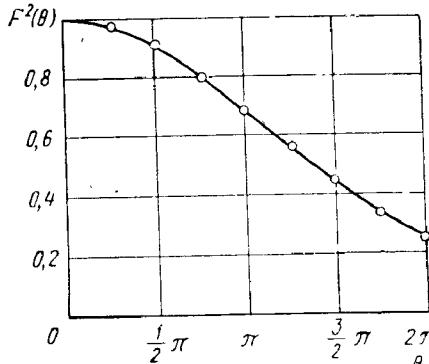


Рис. 3.13. Зависимость коэффициента частотной депрессии от угла пролета электронов.

Из формулы видно, что спектральная плотность теплового шума постоянна и, казалось бы, тепловой шум является идеальным примером белого шума. Однако следует иметь в виду, что формула (3.16.9) справедлива лишь при не очень высоких частотах. Она получается из точной квантовой формулы

$$S_u(f) = 4kTR \frac{hf}{kT} \left(e^{\frac{hf}{kT}} - 1 \right)^{-1}, \quad (3.16.10)$$

где $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ дж.сек — постоянная Планка, при $hf/kT \ll 1$.

При нормальной комнатной температуре даже на миллиметровых волнах неравенство $hf/kT \ll 1$ практически выполняется. Поэтому в радиотехнике оправдано применение приближенной формулы (3.16.9). Однако при вычислении дисперсии теплового шума необходимо пользоваться точной формулой (3.16.10)

$$\begin{aligned} \sigma_u^2 &= 4kTR \int_0^\infty \frac{hf}{kT} \left(e^{\frac{hf}{kT}} - 1 \right)^{-1} df = \\ &= 4kTR \frac{kT}{h} \int_0^\infty \frac{x dx}{e^x - 1} = \frac{2\pi^2}{3h} (kT)^2 R. \end{aligned} \quad (3.16.11)$$

Укажем, что функция корреляции случайного процесса

$$s(t) = n(t) A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (3.16.12)$$

получающаяся в результате перемножения белого шума $n(t)$ и гармонического колебания со случайной и равномерно распределенной начальной фазой φ , на основании формулы (3.13.10) равна

$$k_s(\tau) = \frac{1}{4} N_0 A_0^2 \delta(\tau). \quad (3.16.13)$$

Спектральная плотность процесса $s(t)$ согласно (3.10.10) будет равномерной

$$S(f) = \frac{1}{2} N_0 A_0^2. \quad (3.16.14)$$

§ 17. ПРОЦЕССЫ, МАЛО ОТЛИЧАЮЩИЕСЯ ОТ НОРМАЛЬНЫХ. РЯДЫ ЭДЖВОРТА И ЛАГЕРРА

Во многих практических задачах приходится иметь дело с плотностями вероятности $W_1(\xi)$, по виду не очень сильно отличающиеся от нормальной (2.8.3). Характерные особенности таких функций $W_1(\xi)$ состоят в следующем (рис. 3.14):

1) они являются одновершинными (т. е. имеют единственный максимум);

2) по обе стороны от вершины они имеют ветви, достаточно быстро приближающиеся к нулю при возрастании абсолютного значения аргумента.

Одномерные плотности вероятности такого типа удобно аппроксимировать при помощи полиномов Чебышева — Эрмита или полиномов Лагерра.

1. Ряд Эджворт [23, 29—31]. Указанные плотности вероятности можно представить в виде следующего ряда:

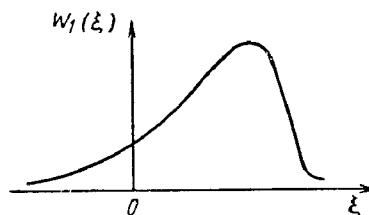


Рис. 3.14. Плотность вероятности.

$$W_1(\xi) = w_1(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{b_n}{\sigma^n} H_n\left(\frac{\xi-m}{\sigma}\right), \quad (3.17.1)$$

где $w_1(\xi)$ — нормальная плотность

$$w_1(\xi) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\xi-m)^2}{2\sigma^2}\right]; \quad (3.17.2)$$

$H_n(z)$ — одномерные полиномы Чебышева — Эрмита

$$H_n(z) = (-1)^n e^{\frac{1}{2} z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-\frac{1}{2} z^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.17.3)$$

Так как полиномы Чебышева — Эрмита ортогональны с весом $\exp(-\frac{1}{2} z^2)$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(z) H_m(z) e^{-\frac{1}{2} z^2} dz = n! \sqrt{2\pi} \delta_{mn} = \begin{cases} n! \sqrt{2\pi} & \text{при } m = n, \\ 0 & \text{при } m \neq n. \end{cases}$$

Поэтому коэффициенты b_n , называемые квазимоментами, определяются формулой

$$b_n = \sigma^n \int_{-\infty}^{\infty} W_1(\xi) H_n\left(\frac{\xi-m}{\sigma}\right) d\xi = \sigma^n \langle H_n\left(\frac{\xi-m}{\sigma}\right) \rangle. \quad (3.17.4)$$

Разложение функции $W_1(\xi)$ в ряд по ортогональным полиномам Чебышева — Эрмита базируется на следующей теореме: пусть $W_1(\xi)$ — произвольная функция с интегрируемым квадратом

$$\int_{-\infty}^{\infty} |W_1(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| W_1(\xi) - w_1(\xi) \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \cdot \frac{b_n}{\sigma^n} H_n\left(\frac{\xi-m}{\sigma}\right) \right|^2 d\xi = 0.$$

Практически функцию $W_1(\xi)$ нужно знать с некоторой конечной точностью. Поэтому вместо $W_1(\xi)$ можно взять конечную сумму членов ряда, причем число слагаемых N будет зависеть от требуемой точности и от выбора величин m и σ^2 . В большинстве практически интересных случаев наилучшее приближение при заданном N будет тогда, когда m и σ^2 выбраны равными среднему значению m и дисперсии σ^2 случайного процесса $\xi(t)$, и разложение производится по полиномам $H_n\left(\frac{\xi-m}{\sigma}\right)$.

Будем считать, что m и σ^2 выбраны указанным образом. Тогда нетрудно убедиться, что

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 0. \quad (3.17.5)$$

Действительно, по формуле (3.17.3) найдем

$$\left. \begin{aligned} H_0(z) &= 1, & H_1(z) &= z, & H_2(z) &= z^2 - 1, \\ H_3(z) &= z^3 - 3z, & H_4(z) &= z^4 - 6z^2 + 3. \end{aligned} \right\} \quad (3.17.6)$$

Воспользовавшись теперь формулой (3.17.4) для $n = 0, 1, 2$, убеждаемся в выполнении равенств (3.17.5).

Если в формуле (3.17.1) ограничиться конечным числом членов, то получим ряд Эджворт:

$$W_1(\xi) \approx w_1(\xi) \left[1 + \sum_{n=3}^N \frac{1}{n!} \cdot \frac{b_n}{\sigma^n} H_n\left(\frac{\xi-m}{\sigma}\right) \right]. \quad (3.17.7)$$

Здесь первый член соответствует нормальной плотности вероятности. Поэтому для нормальной плотности вероятности все квазимоменты при $n \geq 3$ равны нулю ($b_n = 0$). Первые два коэффициента ряда b_3/σ^3 и b_4/σ^4 , характеризующие отклонение плотности вероятности от нормальной, в литературе получили название коэффициентов асимметрии и эксцесса соответственно (см. стр. 72):

$$\gamma_1 = \frac{b_3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\kappa_3}{\kappa_2^{3/2}}, \quad \gamma_2 = \frac{b_4}{\sigma^4} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{\kappa_4}{\kappa_2^2}. \quad (3.17.8)$$

Здесь $\kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$ — кумулянты [см. формулу (3.4.8)], а μ_3 и μ_4 — одномерные центральные моменты третьего и четвёртого порядков, определенные формулой (2.5.13):

$$\mu_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - m)^3 W_1(\xi) d\xi, \quad \mu_4 = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - m)^4 W_1(\xi) d\xi. \quad (3.17.9)$$

Как указывает само название, коэффициент асимметрии является количественной характеристикой асимметрии плотности вероятности относительно ее среднего значения. В любом симметричном распределении и, в частности, нормальном, все центральные моменты нечетного порядка равны нулю. На рис. 3.15 приведены две кривые плотности вероятности. Первая из них имеет более пологий спад справа от среднего значения и в выражении из кубы положительных отклонений превысят кубы отрицательных, так что коэффициент γ_1 будет положителен. В таких случаях говорят, что плотность вероятности обладает положительной асимметрией. Если

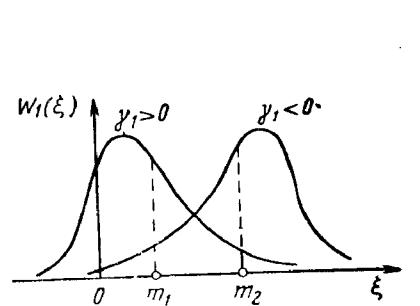


Рис. 3.15. Две асимметричные плотности вероятности.

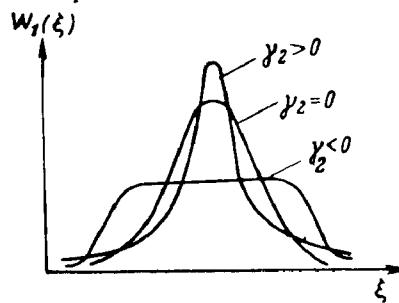


Рис. 3.16. Плотности вероятности с различными значениями эксцесса.

коэффициент γ_1 отрицателен, то говорят об отрицательной асимметрии. В этом случае длинная часть кривой расположена слева от среднего значения.

Коэффициент эксцесса характеризует сглаженность кривой около среднего значения. Для нормальной плотности вероятности коэффициент эксцесса γ_2 равен нулю. Положительное значение γ_2 указывает на то, что кривая плотности вероятности в окрестности максимума имеет более высокую и более острую вершину, чем нормальная плотность вероятности. Обратно, отрицательное значение γ_2 указывает на более низкий и более плоский характер вершины по сравнению с нормальной кривой. В первом случае говорят о положительном, а во втором — об отрицательном эксцессе.

На рис. 3.16 представлены три кривые: нормальная плотность вероятности ($\gamma_2 = 0$), плотность вероятности с положительным эксцессом и плотность вероятности с отрицательным эксцессом.

На практике при аппроксимации плотностей вероятностей, не очень сильно отличающихся от нормальной, часто ограничиваются учетом только коэффициентов асимметрии и эксцесса. В этом случае формулу (3.17.7) можно записать

$$W_1(\xi) \approx w_1(\xi) \left[1 + \frac{\gamma_1}{3!} H_3 \left(\frac{\xi - m}{\sigma} \right) + \frac{\gamma_2}{4!} H_4 \left(\frac{\xi - m}{\sigma} \right) \right]. \quad (3.17.10)$$

Для применения такой аппроксимации нужно тем или иным способом вычислить среднее значение m , дисперсию σ^2 , третий и четвертый центральные моменты случайной функции $\xi(t)$.

Следует отметить, что при такой аппроксимации может незначительно нарушаться свойство положительной определенности для плотности вероятности: аппроксимирующая кривая при больших значениях $|\xi|$ может принимать отрицательные значения, недопустимые для плотности вероятности. Это является следствием того, что формула (3.17.10) имеет приближенный характер.

Полиномы Чебышева — Эрмита просто выражаются через производные от интеграла вероятности (2.8.8):

$$\Phi^{(n+1)}(z) = (-1)^{n+1} \Phi'(z) H_n(z). \quad (3.17.11)$$

Если при помощи этой формулы в (3.17.10) перейти от полиномов Чебышева — Эрмита к производным от интеграла вероятности, то получим привычную форму одномерного ряда Эджвортса

$$W_1(\xi) = \frac{1}{\sigma} \left[\Phi' \left(\frac{\xi - m}{\sigma} \right) - \frac{\gamma_1}{3!} \Phi^{(4)} \left(\frac{\xi - m}{\sigma} \right) + \frac{\gamma_2}{4!} \Phi^{(5)} \left(\frac{\xi - m}{\sigma} \right) \right]. \quad (3.17.12)$$

Характеристическая функция для плотности вероятности (3.17.1) равна

$$\Theta_L(u) = \exp \left[jmu + \frac{1}{2} (\sigma u)^2 \right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{b_n}{\sigma^n} (-ju)^n. \quad (3.17.13)$$

Разлагая экспоненту в ряд Тейлора, производя умножение и сравнивая результат с рядом (3.4.3), составленным из моментов, можно убедиться, что моменты линейно выражаются через квазимоменты (и наоборот), а также найти соответствующие коэффициенты [30]. Это обстоятельство и дает основание называть коэффициенты b_n , представляющие линейную комбинацию моментов, квазимоментами.

Можно показать, что многомерные плотности вероятности, не очень сильно отличающиеся от нормальных, аналогичным образом можно представить в виде разложений в ряд по многомерным полиномам Чебышева — Эрмита. Коэффициентами при этих полиномах будут многомерные квазимоментные функции. Квазимоментные функции, так же, как моментные и корреляционные, могут быть использованы для описания случайного процесса [32].

Ценность приближенного представления плотностей вероятностей, не очень сильно отличающихся от нормальной, при помощи квазимоментных функций состоит в том, что можно указать метод преобразования их линейными и нелинейными системами. Тем самым в принципе решается задача о «пересчете» плотностей вероятностей при анализе воздействия случайного процесса на линейные и нелинейные системы [30].

2. Ряд Лагерра [33—36]. Если плотность вероятности $W_1(\xi)$ равна нулю при отрицательных значениях аргумента (например, в случае суммирования ограниченного числа положительных случайных величин), то соответствующий ряд Эджвортса сходится медленно. В подобных случаях более подходящей является аппроксимация плотности вероятности при помощи ряда Лагерра:

$$W_1(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\xi} \xi^n L_n^{(\alpha)}(\xi), \quad (3.17.14)$$

где $L_n^{(\alpha)}(z)$ — обобщенный полином Лагерра

$$L_n^{(\alpha)}(z) = e^z \frac{z^{-\alpha}}{n!} \cdot \frac{d^n}{dz^n} (e^{-z} z^{n+\alpha}), \quad \alpha > -1. \quad (3.17.15)$$

Первые четыре полинома равны:

$$\left. \begin{array}{l} L_0^{(\alpha)}(z) = 1, \\ L_1^{(\alpha)}(z) = 1 + \alpha - z, \\ 2L_2^{(\alpha)}(z) = (\alpha + 1)(\alpha + 2) - 2z(\alpha + 2) + z^2, \\ 6L_3^{(\alpha)}(z) = (\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3) - 3z(\alpha + 2)(\alpha + 3) + \\ \quad + 3z^2(\alpha + 3) - z^3. \end{array} \right\} \quad (3.17.16)$$

Полиномы Лагерра ортогональны на промежутке $(0, \infty)$ с весом $e^{-z} z^\alpha$:

$$\int_0^{\infty} e^{-z} z^\alpha L_n^{(\alpha)}(z) L_m^{(\alpha)}(z) dz = \frac{1}{n!} \Gamma(n + \alpha + 1) \delta_{mn}, \quad (3.17.17)$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

В учетом ортогональности находим коэффициенты разложения c_n :

$$c_n = \frac{n!}{\Gamma(n + \alpha + 1)} \int_0^{\infty} L_n^{(\alpha)}(\xi) W_1(\xi) d\xi. \quad (3.17.18)$$

Вместо ξ рассмотрим случайную переменную $\eta = \xi/\beta$ с плотностью вероятности $W(\eta)$, причем

$$W_1(\xi) = \frac{1}{\beta} W\left(\frac{\xi}{\beta}\right). \quad (3.17.19)$$

По аналогии с (3.17.14) можем написать

$$W(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-\eta} \eta^n L_n^{(\alpha)}(\eta), \quad (3.17.20)$$

где

$$\left. \begin{array}{l} b_n = \frac{n!}{\Gamma(n + \alpha + 1)} \int_0^{\infty} L_n^{(\alpha)}(\eta) W(\eta) d\eta = \\ = \frac{n!}{\Gamma(n + \alpha + 1)} \int_0^{\infty} L_n^{(\alpha)}\left(\frac{\xi}{\beta}\right) W_1(\xi) d\xi. \end{array} \right\} \quad (3.17.21)$$

Если подставить (3.17.16) в (3.17.21), учсть условие нормировки плотности вероятности и определение начальных моментов (2.5.11), то найдем

$$\left. \begin{array}{l} b_1 = \frac{1 + \alpha - \frac{m}{\beta}}{\Gamma(\alpha + 2)}, \\ b_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 3)} \left[(\alpha + 1)(\alpha + 2) - \frac{2m}{\beta}(\alpha + 2) + \frac{m^2}{\beta^2} \right]. \end{array} \right\} \quad (3.17.22)$$

Так как в формулах (3.17.20) и (3.17.21) α и β суть произвольные постоянные, то их можно выбрать так, чтобы $b_1 = b_2 = 0$. Для этого приравняем правые части выражений (3.17.22) нулю и решим полученную систему двух уравнений:

$$\alpha = \frac{m^2}{m_2 - m^2} - 1 = \frac{m^2}{z^2} - 1, \quad \beta = \frac{m_2 - m^2}{m} = \frac{z^2}{m}. \quad (3.17.23)$$

При этом первые четыре коэффициента будут равны:

$$\left. \begin{array}{l} b_0 = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)}, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \\ b_3 = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 4)} \left[\frac{m_2}{\beta^2}(\alpha + 3) - \frac{m_3}{\beta^3} \right]. \end{array} \right\} \quad (3.17.24)$$

Высшие коэффициенты b_n имеют более сложные выражения. Поэтому ряд Лагерра обычно применяют в том случае, когда уже первый член b_0 дает достаточно хорошее приближение. Если отбросить все члены, кроме первого, то получим

$$W(\eta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \eta^\alpha e^{-\eta}.$$

Переходя здесь от η к ξ и учитывая (3.17.19), получим следующую приближенную формулу:

$$W_1(\xi) = \frac{1}{\beta \Gamma(\alpha + 1)} \left(\frac{\xi}{\beta} \right)^\alpha e^{-\frac{\xi}{\beta}}, \quad (3.17.25)$$

где α и β определяются через среднее значение и дисперсию по формуле (3.17.23).

Сравнивая формулу (3.17.25) с (2.9.4), приходим к выводу, что первый член ряда Лагерра совпадает с гамма-распределением.

§ 18. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССАХ

В радиофизике и автоматике большую роль играют случайные процессы, получившие название процессов Маркова или процессов без последействия. Этот класс случайных процессов впервые систематически изучался известным русским математиком А. А. Марковым. Хотя наблюдаемые физические процессы не являются в точности марковскими, однако в ряде случаев их приближенно можно рассматривать как марковские процессы. Таким путем удается получить ряд конкретных результатов, применяя эффективные математические методы, хорошо разработанные для марковских процессов.

Прежде чем дать определение марковских процессов, приведем краткое описание броуновского движения, представляющего один из конкретных вариантов классической задачи о случайных «блужданиях» (см. § 6 гл. 2). Теория броуновского движения была разработана А. Эйнштейном и М. Смолуховским [37].

Из курса физики известно, что частицы (молекулы) газа или жидкости в отсутствие внешних влияний находятся в постоянном, хаотическом движении (броуновском движении), интенсивность которого зависит только от температуры и плотности. Частица в случайные моменты времени сталкивается с молекулами окружающей среды и меняет при этом свою скорость и направление.

Будем следить, как изменяется с течением времени одна из координат избранной частицы, допустим горизонтальная координата. При этом можно не учитывать силу тяжести; на частицу действуют только систематическая сила трения об окружающую среду и случайная сила толчков. Считая компоненту силы трения пропорциональной x -й компоненте скорости и пренебрегая силой инерции, получим следующее уравнение движения частицы:

$$\gamma \dot{x} = n(t), \quad (3.18.1)$$

где γ — коэффициент трения;

$n(t)$ — сила случайных толчков вдоль оси x .

Чтобы поведение частицы было статистически определенным, необходимо указать характеристики случайной силы $n(t)$. Поскольку толчки, испытываемые данной частицей в результате столкновения с молекулами окружающей среды, в разных направлениях равновероятны, то среднее значение $\langle n(t) \rangle$, очевидно, равно нулю. Случайная сила $n(t)$ представляет результирующий эффект, обусловленный большим числом отдельных толчков. Время корреляции $n(t)$, грубо говоря, равно среднему времени свободного пробега молекул; при большой концентрации молекул оно очень мало. Поэтому согласно центральной предельной теореме случайную силу $n(t)$ можно приближенно рассматривать как нормальный белый шум.

При сделанных предположениях смещения частицы для двух неперекрывающихся интервалов времени, значительно превышаю-

щих время свободного пробега, независимы. Если взять три момента времени $t > t' > t_0$ (рис. 3.17), причем промежутки $(t - t')$; $(t' - t_0)$ много больше среднего времени свободного пробега, то поведение частицы на интервале (t', t) не будет зависеть от того, что происходило с частицей до момента t' . Поэтому такой случайный процесс можно назвать процессом без последействия.

Допустим, что нам точно известна координата x' в момент t' . Вследствие случайного характера воздействующей силы $n(t)$, возможные значения координаты x в момент времени t различны и образуют некоторый «ансамбль» (рис. 3.17). Мы можем говорить об условной вероятности $p(x, t | x', t')$ того, что если в момент времени t' координата равна x' , то в момент времени t частица будет иметь координату, заключенную в промежутке $(x, x + dx)$. Условная вероятность $p(x, t | x', t')$ характеризует вероятность перехода частицы из состояния x' в состояние x за время между t' и t и называется вероятностью перехода. Если частица в момент времени t' может иметь различные значения координаты x' с вероятностью $W(x', t')$, то двумерная плотность вероятности $W_2(x', x, t', t)$ равна

$$W_2(x', x, t', t) = W(x', t') p(x, t | x', t'). \quad (3.18.2)$$

Приведем теперь формальное определение марковских процессов [38]. Возьмем в последовательные моменты времени $t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n$ (рис. 3.18) значения случайного процесса $x_0 = x(t_0)$, $x_1 = x(t_1)$, ..., $x_{n-1} = x(t_{n-1})$, $x_n = x(t_n)$. Процесс $x(t)$ является марковским, если условные вероятности

$$p(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; x_1, t_1; x_0, t_0) = \frac{W_{n+1}(x_0, \dots, x_n, t_0, \dots, t_n)}{W_n(x_0, \dots, x_{n-1}, t_0, \dots, t_{n-1})} \quad (3.18.3)$$

зависят лишь от последнего значения x_{n-1} в момент t_{n-1} , т. е. если справедливо равенство

$$p(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1; x_0, t_0) = p(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}). \quad (3.18.4)$$

Следовательно, для марковских процессов формулу (3.18.3) с учетом (3.18.4) можно записать так:

$$\begin{aligned} & W_{n+1}(x_0, \dots, x_n, t_0, \dots, t_n) = \\ & = p(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) W_n(x_0, \dots, x_{n-1}, t_0, \dots, t_{n-1}). \end{aligned} \quad (3.18.5)$$

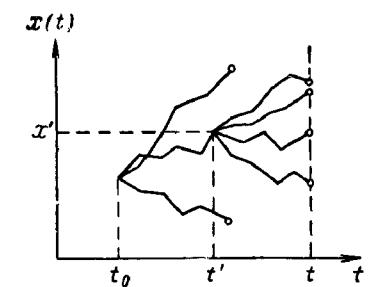


Рис. 3.17. Траектории броуновской частицы.

В свою очередь,

$$\begin{aligned} W_n(x_0, \dots, x_{n-1}, t_0, \dots, t_{n-1}) &= \\ &= p(x_{n-1}, t_{n-1} | x_{n-2}, t_{n-2}) W_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-2}, t_0, \dots, t_{n-2}), \\ &\dots \\ W_2(x_0, x_1, t_0, t_1) &= p(x_1, t_1 | x_0, t_0) W(x_0, t_0). \end{aligned}$$

Путем подстановки последующих равенств в предыдущие, формулу (3.18.5) можем записать

$$\begin{aligned} W_{n+1}(x_0, \dots, x_n, t_0, \dots, t_n) &= p(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) \times \\ &\times p(x_{n-1}, t_{n-1} | x_{n-2}, t_{n-2}) \dots p(x_1, t_1 | x_0, t_0) W(x_0, t_0). \quad (3.18.6) \end{aligned}$$

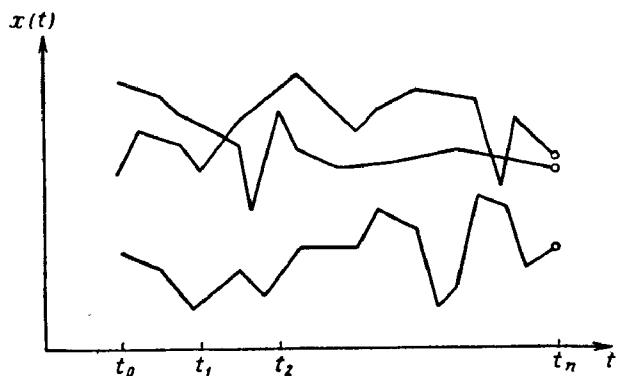


Рис. 3.18. Траектории броуновских частиц.

Таким образом, многомерные плотности вероятности для марковских процессов (процессов без последействия) выражаются через вероятность перехода $p(x, t | x_0, t_0)$ и одномерную плотность вероятности $W(x_0, t_0)$. Иначе говоря, характерное свойство марковских процессов состоит в том, что начальная одномерная плотность вероятности $W(x_0, t_0)$ и вероятность перехода $p(x, t | x_0, t_0)$ полностью определяют марковский случайный процесс.

Вероятность перехода удовлетворяет некоторым условиям и, в частности, условию нормировки

$$\int p(x, t | x_0, t_0) dx = 1 \quad (3.18.7)$$

и уравнению Смолуховского

$$\int p(x, t | x', t') p(x', t' | x_0, t_0) dx' = p(x, t | x_0, t_0). \quad (3.18.8)$$

В справедливости (3.18.8) легко убедиться. Согласно (3.18.6) при $t_0 < t' < t$ можем написать

$$W_3(x_0, x', x, t_0, t', t) = p(x, t | x', t') p(x', t' | x_0, t_0) W(x_0, t_0).$$

Проинтегрируем обе части этого равенства по x' :

$$\int W_3(x_0, x', x, t_0, t', t) dx' = W(x_0, t_0) \int p(x, t | x', t') p(x', t' | x_0, t_0) dx'.$$

По условию согласованности (3.2.5) интеграл слева равен двумерной плотности вероятности, которая для марковских процессов выражается через вероятность перехода. Поэтому

$$\begin{aligned} W_2(x_0, x, t_0, t) &= p(x, t | x_0, t_0) W(x_0, t_0) = \\ &= W(x_0, t_0) \int p(x, t | x', t') p(x', t' | x_0, t_0) dx', \end{aligned}$$

откуда и следует (3.18.8).

В тех случаях, когда вероятность перехода зависит только от разности $\tau = t - t_0$, т. е.

$$p(x, t | x_0, t_0) = p(x, \tau, x_0) = p_\tau(x, x_0), \quad (3.18.9)$$

марковский случайный процесс называется стационарным (однородным по времени). Если при $\tau \rightarrow \infty$ вероятность перехода стремится к некоторому пределу $\lim_{\tau \rightarrow \infty} p_\tau(x, x_0) = p(x)$, не зависящему от начального состояния x_0 , то говорят, что существует предельная или стационарная вероятность.

Отметим, что если при линейных преобразованиях свойство нормальности процесса сохраняется, то свойство независимости приращений (марковости) теряется.

Наоборот, если при нелинейных безынерционных преобразованиях сохраняется свойство независимости приращений (марковости), то свойство нормальности утрачивается.

Нормальные процессы и марковские процессы в общем случае частично «перекрываются» (рис. 3.19). Так, например, если не пренебречь силой инерции броуновской частицы, то вместо уравнения (3.18.1) получим следующее уравнение Ланжевена, описывающее поведение частицы:

$$m \frac{dv}{dt} + \gamma v = n(t),$$

где m — масса частицы;
 $v(t) = \dot{x}(t)$ — ее скорость.

Не конкретизируя, запишем это уравнение в общем виде

$$\frac{dx}{dt} + \alpha x = n(t), \quad (3.18.10)$$

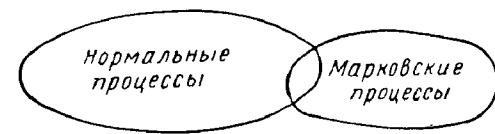


Рис. 3.19. Иллюстрация соотношения между нормальными и марковскими процессами.

где $n(t)$ — нормальный белый шум с нулевым средним значением и дельта-функцией корреляции (3.16.1).

Из уравнения (3.18.10) видно, что случайный процесс $x(t)$ получается из нормального белого шума в результате линейного преобразования и, следовательно, $x(t)$ есть нормальный процесс. Функция корреляции этого процесса в стационарном состоянии имеет вид [см. формулу (6.4.7)]

$$k_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}. \quad (3.18.11)$$

Нормальный случайный процесс с функцией корреляции вида (3.18.11) является одновременно и марковским.

В этом можно убедиться так [38]. Для нормального стационарного процесса $x(t)$ по формуле (3.15.15) можно записать трехмерную и двумерную плотности вероятности $w_3(x_1, x_2, x_3), w_2(x_1, x_2)$ и вычислить условную вероятность $p(x_3 | x_2, x_1)$, где предполагается $t_3 > t_2 > t_1$. Если функция корреляции имеет вид (3.18.11), то окажется справедливым равенство

$$p(x_3 | x_2, x_1) = p(x_3 | x_2) = p_{t_3 - t_2}(x_3, x_2) \quad (3.18.12)$$

и, следовательно, процесс $x(t)$ является марковским.

Для марковских процессов хорошо разработаны методы решения некоторых практических интересных задач. Типовые задачи и методы их решения рассматриваются в следующих параграфах.

§ 19. УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА — ПЛАНКА

Для марковских процессов диффузионного типа сравнительно просто находится одномерная стационарная плотность вероятности. Получим сначала уравнение Фоккера — Планка, которому удовлетворяет плотность вероятности, и затем укажем возможные обобщения его. При этом здесь кратко воспроизведется лишь один из возможных вариантов вывода уравнения Фоккера — Планка [39]; другой вариант можно найти в оригинальных работах [40—42].

Рассмотрим значения марковского случайного процесса $x(t)$ в два близких момента времени: t и $t + \tau$, $\tau > 0$. Полагая в соотношении (3.18.2) $x' = x(t) = x$, $x = x(t + \tau) = x_\tau$, можем написать

$$W_2(x, x_\tau, t, t + \tau) = W(x, t) p(x_\tau, t + \tau | x, t).$$

Интегрируя это равенство по x , получим

$$W(x_\tau, t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_\tau, t + \tau | x, t) W(x, t) dx. \quad (3.19.1)$$

Введем вместо вероятности перехода p характеристическую функцию $\Theta(u, x)$ случайного приращения $x_\tau - x$ за время от t до $t + \tau$ при условии, что $x(t) = x$ фиксировано. Очевидно, что

$$\Theta(u, x) = \langle e^{ju(x_\tau - x)} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ju(x_\tau - x)} p(x_\tau, t + \tau | x, t) dx_\tau.$$

Согласно преобразованию Фурье можем написать

$$p(x_\tau, t + \tau | x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ju(x_\tau - x)} \Theta(u, x) du. \quad (3.19.2)$$

По формуле (3.4.3) характеристическая функция равна

$$\Theta(u, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n(x)}{n!} (ju)^n, \quad (3.19.3)$$

где $m_n(x) = \langle (x_\tau - x)^n \rangle$ — моменты приращения $x_\tau - x$.

Из соотношений (3.19.2) и (3.19.3) имеем

$$\begin{aligned} p(x_\tau, t + \tau | x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n(x)}{n!} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ju(x_\tau - x)} (ju)^n du = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{m_n(x)}{n!} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial^n}{\partial x_\tau^n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ju(x_\tau - x)} du = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{m_n(x)}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x_\tau^n} \delta(x - x_\tau). \end{aligned}$$

Здесь последнее равенство написано на основании формулы (П.9).

Подставив это выражение в (3.19.1) и воспользовавшись формулой (П.12), можем написать

$$W(x_\tau, t + \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x_\tau^n} [m_n(x_\tau) W(x_\tau, t)]$$

или

$$W(x_\tau, t + \tau) - W(x_\tau, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x_\tau^n} [m_n(x_\tau) W(x_\tau, t)].$$

Поделив левую и правую части этого равенства на τ и переходя затем к пределу при $\tau \rightarrow 0$ (при этом $x_\tau \rightarrow x + 0$), получим

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} [K_n(x) W(x, t)], \quad (3.19.4)$$

где

$$K_n(x) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{m_n(x)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\langle (x_\tau - x)^n \rangle}{\tau}. \quad (3.19.5)$$

Напомним, что при статистическом усреднении приращений величина x рассматривается как фиксированная, а x_τ считается случайной, т. е. усреднение должно выполняться с соответствующей вероятностью перехода:

$$\langle (x_\tau - x)^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x_\tau - x)^n p(x_\tau, t + \tau | x, t) dx_\tau.$$

Если коэффициенты $K_n(x)$ при $n \geq 3$ равны нулю, т. е.

$$K_3(x) = K_4(x) = K_5(x) = \dots = 0, \quad (3.19.6)$$

то марковский процесс называется непрерывным. Условия (3.19.6) выполняются, если воздействующий на систему случайный процесс $\xi(t)$ можно рассматривать как нормальный стационарный белый шум с нулевым средним значением $m = \langle \xi(t) \rangle = 0$ и дельта-функцией корреляции (3.16.1), где коэффициент N_0 вычисляется по формуле (3.16.3). Для непрерывных марковских процессов уравнение (3.19.4) принимает более простой вид:

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [K_1(x) W(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [K_2(x) W(x, t)]. \quad (3.19.7)$$

Это дифференциальное уравнение в частных производных (парabolicкого типа) называется уравнением Фоккера — Планка или диффузионным уравнением. Последнее название оправдывается тем, что аналогичным уравнением описываются процессы диффузии и теплопроводности.

Для отыскания решения уравнения Фоккера — Планка (3.19.7) нужно указать начальные и граничные условия. Конечно, плотность вероятности при всех t должна удовлетворять условию положительной определенности и условию нормировки:

$$W(x, t) \geq 0, \int W(x, t) dx = 1. \quad (3.19.8)$$

Если возможные значения марковского процесса $x(t)$ в начальный момент времени t_0 являются случайными и имеют плотность

вероятности $W_0(x)$, то в качестве начального условия указывается эта плотность вероятности

$$W(x, t_0) = W_0(x). \quad (3.19.9)$$

Когда же значение $x(t_0)$ точно известно и равно x_0 , то

$$W(x, t_0) = \delta(x - x_0).$$

Как следует из (3.18.2), при таком дельтообразном начальном распределении плотность вероятности $W(x_\tau, t + \tau)$ совпадает с вероятностью перехода $p(x_\tau, t + \tau | x_0, t_0)$.

Границные условия могут быть весьма разнообразными и определяются существом физической задачи. Перед тем как указать их, заметим, что коэффициент $K_1(x)$ характеризует среднюю скорость систематического изменения координаты $x(t)$, а коэффициент $K_2(x)$ — случайный разброс относительно средней скорости. При этом само уравнение Фоккера — Планка допускает следующую интерпретацию. Пусть имеется большое число броуновских частиц, выходящих в начальный момент t_0 из x_0 . Концентрация их в точке x в момент t пропорциональна $W(x, t)$. Поток частиц G складывается из систематического потока $K_1 W$ и случайного (диффузионного) потока $-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [K_2 W]$, т. е.

$$G(x, t) = K_1(x) W(x, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [K_2(x) W(x, t)]. \quad (3.19.10)$$

Уравнение (3.19.7) представляет собой уравнение непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t} W(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} G(x, t) = 0. \quad (3.19.11)$$

Если случайный процесс $x(t)$ может принимать всевозможные значения от $-\infty$ до ∞ , то уравнение (3.19.11) справедливо на всей прямой. В качестве граничных условий при этом следует брать условия на $\pm\infty$. Интегрируя (3.19.11) по x от $-\infty$ до ∞ и учитывая условие нормировки (3.19.8), получаем обязательно выполняющееся равенство

$$G(-\infty, t) = G(\infty, t), \quad (3.19.12)$$

так как

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} W(x, t) dx = 0.$$

Однако помимо равенства (3.19.12) часто выполняются более сильные условия

$$G(-\infty, t) = G(\infty, t) = 0, \quad (3.19.13)$$

$$W(-\infty, t) = W(\infty, t) = 0, \quad (3.19.14)$$

которые можно назвать нулевыми граничными условиями.

В тех случаях, когда функция $x(t)$ может принимать ограниченные значения $a < x < b$, уравнение (3.19.7) следует рассматривать лишь в этой области. При этом нулевые граничные условия имеют вид

$$G(a, t) = G(b, t) = 0. \quad (3.19.15)$$

Начальные и граничные условия однозначно определяют плотность вероятности $W(x, t)$ как решение уравнения Фоккера — Планка. В том случае, когда коэффициенты $K_1(x)$ и $K_2(x)$ не зависят от времени, плотность вероятности $W(x, t)$ с течением времени обычно стремится к стационарному распределению $W_{\text{ст}}(x)$, которое не зависит от начального распределения $W(x, t_0)$ и времени. Поэтому в стационарном состоянии $\frac{\partial}{\partial t} W_{\text{ст}}(x) = 0$ и, следовательно, $G(x) = G = \text{const}$. При этом уравнение Фоккера — Планка (3.19.7) переходит в линейное дифференциальное уравнение для $W_{\text{ст}}(x)$:

$$\frac{d}{dx} [K_2(x) W_{\text{ст}}(x)] - 2K_1(x) W_{\text{ст}}(x) = -2G, \quad (3.19.16)$$

для которого хорошо известно общее решение [43].

При нулевых граничных условиях имеем $G = 0$ и из (3.19.16) получаем

$$\frac{d}{dx} [K_2(x) W_{\text{ст}}(x)] - 2K_1(x) W_{\text{ст}}(x) = 0. \quad (3.19.17)$$

Общее решение этого уравнения дается выражением

$$W_{\text{ст}}(x) = \frac{C}{K_2(x)} \exp \left[2 \int_0^x \frac{K_1(x')}{K_2(x')} dx' \right], \quad (3.19.18)$$

где постоянная интегрирования C определяется из условия нормировки (3.19.8). Этой формулой часто пользуются при решении конкретных задач.

Таким образом, определив из уравнения, описывающего поведение системы, коэффициенты $K_1(x)$ и $K_2(x)$ по формуле (3.19.5), в некоторых случаях можно сразу написать выражение для одномерной стационарной плотности вероятности. Это показывает эффективность использования уравнения Фоккера — Планка.

К сожалению, полное исследование переходных процессов, связанное с решением нестационарного уравнения (3.19.7), является довольно сложной задачей. Решение нестационарного уравнения не удается получить в общем виде, кроме некоторых частных случаев, например, когда

$$K_1(x) = c + dx, \quad K_2(x) = \text{const}. \quad (3.19.19)$$

Однако в этом случае, как видно из (3.19.18), процесс является нормальным и может быть исследован другими методами.

Уравнение Фоккера — Планка можно обобщить на многомерные марковские случайные процессы. Пусть координатами многомерного марковского процесса являются случайные функции $x_1(t), \dots, x_m(t)$, задаваемые дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_m) + n_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (3.19.20)$$

где $n_i(t)$ — нормальный белый шум с нулевым средним значением.

Многомерное уравнение Фоккера — Планка записывается так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(x_1, \dots, x_m, t)}{\partial t} = & - \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} [K_i(x_1, \dots, x_m) W(x_1, \dots, x_m, t)] + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [K_{ij}(x_1, \dots, x_m) W(x_1, \dots, x_m, t)]. \end{aligned} \quad (3.19.21)$$

Коэффициенты K_i и K_{ij} определяются формулами

$$K_i = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\langle x_{i\tau} - x_i \rangle}{\tau}, \quad K_{ij} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\langle (x_{i\tau} - x_i)(x_{j\tau} - x_j) \rangle}{\tau}. \quad (3.19.22)$$

Даже стационарное решение двумерного уравнения (3.19.21) в отличие от одномерного в общем случае не выражается в квадратурах и для его отыскания необходимо проводить самостоятельное исследование в зависимости от конкретного вида функций f_i .

Рассмотрим простой пример. Пусть поведение системы (частицы) описывается дифференциальным уравнением (3.18.10). Решение этого линейного дифференциального уравнения при начальном условии $x(0) = x_0$, $t = 0$ имеет вид

$$x(\tau) = x_\tau = x_0 e^{-\alpha\tau} + e^{-\alpha\tau} \int_0^\tau e^{\alpha x} n(x) dx \quad (3.19.23)$$

или

$$x_\tau - x_0 = x_0 (e^{-\alpha\tau} - 1) + e^{-\alpha\tau} \int_0^\tau e^{\alpha x} n(x) dx.$$

Отсюда найдем

$$\langle x_\tau - x_0 \rangle = x_0 (e^{-\alpha\tau} - 1) + e^{-\alpha\tau} \int_0^\tau e^{\alpha x} \langle n(x) \rangle dx = x_0 (e^{-\alpha\tau} - 1),$$

$$\begin{aligned}\langle(x_t - x)^2\rangle &= x^2(e^{-\alpha t} - 1)^2 + e^{-2\alpha t} \int_0^t \int_0^t e^{\alpha x + \alpha y} \langle n(x) n(y) \rangle dx dy = \\ &= x^2(e^{-\alpha t} - 1)^2 + \frac{N_0}{4\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}).\end{aligned}$$

Используя для малых t приближенное равенство $\exp(-\gamma t) = 1 - \gamma t$, по формуле (3.19.5) получим

$$K_1(x) = -\alpha x, \quad K_2(x) = \frac{1}{2} N_0. \quad (3.19.24)$$

Применимельно к данному случаю уравнение Фоккера—Планка принимает вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \alpha \frac{\partial}{\partial x} (xW) + \frac{1}{4} N_0 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \quad (3.19.25)$$

Решение этого уравнения легко находится на основании того, что случайный процесс $x(t)$ является нормальным. Одномерная нормальная плотность вероятности $W(x, t)$ определяется математическим ожиданием и дисперсией, которые находятся из решения (3.19.23) и равны соответственно:

$$\begin{aligned}m(t) &= \langle x(t) \rangle = x(0)e^{-\alpha t}, \\ \sigma^2(t) &= \langle [x(t) - m(t)]^2 \rangle = \frac{N_0}{4\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}).\end{aligned}$$

Поэтому

$$W(x, t) = \frac{1}{\sigma(t)\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2(t)} [x - m(t)]^2\right\}. \quad (3.19.26)$$

Рассмотрим частные случаи. При $t \rightarrow 0$ среднее значение $m(t) \rightarrow x(0)$, дисперсия $\sigma^2(t) \rightarrow 0$ и, следовательно,

$$W(x, 0) = \delta[x - x(0)]. \quad (3.19.27)$$

При $t \rightarrow \infty$ имеем $m(t) = 0$, $\sigma^2 = N_0/4\alpha$. Плотность вероятности стремится к стационарному нормальному распределению, не зависящему от $x(0)$ и времени t ,

$$W_{ct}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad \sigma^2 = \frac{1}{4\alpha} N_0. \quad (3.19.28)$$

Полученным результатам можно дать наглядное физическое пояснение. Сделаем это применительно к уравнению Ланжевена. Мы предполагаем, что в начальный момент времени $t = 0$ частица имеет определенную начальную скорость. Так как в начальный момент случайные толчки со стороны молекул окружающей среды

еще не сказываются, то при $t = 0$ скорость частицы вполне определена и равна $x(0)$. Естественно, что плотность вероятности имеет вид дельта-функции, как это схематически изображено на рис. 3.20.

Вследствие ничем не компенсируемой силы трения начальная скорость с течением времени уменьшается, приближаясь к нулю. Поскольку случайные толчки со стороны молекул в противоположных направлениях равновероятны, то случайная сила $n(t)$ не изменяет средней скорости. Однако дисперсия скорости из-за многочленных соударений возрастает с течением времени. Это приводит

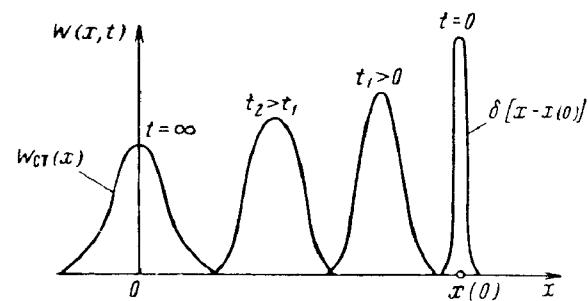


Рис. 3.20. Изменение плотности вероятности во времени.

к тому, что плотность вероятности для скорости «расплывается» все шире и шире (рис. 3.20), приближаясь с течением времени к стационарному распределению (3.19.28).

Отметим, что если положить $\alpha = 0$, то уравнение Фоккера — Планка обращается в уравнение диффузии

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{4} N_0 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \quad (3.19.29)$$

Оно имеет решение

$$W(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0 t}} \exp\left\{-\frac{[x - x(0)]^2}{N_0 t}\right\}, \quad (3.19.30)$$

которое все время расплывается, так что стационарного решения не существует.

Конечно, рассмотренный пример является непоказательным и не вскрывает принципиальную ценность уравнения Фоккера — Планка (см. § 20).

§ 20. ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА — ПЛАНКА К РЕАЛЬНЫМ СЛУЧАЙНЫМ ПРОЦЕССАМ

В § 19 было показано, что уравнение Фоккера — Планка применимо в тех случаях, когда в правую часть дифференциального уравнения системы входит случайная функция, представляющая

нормальный белый шум. Однако в § 16 отмечалось, что белый шум следует рассматривать как идеализацию реальных флюктуационных процессов, причем такая идеализация применима лишь при определенных условиях. Так, например, в случае броуновского движения случайную силу, обусловленную соударениями рассматриваемой частицы с молекулами окружающей среды, можно рассматривать как дельта-коррелированную лишь для временных интервалов, превышающих среднее время свободного пробега молекул.

Поэтому представляется естественным применение уравнения Фоккера — Планка к дифференциальным уравнениям, содержащим не дельта-коррелированные случайные функции, если интересоваться поведением системы через временные интервалы, превышающие время корреляции случайной функции. Для таких больших временных интервалов можно пренебречь зависимостью между случайными приращениями на разных интервалах.

Рассмотрим для примера простейшее уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \xi(t), \quad (3.20.1)$$

где $\xi(t)$ — стационарный случайный процесс с нулевым средним значением и функцией корреляции $k_\xi(\tau)$, имеющей конечное время корреляции τ_k .

Решение этого уравнения с начальным условием $x = x(0)$ при $t = 0$ имеет вид

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \xi(s) ds. \quad (3.20.2)$$

Чтобы процесс $x(t)$ был марковским, необходимо, чтобы за последовательные интервалы времени $t_1 = \tau_1$, $t_2 = t_1 + \tau_2$, ..., $t_n = t_{n-1} + \tau_n$, ($\tau_1, \dots, \tau_n > 0$) случайные приращения $x(t_1) - x(0)$, $x(t_2) - x(t_1)$, ..., $x(t_n) - x(t_{n-1})$ были независимыми. Если время корреляции τ_k конечно, то эти приращения, вообще говоря, будут зависимыми.

Вычислим сначала парные корреляции между двумя соседними приращениями. Из решения (3.20.2) имеем

$$\Delta x_1 = x(t_1) - x(0) = \int_0^{\tau_1} \xi(s_1) ds_1,$$

$$\Delta x_2 = x(t_2) - x(t_1) = \int_{\tau_1}^{\tau_1 + \tau_2} \xi(s_2) ds_2.$$

Функция корреляции между этими приращениями равна

$$K(\Delta x_1, \Delta x_2) = \int_0^{\tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_1 + \tau_2} \langle \xi(s_1) \xi(s_2) \rangle ds_1 ds_2 = \int_0^{\tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} k_\xi(s_2 - s_1) ds_1 ds_2.$$

Заменой переменных $s_1 - \tau_1 = y$, $s_2 - \tau_1 = z$ получим

$$K(\Delta x_1, \Delta x_2) = \int_{-\tau_1}^0 \int_0^{\tau_2} k_\xi(z - y) dy dz. \quad (3.20.3)$$

Будем интересоваться временными интервалами

$$\tau_1 \gg \tau_k, \quad \tau_2 \gg \tau_k. \quad (3.20.4)$$

Тогда в выражении (3.20.3) вместо τ_1 и τ_2 можно написать бесконечные пределы:

$$K(\Delta x_1, \Delta x_2) = \int_{-\infty}^0 \int_0^\infty k_\xi(z - y) dy dz. \quad (3.20.5)$$

Обычно функция корреляции $k_\xi(\tau)$ стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$ быстрее, чем τ^{-2} . При этом условии путем интегрирования по частям получим

$$\int_{-\infty}^0 \int_0^\infty k_\xi(z - y) dy dz = \int_0^\infty dz \int_z^\infty k_\xi(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty \tau k_\xi(\tau) d\tau. \quad (3.20.6)$$

Определим время корреляции случайного процесса $\xi(t)$ формулой

$$\tau_k = \frac{4}{N_0} \int_0^\infty \tau k_\xi(\tau) d\tau, \quad (3.20.7)$$

где величина N_0 вычисляется согласно (3.16.3) и равна

$$N_0 = 2 \int_{-\infty}^\infty k_\xi(\tau) d\tau = 4 \int_0^\infty k_\xi(\tau) d\tau. \quad (3.20.8)$$

Из выражения (3.20.5) с учетом (3.20.6) и (3.20.7) получаем, что при выполнении неравенств (3.20.4) корреляция между случайными приращениями приближается к постоянной величине

$$K(\Delta x_1, \Delta x_2) \approx \frac{1}{4} N_0 \tau_k.$$

Дисперсии случайных приращений значительно превосходят эту величину:

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 = \langle \Delta x_1^2 \rangle &= \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_1} k_{\xi}(s_2 - s_1) ds_1 ds_2 = 2 \int_0^{\tau_1} (\tau_1 - \tau) k_{\xi}(\tau) d\tau \approx \\ &\approx 2 \int_0^{\infty} (\tau_1 - \tau) k_{\xi}(\tau) d\tau = \frac{1}{2} N_0(\tau_1 - \tau_k), \\ \sigma_2^2 = \langle \Delta x_2^2 \rangle &= \int_0^{\tau_2} \int_0^{\tau_2} k_{\xi}(s_2 - s_1) ds_1 ds_2 \approx \frac{1}{2} N_0(\tau_2 - \tau_k).\end{aligned}$$

Коэффициент корреляции между случайными приращениями при условии (3.20.4) весьма мал:

$$R(\Delta x_1, \Delta x_2) = \frac{K(\Delta x_1, \Delta x_2)}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{\tau_k}{2 \sqrt{(\tau_1 - \tau_k)(\tau_2 - \tau_k)}} \approx \frac{1}{2} \frac{\tau_k}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} \quad (3.20.9)$$

Таким образом, если рассматривать интервалы времени, которые значительно превосходят время корреляции случайной функции, то парными корреляциями можно пренебречь. Можно показать [39], что этот результат распространяется и на корреляции высших порядков. Поэтому для таких интервалов времени случайные приращения оказываются практически независимыми и процесс $x(t)$ можно считать приближенно марковским. Для него с некоторыми уточнениями применимо уравнение Фоккера — Планка. Эти уточнения в основном касаются выражений для коэффициентов $K_1(x, t)$ и $K_2(x, t)$, входящих в уравнение (3.19.7). Мы не будем здесь рассматривать эти уточнения [4, 39], а приведем окончательные результаты.

Пусть имеется дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \xi(t)). \quad (3.20.10)$$

Предположим, что характерная постоянная времени системы τ_c значительно превышает время корреляции τ_k случайной функции $F(x, \xi)$:

$$\tau_c \gg \tau_k \approx \frac{\int_0^{\infty} \tau K(F, F_{\tau}) d\tau}{\int_0^{\infty} K(F, F_{\tau}) d\tau}, \quad (3.20.11)$$

где через K обозначена корреляционная функция от соответствующих аргументов. Такое неравенство выполняется в ряде практических

ских задач, встречающихся в радиотехнике и автоматике (например, когда широкополосный шум воздействует на инерционное устройство).

Тогда при $\tau_k \ll \tau_c$ приближенно, а при $\tau_k = 0$ точно справедливо следующее уравнение Фоккера — Планка:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ [K_1(x) + \frac{1}{4} K'(x)] W \right\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [K_2(x) W]. \quad (3.20.12)$$

Здесь

$$\begin{aligned}K_1(x) &= \langle F(x, \xi) \rangle, \quad K_2(x) = 2 \int_{-\infty}^0 K(F, F_{\tau}) d\tau, \\ K'(x) &= 4 \int_{-\infty}^0 K \left(\frac{\partial F}{\partial x}, F_{\tau} \right) d\tau, \\ K(F, F_{\tau}) &= \left\langle \left[\frac{\partial F(x, \xi)}{\partial x} - \left\langle \frac{\partial F(x, \xi)}{\partial x} \right\rangle \right] [F(x, \xi_{\tau}) - \langle F(x, \xi_{\tau}) \rangle] \right\rangle.\end{aligned} \quad (3.20.13)$$

В выражениях (3.20.13) аргумент x при статистическом усреднении рассматривается не как функция времени, а как фиксированный параметр.

Заметим, что в данном случае появился дополнительный коэффициент $K'(x)$, обусловленный наличием корреляции между $x(t)$ и $\xi(t)$. Как правило, этот коэффициент необходимо учитывать при $K_1(x) = \langle F(x, \xi) \rangle = 0$; в противном случае его учет часто мало влияет на результат. Если функция $F(x, \xi(t))$ удовлетворяет условию временной симметрии

$$\int_{-\infty}^0 K \left(\frac{\partial F}{\partial x}, F_{\tau} \right) d\tau = \int_{-\infty}^0 K \left(F, \frac{\partial F}{\partial x} \right) d\tau, \quad (3.20.14)$$

то

$$K'(x) = \frac{\partial K_2(x)}{\partial x} \quad (3.20.15)$$

и уравнение (3.20.12) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [K_1(x) W] + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ K_2(x) \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} [K_2(x) W] \right\}. \quad (3.20.16)$$

Если K_1 и K_2 не зависят от времени, то стационарная плотность вероятности при нулевых граничных условиях определяется формулой

$$W_{\text{ст}}(x) = \frac{C}{\sqrt{K_2(x)}} \exp \left[2 \int_0^x \frac{K_1(z)}{K_2(z)} dz \right], \quad (3.20.17)$$

где C — нормировочный множитель.

Можно показать, что условие (3.20.14) выполняется для уравнения

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\xi(t); \quad (3.20.18)$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — детерминированные функции, а $\xi(t)$ — стационарное случайное воздействие с нулевым средним значением.

В соответствии с (3.16.3) введем коэффициент интенсивности

$$N_0 = 2 \int_0^\infty \langle \xi(t) \xi(t+\tau) \rangle d\tau. \quad (3.20.19)$$

В данном конкретном случае $K_1(x) = f(x)$, $K_2(x) = g^2(x)N_0$ и

$$W_{\text{ст}}(x) = \frac{C}{g(x)} \exp \left[-\frac{2}{N_0} \int_0^x \frac{f(z)}{g^2(z)} dz \right]. \quad (3.20.20)$$

Во многих задачах исследуемый флюктуационный процесс $x(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x}, \xi(t)), \quad (3.20.21)$$

где $\xi(t)$ — стационарный случайный процесс с достаточно малым временем корреляции.

Двумерное уравнение для плотности вероятности $W_2(x, \dot{x}, t)$ в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_2(x, \dot{x}, t)}{\partial t} = & -\dot{x} \frac{\partial W_2}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left\{ \left[\langle F \rangle + \int_{-\infty}^0 K\left(\frac{\partial F}{\partial x}, F_\tau\right) d\tau \right] W_2 \right\} + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ W_2 \int_{-\infty}^0 K(F, F_\tau) d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (3.20.22)$$

В общем случае стационарное решение двумерного уравнения Фоккера — Планка (3.20.22) в отличие от одномерного уравнения не выражается в квадратурах и для его отыскания требуется самостоятельное исследование.

Необходимо также специальное рассмотрение того случая, когда в правые части дифференциальных уравнений (3.20.10) и (3.20.21) входит не сама случайная функция $\xi(t)$, а ее производная $\dot{\xi}(t)$ [44].

Рассмотрим два простых примера (см. также § 3 гл. 8).

1. Пусть задано дифференциальное уравнение [45]

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha x + \frac{N}{2x} + \xi(t), \quad x \geq 0, \quad (3.20.23)$$

где коэффициенты α и N постоянны, а стационарное случайное воздействие $\xi(t)$ имеет среднее значение m и функцию корреляции $k_\xi(\tau)$ с коэффициентом интенсивности

$$N_0 = 2 \int_0^\infty k_\xi(\tau) d\tau = 2N. \quad (3.20.24)$$

Будем считать, что выполняется условие (3.20.11), т. е. $\tau_k \ll \tau_c \approx \frac{1}{\alpha}$. Тогда можно пользоваться уравнением (3.20.12). Однако предварительно необходимо свести случайное воздействие к белому шуму. Обозначим

$$\xi(t) - m = n(t),$$

где $n(t)$ можно рассматривать как белый шум с нулевым средним значением и дельта-функцией корреляции

$$\langle n(t) \rangle = 0, \quad \langle n(t) n(t+\tau) \rangle = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) = N \delta(\tau). \quad (3.20.25)$$

Теперь уравнение (3.20.23) можно записать так:

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha x + \frac{N}{2x} + m + n(t). \quad (3.20.26)$$

По формулам (3.20.13) находим коэффициенты

$$K_1(x) = -\alpha x + \frac{N}{2x} + m, \quad K_2 = N, \quad K'(x) = 0.$$

Подставив эти коэффициенты в (3.20.17), получим стационарную плотность вероятности

$$W_{\text{ст}}(x) = Cx \exp \left(-\frac{\alpha x^2 - mx}{N} \right), \quad x \geq 0. \quad (3.20.27)$$

Множитель C находим из условия нормировки

$$C \int_0^\infty x \exp \left(-\frac{\alpha x^2 - mx}{N} \right) dx = 1, \quad C = \frac{2\pi}{N} \left[1 + a \sqrt{2\pi} \Phi(a) e^{-\frac{1}{2} a^2} \right]^{-1},$$

$$a = \frac{m}{\sqrt{2\pi N}}.$$

В частном случае, когда $m=0$, из формулы (3.20.27) получаем плотность вероятности Релея (2.9.17)

$$W_{ct}(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \geq 0, \quad \sigma^2 = \frac{N}{2a}. \quad (3.20.28)$$

Таким образом, методика применения уравнения Фоккера — Планка к реальным системам включает следующие этапы:

- 1) проверка выполнения неравенства (3.20.11);
- 2) если это условие выполнено, то нужно случайную функцию $\xi(t)$ привести к белому шуму, для чего необходимо выделить в явном виде среднее значение и затем по формуле (3.16.3) вычислить коэффициент N_0 ;
- 3) определение коэффициентов K_1 , K_2 и K' по формулам 3.20.13).

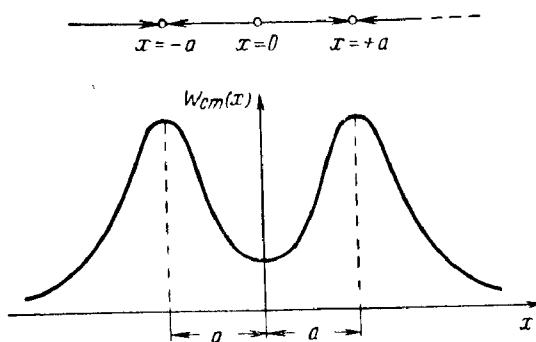


Рис. 3.21. Стационарная плотность вероятности для системы с двумя устойчивыми состояниями.

2. Рассмотрим дифференциальное уравнение [41]

$$\frac{dx}{dt} = \mu x(a^2 - x^2) + n(t), \quad \mu > 0, \quad (3.20.29)$$

где $n(t)$ — белый шум с нулевым средним значением и дельта-функцией корреляции (3.16.1).

Уравнением такого вида определяется амплитуда колебаний автогенератора при учете собственных флюктуаций [см. (8.2.16)].

По формулам (3.20.13) вычисляем коэффициенты

$$K_1(x) = \mu x(a^2 - x^2), \quad K_2(x) = \frac{1}{2} N_0, \quad K'(x) = 0.$$

После подстановки их в (3.20.17) получаем

$$W_{ct}(x) = C \exp\left[\frac{\mu}{N_0}(2a^2 x^2 - x^4)\right], \quad (3.20.30)$$

где

$$\frac{1}{C} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{\mu}{N_0}(2a^2 x^2 - x^4)\right] dx = \frac{a}{\sqrt{2}} \exp\left(\frac{\mu}{2N_0} a^4\right) K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\mu}{2N_0} a^4\right); \quad (3.20.31)$$

$K_v(z)$ — цилиндрическая функция мнимого аргумента.

Плотность вероятности (3.20.30) имеет два максимума (при $x = \pm a$ и $x = 0$) и один минимум при $x = 0$ (рис. 3.21).

Заметим, что для уравнения (3.20.29) существуют три состояния равновесия: $x = 0$, $x = \pm a$. Из них состояние $x = 0$ — неустойчивое, а $x = \pm a$ — устойчивые. Поэтому флюктуационные воздействия могут перевести систему из неустойчивого состояния $x = 0$ в устойчивые состояния $x = \pm a$ (см. § 4 гл. 8), и наоборот. При этом представляют интерес определить среднее время, за которое осуществляются такие переходы. Методика решения подобных задач, важных при исследовании автозахвата и срыва слежения в устройствах автоматики, приведена в следующем параграфе.

§ 21. ЗАДАЧИ О ДОСТИЖЕНИИ ГРАНИЦ. СРЫВ СЛЕЖЕНИЯ

Часто приходится анализировать работу нелинейных систем, имеющих два или несколько устойчивых стационарных режимов. В отсутствие случайных воздействий система, находясь в одном стационарном режиме, не может перейти в другой без каких-либо внешних воздействий. Наличие даже малых случайных возмущений приводит к тому, что система начинает совершать малые флюктуационные колебания вблизи одного из стационарных состояний и время от времени переходит из одного состояния в другое. Естественно, что при рассмотрении подобных систем возникает вопрос о вычислении вероятности таких переходов.

В качестве конкретных примеров можно указать задачу о возбуждении и срыве автоколебаний в генераторе под влиянием шумов, задачу о срыве автоматического слежения из-за случайных воздействий в автодальномере, фазовой и частотной автоподстройках и др.

Ответ на сформулированную задачу можно получить для систем, процессы в которых являются марковскими, путем отыскания нестационарного решения соответствующего уравнения Фоккера — Планка. Однако в большинстве случаев точное решение получить не удается. Поэтому приходится ограничиваться знанием хотя бы среднего времени пребывания системы в том или другом режиме.

Предположим, что в начальный момент t_0 марковский процесс $x(t)$ имеет определенное значение $x(t_0) = x_0$, находящееся внутри интервала (a, b) , т. е. начальная плотность вероятности является дельта-функцией:

$$W(x, t_0) = W_0(x) = \delta(x - x_0). \quad (3.21.1)$$

Разные реализации случайного процесса $x(t)$ достигают в первый раз граничные значения либо a , либо b за разное время. Найдем среднее время T , по истечении которого в первый раз достигается либо граница a , либо граница b .

Данную задачу можно понимать так (рис. 3.22). Пусть рассматривается движение достаточно большого числа N броуновских частиц вдоль оси x , причем в начальный момент времени t_0 все частицы расположены в точке x_0 , находящейся внутри интервала (a, b) . Пусть i -я частица впервые достигла какой-либо границы за время T_i . Тогда, очевидно,

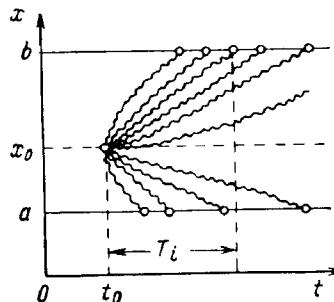


Рис. 3.22. Время первого достижения границ.

Для этого следует считать, что на границах a , b расположены поглощающие экраны, к которым частицы прилипают.

Мы не будем здесь воспроизводить математические выводы [38, 41, 42, 46, 47], а укажем окончательные результаты, относящиеся к дифференциальному уравнению первого порядка (3.20.10).

Пусть $W(x, x_0, t, t_0)$ — решение уравнения Фоккера — Планка (3.20.12), удовлетворяющее начальному условию

$$W(x, x_0, t, t_0) = \delta(x - x_0) \quad (3.21.2)$$

и граничным условиям

$$W(a, x_0, t, t_0) = W(b, x_0, t, t_0) = 0. \quad (3.21.3)$$

Ограничимся рассмотрением стационарного состояния, когда плотность вероятности зависит лишь от разности $\tau = t - t_0$, т. е.

$$W(x, x_0, \tau) = W(x, x_0, t, t_0). \quad (3.21.4)$$

Вероятность того, что x не достигнет границ a и b за время τ , находясь первоначально в положении $x = x_0$, равна:

$$Q(\tau, x_0) = \int_a^b W(x, x_0, \tau) dx. \quad (3.21.5)$$

Вероятность $Q(\tau, x_0)$ удовлетворяет условиям

$$Q(0, x_0) = 1, \quad Q(\infty, x_0) = 0. \quad (3.21.6)$$

Первое условие говорит о том, что в начальный момент времени еще ни одна реализация не успела коснуться границы. При $\tau \rightarrow \infty$ все реализации пересекут границы, что выражено вторым условием.

Если $Q(\tau, x_0)$ назвать вероятностью слежения, то вероятность срыва слежения, очевидно, определится равенством

$$P(\tau, x_0) = 1 - Q(\tau, x_0) = 1 - \int_a^b W(x, x_0, \tau) dx. \quad (3.21.7)$$

Можно показать [41], что вероятность $P(\tau, x_0)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial P(\tau, x_0)}{\partial \tau} = K_1(x_0) \frac{\partial P}{\partial x_0} + \frac{1}{2} K_2(x_0) \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}. \quad (3.21.8)$$

Дифференцируя обе части уравнения по τ , умножив результат на $e^{ju\tau}$ и интегрируя затем по τ от 0 до ∞ , получим следующее уравнение для характеристической функции

$$-ju\Theta = K_1(x_0) \frac{d\Theta}{dx_0} + \frac{1}{2} K_2(x_0) \frac{d^2\Theta}{dx^2}, \quad (3.21.9)$$

где

$$\Theta(u, x_0) = \int_0^\infty \frac{dP(\tau, x_0)}{d\tau} e^{ju\tau} d\tau.$$

Уравнение (3.21.9) позволяет находить одномерные моменты времени первого достижения границ. Для этого воспользуемся представлением характеристической функции в виде ряда по моментам (3.4.3):

$$\Theta(u, x_0) = 1 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(ju)^v}{v!} M_v(x_0).$$

Подставив это выражение и его производные в (3.21.9) и привавяя члены при одинаковых степенях ju , получим необходимые уравнения для последовательного определения моментов. Нетрудно убедиться, что среднее время (математическое ожидание) $M_1(x_0) = T$ достижения границы точкой, находящейся в начальный момент в положении x_0 , определяется уравнением

$$\frac{1}{2} K_2(x_0) \frac{d^2 T}{dx_0^2} + K_1(x_0) \frac{dT}{dx_0} + 1 = 0. \quad (3.21.10)$$

Дисперсия $D = M_2 - M_1^2$ времени достижения границы находится из уравнения

$$\frac{1}{2} K_2(x_0) \frac{d^2 D}{dx_0^2} + K_1(x_0) \frac{dD}{dx_0} + K_2(x_0) \left(\frac{dT}{dx_0} \right)^2 = 0. \quad (3.21.11)$$

Среднее время первого достижения границы b ($b > x_0$) вычисляется по формуле

$$T_b(x_0) = \int_{x_0}^b \left\{ \int_{-\infty}^z \frac{2}{K_2(y)} e^{\varphi(y)} dy \right\} e^{-\varphi(z)} dz, \quad (3.21.12)$$

а среднее время достижения границы a ($a < x_0$) равно

$$T_a(x_0) = \int_a^{x_0} \left\{ \int_z^{\infty} \frac{2}{K_2(y)} e^{\varphi(y)} dy \right\} e^{-\varphi(z)} dz, \quad (3.21.13)$$

где

$$\varphi(z) = 2 \int_0^z \frac{K_1(x_0)}{K_2(x_0)} dx_0. \quad (3.21.14)$$

Решения (3.21.12) и (3.21.13) удовлетворяют нулевым граничным условиям

$$T_b(x_0 = b) = 0, \quad T_a(x_0 = a) = 0. \quad (3.21.15)$$

Обязательное выполнение этих условий следует из того, что производная марковского процесса имеет бесконечную дисперсию (т. е. мгновенная скорость процесса бесконечно велика). Однако броуновская частица смещается за конечное время на конечное расстояние. Поэтому скорость частицы все время меняет знак, и движение происходит вперед и назад. Если частица в момент времени t_0 находится вблизи границы, то она обязательно пересечет ее через бесконечно малое время. Из физических соображений очевидно, что величины T_a и T_b должны быть положительными.

Зная решение уравнения (3.21.10), можно найти среднее время достижения границ не только при дельтообразном (3.21.1), но и при произвольном начальном распределении $W_0(x_0)$:

$$\langle T \rangle = \int_a^b T(x_0) W_0(x_0) dx_0. \quad (3.21.16)$$

Отметим, что даже в простых случаях среднее время T и дисперсия D выражаются через довольно сложные интегралы. К настоящему времени рассмотрено сравнительно мало конкретных радиотехнических задач [45, 48—53].

Применим полученные результаты к линейному дифференциальному уравнению (3.18.10). Найдем среднее время $T_b(x_0)$ достижения границы $b > x_0$. Для этого в исходное уравнение (3.21.10) нужно

подставить коэффициенты K_1 и K_2 , которые были определены ранее (3.19.24). Таким образом, можем написать

$$\frac{1}{4} N_0 \frac{d^2 T}{dx_0^2} - \alpha x_0 \frac{dT}{dx_0} + 1 = 0$$

или

$$\sigma^2 \frac{d^2 T}{dx_0^2} - x_0 \frac{dT}{dx_0} + \frac{1}{\alpha} = 0, \quad (3.21.17)$$

где $\sigma^2 = \frac{N_0}{4\alpha}$ — стационарное значение дисперсии (3.19.28).

Выполнив все вычисления по формуле (3.21.12), получим

$$T_b(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{x_0/\sigma}^{b/\sigma} e^{\frac{1}{2} x^2} dx \int_0^x e^{-\frac{t_2}{2}} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha} \int_{x_0/\sigma}^{b/\sigma} \left[\Phi(x) - \frac{1}{2} \right] e^{\frac{1}{2} x^2} dx, \quad (3.21.18)$$

где $\Phi(x)$ — интеграл вероятности.

Нетрудно убедиться, что это решение удовлетворяет основному уравнению (3.21.17), граничному условию $T_b(b) = 0$, $T_b(x_0) \geq 0$ и $T_b(x_0)$ растет с увеличением b .

ЛИТЕРАТУРА

- Я гло м А. М. Введение в теорию стационарных случайных функций. УМН, 1952, № 5 (51).
- Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И. Прохождение случайных функций через нелинейные системы. «Автоматика и телемеханика», 1953, № 4.
- Пугачев В. С. Теория случайных функций. Физматгиз, 1960.
- Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике. Изд-во «Советское радио», 1961.
- Давенпорт В. В., Джонсон Р. А., Миддлтон Д. Statistical errors in measurement of random time functions. Journ. Appl. Phys., 1952, № 4.
- Тихонов В. И. К вопросу об измерении электрических флюктуаций при помощи термоэлектрических приборов. ЖТФ, 1955, т. 25, вып. 5.
- Чайковский В. И. Методы экспериментального определения корреляционных функций. «Известия вузов», Радиотехника, 1960, № 5.
- «Определение параметров случайных процессов». Пер. с англ. Сборник статей под редакцией В. И. Чайковского. Гостехиздат УССР, 1962.
- Ланге Ф. Корреляционная электроника. Пер. с нем. Судпромгиз, 1963.
- Теория передачи электрических сигналов при наличии помех. Пер. с англ. Сборник статей под редакцией Н. А. Железнова. Изд-во иностранной литературы, 1953.
- Давенпорт В. В., Рут В. Л. Введение в теорию случайных сигналов и шумов. Пер. с англ. Изд-во иностранной литературы, 1960.
- Беннет У. Р. Основные понятия и методы теории шумов в радиотехнике. Пер. с англ. Изд-во «Советское радио», 1957.

13. Лэйнинг Д. Х., Бэтти Р. Г. Случайные процессы в задачах автоматического управления. Изд-во иностранной литературы, 1958.
14. Lee Y. W. Statistical theory of communication. John Wiley, 1960.
15. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию радиосвязи, т. 2. Пер. с англ. Изд-во «Советское радио», 1962.
16. Stewart J. L. The power spectrum of a carrier frequency modulated by gaussian noise. Proc. IRE, 1954, № 10.
17. Medhurst R. G. The power spectrum of a carrier frequency modulated by gaussian noise. Proc. IRE, 1955, № 6.
18. Тихонов В. И. Воздействие электрических флуктуаций на нелинейные радиотехнические устройства. Докторская диссертация, ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1956.
19. Малахов А. Н. О форме спектральной линии генератора при флуктуациях его частоты. ЖЭТФ, 1956, вып. 5.
20. Тихонов В. И., Амантов И. Н. Воздействие медленных флуктуаций на автогенератор. «Радиотехника и электроника», 1956, № 4.
21. Тихонов В. И. Когда нестационарный случайный процесс можно заменять стационарным. ЖТФ, 1956, № 9.
22. Гудзенко Л. И. О периодически нестационарных процессах. «Радиотехника и электроника», 1959, № 6.
23. Крамер Г. Математические методы статистики. Изд-во иностранной литературы, 1948.
24. Колесов А. А. Резонансные системы и резонансные усилители. Связьиздат, 1949.
25. Тихонов В. И. Флуктуационные шумы в элементах приемно-усилительных устройств. Изд. ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1951.
26. Вандерзил А. Флуктуации в радиотехнике и физике. Пер. с англ. Госэнергоиздат, 1958.
27. Киттель Г. Элементарная статистическая физика. Пер. с англ. Изд-во иностранной литературы, 1960.
28. Мак-Дональд Д. Введение в физику шумов и флуктуаций. Пер. с англ. Изд-во «Мир», 1964.
29. Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И. Квазимоментные функции в теории случайных процессов. ДАН СССР, т. 94, № 4.
30. Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И. Квазимоментные функции в теории случайных процессов. «Теория вероятностей и ее применения», 1960, № 1.
31. Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И. Некоторые задачи с условной вероятностью и квазимоментные функции. «Теория вероятностей и ее применения», 1961, № 4.
32. Kuznetsov P. I., Stratovich R. L., Tikhonov V. I. Non—Linear transformations of stochastic processes. Pergamon Press, 1965.
33. Лезин Ю. С. О распределении случайных напряжений на выходе некогерентного накопительного устройства с экспоненциальной весовой функцией. «Известия вузов», Радиотехника, 1960, № 6.
34. Магсит J. I. A statistical theory of target detection by pulsed radar. Trans. IRE, 1960, IT-6, № 2.
35. Бородин В. С. Приближенный расчет функции распределения нормального процесса на выходе типового радиотехнического звена. «Радиотехника», 1961, № 2.
36. Деч Р. Нелинейные преобразования случайных процессов. Пер. с англ. Изд-во «Советское радио», 1965.
37. Эйнштейн А., Смолуховский М. Броуновское движение (сборник статей). ОНТИ, 1936.
38. Ming Chen Wang, Uhlenbeck G. E. On the theory of the Brownian motion II. Reviews of Modern Physics, 1945, № 2—3.
39. Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И. Корреляционные функции в теории броуновского движения. Обобщение уравнения Фоккера — Планка. ЖЭТФ, 1954, вып. 2.
40. Колмогоров А. Н. Об аналитических методах в теории вероятностей. УМН, 1938, вып. 5.
41. Понtryagin A., Andronov A., Witt A. О статистическом рассмотрении динамических систем. ЖЭТФ, 1933, вып. 3.
42. Леонович М. А. Статистическая физика. Гостехиздат, 1944.
43. Стеганов В. В. Курс дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1950.
44. Тихонов В. И. Специальные случаи применения уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова. «Радиотехника и электроника», 1962, № 8.
45. Тихонов В. И. Марковский характер огибающей квазигармонических флуктуаций. «Радиотехника и электроника», 1961, № 7.
46. Siegert A. J. F. On the first passage time probability problem. Physical Review, 1951, № 4.
47. Ланда П. С., Стратонович Р. Л. К теории флуктуационных переходов различных систем из одного стационарного состояния в другое. «Вестник Московского университета», сер. физ. и астр., 1962, № 1.
48. Stumpf F. L. H. On the first — passage — time problem. Philips Res. Reports, 1950, № 4.
49. Васильев А. М. Применение теории броуновского движения к исследованию помехоустойчивости импульсных радиотехнических следящих устройств. «НДВШ, радиотехника и электроника», 1959, № 2.
50. Стратонович Р. Л., Ланда П. С. Воздействие шума на генератор с жестким возбуждением. «Известия вузов», Радиофизика, 1959, № 1.
51. Ланда П. С. Об устойчивости систем с сервоуправлением при наличии случайных воздействий. «Автоматика и телемеханика», 1960, № 1.
52. Руина Д. П., Ван-Валькенбург М. П. Статистический анализ систем автоматического сопровождения. Труды 1-го Международного конгресса ИФАК. Статистические методы исследования, 1961.
53. Первачев С. В. Срыв слежения во временном автоселекторе. «Радиотехника и электроника», 1965, № 8.

Глава 4

ИМПУЛЬСНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

§ 1. КЛАССИФИКАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ИМПУЛЬСОВ

Импульсный случайный процесс представляет собой последовательность одиночных импульсов в общем случае разной формы, следующих друг за другом через некоторые промежутки времени. Если форма импульсов задана, то случайными могут быть отдельные параметры импульсов: амплитуда, длительность, время появления и др.

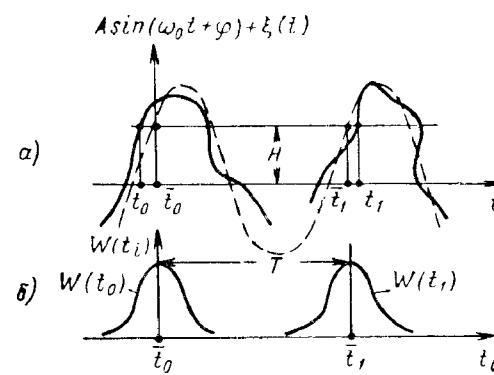


Рис. 4.1. Импульсы без накопления (а) и плотности вероятности для моментов их появления (б).

Предположим, что входное напряжение состоит из суммы «идеальной» синусоиды $A \sin(\omega_0 t + \varphi)$, где $A > H$, и нормального стационарного шума $\xi(t)$ с нулевым средним значением и малой дисперсией $\sigma_\xi^2 \ll H^2$ (рис. 4.1).

Если бы входной шум $\xi(t)$ отсутствовал, то импульсы начинались бы в моменты времени \bar{t}_i , определяемые пересечением синусоидой уровня H (пунктирная кривая на рис. 4.1). Первый по порядку появившийся после начала отсчета времени импульс имеет абсциссу

\bar{t}_0 . Этот импульс будем условно называть нулевым. Для определенности положим $\bar{t}_0 = 0$.

Влияние шума $\xi(t)$ выразится в том, что времена срабатывания t_i будут «дрожать» около своих средних положений \bar{t}_i , причем случайные величины $(t_i - \bar{t}_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, распределены одинаково. Следовательно, случайные величины t_i имеют распределения с разными средними значениями $\bar{t}_i = iT_0 = 2\pi i / \omega_0$, но с одинаковой дисперсией

$$\sigma_i^2 = \sigma^2 = \text{const}, \quad i=0, 1, 2, \dots \quad (4.1.1)$$

Согласно (9.2.5) можем написать $\sigma = \sigma_\xi / s$, где $s = \omega_0 A \cos(\omega_0 \bar{t}_0 + \varphi)$.

Характерной особенностью полученной случайной последовательности импульсов является то, что дисперсия σ^2 моментов появления t_i различных импульсов не растет с ростом номера i , а остается постоянной. Поэтому такую последовательность для краткости

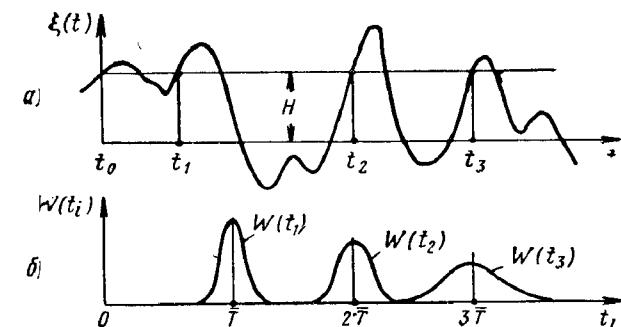


Рис. 4.2. Импульсы с накоплением (а) и плотности вероятности для моментов их появления (б).

можно назвать случайной последовательностью импульсов без накопления (дисперсии моментов появления). Энергетический спектр случайной последовательности импульсов без накопления обычно является дискретно-сплошным.

2. Импульсы с накоплением (дисперсии моментов появления). Предположим теперь, что на вход триггерного устройства воздействует только флюктуационное напряжение $\xi(t)$ с дисперсией $\sigma_\xi^2 \approx H^2$ и триггер срабатывает от выбросов этого напряжения выше уровня H (рис. 4.2).

При некоторых условиях (например, $H \geq 2\sigma_\xi$) можно пренебречь зависимостью двух значений флюктуационного напряжения, разделенных интервалом времени T , где

$$T_i = \bar{t}_i - t_{i-1}. \quad (4.1.2)$$

При этом все величины T_i , $i = 1, 2, 3, \dots$, будут иметь одинаковую плотность вероятности $\tilde{W}(T_i) = W(T)$, которую можно вычислить теоретически или же получить путем обработки экспериментальных результатов.

Из выражения (4.1.2) следует, что

$$t_i = T_1 + T_2 + \dots + T_i. \quad (4.1.3)$$

Вследствие предполагаемой независимости случайных величин T_i получим $\bar{t}_i = i\bar{T}$, а

$$\sigma_i^2 = i\sigma^2, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (4.1.4)$$

где σ^2 — дисперсия случайной величины T_i .

В данном случае среднее значение и дисперсия момента появления импульса зависят от его номера.

Характерной особенностью данной последовательности импульсов является увеличение дисперсии для момента появления импульса t_i с ростом номера. В отличие от предыдущего случая такую последовательность условно можно назвать случайной последовательностью импульсов с накоплением. Энергетический спектр такой последовательности является сплошным.

Укажем, что точную случайную последовательность импульсов без накопления, строго говоря, получить практически невозможно, так как все источники колебаний (автогенератор, мультивибратор, блокинг-генератор и др.) при учете естественной нестабильности дают колебания с накоплением.

3. Перекрывающиеся и неперекрывающиеся импульсы. Другим важным признаком, характеризующим случайную последовательность импульсов, является перекрывание (наложение). Под перекрыванием понимается возможность появления соседних импульсов в столь близкие моменты времени, что они частично перекрываются. Перекрывание импульсов обычно зависит от конкретного устройства, генерирующего последовательность импульсов. Если неперекрывающиеся импульсы воздействуют на инерционную систему, то на выходе системы получаются перекрывающиеся импульсы.

В общем случае практическое отсутствие перекрытия импульсов определяется тем, что вероятность выполнения неравенства $T < \tau$ равна нулю или достаточно мала. Применимельно к указанным выше случаям импульсов без накопления и с накоплением отсутствие перекрытия импульсов обеспечивается выполнением неравенств $\sigma < T_0 - \tau$ и $\sigma < \bar{T} - \tau$ соответственно. Следует отметить, что при выполнении последнего неравенства импульсы не перекрываются, хотя плотности вероятности $W(t_i)$ и $W(t_{i+1})$ при больших i могут сильно перекрываться.

В дальнейшем мы рассмотрим случайные последовательности импульсов преимущественно прямоугольной формы. Случайные импульсы прямоугольной формы в ряде случаев являются хорошей

аппроксимацией реальных сигналов, используемых в радиосвязи, радиолокации, телеметрии и других областях. Кроме этого, поток прямоугольных импульсов может служить математической моделью для описания ряда других процессов. Например, продолжительность работы какого-либо устройства можно задать длительностью импульса, а время нахождения его в ремонте — длительностью паузы. Аналогичные примеры можно привести из теории массового обслуживания и т. п. [2, 3, 4].

§ 2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ИМПУЛЬСОВ ПО АНСАМБЛЮ И ПО ВРЕМЕНИ

Рассмотрим случайную последовательность прямоугольных импульсов, содержащую достаточно большое число импульсов (рис. 4.3). Совместим начало отсчета времени с моментом появления первого импульса, считая его нулевым. Обозначим момент появления i -го импульса через t_i , его амплитуду A_i и длительность τ_i . В случайной последовательности отдельные величины A_i , τ_i , t_i или все являются случайными, т. е. принимают заранее неизвестные значения. Поэтому рис. 4.3 следует понимать как конкретную realiza-

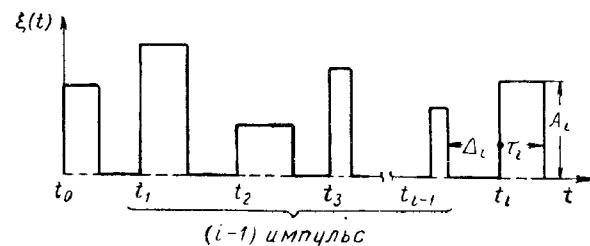


Рис. 4.3. Случайная последовательность прямоугольных импульсов.

цию (сфотографированную осциллограмму, полученную в конкретном опыте). Если даже условия опыта не изменяются, то одна реализация будет отличаться от другой. Поэтому функция $\xi(t)$ при одном и том же значении аргумента t будет принимать разные значения, представляя собой случайную величину со счетным множеством значений.

Описание случайной последовательности прямоугольных импульсов сводится к указанию вероятностных характеристик трех случайных величин: A_i , τ_i , t_i или A_i , τ_i , Δ_i , где Δ_i — интервал времени между соседними импульсами.

Пусть имеется случайная последовательность независимых импульсов. Для такой последовательности параметры A_i , τ_i , Δ_i как одного, так и разных импульсов независимы. Поэтому последова-

тельность независимых прямоугольных импульсов определяется указанием плотностей вероятностей амплитуд импульсов $W(A)$, их длительностей $W_1(\tau)$ и интервалов между соседними импульсами $W_2(\Delta)$. Обычно эти плотности вероятности находятся в результате решения самостоятельной задачи, а именно, конкретного физического анализа работы устройства, создающего импульсы.

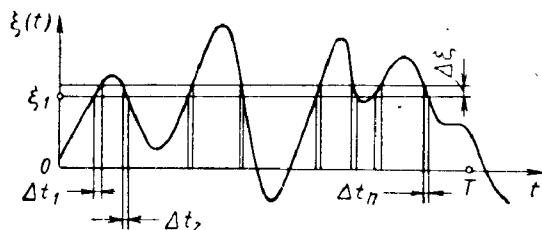


Рис. 4.4. Определение плотности вероятности стационарного эргодического процесса.

Зная эти плотности вероятности, можно вычислить средние значения амплитуд импульсов, их длительностей и интервалов между импульсами:

$$\begin{aligned} m_A &= \langle A \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} AW(A) dA, \quad m_\tau = \langle \tau \rangle = \int_0^{\infty} \tau W_1(\tau) d\tau, \\ m_\Delta &= \langle \Delta \rangle = \int_0^{\infty} \Delta W_2(\Delta) d\Delta. \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

При рассмотрении эргодического свойства (см. § 8 гл. 3) указывалось, что некоторые статистические характеристики стационарного случайного процесса, обладающего эргодическим свойством, можно найти по одной реализации достаточно большой длительности. В частности, одномерную плотность вероятности стационарного в узком смысле эргодического процесса можно определить следующим образом. Пусть имеется реализация $\xi(t)$ такого процесса большой длительности T (рис. 4.4). Выделим на уровне ξ_1 горизонтальную полоску малой ширины $\Delta\xi$ и подсчитаем общее время ΔT , в течение которого значения случайного процесса заключены в интервале $(\xi_1, \xi_1 + \Delta\xi)$:

$$\Delta T = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_n. \quad (4.2.2)$$

Тогда одномерная плотность вероятности $w(\xi)$ при выбранном значении ξ_1 пропорциональна относительному времени пребывания случайной функции $\xi(t)$ в интервале $(\xi_1, \xi_1 + \Delta\xi)$:

$$w(\xi_1) \Delta\xi = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Delta T}{T}. \quad (4.2.3)$$

Применительно к плотностям вероятности $W_1(\tau)$ и $W_2(\Delta)$ результат (4.2.3) изменяется. Покажем это, например, для плотности вероятности $W_1(\tau)$.

Рассмотрим ансамбль, содержащий достаточно большое число N реализаций, наблюдаемых на выходе одновременно работающих идентичных систем. В какой-либо фиксированный момент времени t будем иметь M импульсов ансамбля ($M \ll N$). Из этих M импульсов часть импульсов $m(\tau)$ будет иметь длительность, заключенную в интервале $(\tau, \tau + \Delta\tau)$, где $\Delta\tau$ — достаточно малая величина. Тогда

$$W_1(\tau) \Delta\tau = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{m(\tau)}{M}. \quad (4.2.4)$$

Рассмотрим теперь одну реализацию достаточно большой длительности T , содержащую большое число импульсов L . Очевидно, что среднее число импульсов, появляющихся в единицу времени, равно

$$v = L/T. \quad (4.2.5)$$

Обозначим число импульсов в реализации, длительность которых заключена в промежутке $(\tau, \tau + \Delta\tau)$, через $l(\tau)$. Тогда суммарная для времени ΔT , занятая такими импульсами, равна: $\Delta T = \tau l(\tau)$. Если определить плотность вероятности по времени аналогично (4.2.3) как относительную долю времени реализации, занятую импульсами длительностью от τ до $\tau + \Delta\tau$, то с учетом (4.2.5) можем написать

$$\tilde{W}_1(\tau) \Delta\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Delta T}{T} = v\tau \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{l(\tau)}{L}. \quad (4.2.6)$$

Учитывая, что для однородных во времени процессов справедливо равенство

$$W_1(\tau) \Delta\tau = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{m(\tau)}{M} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{l(\tau)}{L},$$

получим

$$\tilde{W}_1(\tau) = v\tau W_1(\tau). \quad (4.2.7)$$

Формула (4.2.7) показывает различие между плотностями вероятности, полученными на основании рассмотрения одной реализации и ансамбля реализаций. Это различие следует иметь в виду при экспериментальном определении плотности вероятности $W_1(\tau)$ по осциллограммам. Хотя пользуются как плотностью вероятности $\tilde{W}_1(\tau)$, так и плотностью вероятности $W_1(\tau)$, в дальнейшем мы будем в основном оперировать с плотностью вероятности $W_1(\tau)$, определяющей путем усреднения по ансамблю.

§ 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ КОРРЕЛЯЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ИМПУЛЬСОВ

Рассмотрим стационарную случайную последовательность прямоугольных импульсов (рис. 4.5, а) с взаимно независимыми амплитудами A_i , длительностями τ_i и интервалами Δ_i , где индексы i , j , k принимают все возможные значения. Будем считать заданными плотности вероятности $W(A)$, $W_1(\tau)$ и $W_2(\Delta)$ для указанных параметров импульсов.

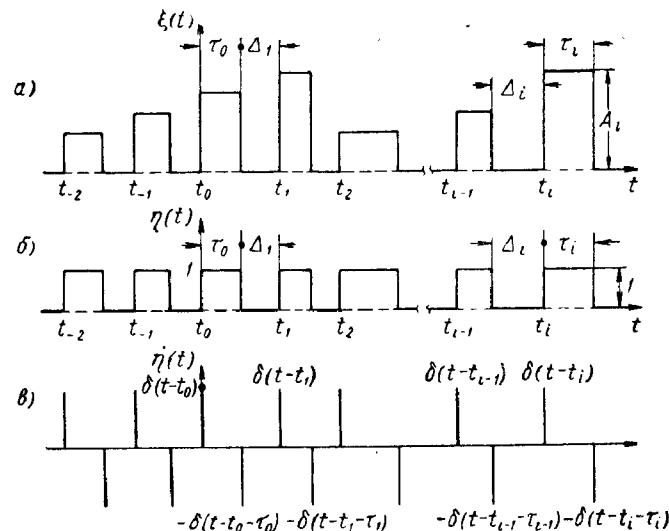


Рис. 4.5. Случайная последовательность прямоугольных импульсов (а), соответствующие ей прямоугольные импульсы единичной высоты (б) и их производная (в).

Одной из важнейших статистических характеристик импульсного случайного процесса является спектральная плотность (или функция корреляции). Оказывается, что в данном случае легче вычислить спектральную плотность, чем функцию корреляции. Поэтому здесь мы лишь кратко укажем метод непосредственного вычисления функции корреляции [1], а в § 4 более подробно разберем метод вычисления спектральной плотности [5, 6].

Запишем рассматриваемый случайный стационарный импульсный процесс в следующем виде:

$$\xi(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} A_i f_i(t - t_i), \quad f_i(t - t_i) = \begin{cases} 1 & \text{при } t_i \leq t < t_i + \tau_i, \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases} \quad (4.3.1)$$

При такой записи в явном виде выделена амплитуда импульсов. Очевидно, что стационарный случайный процесс

$$\eta(t) = \sum_i f_i(t - t_i), \quad (4.3.2)$$

составленный из последовательности функций $f_i(t - t_i)$, копирует исходный импульсный процесс $\xi(t)$ с той лишь разницей, что теперь все импульсы имеют амплитуду, равную единице (рис. 4.5, б).

Учитывая взаимную независимость отдельных параметров импульсов, для среднего значения можем написать

$$m_\xi = \langle \xi(t) \rangle = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \langle A_i \rangle \langle f_i(t - t_i) \rangle = m_A \sum_{i=-\infty}^{\infty} \langle f_i(t - t_i) \rangle = m_A \langle \eta(t) \rangle. \quad (4.3.3)$$

При вычислении среднего значения случайной последовательности прямоугольных импульсов единичной высоты воспользуемся следующей теоремой. Среднее значение равно вероятности события, состоящего в том, что при случайному бросании точки на ось времени она упадет на одно из оснований импульсов, а не на промежуток между импульсами.

Действительно, случайная функция $\eta(t)$ в любой момент времени может принимать только два значения: 0 и 1. Обозначим вероятности этих значений соответственно через $p_0 = P(\eta(t) = 0)$ и $p_1 = P(\eta(t) = 1)$. Очевидно, что

$$m_\eta = \langle \eta(t) \rangle = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 = p_1.$$

По p_1 есть вероятность того, что рассматриваемый момент времени окажется на основании какого-либо импульса. В свою очередь, она равна отношению средней длительности импульса к среднему интервалу между моментами появления двух соседних импульсов, т. е.

$$p_1 = \frac{m_\tau}{m_\tau + m_\Delta} = v m_\tau, \quad v = \frac{1}{m_\tau + m_\Delta}. \quad (4.3.4)$$

Поэтому выражение (4.3.3) можно записать в окончательном виде:

$$m_\xi = v m_A m_\tau. \quad (4.3.5)$$

Укажем теперь метод вычисления функции корреляции. По определению функция корреляции равна:

$$k(\lambda) = m_{11}(\lambda) - m_\xi^2, \quad m_{11}(\lambda) = \langle \xi(t) \xi(t + \lambda) \rangle. \quad (4.3.6)$$

Воспользовавшись выражением (4.3.1), представим двумерный момент второго порядка $m_{11}(\lambda)$ в виде суммы

$$\begin{aligned} m_{11}(\lambda) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \langle A_i^2 \rangle \langle f_i(t-t_i) f_i(t-t_i+\lambda) \rangle + \\ &+ \left| \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} \langle A_i \rangle \langle A_j \rangle \langle f_i(t-t_i) f_j(t-t_j+\lambda) \rangle = \right| \\ &= \langle A^2 \rangle \sum_{i=-\infty}^{\infty} \langle f_i(t-t_i) f_i(t-t_i+\lambda) \rangle + m_A^2 \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} \langle f_i(t-t_i) f_j(t-t_j+\lambda) \rangle. \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Входящие в (4.3.7) средние значения слагаемых найдем на основании теоремы: среднее значение $\langle f_i(t-t_i) f_j(t-t_j+\lambda) \rangle$ равно вероятности события, состоящего в том, что при бросании λ -отрезка (т. е. отрезка длительностью λ) на ось времени этот отрезок упадет обоими концами на основания i -го и j -го импульсов, но ни один из концов не упадет на промежуток между импульсами.

Действительно, пусть $i < j$. Тогда при бросании отрезка длительностью λ возможны четыре различных исхода. 1) С вероятностью p_{11} левый конец упал на основание i -го импульса, а правый на основание j -го импульса, при этом $f_i(t-t_i) f_j(t-t_j+\lambda) = 1$. 2) С вероятностью p_{01} левый конец упал на промежуток между импульсами, а правый на основание j -го импульса. В данном случае $f_i(t-t_i) f_j(t-t_j+\lambda) = 0 \cdot f_j(t-t_j+\lambda) = 0$. Применяя аналогичные обозначения для других двух случаев, находим среднее значение

$$\langle f_i(t-t_i) f_j(t-t_j+\lambda) \rangle = 1 \cdot p_{11} + 0 \cdot p_{01} + 0 \cdot p_{10} + 0 \cdot p_{00} = p_{11}. \quad (4.3.8)$$

Для определенности совместим момент t_0 появления «нулевого» импульса с моментом появления импульса, в пределах основания которого окажется левый конец λ -отрезка. Такое совмещение правомерно, так как случайная последовательность предполагается стационарной, причем в данном случае

$$m_{11}(\lambda) = m_{11}(-\lambda). \quad (4.3.9)$$

Обозначим через C_i событие, что левый конец λ -отрезка находится на основании нулевого импульса, а правый — на основании i -го импульса. Например, событие C_0 состоит в том, что λ -отрезок весь лежит внутри основания нулевого импульса; C_1 — левый конец лежит на основании нулевого импульса, а правый — на основании первого импульса и т. д. Обозначим вероятности этих

несовместных событий через $P_i(\lambda)$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Тогда формулу (4.3.7) можно записать в таком виде

$$m_{11}(\lambda) = \langle A^2 \rangle P_0(\lambda) + m_A^2 \sum_{i=1}^{\infty} P_i(\lambda). \quad (4.3.10)$$

Таким образом, задача определения функции корреляции (4.3.6) сведена к вычислению вероятностей $P_i(\lambda)$, $i = 0, 1, 2, 3, \dots$. Пользуясь формулой (4.3.8), эти вероятности можно выразить через $W_1(\tau)$ и $W_2(\Delta)$ [1].

Повторив рассуждения, приведшие к формуле (4.2.7), можно убедиться, что вероятность того, что произвольно взятый момент времени t попадает на основание импульса с длительностью τ

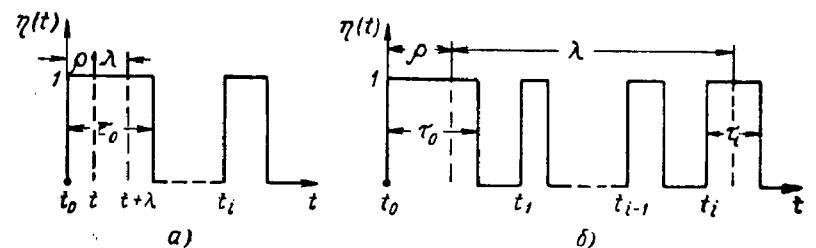


Рис. 4.6. К вычислению вероятностей $P_0(\lambda)$ и $P_i(\lambda)$.

в интервале $(\tau, \tau + d\tau)$ равна $\tilde{W}_1(\tau)d\tau$. Вероятность же того, что он расположен в элементарном интервале $(\rho, \rho + d\rho)$, отстоящем на расстоянии $\rho > 0$ от начала рассматриваемого импульса, равна $d\rho/\tau$, так как в пределах импульса равновероятны все значения ρ (рис. 4.6, a). Поэтому вероятность того, что момент времени t находится на расстоянии ρ от начала какого-либо импульса с длительностью τ , заключенной в интервале $(\tau, \tau + d\tau)$, равна

$$\frac{d\rho}{\tau} \tilde{W}_1(\tau) d\tau = v W_1(\tau) d\tau d\rho \quad (4.3.11)$$

Если момент времени t расположен указанным образом, то вероятность попадания момента времени $t + \lambda$ (правого конца λ -отрезка) на тот же самый импульс будет равна единице при $\rho + \lambda \leq \tau$, т. е. если ρ изменяется в пределах $0 \leq \rho \leq \tau - \lambda$. Проинтегрировав (4.3.11) по этим значениям ρ и учитывая условие (4.3.9), имеем

$$v W_1(\tau) d\tau \int_0^{t-\lambda} d\rho = \begin{cases} (\tau - |\lambda|) v W_1(\tau) d\tau & \text{при } |\lambda| \leq \tau, \\ 0 & \text{при } |\lambda| > \tau. \end{cases} \quad (4.3.12)$$

Если теперь проинтегрировать (4.3.12) по всем возможным значениям длительности τ , то получим вероятность $P_0(\lambda)$ нахождения λ -отрезка на нулевом импульсе:

$$P_0(\lambda) = v \int_{\lambda}^{\infty} (\tau - |\lambda|) W_1(\tau) d\tau. \quad (4.3.13)$$

Вычислим вероятности $P_i(\lambda)$, $i = 1, 2, 3, \dots$, рассматривая случайную последовательность прямоугольных импульсов единичной высоты $\eta(t)$. Для сокращения записи обозначим совместную плотность вероятности

$$W_3(\tau_0, \tau_i, t_i) = W_1(\tau_0) W_1(\tau_i) W_i(t_i). \quad (4.3.14)$$

где τ_0 — длительность нулевого импульса;

t_i — момент появления i -го импульса.

Вероятность того, что левый конец λ -отрезка находится на основании нулевого импульса с длительностью $(\tau_0, \tau_0 + d\tau_0)$ и расположен на расстоянии ρ от его начала, дается выражением (4.3.11) и равна $v W_1(\tau_0) d\tau_0 d\rho$, где

$$0 \leq \rho < \tau_0. \quad (4.3.15)$$

Если левый конец λ -отрезка находится в пределах основания нулевого импульса, то вероятность нахождения его правого конца в пределах основания i -го импульса (рис. 4.6, б) совпадает с вероятностью выполнения неравенства

$$t_i - \lambda \leq \rho < t_i - \lambda + \tau_i. \quad (4.3.16)$$

Следовательно, для вычисления вероятности $P_i(\lambda)$ нужно проинтегрировать выражение

$$v W_1(\tau_0) W_1(\tau_i) W_i(t_i) d\tau_0 d\tau_i dt_i d\rho = v W_3(\tau_0, \tau_i, t_i) d\tau_0 d\tau_i dt_i d\rho \quad (4.3.17)$$

по всем значениям ρ , τ_0 , τ_i , t_i , при которых левый конец λ -отрезка расположен на основании нулевого импульса, а правый — на основании i -го импульса.

Так как выражение (4.3.17) не зависит от ρ , то целесообразно проинтегрировать его сначала по ρ . Из (4.3.15) и (4.3.16) получаем, во-первых, условие совместности этих неравенств

$$t_i - \tau_0 < \lambda < t_i + \tau_i \quad (4.3.18)$$

и, во-вторых, четыре области интегрирования: Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 , Ω_4 , в каждой из которых можно выполнить интегрирование по ρ :

Ω_1 — если $t_i < \lambda$, $\tau_0 < t_i - \lambda + \tau_i$, то $0 < \rho < \tau_0$;

Ω_2 — если $t_i < \lambda$, $\tau_0 > t_i - \lambda + \tau_i$, то $0 < \rho < t_i + \lambda + \tau_i$;

Ω_3 — если $t_i > \lambda$, $\tau_0 > t_i - \lambda + \tau_i$, то $t_i - \lambda < \rho < t_i - \lambda + \tau_i$;

Ω_4 — если $t_i > \lambda$, $\tau_0 < t_i - \lambda + \tau_i$, то $t_i - \lambda < \rho < \tau_0$.

Проинтегрировав (4.3.17) по этим областям, получим интересующую нас плотность вероятности $P_i(\lambda)$. Например, интегрирование по ρ в области Ω_1 дает τ_0 . Поэтому интеграл по области Ω_1 запишется в следующем явном виде:

$$J_1(\lambda) = v \int_0^{\infty} W_1(\tau_i) d\tau_i \int_0^{\lambda} W_i(t_i) dt_i \int_0^{t_i - \lambda + \tau_i} \tau_0 W_1(\tau_0) d\tau_0. \quad (4.3.19)$$

В результате интегрирования по ρ в области Ω_2 получим $(t_i - \lambda + \tau_i)$ и, следовательно, интеграл по этой области равен:

$$J_2(\lambda) = v \int_0^{\infty} W_1(\tau_i) d\tau_i \int_0^{\lambda} W_i(t_i) dt_i \int_{t_i - \lambda + \tau_i}^{\infty} (t_i - \lambda + \tau_i) W_1(\tau_0) d\tau_0. \quad (4.3.20)$$

Аналогичным образом можно выразить в явном виде интегралы $J_3(\lambda)$ и $J_4(\lambda)$ по двум остальным областям Ω_3 и Ω_4 .

Проиллюстрируем методику вычисления вероятностей $P_0(\lambda)$ и $P_i(\lambda)$ на следующем тривиальном примере. Пусть прямоугольные

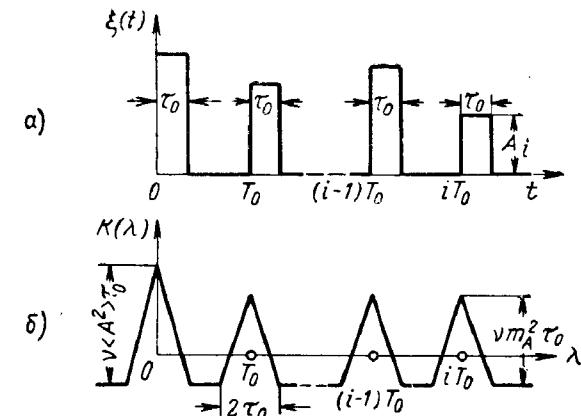


Рис. 4.7. Случайная последовательность периодически следующих прямоугольных импульсов одинаковой длительности (а) и соответствующая функция корреляции (б).

импульсы одинаковой длительности $\tau_i = \tau_0 = \text{const}$, но разной амплитуды A_i имеют постоянный период следования T_0 (рис. 4.7, а). В данном случае плотности вероятности для длительности импульсов и моментов появления являются дельта-функциями: $W_1(\tau) = \delta(\tau - \tau_0)$, $W_i(t_i) = \delta(t - iT_0)$, $i = 1, 2, 3, \dots$. Очевидно, что для такой последовательности $v = 1/T_0$, $m_i = \tau_0$.

При вычислении отдельных интегралов будем пользоваться формулой (П.4). Имеем

$$P_0(\lambda) = v \int_{|\lambda|}^{\infty} (\tau - |\lambda|) \delta(\tau - \tau_0) d\tau = \begin{cases} v(\tau_0 - |\lambda|) & \text{при } |\lambda| < \tau_0, \\ 0 & \text{при } |\lambda| > \tau_0. \end{cases} \quad (4.3.21)$$

Согласно (4.3.19) можем написать

$$J_1(\lambda) = v \int_0^{\infty} \delta(\tau_i - \tau_0) d\tau_i \int_0^{\lambda} \delta(t_i - iT_0) dt_i \int_0^{t_i - \lambda + \tau_0} \tau \delta(\tau - \tau_0) d\tau.$$

Интеграл по переменной τ отличен от нуля лишь при $t_i + \tau_0 - \lambda > \tau_0$, т. е. при $t_i = iT_0 > \lambda$. Но при этом условии интеграл по переменной t_i равен нулю. Поэтому $J_1(\lambda) = 0$.

Интеграл (4.3.20) в данном случае равен

$$\begin{aligned} J_2(\lambda) &= v \int_0^{\infty} \delta(\tau_i - \tau_0) d\tau_i \int_0^{\lambda} \delta(t_i - iT_0) dt_i \int_{t_i + \tau_0 - \lambda}^{\infty} (t_i - \lambda + \tau) \delta(\tau - \tau_0) d\tau = \\ &= v \int_0^{\infty} \delta(\tau_i - \tau_0) d\tau_i \int_0^{\lambda} (t_i + \tau_0 - \lambda) \delta(t_i - iT_0) dt_i = \\ &= \begin{cases} v(iT_0 + \tau_0 - \lambda) & \text{при } \lambda > iT_0, \\ 0 & \text{при } \lambda < iT_0. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

Повторив аналогичные рассуждения, получим $J_3(\lambda) = 0$,

$$J_4(\lambda) = \begin{cases} v(\tau_0 - iT_0 + \lambda) & \text{при } \lambda < iT_0, \\ 0 & \text{при } \lambda > iT_0. \end{cases} \quad (4.3.23)$$

Следовательно,

$$P_i(\lambda) = \begin{cases} v(\tau_0 + iT_0 - \lambda), & \lambda > iT_0, \\ v(\tau_0 - iT_0 + \lambda), & \lambda < iT_0, \end{cases} \quad (4.3.24)$$

где пределы изменения λ определяются неравенством (4.3.18).

Если подставить выражения (4.3.21) и (4.3.24) в (4.3.10), а затем в (4.3.6), то получим окончательную формулу для функции корреляции. Примерный вид функции корреляции изображен на рис. 4.7, б. Она состоит из равноотстоящих равнобедренных треугольников с основанием $2\tau_0$ и высотой $m_A^2 v \tau_0$, за исключением «нулевого» треугольника, высота которого превышает высоту остальных на $v \sigma_A^2 \tau_0$, где σ_A^2 — дисперсия высот импульсов.

Отсюда следует, что энергетический спектр рассматриваемой последовательности будет дискретно-сплошным, т. е. состоящим из дискретных линий и непрерывной составляющей.

§ 4. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ИМПУЛЬСОВ

За исключением некоторых частных случаев (например, пусковых импульсов) непосредственное вычисление корреляционной функции сложнее, чем спектральную плотность. Найдем спектральную плотность стационарной случайной последовательности прямоугольных импульсов (рис. 4.5, а) с взаимно независимыми амплитудами A_i , длительностями τ_i и интервалами Δ_k , считая известными плотности вероятности $W(A)$, $W_1(\tau)$ и $W_2(\Delta)$. Применительно к прямоугольным импульсам вместо ступенчатой случайной функции $\eta(t)$, определяемой выражением (4.3.2), удобно ввести ее производную $\dot{\eta}(t)$. Рассмотрим реализацию производной $\dot{\eta}(t)$ на конечном интервале времени $(0, T)$, где $T = L/v$. Она представляет собой последовательность чередующихся биполярных дельта-функций (рис. 4.5, б):

$$\dot{\eta}(t) = \sum_{i=0}^L [\delta(t - t_i) - \delta(t - t_i - \tau_i)]. \quad (4.4.1)$$

По формуле (3.10.12) с учетом (П.4) находим спектральную функцию

$$F_{\dot{\eta}}(\omega) = \sum_{i=0}^L \int_0^T [\delta(t - t_i) - \delta(t - t_i - \tau_i)] e^{-j\omega t} dt = \sum_{i=0}^L [e^{-j\omega t_i} - e^{-j\omega(t_i + \tau_i)}]. \quad (4.4.2)$$

Все дальнейшие вычисления выполняем по формуле (3.10.14).

Очевидно, что

$$\begin{aligned} |F_{\dot{\eta}}(\omega)|^2 &= F_{\dot{\eta}}(\omega) F_{\dot{\eta}}^*(\omega) = \sum_{i=0}^L \sum_{k=0}^L [e^{-j\omega t_i} - e^{-j\omega(t_i + \tau_i)}] \times \\ &\quad \times [e^{j\omega t_k} - e^{j\omega(t_k + \tau_k)}], \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

где звездочка обозначает комплексное сопряжение.

Двойную сумму (4.4.3) целесообразно разбить на три суммы, соответствующие $i=k$, $k=i+n > i$ и $k=i-n < i$. Обозначим их соответственно через Σ_0 , Σ и Σ^* :

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= \sum_{i=0}^L [e^{-j\omega t_i} - e^{-j\omega(t_i + \tau_i)}] [e^{j\omega t_i} - e^{j\omega(t_i + \tau_i)}] = \\ &= \sum_{i=0}^L (2 - e^{j\omega \tau_i} - e^{-j\omega \tau_i}), \end{aligned}$$

$$\Sigma = \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{n=1}^L [e^{-j\omega t_i} - e^{-j\omega(t_i + \tau_i)}] [e^{j\omega t_{i+n}} - e^{j\omega(t_{i+n} + \tau_i)}],$$

$$\Sigma^* = \sum_{i=1}^L \sum_{n=0}^{L-1} [e^{-j\omega t_i} - e^{-j\omega(t_i + \tau_i)}] [e^{j\omega t_{i-n}} - e^{j\omega(t_{i-n} + \tau_i)}].$$

Выразив в последних двух суммах разности времен через τ_i и Δ_k , нетрудно убедиться, что они являются комплексно-сопряженными и, следовательно,

$$\Sigma + \Sigma^* = 2\operatorname{Re} \Sigma,$$

где через Re обозначена реальная часть.

Статистически усредненное равенство (4.4.3), можем написать

$$\langle |F_\eta(\omega)|^2 \rangle = \langle \Sigma_0 \rangle + 2\operatorname{Re} \langle \Sigma \rangle. \quad (4.4.4)$$

Средние значения сумм в правой части выражаются через характеристическую функцию $\Theta_1(\omega)$ длительностей импульсов и характеристическую функцию $\Theta_2(\omega)$ интервалов между импульсами:

$$\begin{aligned} \Theta_1(\omega) &= \langle e^{j\omega\tau_i} \rangle = \langle e^{j\omega\tau} \rangle = \int_0^\infty e^{j\omega\tau} W_1(\tau) d\tau, \\ \Theta_2(\omega) &= \langle e^{j\omega\Delta_k} \rangle = \langle e^{j\omega\Delta} \rangle = \int_0^\infty e^{j\omega\Delta} W_2(\Delta) d\Delta. \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

При вычислениях следует иметь в виду, что характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению характеристических функций слагаемых, а также очевидное соотношение $\Theta(-\omega) = \Theta^*(\omega)$, следующее из (4.4.5).

С учетом равенства

$$t_{i+n} - t_i = \sum_{\mu=1}^n (\tau_{i+\mu-1} + \Delta_{i+\mu})$$

в результате статистического усреднения получим

$$\begin{aligned} \langle \Sigma_0 \rangle &= \sum_{i=0}^L [2 - \Theta_1(\omega) - \Theta_1^*(\omega)] = (L+1) [2 - \Theta_1(\omega) - \Theta_1^*(\omega)] = \\ &= 2(L+1) \operatorname{Re} [1 - \Theta_1(\omega)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \Sigma \rangle &= L \frac{\Theta_2(\omega) [1 - \Theta_1(\omega)] [\Theta_1(\omega) - 1]}{1 - \Theta_1(\omega) \Theta_2(\omega)} \times \\ &\times \left\{ 1 - \frac{1}{L} \frac{\Theta_1(\omega) \Theta_2(\omega)}{1 - \Theta_1(\omega) \Theta_2(\omega)} [1 - \Theta_1^L(\omega) \Theta_2^L(\omega)] \right\}. \end{aligned}$$

В большинстве практически интересных случаев выполняется условие

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \operatorname{Re} \frac{\Theta_1 \Theta_2^2 (1 - \Theta_1) (\Theta_1 - 1) (1 - \Theta_1^L) \Theta_2^L}{(1 - \Theta_1 \Theta_2)^2} = 0. \quad (4.4.6)$$

При выполнении этого условия спектральная плотность согласно формуле (3.10.14) будет равна

$$\begin{aligned} S_\eta(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle |F_\eta(\omega)|^2 \rangle = \frac{1}{m_\tau + m_\Delta} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} [\langle \Sigma_0 \rangle + 2\operatorname{Re} \langle \Sigma \rangle] = \\ &= \frac{2}{m_\tau + m_\Delta} \operatorname{Re} \left[\langle \Sigma \rangle + \frac{1}{2} \langle \Sigma_0 \rangle \right] = \\ &= \frac{2}{m_\tau + m_\Delta} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\Theta_2(\omega) [1 - \Theta_1(\omega)] [\Theta_1(\omega) - 1]}{1 - \Theta_1(\omega) \Theta_2(\omega)} + 1 - \Theta_1(\omega) \right\}. \end{aligned}$$

Выполнив простые преобразования, получим

$$S_\eta(\omega) = \frac{2}{m_\tau + m_\Delta} \frac{[1 - \Theta_1(\omega)] [1 - \Theta_2(\omega)]}{1 - \Theta_1(\omega) \Theta_2(\omega)}. \quad (4.4.7)$$

Воспользовавшись формулой (6.2.12), определяющей спектральную плотность стационарного случайного процесса через спектральную плотность его производной, можем написать окончательное выражение:

$$S_\eta(\omega) = \frac{2}{\omega^2 (m_\tau + m_\Delta)} \frac{[1 - \Theta_1(\omega)] [1 - \Theta_2(\omega)]}{1 - \Theta_1(\omega) \Theta_2(\omega)}. \quad (4.4.8)$$

Спектральная плотность исходной последовательности прямоугольных импульсов $\xi(t)$, имеющих разные амплитуды (рис. 4.5, a), будет равна

$$\begin{aligned} S_\xi(\omega) &= \frac{2}{\omega^2 (m_\tau + m_\Delta)} \times \\ &\times \left\{ \langle A^2 \rangle \operatorname{Re} [1 - \Theta_1(\omega)] + m_A^2 \operatorname{Re} \frac{\Theta_2(\omega) [1 - \Theta_1(\omega)] [\Theta_1(\omega) - 1]}{1 - \Theta_1(\omega) \Theta_2(\omega)} \right\} \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

Если же независимые прямоугольные импульсы имеют одинаковую амплитуду $A_i = A_0 = \text{const}$, то $\langle A^2 \rangle = m_A^2 = A_0^2$ и формула (4.4.9) принимает вид

$$S_\xi(\omega) = \frac{2A_0^2}{\omega^2 (m_\tau + m_\Delta)} \operatorname{Re} \frac{[1 - \Theta_1(\omega)] [1 - \Theta_2(\omega)]}{1 - \Theta_1(\omega) \Theta_2(\omega)}. \quad (4.4.10)$$

Отметим, что формулы (4.4.8) и (4.4.10) симметричны относительно характеристических функций $\Theta_1(\omega)$ и $\Theta_2(\omega)$.

Из формулы (4.4.10) можно получить ряд частных результатов. Так, если длительность импульсов фиксирована ($\tau_i = \tau_0 = \text{const}$), то

$$\Theta_1(\omega) = e^{j\omega\tau_0}. \quad (4.4.11)$$

При этом, введя обозначение $\Theta_0(\omega) = \Theta_1(\omega)\Theta_2(\omega)$, имеем

$$S_\xi(\omega) = \frac{2A_0^2}{\omega^2(m_\tau + m_\Delta)} \operatorname{Re} \left[\frac{1 - \Theta_0 e^{-j\omega\tau_0}}{1 - \Theta_0} (1 - e^{j\omega\tau_0}) \right] = \\ = \frac{2A_0^2}{\omega^2(m_\tau + m_\Delta)} \operatorname{Re} \left[\frac{1 - \Theta_0 e^{-j\omega\tau_0}}{1 - \Theta_0} (-2j) e^{\frac{1}{2} j\omega\tau_0} \sin \frac{\omega\tau_0}{2} \right].$$

Выделив действительную часть, получим окончательную формулу

$$S_\xi(\omega) = \frac{4A_0^2 \sin^2 \frac{\omega\tau_0}{2}}{\omega^2(m_\tau + m_\Delta)} \frac{1 - |\Theta_0(\omega)|^2}{|1 - \Theta_0(\omega)|^2}. \quad (4.4.12)$$

Из симметрии формулы (4.4.10) относительно Θ_1 и Θ_2 следует, что если в выражении (4.4.12) заменить τ_0 на $\Delta_0 = \text{const}$, то оно будет определять спектральную плотность последовательности независимых прямоугольных импульсов с фиксированными интервалами.

Когда длительности импульсов и интервалы между ними имеют одинаковый закон распределения, т. е.

$$\Theta_2(\omega) = \Theta_1(\omega), \quad (4.4.13)$$

формула (4.4.10) принимает вид [5]:

$$S_\xi(\omega) = \frac{2A_0^2}{\omega^2(m_\tau + m_\Delta)} \frac{1 - |\Theta_1(\omega)|^2}{|1 + \Theta_1(\omega)|^2}. \quad (4.4.14)$$

Иногда указывается плотность вероятности не для интервалов между импульсами Δ_i , а для промежутков времени между моментами появления двух соседних импульсов

$$T_i = t_i - t_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.4.15)$$

Обозначим характеристическую функцию для случайных величин T_i через

$$\Theta(\omega) = \langle e^{j\omega T} \rangle = \int_0^\infty e^{j\omega T} W(T) dT. \quad (4.4.16)$$

Если величины τ_i и T_k при разных значениях индексов i и k можно считать независимыми, то, повторив выкладки, аналогичные тем, которые применялись при выводе формул (4.4.8) и (4.4.10), получим следующую формулу:

$$S_\xi(\omega) = \frac{2A_0^2}{\omega^2 m_T} \operatorname{Re} \frac{[1 - \Theta(\omega) \Theta_1^*(\omega)] [1 - \Theta_1(\omega)]}{1 - \Theta(\omega)} = \\ = \frac{2A_0^2}{\omega^2 m_T} \frac{1 - |\Theta|^2 |\Theta_1|^2 - (1 - |\Theta|^2) \operatorname{Re} \Theta_1 - (1 - |\Theta_1|^2) \operatorname{Re} \Theta}{|1 - \Theta|^2}. \quad (4.4.17)$$

Из (4.4.17) при $\tau_i = \tau_0 = \text{const}$ приходим к формуле вида (4.4.12), в которой нужно теперь заменить Θ_0 на Θ . В том частном случае, когда постоянен период следования импульсов, т. е. $T_i = T_0 = \text{const}$, $\Theta(\omega) = e^{j\omega T_0}$, из формулы (4.4.17) получим

$$S_\xi(\omega) = \frac{A_0^2}{\omega^2 T_0} (1 - |\Theta_1(\omega)|^2). \quad (4.4.18)$$

Отметим, что мы анализировали случайные последовательности прямоугольных видеоимпульсов. Если рассматривать не видеоимпульсы, а радиоимпульсы, то задача несколько усложнится, так как появятся дополнительные случайные параметры (частота, начальная фаза и др.), по которым нужно выполнять статистическое усреднение [7].

§ 5. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ ПУАССОНОВСКИХ ИМПУЛЬСОВ

Вычислим корреляционные функции двух частных видов импульсных случайных процессов, а именно, случайного телеграфного сигнала [4] и пуассоновских возмущений [8].

1. Случайный телеграфный сигнал. Пусть имеется последовательность прямоугольных импульсов $\xi(t)$ с одинаковой амплитудой

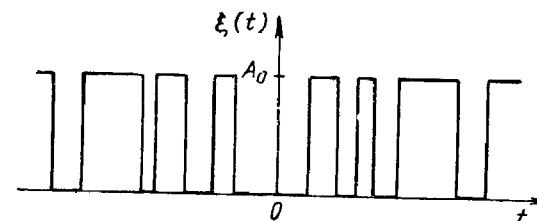


Рис. 4.8. Случайный телеграфный сигнал.

τ_0 , характеризуемая тем, что в любой момент времени t равновероятны два значения $\xi(t)$: A_0 и нуль, причем вероятность того, что в достаточно большом интервале времени τ происходит n скачков, задается законом Пуассона

$$P_\tau(n) = \frac{(\nu\tau)^n}{n!} e^{-\nu\tau}, \quad (4.5.1)$$

где ν — среднее число скачков в единицу времени.

Такой импульсный случайный процесс часто называют случайнм телеграфным сигналом; он изображен на рис. 4.8.

В данном случае функцию корреляции можно получить непосредственно при помощи формулы (4.3.8). Так как случайная функция

$\xi(t)$ в любой момент времени принимает лишь два значения $\xi(t) = A_0$ и $\xi(t) = 0$ с равными вероятностями $p_1 = p_0 = 0,5$, то ее среднее значение равно:

$$m_\xi = \langle \xi(t) \rangle = A_0 \cdot p_1 + 0 \cdot p_0 = \frac{1}{2} A_0. \quad (4.5.2)$$

Используя те же обозначения, что и в § 3, для момента $m_{11}(\tau)$ можем написать

$$\begin{aligned} m_{11}(\tau) &= \langle \xi(t) \xi(t+\tau) \rangle = (0 \cdot 0) p_{00} + (0 \cdot A_0) p_{01} + (A_0 \cdot 0) p_{10} + (A_0 \cdot A_0) p_{11} = \\ &= A_0^2 p_{11}. \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

Вероятность p_{11} совместного выполнения равенств $\xi(t) = A_0$ и $\xi(t+\tau) = A_0$ совпадает с вероятностью того, что за интервал времени τ происходит четное число скачков, т. е. $p_{11} = p_1 P_\tau(n) = \frac{1}{2} P_\tau(n)$ при n четном. Следовательно,

$$m_{11}(\tau) = \frac{1}{2} A_0^2 e^{-\nu|\tau|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu|\tau|)^n}{n!}, \quad n \text{ — четное.} \quad (4.5.4)$$

Этот ряд можно записать иначе:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu|\tau|)^n}{n!} = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu|\tau|)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\nu|\tau|)^n}{n!} \right] = \frac{1}{2} (e^{\nu|\tau|} + e^{-\nu|\tau|}).$$

Поэтому

$$m_{11}(\tau) = \frac{1}{4} A_0^2 (1 + e^{-2\nu|\tau|})$$

и на основании формулы (4.3.6) получаем окончательное выражение для корреляционной функции

$$k(\tau) = m_{11}(\tau) - m_\xi^2 = \frac{1}{4} A_0^2 e^{-2\nu|\tau|}. \quad (4.5.5)$$

Отсюда видно, что спектр случайного телеграфного сигнала сплошной.

Иногда импульсный случайный процесс вида, показанного на рис. 4.8, получают при помощи одностороннего или двустороннего идеального ограничения нормального стационарного шума. Такие ограниченные (клиппированные) процессы в общем случае не являются пуассоновскими; их функция корреляции определяется формулой (5.6.4в).

2. Наложение пуассоновских возмущений. Пусть случайный процесс можно представить в виде суммы

$$\xi(t) = \sum_i n_i a f(t - t_i). \quad (4.5.6)$$

Здесь n_i — число элементарных импульсов (возмущений), возникающих за достаточно малый интервал времени Δt_i , t_i — случайный момент появления i -го возмущения, имеющего детерминированную форму $a f(t - t_i)$, где $f(t - t_i) = 0$ при $t < t_i$. Длительность каждого возмущения может быть как конечной, так и бесконечной. Случайные величины n_i и t_i считаются независимыми. Предположим далее, что моменты появления t_i отдельных возмущений также независимы, т. е. вероятность $P_\tau(n)$ того, что за некоторое время τ возникает n возмущений, определяется по-прежнему законом Пуассона (4.5.1), в котором ν — среднее число возмущений в единицу времени. Подразумевается, что τ значительно превышает длительность элементарного возмущения.

Найдем среднее значение и функцию корреляции случайного процесса $\xi(t)$, представляющего собой результат наложения отдельных возмущений.

Прежде чем перейти к вычислениям, приведем один пример, поясняющий смысл отдельных величин. Если рассматривать дробовой шум в электронных лампах, то под n_i следует понимать число электронов, вылетающих из катода за малый интервал времени $\Delta t_i \ll \tau_0$, где τ_0 — время пролета электрона в лампе; под $a f(t - t_i)$ — импульс тока (напряжения) в анодной нагрузке, вызываемый проходом одного электрона, вылетевшего из катода в момент времени t_i с некоторой фиксированной начальной скоростью.

Чтобы учсть нестационарный (переходный) характер процесса $\xi(t)$, предположим, что возмущения начинают возникать только после момента $t = 0$. Статистически усредняя левую и правую части равенства (4.5.6), имеем

$$\langle \xi(t) \rangle = \langle a \sum_i n_i f(t - t_i) \rangle = a \sum_i \langle n_i \rangle f(t - t_i). \quad (4.5.7)$$

Если ν — среднее число возмущений, возникающих в единицу времени, то среднее число возмущений $\langle n_i \rangle$ за очень малый интервал времени Δt_i равно: $\langle n_i \rangle = \nu \Delta t_i$. Поэтому

$$\langle \xi(t) \rangle = \nu a \sum_i f(t - t_i) \Delta t_i = \nu a \int_0^t f(t - t_i) dt_i.$$

Если верхний предел интегрирования взят равным t потому, что $f(t - t_i) = 0$ при $t < t_i$. Заменив переменную интегрирования $t_i = x$, получим

$$\langle \xi(t) \rangle = \nu a \int_0^t f(x) dx. \quad (4.5.8)$$

Из равенств (4.5.6) и (4.5.7) имеем

$$\xi(t) - \langle \xi(t) \rangle = a \sum_i [n_i - \langle n_i \rangle] f(t - t_i).$$

Поэтому для функции корреляции можем написать выражение

$$K_{\xi}(t, \tau) = a^2 \sum_i \sum_j \langle [n_i - \langle n_i \rangle] [n_j - \langle n_j \rangle] \rangle f(t - t_i) f(t - t_j + \tau).$$

Так как случайные величины $n_i - \langle n_i \rangle$ и $n_j - \langle n_j \rangle$ при $i \neq j$ независимы, то

$$K_{\xi}(t, \tau) = a^2 \sum_i \langle [n_i - \langle n_i \rangle]^2 \rangle f(t - t_i) f(t - t_i + \tau).$$

По предположению, случайная величина n_i распределена по закону Пуассона (4.5.1). Согласно (2.7.4) дисперсия пуассоновского распределения равна математическому ожиданию, т. е. $\langle [n_i - \langle n_i \rangle]^2 \rangle = \langle n_i \rangle = v \Delta t_i$. Следовательно,

$$K_{\xi}(t, \tau) = a^2 v \sum_i f(t - t_i) f(t - t_i + \tau) \Delta t_i = a^2 v \int_0^t f(x) f(x + \tau) dx. \quad (4.5.9)$$

Чтобы перейти к стационарному состоянию, нужно в формулах (4.5.8) и (4.5.9) положить $t \rightarrow \infty$. При этом получим

$$m_{\xi} = \langle \xi(t) \rangle = v a \int_0^{\infty} f(x) dx, \quad (4.5.10)$$

$$k_{\xi}(\tau) = v a^2 \int_0^{\infty} f(x) f(x + \tau) dx. \quad (4.5.11)$$

Эти две формулы в литературе называют формулами Кэмпбелла [9].

До сих пор предполагалось, что все элементарные возмущения одинаковы по форме и интенсивности и отличаются лишь моментами появления. Чтобы учесть неодинаковую интенсивность возмущений, нужно в предыдущих выражениях считать амплитудный множитель a случайной величиной a_i . Величины a_i определяют начальные значения возмущений. Например, в указанном выше примере дробового шума множителями a_i можно учесть неодинаковую интенсивность элементарных импульсов из-за различия начальных скоростей отдельных электронов, вылетающих из катода.

Если значения a_i статистически независимы от n_i и t_i , то в формулах (4.5.8) — (4.5.11) нужно выполнить дополнительное усреднение по возможным значениям a_i . При этом формулы (4.5.8) и (4.5.9) примут соответственно вид

$$\langle \xi(t) \rangle = v \langle a \rangle \int_0^t f(x) dx, \quad (4.5.12)$$

$$K_{\xi}(t, \tau) = v \langle a^2 \rangle \int_0^t f(x) f(x + \tau) dx. \quad (4.5.13)$$

Можно показать [8], что кумулянты процесса $\xi(t)$ в стационарном состоянии равны:

$$x_n = v \langle a^n \rangle \int_0^{\infty} f^n(x) dx. \quad (4.5.14)$$

Формулы Кэмпбелла вместе с (4.5.14) позволяют находить статистические характеристики стационарного процесса $\xi(t)$ на выходе любой линейной системы, когда на нее воздействуют случайные пуассоновские возмущения. Для этого нужно лишь знать отклик системы $f(t)$ на элементарный импульс, возникающий в момент времени $t = 0$. Воздействие пуассоновских импульсов и, в частности, случайного генераторного сигнала на интегрирующую цепочку RC подробно рассмотрено в работах [10—12]. Гораздо сложнее решаются задачи, связанные с нелинейными преобразованиями случайных импульсных процессов.

§ 6. ДЕТЕКТИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ИМПУЛЬСОВ

Расчет токности интегральных счетчиков радиоактивных излучений, накопительных схем и некоторых измерительных радиотехнических устройств сводится к следующей задаче [13—15]. На линейный детектор (рис. 4.9) воздействует напряжение $\xi(t)$, представляющее собой случайную последовательность неперекрывающихся прямоугольных импульсов одинаковой высоты A_0 со случайными и независимыми длительностями τ_i и паузами Δ_i (рис. 4.10). Полагая известными плотности вероятности $W_1(\tau)$ и $W_2(\Delta)$, найдем плотность вероятности $W(u)$ для напряжения $u(t)$ на выходе детектора, причем вольт-амперную характеристику диода будем считать линейно-разрывной, т. е.

$$I = f(U) = \begin{cases} S U & \text{при } U > 0, \\ 0 & \text{при } U < 0. \end{cases} \quad (4.6.1)$$

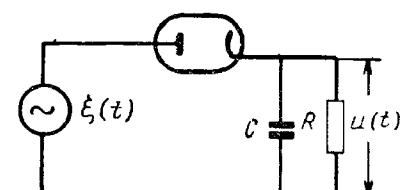


Рис. 4.9. Линейный инерционный детектор.

Дифференциальное уравнение, связывающее входное напряжение $\xi(t)$ с напряжением $u(t)$ на цепочке RC , имеет вид

$$\dot{u} + \frac{1}{RC} u = \frac{1}{C} f(\xi - u). \quad (4.6.2)$$

Поскольку все импульсы имеют одинаковую высоту A_0 , то это уравнение распадается на два, справедливые соответственно в течение действия импульса и паузы между импульсами. Если обозначить значения напряжения $u(t)$ в начале и в конце i -го импульса через U'_i и U''_i , то можем записать решение уравнения (4.6.2) так:

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) = a_0 + (U'_i - a_0) \exp[-\alpha(t - t_i)], & t_i \leq t \leq t_i + \tau_i, \\ u_2(t) = U''_i \exp[-\beta(t - t_i - \tau_i)], & t_i + \tau_i \leq t \leq t_{i+1}, \end{cases} \quad (4.6.3)$$

где

$$\alpha = \frac{1 + SR}{RC}, \quad \beta = \frac{1}{RC}, \quad a_0 = \frac{SR}{1 + SR} A_0. \quad (4.6.4)$$

Величина a_0 равна максимально возможному значению напряжения на цепочке RC , которое может быть достигнуто в течение действия импульса.

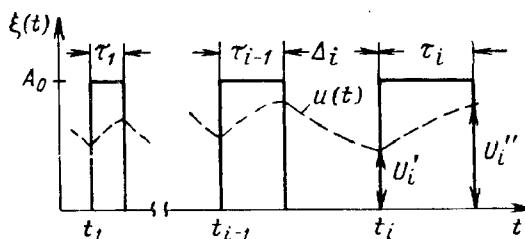


Рис. 4.10. Случайные импульсы прямоугольной формы.

Обозначим через A событие, состоящее в том, что взятый наугад момент времени t совпал с наличием импульса, или $u(t) = u_1(t)$, а через B — противоположное событие, т. е. $u(t) = u_2(t)$. При независимости величин τ и Δ по формуле полной вероятности можем написать

$$W(u) = P(A)w(u|A) + P(B)w(u|B) = P(A)w(u_1) + P(B)w(u_2), \quad (4.6.5)$$

где $P(A)$ и $P(B)$ — вероятности несовместимых событий A и B ; $w(u|A) = w(u_1)$ и $w(u|B) = w(u_2)$ — условные плотности вероятности для напряжения $u(t) = u_1(t)$ и $u(t) = u_2(t)$.

Для вероятностей $P(A)$ и $P(B)$ имеем очевидные выражения

$$P(A) = \frac{m_\tau}{m_\tau + m_\Delta}, \quad P(B) = \frac{m_\Delta}{m_\tau + m_\Delta}. \quad (4.6.6)$$

Таким образом, задача определения $W(u)$ сводится к вычислению условных вероятностей $w(u_1)$ и $w(u_2)$. Для этого воспользуемся решением (4.6.3).

Первое выражение (4.6.3) можно рассматривать как уравнение между независимыми случайными величинами U'_i и $\delta = t - t_i$, с одной стороны, и $u_1(t)$ — с другой. Действительно, пусть $W_n(U')$ есть плотность вероятности для нижних ординат точек излома кривой $u(t)$ в начале импульса (рис. 4.10), а $P_A(\delta)$ — плотность вероятности для случайной величины $\delta = t - t_i$, при условии осуществления в момент времени t события A . Тогда на основании формулы (5.1.21) с учетом уравнения (4.6.3) получим

$$\begin{aligned} w(u_1) &= \int_0^\infty W_n[a_0 + (u_1 - a_0) e^{\alpha x}] P_A(x) \left| \frac{\partial (\xi, \delta)}{\partial (u_1, x)} \right| dx = \\ &= \int_0^\infty W_n[a_0 + (u_1 - a_0) e^{\alpha x}] P_A(x) e^{\alpha x} dx. \end{aligned} \quad (4.6.7)$$

Это представление для $w(u_1)$ получено путем перехода от переменной U'_i к новой переменной u_1 , определяемой уравнением (4.6.3), и от переменной δ к x . Можно, конечно, поступить наоборот.

Путем аналогичных рассуждений получим следующее выражение для $w(u_2)$:

$$w(u_2) = \int_0^\infty W_k(u_2 e^{\beta y}) P_B(y) e^{\beta y} dy. \quad (4.6.8)$$

Здесь $W_k(U'')$ — плотность вероятности для верхних ординат точек излома кривой $u(t)$ в конце импульса и $P_B(\delta)$ — плотность вероятности для случайной величины $\delta = t - (t_i + \tau_i)$.

Выражения (4.6.7) и (4.6.8) дают представление функций плотности вероятности $w(u_1)$ и $w(u_2)$ через неизвестные пока функции $P_A(\delta)$, $P_B(\delta)$, $W_n(U')$ и $W_k(U'')$. Найдем эти функции.

Обозначим через $W_t(\tau | A) \Delta_\tau$ вероятность того, что при осуществлении события A случайно выбранный момент времени t приходится именно на импульсы с длительностью от τ до $\tau + \Delta_\tau$. Очевидно, что

$$P_A(\delta) = \int_0^\infty P_A(\delta | \tau) W_t(\tau | A) d\tau, \quad (4.6.9)$$

где $P_A(\delta | \tau)$ — условная вероятность величины δ при условии осуществления события A и фиксированной длительности импульса. Но при заданной длительности импульса τ случайная величина δ может принимать лишь два значения: единицу при $0 < \delta < \tau$ и нуль при $\delta > \tau$, т. е.

$$P_A(\delta | \tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } \delta < \tau, \\ 0 & \text{при } \delta > \tau. \end{cases} \quad (4.6.10)$$

Плотность вероятности $W_t(\tau | A)$ легко находится путем рассуждений, применявшихся в начале § 2. Если рассматривать реализацию достаточно большой длительности T , содержащую L импульсов, то общее время, занятое всеми импульсами, равно $m_\tau L$. Часть этого времени, равная $\tau l(\tau)$, занята импульсами с длительностью от τ до $\tau + \Delta_\tau$. Поэтому

$$W_t(\tau | A) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\tau l(\tau)}{m_\tau L} = \frac{\tau}{m_\tau} W_1(\tau). \quad (4.6.11)$$

Подставив выражения (4.6.10) и (4.6.11) в (4.6.9), находим интересующую нас плотность вероятности

$$P_A(\delta) = \int_{\delta}^{\infty} \frac{\tau}{m_\tau} W_1(\tau) d\tau. \quad (4.6.12)$$

Такие же рассуждения приводят к следующему выражению для $P_B(\delta)$:

$$P_B(\delta) = \int_{\delta}^{\infty} \frac{\Delta}{m_\Delta} W_2(\Delta) d\Delta. \quad (4.6.13)$$

Перейдем теперь к вычислению функций $W_h(U')$ и $W_k(U'')$. Определение этих функций представляет наибольшую трудность при решении рассматриваемой задачи.

Если в первое выражение (4.6.3) подставить вместо $t - t_i$ длительность импульса τ_i , то получим связь между ординатой U'_i нижнего излома кривой $u(t)$ и ординатой U''_i верхнего излома той же кривой. Точно также, положив $\Delta_{i+1} = t - t_i - \tau_i$, из второго выражения (4.6.3) получим связь между U''_i и U'_{i+1} . Применяя далее тот же способ, который использовался для получения плотностей вероятностей $w(u_1)$ и $w(u_2)$, получаем следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} W_k(U'') &= \int_0^\infty W_h[a_0 - (U'' - a_0)e^{ax}] W_1(x) e^{-ax} dx, \\ W_h(U') &= \int_0^\infty W_k(U') W_2(y) e^{by} dy. \end{aligned} \right\} \quad (4.6.14)$$

Эта пара интегральных уравнений определяет функции $W_h(U')$ и $W_k(U'')$.

Отметим, что даже для простейших плотностей вероятностей $W_1(\tau)$ и $W_2(\Delta)$ решение интегральных уравнений (4.6.14) оказывается довольно трудной математической задачей. Поэтому часто ограничиваются определением одномерных моментов выходного напряжения [14].

ЛИТЕРАТУРА

1. Амиантов И. Н., Тихонов В. И. Функция корреляции случайной последовательности прямоугольных импульсов. «Радиотехника», 1959, № 4.
2. Седкин Н. М. Элементы теории случайных импульсных потоков. Изд-во «Советское радио», 1965.
3. Левин Б. Р. Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике. Изд-во «Советское радио», 1960.
4. Lee Y. W. Statistical theory of communication. John Wiley, 1960.
5. Цаянь Сюэ-Сэн. Техническая кибернетика. Пер. с англ. Изд-во иностранной литературы, 1956.
6. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике. Изд-во «Советское радио», 1961.
7. Веннет W. R., Rice S. O. Spectral density and autocorrelation function associated with binary frequency — shift keying. BSTJ, 1963, v. 42, № 5.
8. Теория передачи электрических сигналов при наличии помех. Пер. с англ. Сборник статей под редакцией Н. А. Железнова. Изд. иностранной литературы, 1953.
9. МакДональд Д. Введение в физику шумов и флюктуаций. Изд-во «Мир», 1964.
10. Wonham W. M., Fuller A. T. Probability densities of the smoothed random telegraph signal. Journal of Electronics and Control, 1958, № 6.
11. Wonham W. M. Transition probability densities of the smoothed random telegraph signal. Journal of Electronics and Control, 1959, № 4.
12. McFadden J. A. The probability density of the output of an RC filter when the input is a binary random process. Trans. IRE, 1959, IT-5, № 4.
13. Тихонов В. И. Воздействие прямоугольных импульсов со случайными длительностями и промежутками на линейный детектор. «Радиотехника», 1955, № 12.
14. Васильев Д. В. Инерционное детектирование случайной последовательности прямоугольных импульсов. «Известия вузов», Радиофизика, 1960, № 6.
15. Медведев Г. А. Воздействие импульсных потоков Пальма на радиотехнические системы с емкостными накопителями. «Известия вузов», Радиофизика, 1961, № 2.

Глава 5

ВОЗДЕЙСТВИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ НА НЕЛИНЕЙНЫЕ БЕЗЫНЕРЦИОННЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

§ 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПЛОТНОСТЕЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Среди нелинейных преобразований случайных процессов простейшим является такое преобразование, при котором значение выходной функции $\eta(t)$ в любой момент времени определяется только значением входной функции $\xi(t)$ в тот же момент времени:

$$\eta(t) = g(\xi(t)), \quad (5.1.1)$$

где $g(\xi)$ — некоторая нелинейная функция (рис. 5.1).

Такое нелинейное преобразование можно назвать безынерционным или функциональным.

К безынерционному нелинейному преобразованию сводятся преобразования, когда входная функция $\xi(t)$ подвергается дополнительной трансформации линейной системой L_1 , а выходная $\eta(t)$ — линейной системой L_2 , причем эти системы не оказывают реакции на нелинейный элемент. Такое преобразование можно записать:

$$\eta(t) = L_2 g\{L_1 \xi(t)\}, \quad (5.1.2)$$

где L_1 и L_2 — линейные операторы, описывающие поведение линейных систем.

Правила преобразования характеристик случайных процессов линейными системами будут установлены в гл. 6. Поэтому для изучения всех указанных преобразований достаточно рассмотреть преобразование вида (5.1.1).

Относительно вида нелинейной функции $g(\xi)$ можно сказать следующее. Обычно ее получают экспериментально как характеристику нелинейного устройства или элемента (лампы, полупроводника и др.). При аналитическом рассмотрении эту характеристику следует аппроксимировать тем или иным способом. При подборе такой аппроксимации важно то, чтобы достигалась хорошая аппроксимация

характеристики $g(\xi)$ на том участке оси ξ , где имеет место достаточно большая вероятность появления случайного процесса $\xi(t)$. На тех же участках характеристики, на которые процесс попадает редко, может быть допущена большая погрешность аппроксимации.

Часто применяются следующие три вида аппроксимации: полиномом, ломаной линией (кусочно-разрывная аппроксимация) и трансцендентными функциями (в частности, экспонентой). Каждый из этих видов имеет свои преимущества и недостатки. При этом нужно иметь в виду, что требование точности аппроксимации и требование простоты аналитического выражения в известном смысле противоречивы и, как правило, плохо согласуются между собой.

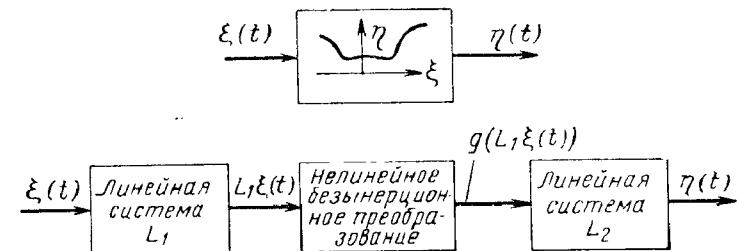


Рис. 5.1. Нелинейные безынерционные преобразования.

При анализе преобразования случайных процессов линейными или нелинейными системами задача ставится так: предполагая известными параметры системы и статистические характеристики входного процесса $\xi(t)$, требуется найти статистические характеристики процесса $\eta(t)$, получающегося на выходе.

Рассмотрим простейший случай. Пусть известна плотность вероятности $w_L(\xi)$ случайной величины ξ и нужно найти плотность вероятности $W_1(\eta)$ случайной величины $\eta = g(\xi)$. Предположим пока, что существует однозначная обратная функция $\xi = h(\eta)$. Так как случайные величины связаны однозначной детерминированной зависимостью, то из того факта, что ξ заключено в достаточно малом интервале $[\xi_0, \xi_0 + d\xi]$, достоверно следует, что величина η будет находиться в интервале $[\eta_0, \eta_0 + d\eta]$, где $\eta_0 = g(\xi_0)$ (рис. 5.2). Отсюда следует, что вероятности этих двух событий равны (свойство инвариантности дифференциала вероятности): $W_1(\eta) d\eta = w_L(\xi) d\xi$, т. е.

$$W_1(\eta) = w_L(\xi) \frac{d\xi}{d\eta} = w_L(h(\eta)) h'(\eta). \quad (5.1.3)$$

Поскольку плотности вероятности не могут быть отрицательными, то в формулу (5.1.3) нужно подставлять модуль производной:

$$W_1(\eta) = w_L(h(\eta)) |h'(\eta)|. \quad (5.1.4)$$

Несколько более сложным является случай, когда обратная функция $\xi = h(\eta)$ неоднозначна (рис. 5.3), т. е. одному значению η соответствует несколько ветвей функции $h(\eta)$. Пусть имеются две ветви $h_1(\eta)$ и $h_2(\eta)$.

В данном случае имеются две несовместимые возможности

$$\xi_1 < \xi \leq \xi_1 + d\xi_1; \quad \xi_2 < \xi \leq \xi_2 + d\xi_2, \quad (5.1.5)$$

обеспечивающие выполнение неравенства

$$\eta_0 < \eta \leq \eta_0 + d\eta. \quad (5.1.6)$$

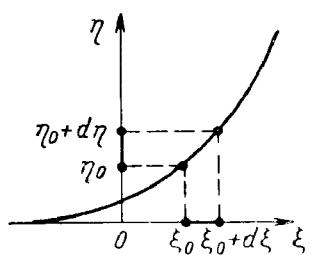


Рис. 5.2. Взаимнооднозначное нелинейное преобразование.

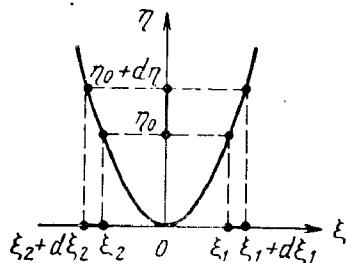


Рис. 5.3. Случай двузначного преобразования.

Поэтому вероятность выполнения неравенства (5.1.6) должна равняться сумме вероятностей выполнения каждого из неравенств (5.1.5):

$$W_1(\eta) d\eta = w_1(\xi_1) d\xi_1 + w_2(\xi_2) d\xi_2.$$

Выразив ξ через η , окончательно получим

$$W_1(\eta) = w_1(h_1(\eta)) |h'_1(\eta)| + w_2(h_2(\eta)) |h'_2(\eta)|. \quad (5.1.7)$$

Если имеется большое число ветвей обратной функции, то в правой части формулы (5.1.7) будет сумма по всем ветвям. Формула (5.1.7) дает правило преобразования одномерных плотностей вероятностей при функциональных преобразованиях случайных величин.

Приведенные выше рассуждения можно обобщить на случай функционального преобразования нескольких случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$.

В общем виде принципиальное решение задачи о нелинейных безынерционных преобразованиях случайных процессов дается следующей теоремой. Пусть известна n -мерная плотность вероятности $w_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ и нужно

найти плотность вероятности $W_n(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ для случайных величин:

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= g_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \\ \eta_2 &= g_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \\ &\vdots \\ \eta_n &= g_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \end{aligned} \right\}, \quad (5.1.8)$$

где функции g_i — кусочно-непрерывные.

Если существуют однозначные обратные функции:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= h_1(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \\ \xi_2 &= h_2(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \\ &\vdots \\ \xi_n &= h_n(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \end{aligned} \right\}, \quad (5.1.9)$$

то интересующая нас плотность вероятности определяется формулой

$$W_n(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = w_n(h_1(\eta_1, \dots, \eta_n), \dots, h_n(\eta_1, \dots, \eta_n)) |D_n|, \quad (5.1.10)$$

где D_n — якобиан преобразования от случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ к случайным величинам $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$:

$$D_n = \frac{\partial (\xi_1, \dots, \xi_n)}{\partial (\eta_1, \dots, \eta_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial \eta_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial \eta_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial \eta_1} & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial \eta_n} \end{vmatrix}. \quad (5.1.11)$$

В тех случаях, когда обратные функции h_i неоднозначны, следует в правой части формулы (5.1.10) взять сумму по каждой из подбастей.

Рассмотрим несколько частных случаев. Пусть

$$\eta_1 = g_1(\xi_1) = \xi_1, \quad \eta_2 = \eta = g(\xi_1, \xi_2), \quad (5.1.12)$$

причем обратные функции

$$\xi_1 = h_1(\eta_1) = \eta_1, \quad \xi_2 = h(\eta_1, \eta_2) \quad (5.1.13)$$

однозначны.

В данном случае якобиан преобразования равен

$$D_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial (\xi_1, \xi_2)}{\partial (\eta_1, \eta_2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial h}{\partial \eta_1} & \frac{\partial h}{\partial \eta_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial h}{\partial \eta}.$$

То есть

$$W_2(\eta_1, \eta_2) = w_2(\eta_1, h(\eta_1, \eta_2)) \left| \frac{\partial h}{\partial \eta} \right|. \quad (5.1.14)$$

Из этой формулы получаем одномерную плотность вероятности для одной случайной величины η :

$$W_1(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} w_2(\xi_1, h(\xi_1, \eta)) \left| \frac{\partial h}{\partial \eta} \right| d\xi_1. \quad (5.1.15)$$

Последняя формула позволяет найти плотность вероятности суммы, разности, произведения и частного двух случайных величин:

$$W_1(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} w_2(\xi_1, \eta - \xi_1) d\xi_1, \quad \eta = \xi_1 + \xi_2, \quad (5.1.16)$$

$$W_1(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} w_2(\xi_1, \eta + \xi_1) d\xi_1, \quad \eta = \xi_2 - \xi_1, \quad (5.1.17)$$

$$W_1(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} w_2\left(\xi_1, \frac{\eta}{\xi_1}\right) \left| \frac{d\xi_1}{\xi_1} \right|, \quad \eta = \xi_1 \xi_2, \quad (5.1.18)$$

$$W_1(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} w_2(\xi_1, \eta \xi_1) |\xi_1| d\xi_1, \quad \eta = \xi_2 / \xi_1. \quad (5.1.19)$$

Для независимых случайных величин ξ_1 и ξ_2 с плотностями вероятности $p(\xi_1)$ и $q(\xi_2)$ в предыдущих формулах нужно положить

$$w_2(\xi_1, \xi_2) = p(\xi_1) q(\xi_2). \quad (5.1.20)$$

При этом формула (5.1.15) принимает вид

$$W_1(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi_1) q(h(\xi_1, \eta)) \left| \frac{\partial h}{\partial \eta} \right| d\xi_1. \quad (5.1.21)$$

Отсюда получим

$$W_1(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi_1) q(\eta - \xi_1) d\xi_1, \quad \eta = \xi_1 + \xi_2, \quad (5.1.22)$$

$$W_1(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi_1) q(\eta + \xi_1) d\xi_1, \quad \eta = \xi_2 - \xi_1, \quad (5.1.23)$$

$$W_1(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi_1) q\left(\frac{\eta}{\xi_1}\right) \left| \frac{d\xi_1}{\xi_1} \right|, \quad \eta = \xi_1 \xi_2, \quad (5.1.24)$$

$$W_1(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi_1) q(\eta \xi_1) |\xi_1| d\xi_1, \quad \eta = \xi_2 / \xi_1. \quad (5.1.25)$$

Отыскание плотности вероятности суммы независимых случайных величин по известным плотностям вероятности слагаемых называется композицией законов распределения. Как показывает формула (5.1.22), композиция двух законов распределения представляет собой интеграл свертки.

Заметим, что при применении формул (5.1.4), (5.1.10) и (5.1.14) к практически интересным нелинейным безынерционным преобразованиям могут возникнуть затруднения. Так, если функции g_i являются полиномами выше третьей степени, то в общем случае трудно найти функции h_i , т. е. аналитически разрешить систему нелинейных уравнений (5.1.8) относительно ξ_i . Аналогичные трудности возникают при трансцендентных функциях g_i . При кусочно-линейной аппроксимации функции g_i оказываются разрывными и производные $\partial h_i / \partial \xi_k$ во многих типовых случаях оказываются равными бесконечности в некоторых точках. Более подробно эти случаи рассматриваются в § 4, 6 и 8.

§ 2. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим несколько конкретных примеров применения формул (5.1.4) и (5.1.16) — (5.1.19).

1. Пусть требуется найти плотность вероятности $W_1(\eta)$ на выходе нелинейного элемента (безынерционный двусторонний квадратичный детектор)

$$\eta = a\xi^2(t), \quad a > 0, \quad (5.2.1)$$

когда на него действует нормальный стационарный шум $\xi(t)$, имеющий плотность вероятности

$$w_1(\xi) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\xi - m)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (5.2.2)$$

При $a > 0$ случайная величина η не может быть отрицательной и поэтому $W_1(\eta) = 0$ при $\eta < 0$. Для $\eta \geq 0$ имеем

$$\xi = \pm \sqrt{\eta/a}, \quad \left| \frac{d\xi}{d\eta} \right| = \frac{1}{2\sqrt{a\eta}}.$$

В данном случае функция $\xi = h(\eta)$ двузначна и нужно пользоваться формулой (5.1.7):

$$W_1(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{a\eta}} [w_1(\sqrt{\eta/a}) + w_1(-\sqrt{\eta/a})] & \text{при } \eta \geq 0, \\ 0 & \text{при } \eta < 0. \end{cases} \quad (5.2.3)$$

Если $m=0$, то получим

$$W_1(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi a\eta}} \exp\left(-\frac{\eta}{2a\sigma^2}\right) & \text{при } \eta \geq 0, \\ 0 & \text{при } \eta < 0. \end{cases} \quad (5.2.4)$$

Для нелинейного преобразования (безынерционный односторонний квадратичный детектор)

$$\eta(t) = \begin{cases} a\xi^2(t) & \text{при } \xi(t) \geq 0, \\ 0 & \text{при } \xi(t) < 0 \end{cases} \quad (5.2.5)$$

вместо формулы (5.2.4) получим (см. пример 2)

$$W_1(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{2} \delta(\eta) + \frac{1}{2\sigma \sqrt{2\pi a\eta}} \exp(-\eta/2a\sigma^2) & \text{при } \eta \geq 0, \\ 0 & \text{при } \eta < 0. \end{cases} \quad (5.2.6)$$

Графики нелинейных преобразований (5.2.1), (5.2.5) и плотности вероятности (5.2.4) и (5.2.6) приведены на рис. 5.4.

2. Найдем одномерные плотности вероятности на выходе типовых элементов с кусочно-линейными характеристиками (рис. 5.4), когда на них воздействует нормальный стационарный шум с плотностью вероятности (5.2.2) [1]. Принцип вычисления рассмотрим на примере ограничителя (рис. 5.5), имеющего характеристику

$$\eta(t) = g(\xi(t)) = \begin{cases} -b & \text{при } \xi < -\beta, \\ s\xi(t) & \text{при } -\beta \leq \xi \leq \alpha, \\ a & \text{при } \xi > \alpha. \end{cases} \quad (5.2.7)$$

На интервале $(-b, a)$ преобразование $\eta = g(\xi)$ в данном случае является линейным: $\eta = s\xi$. Поэтому внутри этого интервала

$$W_1(\eta) = w_1(\eta/s) \frac{1}{s},$$

т. е. плотность вероятности для $\eta(t)$ по виду совпадает с плотностью вероятности для $\xi(t)$.

Вероятность того, что $\eta < -b$ и $\eta > a$ равна нулю, а вероятность того, что η заключено в интервале $(-b, a)$ равна $\int_{-b}^a W_1(\eta) d\eta$.

Все значения ξ , для которых $\xi \geq \alpha$, преобразуются ограничителем в одно значение $\eta = a$ (рис. 5.5). Аналогично, все значения $\xi \leq -\beta$ преобразуются в значение $\eta = -b$. Следовательно, вероятность $s_1 = \int_{-\infty}^{\alpha} w_1(\xi) d\xi$ преобразуется для η в дельта-функцию, расположенную

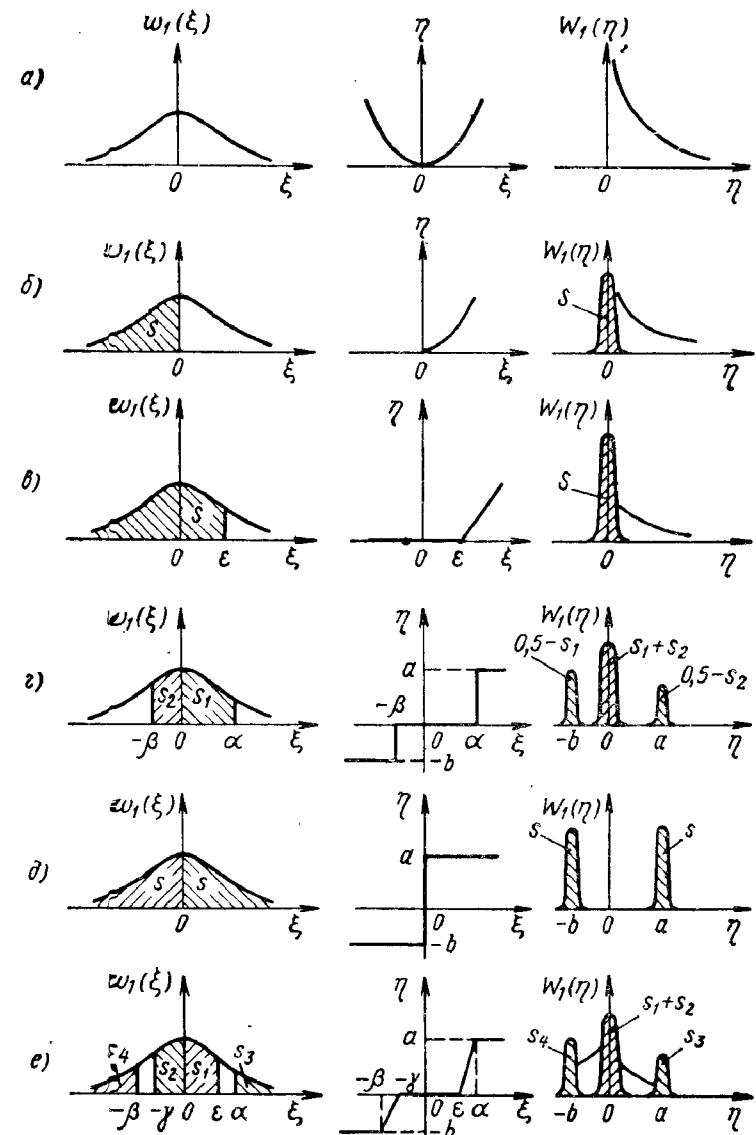


Рис. 5.4. Нормальная плотность вероятности входных флюктуаций $w_1(\xi)$, нелинейные характеристики элементов $\eta = g(\xi)$ и плотности вероятности $W_1(\eta)$ флюктуаций на выходе соответствующих элементов.

ную в точке $\eta = a$. Множитель при дельта-функции $\delta(\eta - a)$ пропорционален s_1 . Вероятность $s_2 = \int_{-\infty}^a w_1(\xi) d\xi$ преобразуется для η

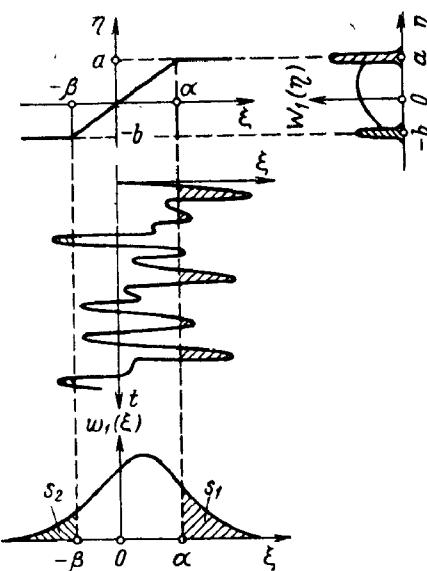


Рис. 5.5. Преобразование плотности вероятности ограничителем.

в дельта-функцию, расположенную в точке $\eta = -b$, причем множитель при дельта-функции $\delta(\eta + b)$ пропорционален s_2 . Из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_1(\eta) d\eta = 1$$

имеем

$$\lambda(s_1 + s_2) + \frac{1}{s} \int_{-b}^a w_1(\eta/s) d\eta = 1.$$

Отсюда определяем коэффициент λ . Очевидно, что при $s = 1$ коэффициент $\lambda = 1$.

Таким образом, плотность вероятности для шума $\eta(t)$ на выходе ограничителя можно записать:

$$W_1(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{s} w_1(\eta/s) + \lambda s_2 \delta(\eta + b) + \lambda s_1 \delta(\eta - a) & \text{при } -b \leq \eta \leq a, \\ 0 & \text{при } \eta < -b, \eta > a. \end{cases} \quad (5.2.8)$$

На рис. 5.4 приведены нормальная плотность вероятности $w_1(\xi)$ (слева), нелинейные характеристики (в середине) и плотности вероятности $W_1(\eta)$ на выходе соответствующих нелинейных элементов (справа). Площади при дельтаобразных выбросах в плотностях вероятности указаны для случая, когда наклоны линейных участков равны $s = 1$.

3. Найдем плотность вероятности суммы (разности) двух нормально распределенных случайных величин ξ_1, ξ_2 , имеющих средние значения m_1 и m_2 , дисперсии σ_1^2 и σ_2^2 и коэффициент взаимной корреляции R :

$$\eta = \xi_1 \pm \xi_2. \quad (5.2.9)$$

Среднее значение суммы (разности) равно сумме (разности) средних значений. Поэтому $m_\eta = m_1 \pm m_2$, а для дисперсии получим выражение

$$\sigma_\eta^2 = \langle (\eta - m_\eta)^2 \rangle = \langle [(\xi_1 - m_1) \pm (\xi_2 - m_2)]^2 \rangle = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \pm 2\sigma_1 \sigma_2 R.$$

Так как сумма (разность) нормально распределенных случайных величин является также нормальной случайной величиной, то плотность вероятности для η определяется формулой (5.2.2) с заменой m на m_η и σ на σ_η .

4. Пусть требуется вычислить плотность вероятности произведения двух коррелированных нормальных случайных величин ξ_1 и ξ_2 с совместной плотностью вероятности

$$w_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-R^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-R^2)} \left(\frac{\xi_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2R\xi_1\xi_2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{\xi_2^2}{\sigma_2^2} \right) \right\}. \quad (5.2.10)$$

Такая задача возникает, например, при анализе работы коррелометра [2].

Полагая $\eta = \xi_1 \xi_2$ и воспользовавшись формулой (5.1.18), получим

$$W_1(\eta) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-R^2}} \left[\frac{R\eta}{\sigma_1\sigma_2(1-R^2)} \right] \times \\ \times \int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_1^2(1-R^2)} \left(\xi_1^2 + \frac{\sigma_1^2\eta}{\sigma_2^2\xi_1^2} \right) \right\} \frac{d\xi_1}{\xi_1} = \\ = \frac{1}{\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-R^2}} \exp \left[\frac{R\eta}{\sigma_1\sigma_2(1-R^2)} \right] K_0 \left(\frac{|\eta|}{\sigma_1\sigma_2(1-R^2)} \right), \quad (5.2.11)$$

где $K_0(z)$ — функция Гаикеля нулевого порядка от мнимого аргумента.

5. Вычислим плотность вероятности частного $\eta = \xi_2/\xi_1$ двух коррелированных и нормально распределенных случайных величин ξ_1 и ξ_2 . В данном случае по формуле (5.1.19) получим

$$W_1(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} w_2(\xi_1, \eta\xi_1) |\xi_1| d\xi_1 = \frac{1}{\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-R^2}} \int_0^\infty \xi_1 \exp \left[-\frac{\xi_1}{2(1+R^2)} \times \right. \\ \left. \frac{\sigma_2^2 - 2R\sigma_1\sigma_2\eta + \sigma_1^2\eta^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2} \right] d\xi_1 = \frac{\sqrt{1-R^2}}{\pi \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} - 2R\eta + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\eta^2 \right)}. \quad (5.2.12)$$

Если величины ξ_1 и ξ_2 некоррелированы ($R = 0$), то формула (5.2.12) переходит в распределение Коши:

$$W_1(\eta) = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\pi (\sigma_2^2 + \sigma_1^2 \eta^2)}. \quad (5.2.13)$$

6. Предположим, что имеются две нормально распределенные независимые случайные величины X и Y , имеющие одинаковые дисперсии $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$, но разные средние значения m_x и m_y . Вычислим плотность вероятности случайной величины

$$Z = \sqrt{X^2 + Y^2} \geq 0. \quad (5.2.14)$$

Совместная плотность вероятности случайных величин X и Y равна:

$$w_2(X, Y) = w_1(X) w_1(Y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left[-\frac{(X - m_x)^2 + (Y - m_y)^2}{2\sigma^2} \right]. \quad (5.2.15)$$

Перейдем от переменных X и Y к новым переменным Z и φ :

$$X = Z \cos \varphi, \quad Y = Z \sin \varphi. \quad (5.2.16)$$

При этом возможные значения φ предполагаются заключенными в интервале $(-\pi, \pi)$.

Переходя в формуле (5.2.15) к новым переменным в соответствии с (5.1.10) и учитывая, что якобиан преобразования переменных равен:

$$D_2 = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(Z, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -Z \sin \varphi \\ \sin \varphi & Z \cos \varphi \end{vmatrix} = Z,$$

получим совместную плотность вероятности для случайных величин Z и φ :

$$W_2(Z, \varphi) = \frac{Z}{2\pi\sigma^2} \exp \left[-\frac{Z^2 - 2Z(m_x \cos \varphi + m_y \sin \varphi) + (m_x^2 + m_y^2)}{2\sigma^2} \right]. \quad (5.2.17)$$

Введя обозначения

$$m_x \cos \varphi + m_y \sin \varphi = m \cos(\varphi - \psi), \quad (5.2.18)$$

где

$$m = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{m_y}{m_x}, \quad (5.2.19)$$

формулу (5.2.17) можно записать иначе:

$$W_2(Z, \varphi) = \frac{Z}{2\pi\sigma^2} \exp \left[-\frac{Z^2 - 2Zm \cos(\varphi - \psi) + m^2}{2\sigma^2} \right]. \quad (5.2.20)$$

Найдем одномерные плотности вероятности для Z и φ . Интегрируя (5.2.20) по всем возможным значениям φ , получаем

$$\begin{aligned} W_1(Z) &= \frac{Z}{\sigma^2} e^{-\frac{Z^2+m^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{Zm \cos(\varphi-\psi)}{\sigma^2}} d\varphi = \\ &= \frac{Z}{\sigma^2} e^{-\frac{Z^2+m^2}{2\sigma^2}} I_0 \left(\frac{mZ}{\sigma^2} \right), \end{aligned} \quad (5.2.21)$$

где

$$I_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{z \cos(\varphi-\psi)} d\varphi \quad (5.2.22)$$

- функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента (рис. 5.6).

Для вычисления плотности вероятности «фазы» φ нужно проинтегрировать (5.2.17) по всем положительным значениям $Z \geq 0$:

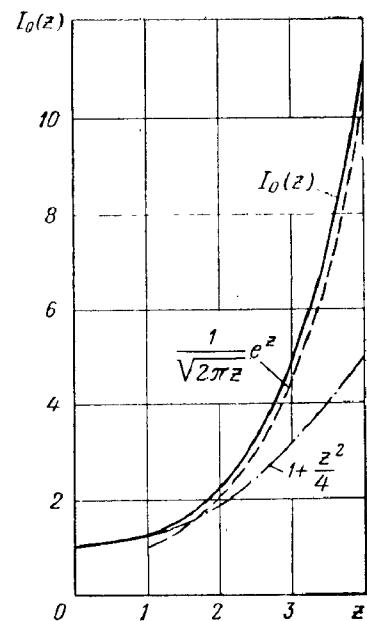


Рис. 5.6. Функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента и ее аппроксимации.

$$\begin{aligned} W_1(\varphi) &= \frac{1}{2\pi} \exp \left[-\frac{m^2 - (m_x \cos \varphi + m_y \sin \varphi)^2}{2\sigma^2} \right] \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{Z}{\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{[Z - (m_x \cos \varphi + m_y \sin \varphi)]^2}{2\sigma^2} \right\} dZ. \end{aligned}$$

Если сделать замену переменной

$$s = [Z - (m_x \cos \varphi + m_y \sin \varphi)]/\sigma$$

и учесть определение интеграла вероятности (2.8.8), то придем к следующей формуле:

$$\begin{aligned} W_1(\varphi) &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{m^2}{2\sigma^2}} + \frac{m_x \cos \varphi + m_y \sin \varphi}{\sigma \sqrt{2\pi}} \times \\ &\times \Phi \left(\frac{m_x \cos \varphi + m_y \sin \varphi}{\sigma} \right) \exp \left[-\frac{m^2 - (m_x \cos \varphi + m_y \sin \varphi)^2}{2\sigma^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.2.23)$$

Рассмотрим два частных случая:

а) Пусть $m_y = 0$ ($m = m_x$). Тогда из формул (5.2.21) и (5.2.23) получим

$$W_1(Z) = \frac{Z}{\sigma^2} e^{-\frac{Z^2+m_x^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{Z \cdot m_x}{\sigma^2}\right), \quad (5.2.24)$$

$$W_1(\varphi) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{m_x^2}{2\sigma^2}} + \frac{m_x \cos \varphi}{\sigma \sqrt{2\pi}} \Phi\left(\frac{m_x \cos \varphi}{\sigma}\right) e^{-\frac{m_x^2 \sin^2 \varphi}{2\sigma^2}}. \quad (5.2.25)$$

б) Предположим, что $m_x = m_y = m = 0$. В данном случае

$$W_1(Z) = \frac{Z}{\sigma^2} e^{-\frac{Z^2}{2\sigma^2}}, \quad Z \geq 0, \quad (5.2.26)$$

$$W_1(\varphi) = \frac{1}{2\pi}, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi. \quad (5.2.27)$$

Плотность вероятности (5.2.26) называют законом Релея, а плотность вероятности (5.2.21) — законом Райса [3], а иногда обобщенным законом Релея. Графики этих плотностей вероятностей приведены на рис. 7.4 и 7.9. Графики плотностей вероятностей (5.2.25) изображены на рис. 7.11.

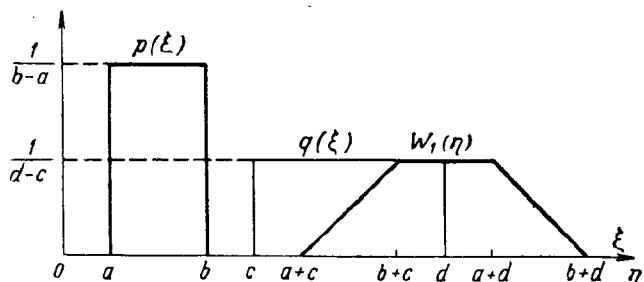


Рис. 5.7. Композиция двух равномерных распределений.

7. Найдем плотность вероятности суммы двух независимых случайных величин ξ_1 и ξ_2 , каждая из которых распределена равномерно (рис. 5.7) [4]:

$$p(\xi_1) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq \xi_1 \leq b, \\ 0, & \xi_1 < a, \xi_1 > b, \end{cases} \quad q(\xi_2) = \begin{cases} \frac{1}{d-c}, & c \leq \xi_2 \leq d, \\ 0, & \xi_2 < c, \xi_2 > d. \end{cases} \quad (5.2.28)$$

Будем считать $(d-c) \geq (b-a)$.

Для нахождения композиции двух равномерных распределений нужно по формуле (5.1.22) вычислить интеграл свертки:

$$W_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi_1) q(s - \xi_1) d\xi_1.$$

Поскольку подынтегральная функция отлична от нуля лишь при одновременном выполнении четырех неравенств: $a \leq \xi_1 \leq b$; $c \leq s - \xi_1 \leq d$.

Рассмотрев условия совместного выполнения этих неравенств, получим следующий результат:

$$W_1(\eta) = \begin{cases} 0, & \eta < a + c, \\ \frac{\eta - a - c}{(b - a)(d - c)}, & a + c \leq \eta \leq b + c, \\ \frac{1}{d - c}, & b + c \leq \eta \leq a + d, \\ \frac{b + d - \eta}{(b - a)(d - c)}, & a + d \leq \eta \leq b + d, \\ 0 & \eta > b + d. \end{cases} \quad (5.2.29)$$

Плотность вероятности $W_1(\eta)$ имеет вид равнобедренной трапеции (рис. 5.7). При $(d - c) = (b - a)$ трапеция переходит в равнобедренный треугольник.

Можно показать [5], что при композиции большого числа независимых, равномерно распределенных случайных величин в пределе получается нормальная плотность вероятности.

§ 3. ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ И НОРМАЛЬНОГО ШУМА

Вычислим плотности вероятности некоторых видов случайных сигналов, часто встречающихся в радиотехнике.

1. **Плотность вероятности гармонического колебания со случайной начальной фазой.** Рассмотрим ансамбль синусоидальных колебаний, имеющих одинаковую амплитуду A_0 и частоту ω_0 , но случайные начальные фазы φ (см. рис. 3.10):

$$s(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (5.3.1)$$

Предполагая известной плотность вероятности $w_1(\varphi)$ для φ , нужно найти плотность вероятности $W_1(s)$ для s . Иначе говоря, нужно найти плотность вероятности для значений s в некоторый фиксированный момент времени t , если известна плотность вероятности для начальных фаз φ . Ясно, что начальные фазы могут принимать значения только в интервале $(-\pi, \pi)$.

Пусть $\psi = \omega_0 t + \varphi$. Тогда

$$s = A_0 \sin \psi. \quad (5.3.2)$$

Заметим, что каждому выбранному значению s из интервала $(-A_0, A_0)$ соответствуют два значения φ в интервале $(-\pi, \pi)$, за исключением значений $s = \pm A_0$. Аналогично, произвольно выбранному

значению s соответствуют два значения ψ из интервала $(\omega_0 t - \pi, \omega_0 t + \pi)$, которые обозначим через ψ_1 и ψ_2 . Тогда можем написать равенство

$$W_1(s) = \begin{cases} \frac{\omega_1(\psi_1 - \omega_0 t) + \omega_1(\psi_2 - \omega_0 t)}{V A_0^2 - s^2}, & -A_0 \leq s \leq A_0, \\ 0 & s < -A_0, s > A_0, \end{cases} \quad (5.3.3)$$

так как $\left| \frac{\partial \psi}{\partial s} \right| = (A_0^2 - s^2)^{-1/2}$.

Формула (5.3.3) показывает, что в общем случае плотность вероятности $W_1(s)$ зависит от времени и рассматриваемый ансамбль является нестационарным. Наибольший практический интерес представляет случай, когда ансамбль является стационарным. Это имеет место лишь тогда, когда плотность вероятности $w_1(\psi - \omega_0 t)$ является прямоугольной:

$$w_1(\psi - \omega_0 t) = \begin{cases} 1/2\pi, & \omega_0 t - \pi \leq \psi \leq \omega_0 t + \pi, \\ 0 & \psi < \omega_0 t - \pi, \psi > \omega_0 t + \pi. \end{cases} \quad (5.3.4)$$

В данном случае (5.3.3) переходит в следующее выражение:

$$W_1(s) = \begin{cases} \frac{1}{\pi V A_0^2 - s^2} & \text{при } |s| \leq A_m, \\ 0 & \text{при } |s| > A_m. \end{cases} \quad (5.3.5)$$

Так как $\psi = \omega_0 t + \varphi$, то (5.3.4) эквивалентно условию

$$w_1(\varphi) = \begin{cases} 1/2\pi, & -\pi \leq \varphi \leq \pi, \\ 0 & \varphi < -\pi, \varphi > \pi. \end{cases} \quad (5.3.6)$$

Таким образом, если случайная начальная фаза распределена равномерно на интервале $(-\pi, \pi)$, то ансамбль синусоидальных колебаний является стационарным с одномерной плотностью вероятности (5.3.5). Эта плотность вероятности изображена на рис. 5.8.

Формуле (5.3.5) можно дать другое физическое толкование, если рассматривать вероятность стационарного процесса как относительное время пребывания процесса в соответствующем интервале.

Действительно, пусть имеется гармоническое колебание с фиксированной фазой φ_0 :

$$s(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (5.3.7)$$

Каждому фиксированному значению s из интервала $(-A_0, A_0)$ соответствуют два значения аргумента t на периоде $T = 2\pi/\omega_0$ (рис. 5.9).

Если понимать под вероятностью $W_1(s)\Delta s$ относительное время пребывания гармонического колебания в интервале $(s, s + \Delta s)$, то можем написать

$$W_1(s)\Delta s = \frac{2\Delta t}{T}, \quad (5.3.8)$$

где согласно (5.3.7)

$$\Delta s = \omega_0 A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \Delta t = \omega_0 \Delta t \sqrt{A_0^2 - s^2}$$

или $\Delta t = \Delta s / \omega_0 \sqrt{A_0^2 - s^2}$. Подставив в (5.3.8) значения $T = \Delta t$, приедем к формуле (5.3.5).

Согласно такой интерпретации, можно дать следующее пояснение поведению плотности вероятности $W_1(s)$ (см. рис. 5.8). В окрестности

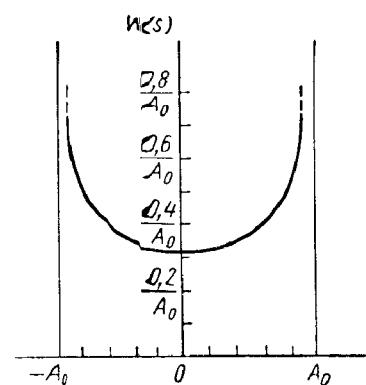


Рис. 5.8. Плотность вероятности гармонического колебания с равномерно распределенной начальной фазой.

точек $t_i = (\frac{\pi}{2} + i\pi - \varphi_0)/\omega_0$, $i = 0, 1, \dots$, где $s(t_i) \approx \pm A_m$, производная (скорость) мала $s'(t_i) \approx 0$, время пребывания синусоиды велико, и поэтому плотность вероятности стремится к бесконечности. И наобо-

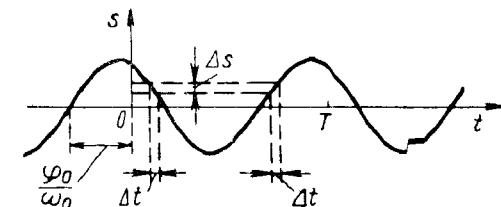


Рис. 5.9. Гармоническое колебание.

рот, в окрестности точек $t_j = (j\pi - \varphi_0)/\omega_0$, $j = 0, 1, \dots$, производная (скорость) велика $s'(t_j) \approx \pm \omega_0 A_m$, время пребывания мало, и плотность вероятности имеет наименьшее значение.

Можно показать [3, 6], что двумерная характеристическая функция и двумерная плотность вероятности сигнала (5.3.1) при условии (5.3.6) определяются формулами

$$\Theta(u_1, u_2) = J_0(A_0 \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + 2u_1 u_2 \cos \omega_0 \tau}), \quad (5.3.9)$$

$$W_2(s, s_\tau) = (\pi A_0)^{-2} \sum_{m=0}^{\infty} \Xi_m \Psi_m^{(m)}\left(\frac{s}{A_0}\right) \Psi_m^{(m)}\left(\frac{s_\tau}{A_0}\right) \cos m\omega_0 \tau, \quad (5.3.10)$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя нулевого порядка, $\Xi_0 = 1$; $\Xi_m = 2$ при $m \neq 0$.

$$\Psi_m(z) = \frac{(-1)^m}{(2m-1)!!} (1-z^2)^{m-\frac{1}{2}}, \quad \Psi_m^{(m)}(z) = (1-z^2)^{-\frac{1}{2}} T_m(z), \quad (5.3.11)$$

$T_m(z)$ — полиномы Чебышева первого рода.

Формулы (5.3.9) и (5.3.10) будут использованы в § 8 и 11 при анализе нелинейных преобразований сигнала и шума.

2. Плотность вероятности сигнала со случайными амплитудой и фазой. Найдем одномерную плотность вероятности для случайного сигнала

$$s(t) = A(t) \sin [\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (5.3.12)$$

где случайные функции $A(t) \geq 0$ и $\varphi(t)$ предполагаются независимыми в один и тот же момент времени, и случайная фаза $\varphi(t)$ считается равномерно распределенной на интервале $(-\pi, \pi)$.

Введем новую переменную $\xi_2(t) = \sin[\omega_0 t + \varphi(t)]$, плотность вероятности которой определяется формулой (5.3.5) при $A_0 = 1$. Ввиду независимости $A(t)$ и $\varphi(t)$ можем написать

$$w_2(A, \xi_2) = P(A) \frac{1}{\pi \sqrt{1 - \xi_2^2}}, \quad |\xi_2| \leq 1,$$

где $P(A)$ — плотность вероятности $A(t)$.

Полагая в формуле (5.1.24) $\xi_1 = A$, имеем

$$W_1(s) = \frac{1}{\pi} \int \frac{P(A)}{A \sqrt{1 - \xi_2^2}} dA = \frac{1}{\pi} \int_{|s|}^{\infty} \frac{P(A)}{\sqrt{A^2 - s^2}} dA. \quad (5.3.13)$$

Нижний предел интегрирования определяется условием $|\xi_2| = \left| \frac{s}{A} \right| \leq 1$, т. е. $|A| = A \geq |s|$.

Если в формуле (5.3.13) перейти к новой переменной интегрирования x , положив $A = |s| \cosh x$, то получим

$$W_1(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty P(|s| \cosh x) dx. \quad (5.3.14)$$

В том частном случае, когда амплитуда фиксирована, т. е. $P(A) = \delta(A - A_0)$, формула (5.3.13) переходит в (5.3.5). Если амплитуда распределена равномерно в интервале $(0, A)$, т. е. $P(A) = 1/A$ при $A \leq A_0$ и $P(A) = 0$ при $A > A_0$, то из (5.3.14) получим

$$W_1(s) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi A_0} \ln \left(\frac{A_0 + \sqrt{A_0^2 - s^2}}{A_0 - \sqrt{A_0^2 - s^2}} \right), & |s| \leq A_0, \\ 0 & |s| > A_0. \end{cases} \quad (5.3.15)$$

Во многих практических случаях амплитуду сигнала (5.3.12) считают равномерно распределенной по закону Релея:

$$P(A) = \frac{A}{\sigma^2} e^{-A^2/2\sigma^2}, \quad A \geq 0. \quad (5.3.16)$$

В данном случае формула (5.3.14) дает нормальную плотность вероятности сигнала

$$W_1(s) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-s^2/2\sigma^2}. \quad (5.3.17)$$

Следовательно, если в сигнале (5.3.12) амплитуда и фаза независимы в один и тот же момент времени, причем амплитуда равномерно распределена по закону Релея, а фаза — равномерно на интервале $(-\pi, \pi)$, то сигнал имеет нормальную плотность вероятности с нулевым средним значением и дисперсией σ^2 .

Укажем [7], что для случайного сигнала (5.3.12) при сделанных ранее предположениях можно найти плотность вероятности амплитуды $A(t)$, если заранее известна плотность вероятности $W_1(s)$ самого сигнала. Ответ дается следующей формулой:

$$\frac{P(A)}{A} = \int_0^\infty \Theta_1(u) J_0(Au) du, \quad (5.3.18)$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя нулевого порядка;

$\Theta_1(u) = \int W_1(s) e^{ius} ds$ — характеристическая функция сигнала $s(t)$.

3. Плотность вероятности суммы гармонического сигнала со случайной начальной фазой и нормального шума. Вычислим плотность вероятности суммы двух независимых случайных процессов: гармонического колебания $s(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ с равномерно распределенной начальной фазой (5.3.6) и нормального стационарного шума $\xi(t)$ с нулевым средним значением:

$$\zeta(t) = \xi(t) + s(t). \quad (5.3.19)$$

Очевидно, в данном случае

$$w_2(s, \xi) = W_1(s) w_1 \xi = \frac{1}{\pi \sigma \sqrt{2\pi} (A_0^2 - s^2)} e^{-\xi^2/2\sigma^2}, \quad |s| \leq A_0$$

По формуле (5.1.22) можем написать

$$W_1(\zeta) = \frac{1}{\pi \sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-A_0}^{A_0} \frac{1}{\sqrt{A_0^2 - s^2}} \exp \left[-\frac{(\zeta - s)^2}{2\sigma^2} \right] ds.$$

Введем новую переменную согласно равенству

$$s = A_0 \cos \psi \quad (ds = -A_0 \sin \psi d\psi = -\sqrt{A_0^2 - s^2} d\psi).$$

Получим

$$W_1(\zeta) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_0^\pi \exp \left[-\frac{(\zeta - A_0 \cos \psi)^2}{2\sigma^2} \right] d\psi.$$

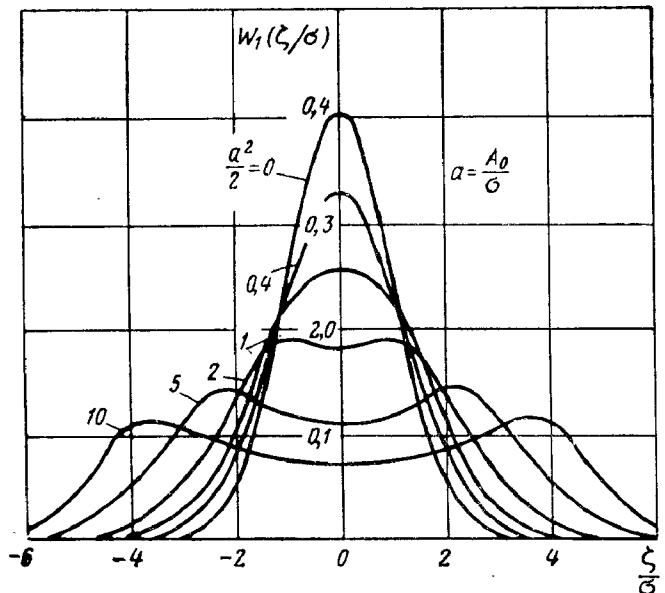


Рис. 5.10. Плотность вероятности суммы нормального шума и гармонического сигнала со случайной начальной фазой.

Если ввести нормированную случайную переменную $\xi = \zeta/\sigma$ и обозначить через $a = A_0/\sigma$ величину, характеризующую отношение сигнал/шум по напряжению, то получим окончательную формулу

$$W(\xi) = \frac{1}{\pi \sqrt{2\pi}} \int_0^\pi \exp \left[-\frac{1}{2} (\xi - a \cos \psi)^2 \right] d\psi. \quad (5.3.20)$$

Графики этой плотности вероятности для нескольких значений параметра a приведены на рис. 5.10.

4. МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ ПРИ ПОЛИНОМИАЛЬНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ

Пусть характеристика нелинейного элемента $\eta = g(\xi)$ является аналитической функцией в окрестности $\xi = 0$. Тогда ее можно разложить в ряд Маклорена:

$$g(\xi) = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \dots, \quad a_k = \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k g(\xi)}{d\xi^k} \Big|_{\xi=0}. \quad (5.4.1)$$

Составляя достаточно большое число первых членов, в зависимости от требуемой точности аппроксимации, можно положить

$$\eta(t) = g(\xi(t)) = a_0 + a_1 \xi(t) + a_2 \xi^2(t) + \dots + a_n \xi^n(t). \quad (5.4.2)$$

Обозначим моментные функции $\xi(t)$ через M , а $\eta(t)$ через \tilde{M} . Используя усреднения правую и левую части равенства (5.4.2), получим

$$\tilde{M}_1(t) = \langle \eta(t) \rangle = a_0 + a_1 M(t) + a_2 M_2(t) + \dots + a_n M_n(t), \quad (5.4.3)$$

$$\text{где } M_k(t) = \langle \xi^k(t) \rangle.$$

Перепишем теперь равенство (5.4.2) для двух моментов времени t_1 и t_2 :

$$\eta(t_1) = a_0 + a_1 \xi(t_1) + \dots + a_n \xi^n(t_1),$$

$$\eta(t_2) = a_0 + a_1 \xi(t_2) + \dots + a_n \xi^n(t_2).$$

Несложно левые и правые части этих равенств и выполним операцию усреднения. Тогда получим выражение для двумерного момента

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{11}(t_1, t_2) = & a_0^2 + a_0 a_1 [M_1(t_1) + M_1(t_2)] + \\ & + \frac{a_0^2}{2} M_{11}(t_1, t_2) + \dots + a_0 a_n [M_n(t_1) + M_n(t_2)] + \dots \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

Продукая аналогично, получим выражения для высших моментов $\eta(t)$ [8].

Если характеристика нелинейного элемента $\eta = g(\xi)$ раскладывается в ряд Тейлора в окрестности некоторой точки c , т. е.

$$g(\xi) = a + a_1(\xi - c) + \dots + a_n(\xi - c)^n, \quad a_k = \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k g(\xi)}{d\xi^k} \Big|_{\xi=c}, \quad (5.4.5)$$

то для моментов $\eta(t)$ получим соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{M}_1(t) = & a_0 + a_1 \langle \xi(t) - c \rangle + \dots + a_n \langle (\xi(t) - c)^n \rangle, \\ \tilde{M}_{11}(t_1, t_2) = & a_0^2 + a_0 a_1 [M_1(t_1) + M_1(t_2) - 2c] + a_1^2 [M_{11}(t_1, t_2) - \\ & - c M_1(t_1) - c M_1(t_2) + c^2] + \dots + a_n^2 \langle [\xi(t_1) - c]^n [\xi(t_2) - c]^n \rangle. \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

Для получения явного выражения моментов процесса $\eta(t)$ через моменты $\xi(t)$ в данном случае нужно воспользоваться формулой бинома Ньютона

$$(\xi - c)^k = \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i!(k-i)!} \xi^{k-i} c^i,$$

раскрыть члены вида

$$[\xi(t_1) - c]^k [\xi(t_2) - c]^l [\xi(t_3) - c]^m \dots, k, l, m, \dots \leq n$$

и затем выполнить статистическое усреднение. При этом, если процесс $\xi(t)$ задан своими моментами, то сразу получим нужный результат. Если же процесс $\xi(t)$ задан плотностями вероятности или характеристическими функциями, то по ним нужно предварительно вычислить моменты (см. § 4 гл. 3).

Из формул (5.4.3), (5.4.4) и (5.4.6) видно, что моментные функции случайного процесса $\eta(t)$ выражаются через моментные функции процесса $\xi(t)$ линейно, но формулы для моментных функций выходного процесса включают более высокие моментные функции входного процесса. В этом состоит одна из характерных особенностей нелинейного преобразования по сравнению с линейным.

В заключение рассмотрим один конкретный пример. Пусть на нелинейный элемент с параболической характеристикой

$$y = g(x) = a_1 x + a_2 x^2 \quad (5.4.7)$$

воздействует сумма сигнала $s(t)$ и флуктуационного шума $\xi(t)$. Сигнал и шум предполагаются независимыми. Сигнал представляет гармоническое колебание $s(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$ с постоянной амплитудой и частотой и случайной фазой ϕ , распределенной равномерно на интервале $(-\pi, \pi)$. Шум является нормальным стационарным с нулевым средним значением и функцией корреляции

$$R(\tau) = \langle \xi(t) \xi(t+\tau) \rangle = \sigma^2 R(\tau),$$

где $R(\tau)$ — коэффициент корреляции.

Найдем функцию корреляции для сигнала $\eta(t)$ на выходе нелинейного элемента:

$$\eta(t) = a_1 [s(t) + \xi(t)] + a_2 [s(t) + \xi(t)]^2. \quad (5.4.8)$$

Путем статистического усреднения обеих частей этого равенства получим

$$m_\eta = \langle \eta(t) \rangle = a_2 \left(\frac{1}{2} A_0^2 + \sigma^2 \right), \quad (5.4.9)$$

так как

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle s(t) \rangle = 0, \quad \langle s(t) \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle s^2(t) \rangle = \frac{1}{2} A_0^2.$$

Перемножив равенства (5.4.8), относящиеся к моментам времени t и $t + \tau$, статистически усреднив результат перемножения и проделав несложные вычисления, найдем второй момент

$$\begin{aligned} m_2(\tau) &= \langle \eta(t) \eta(t+\tau) \rangle = \frac{1}{2} a_1^2 A_0^2 \cos \omega_0 \tau + a_1^2 \sigma^2 R(\tau) + \\ &+ \frac{1}{4} a_2^2 A_0^4 \left(1 + \frac{1}{2} \cos 2\omega_0 \tau \right) + 2a_2^2 A_0^2 \sigma^2 R(\tau) \cos \omega_0 \tau + \\ &+ a_2^2 A_0^2 \sigma^2 + a_2^2 \sigma^4 [1 + 2R^2(\tau)]. \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

На основании (5.4.9) и (5.4.10) находим функцию корреляции

$$\begin{aligned} k_\eta(\tau) &= m_2(\tau) - m_1^2 = \frac{1}{2} a_1^2 A_0^2 \cos \omega_0 \tau + \frac{1}{8} a_2^2 A_0^4 \cos 2\omega_0 \tau + \\ &+ a_1^2 \sigma^2 R(\tau) + 2a_2^2 A_0^2 \sigma^2 R(\tau) \cos \omega_0 \tau + 2a_2^2 \sigma^4 R^2(\tau). \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

Зная функцию корреляции, по формуле (3.10.10) можно вычислить спектральную плотность. Если задаться коэффициентом корреляции шума вида $R(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$, где $\alpha \ll \omega_0$, то в результате вычислений получим

$$\begin{aligned} S_\eta(f) &= \frac{1}{2} a_1^2 A_0^2 \delta(f - f_0) + \\ &+ \frac{1}{8} a_2^2 A_0^4 \delta(f - 2f_0) + 4a_1^2 \sigma^2 \times \\ &\times \frac{\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} + 4a_2^2 \sigma^4 \frac{\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} + \\ &+ 4a_2^2 A_0^2 \sigma^2 \frac{\alpha}{\alpha^2 + 4\pi(f - f_0)^2}. \end{aligned} \quad (5.4.12)$$

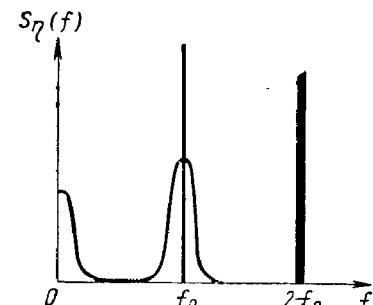


Рис. 5.11. Дискретно-сплошной спектр.

Характер спектра изображен на рис. 5.11. Спектр $S_\eta(f)$ является дискретно-сплошным. Он состоит из двух дискретных спектральных линий при частотах f_0 и $2f_0$, обусловленных только сигналом [первые два слагаемых в формуле (5.4.12)], низкочастотного сплошного спектра, обусловленного шумом (третье и четвертое слагаемые), и сплошного спектра, расположенного в окрестности частоты сигнала f_0 , который обусловлен взаимодействием сигнала и шума и результатом нелинейного преобразования. Если бы преобразование было линейным ($a_2=0$), то из формулы (5.4.12) следовал бы очевидный результат: энергетический спектр суммы сигнала и некоррелированного с ним шума равен сумме энергетических спектров.

§ 5. О ДВУХ МЕТОДАХ АНАЛИЗА КУСОЧНО-РАЗРЫВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

При рассмотрении воздействия достаточно больших сигналов и помех на нелинейные элементы часто применяют кусочно-разрывную аппроксимацию характеристик последних, поскольку такая аппроксимация позволяет лучше передать существенные свойства большого участка нелинейной характеристики.

Вычисление моментных функций случайных сигналов, подвергшихся кусочно-разрывным преобразованиям, можно выполнить двумя тесно связанными методами: прямым методом и методом характеристических функций (методом Райса).

В прямом методе используются сами нелинейные характеристики и статистическое усреднение (интегрирование) осуществляется непосредственно с плотностями вероятности. В методе характеристических функций нелинейная характеристика представляется при помощи преобразования Фурье или Лапласа, и статистическое усреднение осуществляется при помощи интегрирования с характеристической функцией.

Естественным результатом прямого метода является выражение ответа через табулированные производные от интеграла вероятности (см. приложение V); в методе характеристических функций ответ чаще выражается через гипергеометрические функции (см. приложение VI). Однако это не имеет существенного значения, так как производные от интеграла вероятности

$$\Phi^{(n+1)}(z) = \frac{d^n}{dz^n} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} z^2} \right), \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (5.5.1)$$

и вырожденная гипергеометрическая функция

$${}_1F_1(\alpha; \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{z}{1} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \cdot \frac{z^2}{2!} + \dots \quad (5.5.2)$$

связаны друг с другом известными соотношениями [9]

$$\left. \begin{aligned} \Phi^{(2m+1)}(z) &= \frac{(-1)^m (2m)!}{m! 2^m \sqrt{2\pi}} {}_1F_1\left(\frac{2m+1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{z^2}{2}\right), \\ \Phi^{(2m)}(z) &= \frac{(-1)^m (2m)!}{m! 2^m \sqrt{2\pi}} z {}_1F_1\left(\frac{2m+1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{z^2}{2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (5.5.3)$$

Таким образом, оба метода тесно связаны друг с другом и равноправны. Для решения конкретной задачи выбирается тот метод, который позволяет проще получить результат.

§ 6. ФУНКЦИЯ КОРРЕЛЯЦИИ ПРИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ НОРМАЛЬНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ

Вычислим среднее значение m_η и функцию корреляции $k_\eta(\tau)$ для флюктуаций $\eta(t)$, получающихся на выходе элементов с кусочно-линейными характеристиками (рис. 5.12), когда на вход их воздействуют нормальные стационарные флюктуации $\xi(t)$ с нулевым средним значением $m_\xi = 0$ и функцией корреляции

$$k(\tau) = \sigma^2 R(\tau). \quad (5.6.1)$$

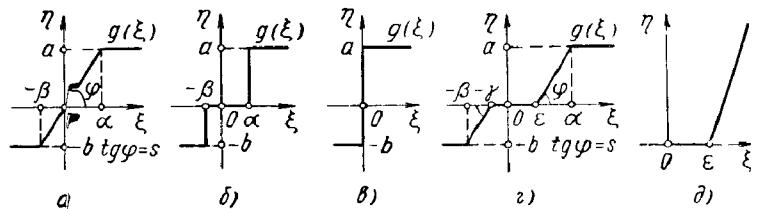


Рис. 5.12. Типовые характеристики нелинейных элементов.

Рассмотрим более подробно ограничитель (рис. 5.12, a), для которого $\eta(t)$ связано с $\xi(t)$ соотношением (5.2.7). По определению

$$\begin{aligned} m_\eta &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) w_1(\xi) d\xi = -b \int_{-\infty}^{-\beta} w_1(\xi) d\xi + \\ &+ s \int_{-\beta}^{\alpha} \xi w_1(\xi) d\xi + a \int_{\alpha}^{\infty} w_1(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Подставив сюда выражение нормальной плотности вероятности и выполнив элементарные преобразования, получим

$$\begin{aligned} \frac{m_\eta}{\sigma \sigma} &= \left\{ \frac{\alpha}{\sigma} \left[1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) \right] - \Phi'\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) \right\} - \\ &- \left\{ \frac{\beta}{\sigma} \left[1 - \Phi\left(\frac{\beta}{\sigma}\right) \right] - \Phi'\left(\frac{\beta}{\sigma}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.6.2a)$$

Зависимость среднего значения от одного из пределов ограничения при фиксированном другом пределе показана на рис. 5.13.

Проделав аналогичные вычисления, найдем средние значения величины η на выходе других элементов, представленных на рис. 5.12

$$m_\eta = (a - b) + \left[a \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) - b \Phi\left(\frac{\beta}{\sigma}\right) \right], \quad (5.6.2b)$$

$$m_\eta = \frac{1}{2} (a - b), \quad (5.6.2b)$$

$$\begin{aligned} \frac{m_\eta}{s\sigma} &= \left(\frac{\alpha}{\sigma} - \frac{\beta}{\sigma} \right) - \left(\frac{\varepsilon}{\sigma} - \frac{\gamma}{\sigma} \right) - \left[\frac{\alpha}{\sigma} \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) - \frac{\beta}{\sigma} \Phi\left(\frac{\beta}{\sigma}\right) \right] + \\ &+ \left[\frac{\varepsilon}{\sigma} \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \frac{\gamma}{\sigma} \Phi\left(\frac{\gamma}{\sigma}\right) \right] - \left[\Phi'\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) - \Phi'\left(\frac{\beta}{\sigma}\right) \right] + \left[\Phi'\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi'\left(\frac{\gamma}{\sigma}\right) \right], \end{aligned} \quad (5.6.2\text{г})$$

$$\frac{m_\eta}{s\sigma} = \Phi'\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \frac{\varepsilon}{\sigma} \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \quad (5.6.2\text{д})$$

Таким же путем можно получить формулы для дисперсии на выходе соответствующих элементов.

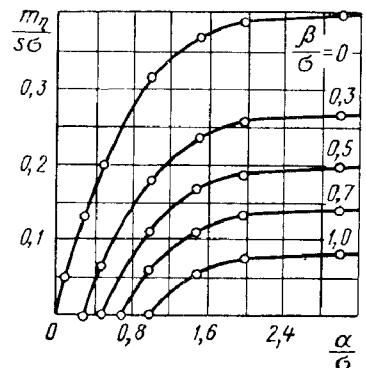


Рис. 5.13. Зависимость среднего значения на выходе ограничителя от уровня ограничения.

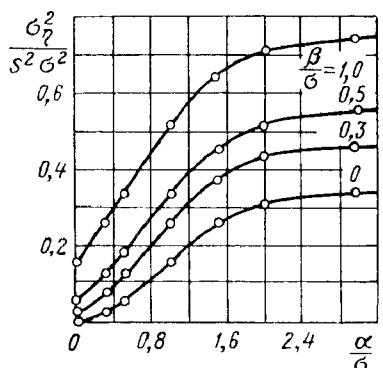


Рис. 5.14. Зависимость дисперсии на выходе ограничителя от уровня ограничения.

График зависимости дисперсии на выходе ограничителя приведен на рис. 5.14.

Перейдем к вычислению функции корреляции

$$k_\eta(\tau) = \langle \eta(t) \eta(t+\tau) \rangle - m_\eta^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) g(\xi_\tau) w_2(\xi, \xi_\tau) d\xi d\xi_\tau - m_\eta^2.$$

Применим к ограничителю рис. 5.12,а область интегрирования распадается на девять подобластей, в каждой из которых произведение $g(\xi) g(\xi_\tau)$ записывается в явном виде. Произведя такое разбиение и вычислив каждый из девяти интегралов, получим нужный результат.

Такой непосредственный способ вычисления функции корреляции $k_\eta(\tau)$ является весьма громоздким. Ясно, что еще большие трудности встретятся при вычислении функции корреляции для нелинейного элемента с зоной нечувствительности (рис. 5.12, г). Этих трудоемких вычислений можно избежать, используя аппарат дельта-

функции, который значительно упрощает и в известном смысле автоматизирует вычисления. Такой метод был предложен в работе [10].

Воспользовавшись представлением двумерной нормальной плотности вероятности в виде ряда (3.15.24), для двумерного момента $m_{11}(\tau)$ на выходе нелинейного элемента с характеристикой $\eta = g(\xi)$ можем написать

$$m_{11}(\tau) = \left\{ \frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \Phi' \left(\frac{\xi}{\sigma} \right) d\xi \right\}^2 + \\ + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \Phi^{(n+1)} \left(\frac{\xi}{\sigma} \right) d\xi \right\}^2 \frac{R^n(\tau)}{n!}.$$

Но

$$\frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \Phi' \left(\frac{\xi}{\sigma} \right) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) w_1(\xi) d\xi = m_\eta.$$

Поэтому для функции корреляции получим

$$k_\eta(\tau) = m_{11}(\tau) - m_\eta^2 = \frac{1}{\sigma^2} \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \Phi^{(n+1)} \left(\frac{\xi}{\sigma} \right) d\xi \right\}^2 \frac{R^n(\tau)}{n!}. \quad (5.6.3)$$

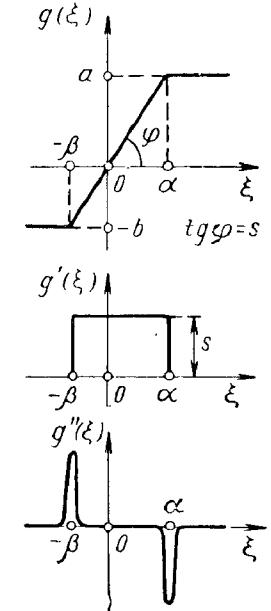


Рис. 5.15. Характеристика ограничителя и ее производные.

Применяя интегрирование по частям v раз и используя свойства функции $\Phi^{(n)}(z)$: $\Phi^{(n+1)}(\infty) = 0$; $\Phi^{(n+1)}(0) = 0$ при n нечетном, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \Phi^{(n+1)} \left(\frac{\xi}{\sigma} \right) d\xi = (-\sigma)^v \int_{-\infty}^{\infty} g^{(v)}(\xi) \Phi^{(n+1-v)} \left(\frac{\xi}{\sigma} \right) d\xi.$$

Применим к различным характеристикам нелинейных элементов будем интегрировать по частям такое число v раз, чтобы $g^{(v)}(\xi)$ превратилась в δ -функцию или сумму δ -функций. Так, например, для элемента с характеристикой, показанной на рис. 5.12, г, следует положить $v = 2$ (рис. 5.15). При этом получим следующий результат:

$$k_\eta(\tau) = (s\sigma)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\Phi^{(n-1)} \left(\frac{\alpha}{\sigma} \right) - \Phi^{(n-1)} \left(-\frac{\beta}{\sigma} \right) \right]^2 \cdot \frac{R^n(\tau)}{n!}. \quad (5.6.4\text{a})$$

Эту формулу можно записать в другом виде:

$$k_\eta(\tau) = \sigma_\eta^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n(\tau),$$

$$a_n = \left[\Phi^{(n-1)}\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) - \Phi^{(n-1)}\left(-\frac{\beta}{\sigma}\right) \right]^2 \frac{(s\sigma)^n}{n! \sigma^2}. \quad (5.6.5)$$

При $\tau = 0$ имеем $R(0) = 1$ и $k_\eta(0) = \sigma_\eta^2$. В табл. 5.6.1 приведены результаты вычислений первых семи коэффициентов a_n для симметричного ограничителя ($\alpha = \beta = \gamma$). Из этих и других результатов следует, что определяющую роль в формуле (5.6.5) играет первый член с коэффициентом a_1 . Сумма всех остальных коэффициентов даже при сильном ограничении (например, симметричное ограничение с $\gamma/\sigma \approx 0,1$) составляет примерно 35% от суммы всех коэффициентов. Поэтому иногда ограничиваются учетом только первого члена, что по существу соответствует линейному преобразованию флюктуаций $\xi(t)$.

Таблица 5.6.1
Симметричное ограничение ($\alpha=\beta=\gamma$)

a_n	$\frac{\gamma}{\sigma} = 0,1$	$\frac{\gamma}{\sigma} = 0,3$	$\frac{\gamma}{\sigma} = 0,5$	$\frac{\gamma}{\sigma} = 1$
a_1	0,646	0,735	0,789	0,901
a_2	0	0	0	0
a_3	0,114	0,114	0,112	0,072
a_4	0	0,048	0	0
a_5	0,050	0	0,042	0,015
a_6	0	0,027	0	0
a_7	0,030	0	0,021	0,003

Из формулы (5.6.4a) получаются как частные случаи известные результаты. Так, для линейного детектора без насыщения нужно положить $\beta = 0$, $\alpha = \infty$. При этом будем иметь

$$k_\eta(\tau) = (s\sigma)^2 \sum_{n=1}^{\infty} [\Phi^{(n-1)}(0)]^2 \frac{R^n(\tau)}{n!} =$$

$$= (s\sigma)^2 \left\{ \frac{1}{4} R(\tau) + \sum_{n=2}^{\infty} [\Phi^{(n-1)}(0)]^2 \frac{R^n(\tau)}{n!} \right\}.$$

Используя далее соотношение

$$\sum_{n=2}^{\infty} [\Phi^{(n-1)}(0)]^2 \frac{R^n}{n!} = \frac{1}{2\pi} \int_0^R dr \int_0^\tau \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

которое получается из (3.15.24) при $\xi_1 = \xi_2 = 0$ путем двукратного интегрирования по R , получим формулу

$$k_\eta(\tau) = \frac{(s\sigma)^2}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} R(\tau) + R(\tau) \arcsin R(\tau) + \sqrt{1-R^2(\tau)} - 1 \right). \quad (5.6.6)$$

Для идеального ограничителя без зоны линейности ($\alpha = \beta = \gamma$, $s \rightarrow \infty$), характеристику которого можно записать

$$\eta = g(\xi) = \operatorname{sgn} \xi = \begin{cases} 1, & \xi > 0, \\ 0, & \xi = 0, \\ -1, & \xi < 0, \end{cases} \quad (5.6.7)$$

формула (5.6.4a) приводится к виду

$$k_\eta(\tau) = \left(\frac{2\gamma}{\sigma} \right)^2 (s\sigma)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\Phi^{(n-1)}\left(\frac{\gamma}{\sigma}\right) - \Phi^{(n-1)}\left(-\frac{\gamma}{\sigma}\right) \right]^2 \times$$

$$\times \left(\frac{2\gamma}{\sigma} \right)^{-2} \frac{R^n(\tau)}{n!} = 4(\gamma s)^2 \sum_{n=1}^{\infty} [\Phi^{(n)}(0)]^2 \cdot \frac{R^n(\tau)}{n!}.$$

Используя далее соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\Phi^{(n)}(0)]^2 \frac{R^n}{n!} = \frac{1}{2\pi} \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2\pi} \arcsin R,$$

при $\gamma s = 1$ получим простую формулу

$$k_\eta(\tau) = \frac{2}{\pi} \arcsin R(\tau). \quad (5.6.8)$$

Если проделать те же вычисления, что и при выводе формулы (5.6.4a), для других элементов, характеристики которых приведены на рис. 5.12, то получим соответственно следующие формулы:

$$k_\eta(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a\Phi^{(n)}\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) + b\Phi\left(-\frac{\beta}{\sigma}\right) \right]^2 \frac{R^n(\tau)}{n!}, \quad (5.6.46)$$

$$k_\eta(\tau) = (\alpha + b)^2 \sum_{n=1}^{\infty} [\Phi^{(n)}(0)]^2 \frac{R^n(\tau)}{n!} = \frac{(\alpha + b)^2}{2\pi} \arcsin R(\tau), \quad (5.6.4b)$$

$$k_\eta(\tau) = (s\sigma)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\Phi^{(n-1)}\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) - \Phi^{(n-1)}\left(-\frac{\beta}{\sigma}\right) \right] - \left[\Phi^{(n-1)}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi^{(n-1)}\left(-\frac{\gamma}{\sigma}\right) \right] \right\} \frac{R^n(\tau)}{n!}, \quad (5.6.4\text{г})$$

$$k_\eta(\tau) = (s\sigma)^2 \left\{ \Phi^2\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) R(\tau) + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\Phi^{(n-1)}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \right]^2 \frac{R^n(\tau)}{n!} \right\}. \quad (5.6.4\text{д})$$

Полагая в формулах (5.6.4) $\tau = 0$ и соответственно $R(0) = 1$, получим соотношения для дисперсий случайных процессов η и ξ .

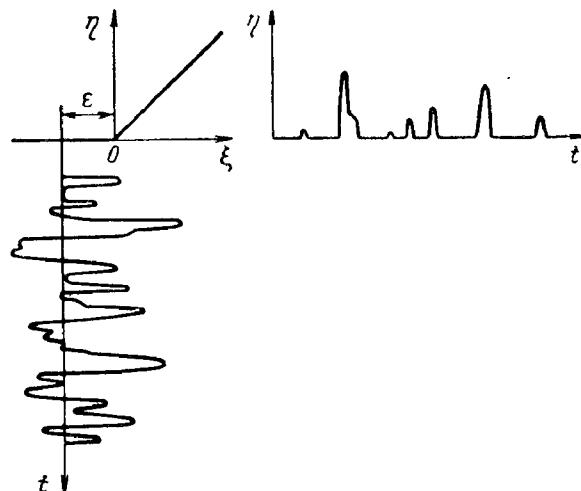


Рис. 5.16. Нормальные флюктуации $\xi(t)$ и ограниченные снизу флюктуации $\eta(t)$.

Формулой (5.6.4д) можно воспользоваться для оценки коррелированности выбросов нормальных флюктуаций. Пусть нормальные флюктуации $\xi(t)$ с коэффициентом корреляции

$$R(\tau) = e^{-\alpha\tau^2} = e^{-x^2}, \quad x = \tau \sqrt{\alpha} \quad (5.6.9)$$

воздействуют на нелинейный элемент

$$\eta(t) = \begin{cases} \xi(t) - \varepsilon & \text{при } \xi(t) \geq \varepsilon, \\ 0 & \text{при } \xi(t) < \varepsilon. \end{cases}$$

В данном случае функция $\eta(t)$ составлена из выбросов флюктуаций $\xi(t)$, превышающих уровень ε (рис. 5.16).

Положив в формуле (5.6.4д) коэффициент $s=1$, получаем выражение для коэффициента корреляции функции $\eta(t)$:

$$R_\eta(\tau) = \left(\frac{\sigma}{\sigma_\eta}\right)^2 \left\{ \Phi^2\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) R(\tau) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\Phi^{(n-1)}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \right]^2 R^n(\tau) \right\}, \quad (5.6.10)$$

где σ_η^2 — дисперсия случайной функции $\eta(t)$, равная

$$\sigma_\eta^2 = \sigma^2 \left\{ \Phi^2\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\Phi^{(n-1)}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \right]^2 \right\}.$$

Результаты вычислений по формуле (5.6.10) с учетом членов ряда до $n=7$ при пяти значениях уровня ε/σ представлены на рис. 5.17 вместе с функцией $R(\tau)$.

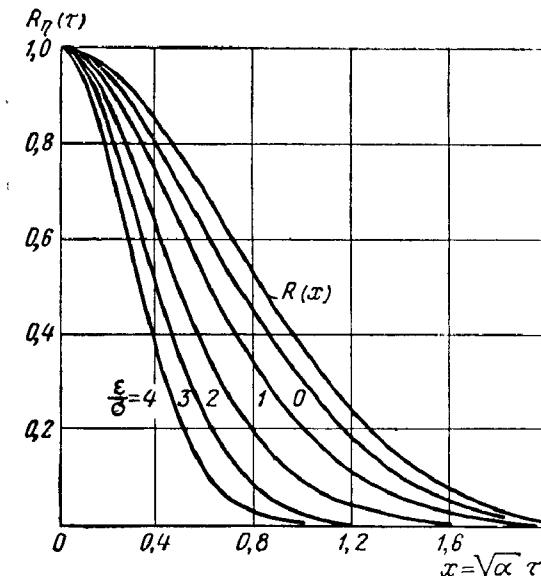


Рис. 5.17. Графики коэффициентов корреляции $R(\tau)$ и $R_\eta(\tau)$ при различных значениях ε/σ .

Из графиков видно, что с увеличением уровня ограничения ε коэффициент корреляции $R_\eta(\tau)$ «сужается» (уменьшается время корреляции) и соответственно энергетический спектр расширяется.

Оказывается, что такое заключение является весьма общим, т. е. в результате нелинейных безынерционных преобразований случайных процессов их спектр, как правило, расширяется. В этом состоит одно из характерных свойств безынерционных нелинейных преобразований.

Хотя выше мы ограничились анализом воздействия флюктуаций лишь на элементы с кусочно-линейными характеристиками, однако тот же метод применим и для элементов с кусочно-разрывными характеристиками более общего вида. Например, для преобразования

$$\eta(t) = g(\xi) = \begin{cases} 0 & , \quad \xi < \varepsilon, \\ s(\xi - \varepsilon)^2, & \xi > \varepsilon \end{cases} \quad (5.6.11)$$

получим

$$m_\eta = s\sigma^2 \left[\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\sigma^2} \right) \Phi \left(-\frac{\varepsilon}{\sigma} \right) - \frac{\varepsilon}{\sigma} \Phi' \left(\frac{\varepsilon}{\sigma} \right) \right], \quad (5.6.12)$$

$$k_\eta(\tau) = \sigma_\eta^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n(\tau), \quad a_n = \frac{4(s\sigma^2)^2}{n! \cdot \eta^2} \left[\Phi^{(n-2)} \left(-\frac{\varepsilon}{\sigma} \right) \right]^2. \quad (5.6.13)$$

Следует также указать, что полученные выше формулы применимы к кусочно-разрывным преобразованиям суммы двух и большего числа нормальных стационарных взаимно коррелированных флюктуаций. Если $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — нормальные стационарные и стационарно связанные флюктуации с нулевыми средними значениями и функциями корреляции

$$\langle \xi_1(t) \xi_1(t+\tau) \rangle = \sigma_1^2 R_1(\tau), \quad \langle \xi_2(t) \xi_2(t+\tau) \rangle = \sigma_2^2 R_2(\tau),$$

$$\langle \xi_1(t) \xi_2(t+\tau) \rangle = \sigma_1 \sigma_2 R_{12}(\tau),$$

то в предыдущих формулах нужно положить

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 R_{12}(0),$$

$$R(\tau) = \sigma^{-2} \{ \sigma_1^2 R_1(\tau) + \sigma_2^2 R_2(\tau) + \sigma_1 \sigma_2 [R_{12}(\tau) + R_{12}(-\tau)] \}.$$

Эффективность использования δ -функции проявляется не только при вычислении корреляционных функций выходных флюктуаций, но также и при определении высших моментов [11], а также при рассмотрении кусочно-линейных преобразований негауссовых флюктуаций [12].

Изложенная методика с успехом может быть применена к вычислению функции корреляции различных случайных сообщений, квантованных по уровню [13, 14].

§ 7. КВАНТОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ СООБЩЕНИЙ

В общем случае под квантованием можно понимать преобразование непрерывной функции времени в ступенчатую кривую. В современных системах связи часто применяют преобразование исходного сообщения в ряд фиксированных значений, при помощи которых осуществляют модуляцию радиосигнала и его передачу для

последующего восстановления сообщения на приемной стороне. При этом сообщение подвергают квантованию.

Обычно применяют два способа квантования: 1) по уровням и 2) по времени и по уровням.

Процесс квантования сообщения $\xi(t)$ по уровням поясняет рис. 5.18. Разобъем интервал возможных значений функции $\xi(t)$ на элементарные подинтервалы точками $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N-1}$. Величины ξ_i принято называть порогами квантования, а разность между ними

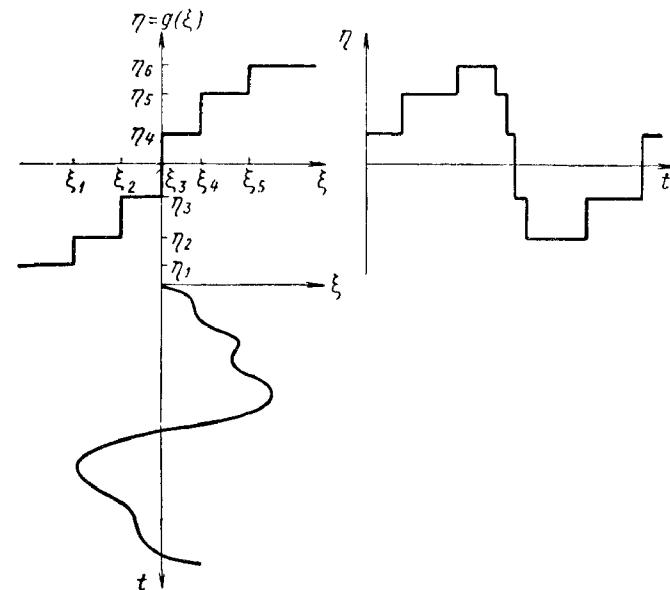


Рис. 5.18. Квантование по уровням.

$\Delta_i = \xi_i - \xi_{i-1}$ — шагом квантования. Если истинное значение сообщения $\xi(t)$ в какой-либо момент времени t находится внутри некоторого подинтервала Δ_i , то вместо него берется соответствующий уровень η_i . При этом вместо непрерывной функции $\xi(t)$ будет получена ступенчатая кривая $\eta(t)$. Такое преобразование можно осуществить, если исходную функцию $\xi(t)$ подвергнуть нелинейному преобразованию $g(\xi)$ ступенчатого вида (рис. 5.18).

Квантование по времени и по уровням можно получить путем рассмотрения временных отсчетов функции $\xi(t)$ через определенные интервалы времени Θ (стробирование), пропускания этих отсчетов через нелинейный элемент с характеристикой $g(\xi)$ ступенчатого типа и последующего расширения отдельных отсчетов до величины интервала квантования по времени Θ . Сказанное поясняет рис. 5.19.

Предположим, что квантованию по уровням подвергается нормальный стационарный шум $\xi(t)$ с нулевым средним значением и

функцией корреляции $\sigma^2 R(\tau)$. Обозначим разность между соседними уровнями квантования через $\Delta_i = \eta_{i+1} - \eta_i$, $i = 1, 2, 3, \dots, N - 1$. Будем для простоты считать общее число уровней квантования четным числом, а функцию $g(\xi)$ — нечетной, т. е. $g(\xi) = -g(-\xi)$. Тогда, очевидно, среднее значение процесса $\eta(t)$ равно нулю, а функция корреляции определяется формулой (5.6.3):

$$k_\eta(\tau) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \Phi^{(n+1)}\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) d\xi \right\}^2 \frac{R^n(\tau)}{n!}. \quad (5.7.1)$$

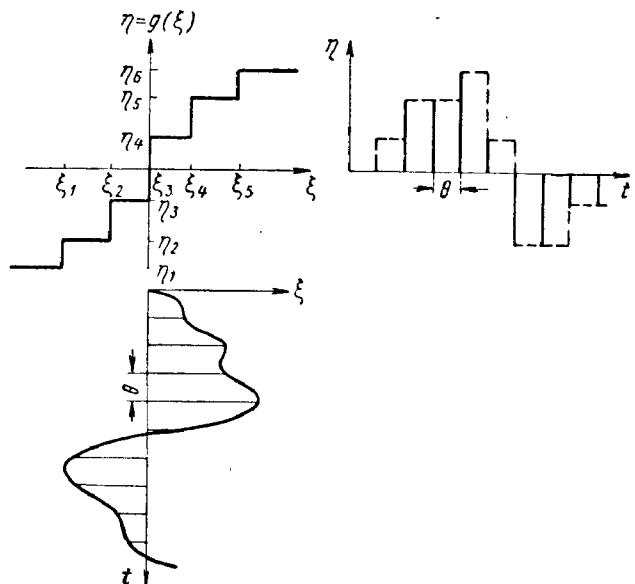


Рис. 5.19. Квантование по времени и уровням.

Выполнив интегрирование по частям и учитывая, что

$$g'(\xi) = \sum_{i=1}^{N-1} \Delta_i \delta(\xi - \xi_i),$$

найдем

$$\int_{-\infty}^{\infty} g'(\xi) \Phi^{(n)}\left(\frac{\xi}{\sigma}\right) d\xi = \sum_{i=1}^{N-1} \Delta_i \Phi^{(n)}\left(\frac{\xi_i}{\sigma}\right).$$

Подставив это выражение в (5.7.1), получим формулу для функции корреляции

$$k_\eta(\tau) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{N-1} \Delta_i \Phi^{(n)}\left(\frac{\xi_i}{\sigma}\right) \right]^2 \frac{R^n(\tau)}{n!}. \quad (5.7.2)$$

Иногда представляет интерес задача выбора оптимальных порогов или уровней квантования, при которых средняя квадратичная погрешность между $\xi(t)$ и $\eta(t)$ минимальна:

$$\epsilon_{min}^2 = \langle [\xi(t) - \eta(t)]^2 \rangle. \quad (5.7.3)$$

Результаты решения этой задачи приведены в работе [14]. Для частного случая, когда разность между соседними уровнями квантования постоянна ($\Delta_i = \Delta_0 = \text{const}$), они частично воспроизведены в табл. 5.7.1. При этом принято $\sigma = 1$.

Таблица 5.7.1

Оптимальные уровни квантования

Число уровней N	2	4	8	16	32
Разность между соседними уровнями Δ_0	1,596	0,9957	0,5860	0,3352	0,1881
Среднеквадратичная погрешность ϵ_{min}^2	0,3634	0,1188	0,03744	0,01154	0,00349

Оказывается, что при числе уровней квантования $N \leq 8$ неравномерный шаг квантования по уровням незначительно уменьшает величину средней квадратичной погрешности (например, для $N = 8$ при неравномерном шаге $\epsilon_{min}^2 = 0,03454$ вместо 0,03744).

Функцию корреляции ступенчатого процесса $\eta(t)$, получающегося в результате квантования нормального стационарного шума $\xi(t)$ по времени и по уровням (рис. 5.19), можно вычислить следующим образом. Сначала функция корреляции отсчетов η_i на выходе нелинейного устройства с характеристикой $g(\xi)$ выражается через функцию корреляции отсчетов ξ_j . Затем каждое отсчетное значение η_i умножается на прямоугольный импульс единичной высоты длительностью Θ . После этого задача сводится к вычислению функции корреляции случайного импульсного процесса (см. § 3 гл. 4).

§ 8. КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СУММЫ СИГНАЛА И ШУМА

Метод, изложенный в § 6, можно распространить на нелинейные преобразования суммы гармонического сигнала и шума [11]. Однако ввиду громоздкости математических преобразований указаем лишь применительно к частному примеру путь получения конечных формул и приведем количественные результаты, относящиеся к умножению частоты.

Пусть на нелинейный элемент с характеристикой (см. рис. 5.12, δ)

$$\eta(t) = g(\xi(t)) = \begin{cases} s(\xi(t) - \varepsilon) & \text{при } \xi \geq \varepsilon, \\ 0 & \text{при } \xi < \varepsilon \end{cases} \quad (5.8.1)$$

воздействует случайное напряжение $\xi(t) = s(t) + n(t)$, где $s(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$ — гармонический сигнал с равномерно распределенной случайной фазой φ ; $n(t)$ — нормальный стационарный шум с нулевым средним значением и функцией корреляции (5.6.1). Нужно найти функцию корреляции $k_\eta(\tau)$ для выходного напряжения $\eta(t)$.

Нелинейную характеристику (5.8.1) можно записать иначе:

$$\eta(t) = g(\xi(t)) = \begin{cases} sn(t) & \text{при } n(t) \geq e - s(t), \\ 0 & \text{при } n(t) < e - s(t). \end{cases} \quad (5.8.2)$$

Считая пока $s(t)$ постоянной величиной, к преобразованию (5.8.2) можно применить все рассуждения, приведшие к формулам (5.6.2 д) и (5.6.4 д). Если затем воспользоваться формулой (5.3.10) и выполнить усреднение по случайной фазе φ , то получим следующую формулу для функции корреляции [11, 15]:

$$k_\eta(\tau) = (so)^2 \sum_{\substack{n, v=0 \\ (n=v \neq 0)}}^{\infty} \frac{\epsilon}{n!} C_{nv}^2 R^n(\tau) \cos v \omega_0 \tau, \quad (5.8.3)$$

где

$$C_{nv} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{A_0}{2\sigma} \right)^2 \frac{1}{\mu! (\mu+v)!} \Phi^{(n+v+2\mu-1)} \left(-\frac{\epsilon}{\sigma} \right). \quad (5.8.4)$$

Рассмотрим структуру выходного сигнала. Если входной шум «низкочастотный», т. е. коэффициент корреляции $R(\tau)$ не содержит осциллирующих множителей высокой частоты, то в энергетическом спектре выходного сигнала отдельные коэффициенты C_{nv}^2 (с точностью до постоянных множителей) имеют следующий смысл:

C_{00}^2 — постоянная составляющая выходного сигнала;
 $C_{n0}^2, n \neq 0$ — «низкочастотные» шумовые составляющие, представляющие искаженный нелинейным устройством входной шум;

C_{01}^2 — первая гармоника высокочастотного колебания;
 $C_{n1}^2, n \neq 0$ — шумовой спектр около частоты ω_0 ;
 C_{0v}^2 — v -я гармоника колебания;
 $C_{nv}^2, n \neq 0$ — шумовой спектр около частоты $v\omega_0$ и т. д.

Отметим, что в любой конкретной задаче выходной спектр ограничен и поэтому необходимо вычислять лишь определенные коэффициенты C_{nv}^2 . Ряд (5.8.4) сходится достаточно быстро при $A_0 \lesssim 2\sigma$; при больших значениях A_0 ряд сходится медленно.

Применим формулу (5.8.3) к одному из возможных вариантов умножителя частоты (рис. 5.20). Предполагается, что входной контур имеет резонансную частоту ω_0 , а выходной настроен на какую-либо гармонику $v\omega_0$. Анодно-сеточная характеристика лампы умножителя аппроксимируется кусочно-линейной кривой (5.8.1).

Шум $n(t)$ на входе умножителя получается в результате прохождения дробовых и тепловых флуктуаций предыдущих каскадов через высокодобротный входной контур. Функция корреляции такого шума имеет вид

$$k(\tau) = \sigma^2 R(\tau) = \sigma^2 \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau, \quad (5.8.5)$$

где $\rho(\tau)$ — медленная по сравнению с $\cos \omega_0 \tau$ функция.

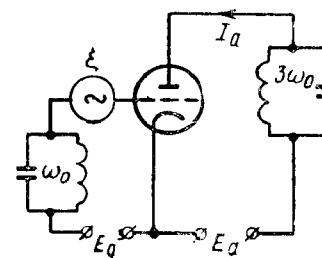


Рис. 5.20. Схема умножителя частоты.

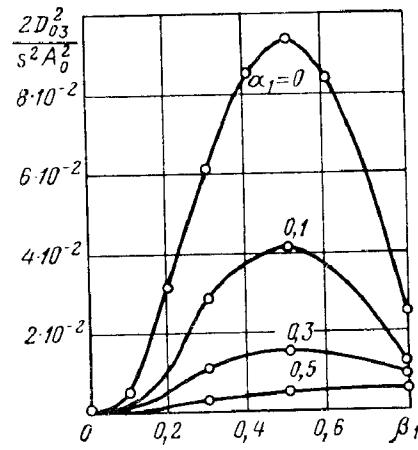


Рис. 5.21. Зависимость мощности третьей гармоники от α_1 и β_1 .

Хотя при исследовании умножителя частоты возникает несколько практически важных задач (преобразование флуктуаций фазы сигнала при наличии дополнительного шума и др.), ограничимся рассмотрением совместного воздействия гармонического колебания и входных флуктуаций. Вычислим значение третьей гармоники сигнала и отношение сигнал/шум на выходе умножителя.

Если подставить значение коэффициента корреляции (5.8.5) в формулу (5.8.3) и выделить коэффициенты C_{nv}^2 , которые определяют спектр в окрестности третьей гармоники сигнала ($v = 3$), то можно прийти к следующему результату:

$$k_{3\eta}(\tau) = \frac{1}{2} (sA_0)^2 \sum_{n=0}^{\infty} D_{n3}^2 \rho^n(\tau) \cos 3\omega_0 \tau. \quad (5.8.6)$$

Коэффициент D_{03}^2 , характеризующий мощность третьей гармоники колебания, в зависимости от $\beta_1 = \epsilon/A_0$ для нескольких значений $\alpha_1 = \sigma/A_0$ представлен на рис. 5.21 Кривая D_{03}^2 при $\alpha_1 = 0$, определяемая формулой

$$D_{03}^2 = \left(\frac{sA_0}{\pi} \right)^2 \left(-\frac{1}{2} \sin 2\psi_0 + \frac{1}{4} \sin 4\psi_0 - \frac{2}{3} \beta_1 \cos 3\psi_0 \right)^2, \quad \psi_0 = \arcsin \beta_1,$$

дает мощность третьей гармоники в отсутствие шума.

Из графиков видно, что если в отсутствие шума максимум мощности третьей гармоники получается при $\beta_1 = 0$ (что соответствует углу отсечки 60°), то при наличии шума этот максимум с увеличением интенсивности шума сглаживается и смещается в сторону больших значений β_1 (т. е. меньших углов отсечки).

Значения первых четырех коэффициентов D_{n3}^2 приведены в табл. 5.8.1. Отношение сигнал/шум определяется по данным этой таблицы формулой

$$\frac{\text{сигнал}}{\text{шум}} = \frac{D_{03}^2}{\sum_{n=1}^{\infty} D_{n3}^2}. \quad (5.8.7)$$

Таблица 5.8.1

Значения коэффициентов D_{n3}^2

β_1	10D ₁₃ ²			10D ₂₃ ²			10D ₃₃ ²			10D ₄₃ ²		
	$\frac{1}{s}$	$\frac{3}{s}$	$\frac{5}{s}$									
0,3	0,003	0,012	0,011	0,000	0,003	0,007	0,000	0,001	0,003	0,000	0,000	0,001
0,5	0,004	0,021	0,021	0,000	0,005	0,014	0,000	0,001	0,006	0,000	0,000	0,002
0,8	0,004	0,017	0,022	0,000	0,005	0,017	0,000	0,001	0,003	0,000	0,000	0,001

§ 9. МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Сущность этого метода, предложенного С. Райсом [3] и подробно описанного во многих книгах [16—20], состоит в том, что характеристика нелинейного элемента $\eta(t) = g(\xi(t))$ представляется в виде контурного интеграла

$$\eta = g(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_L F(ju) e^{ju\xi} du, \quad (5.9.1)$$

где L — соответствующим образом выбранный контур интегрирования в комплексной плоскости u .

В тех случаях, когда функция $g(\xi)$ обращается в нуль на бесконечности ($\xi = \pm \infty$), можно ограничиться действительными зна-

чениями u и в качестве преобразования (5.9.1) использовать преобразование Фурье, при этом из обратного преобразования имеем

$$F(ju) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-ju\xi} d\xi. \quad (5.9.2)$$

Если функция $g(\xi)$ обращается в нуль при $\xi < 0$ (или при ξ , меньшем некоторого фиксированного числа), то следует применять теорию преобразований Лапласа и рассматривать соотношение (5.9.1) как интеграл обращения:

$$\left. \begin{aligned} g(\xi) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{C-j\infty}^{C+j\infty} e^{pu} F(p) dp = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-iC}^{\infty-iC} e^{ju\xi} F(ju) du, \\ F(p) &= \int_0^{\infty} e^{-pu} g(\xi) d\xi, \quad (p = ju). \end{aligned} \right\} \quad (5.9.3)$$

Когда при $\xi \rightarrow \infty$ функция $g(\xi)$ возрастает не быстрее некоторой степени аргумента ξ , то в качестве контура интегрирования здесь можно взять действительную ось ($C = 0$) с обходом начала координат снизу.

В тех случаях, когда функция $g(\xi)$ возрастает в обе стороны (как при $\xi \rightarrow \infty$, так и при $\xi \rightarrow -\infty$), целесообразно пользоваться двусторонним преобразованием Лапласа.

На основании соотношения (5.9.1) для первых двух моментов можем написать

$$\left. \begin{aligned} m_\eta &= \langle \eta \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_L F(ju) \langle e^{ju\xi} \rangle du, \\ m_{\eta\eta}(\tau) &= \langle \eta(t) \eta(t+\tau) \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int_L \int_L F(ju_1) F(ju_2) \times \\ &\quad \times \langle \exp j(u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2) \rangle du_1 du_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.9.4)$$

Аналогично записываются выражения для других моментов.

Видно, что моментные функции выходного процесса выражаются через известные характеристические функции входного процесса и преобразованные характеристики нелинейных элементов. Таким образом, задача сводится к формальному вычислению интегралов вида (5.9.4). Эти вычисления во многих случаях удается сравнительно просто выполнить, если входной процесс $\xi(t)$ является нормальным шумом. При наличии суммы сигнала и шума вычисления, как и в прямом методе, становятся более сложными.

§ 10. НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НОРМАЛЬНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ

Если $\xi(t)$ нормальный процесс, то в формулы (5.9.4) нужно подставить выражения одномерной (3.15.7) и двумерной (3.15.9) характеристических функций. Например, для нормального стационарного процесса $\xi(t)$ с нулевым средним значением ($m = 0$) с учетом формулы (3.15.20) можем написать

$$\begin{aligned} m_{11}(\tau) &= \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_L \int_L F(ju_1) F(ju_2) \exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{2} [u_1^2 + 2R(\tau) u_1 u_2 + u_2^2] \right\} du_1 du_2. \end{aligned} \quad (5.10.1)$$

Когда последний интеграл вычислить не удается, целесообразно воспользоваться разложением

$$e^{-\sigma^2 R u_1 u_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (\sigma^2 R u_1 u_2)^n.$$

Тогда получим

$$m_{11}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n^2}{n!} \sigma^{2n} R^n(\tau), \quad d_n = \frac{j^n}{2\pi} \int u^n F(ju) e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2} du. \quad (5.10.2)$$

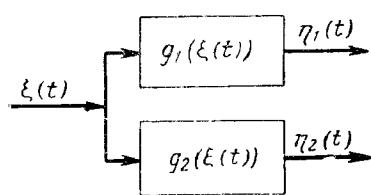


Рис. 5.22. К вычислению взаимного момента на выходе двух нелинейных элементов.

В некоторых случаях вычисления интегралов (5.9.4) для нормальных процессов упрощаются, если воспользоваться формулой (5.10.7), доказательство которой приводится ниже.

Пусть требуется найти взаимный момент $\tilde{m}_{11}(t_1, t_2) = \langle \eta_1(t_1) \eta_2(t_2) \rangle$ для процессов на выходе двух нелинейных элементов (рис. 5.22), на вход которых воздействует нормальный случайный процесс $\xi(t)$.

По аналогии с формулой (5.9.4) можем написать

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{11}(t, t+\tau) &= \tilde{m}_{11}(\tau) = \frac{1}{4\pi^2} \int_L \int_L F_1(ju_1) F_2(ju_2) \times \\ &\times \langle \exp j(u_1 \xi + u_2 \xi_\tau) \rangle du_1 du_2 = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_L \int_L F_1(ju_1) F_2(ju_2) \Theta_2(u_1, u_2) du_1 du_2, \end{aligned} \quad (5.10.4)$$

где $\Theta_2(u_1, u_2)$ — характеристическая функция (3.15.9).

Заметим, что для характеристической функции нормального процесса справедливо равенство

$$\frac{\partial^k \Theta_2}{\partial R^k} = (-1)^k (\sigma_1 \sigma_2 u_1 u_2)^k \Theta_2(u_1, u_2). \quad (5.10.5)$$

Из (5.10.4) и (5.10.5) следует, что

$$\frac{\partial^k \tilde{m}_{11}(\tau)}{\partial R^k} = \frac{(\sigma_1 \sigma_2)^k}{4\pi^2} \int_L (ju_1)^k F_1(ju_1) du_1 \int_L (ju_2)^k F_2(ju_2) \Theta_2(u_1, u_2) du_2.$$

Подставив сюда исходное определение характеристической функции

$$\Theta_2(u_1, u_2) = \langle \exp j(u_1 \xi + u_2 \xi_\tau) \rangle$$

и изменив порядок интегрирования и статистического усреднения, можем написать

$$\frac{\partial^k \tilde{m}_{11}(\tau)}{\partial R^k} = \frac{(\sigma_1 \sigma_2)^k}{4\pi^2} \left\langle \int_L (ju_1)^k F_1(ju_1) e^{ju_1 \xi} du_1 \int_L (ju_2)^k F_2(ju_2) e^{ju_2 \xi_\tau} du_2 \right\rangle.$$

Из формулы (5.9.1) следует, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_L (ju)^k F(ju) e^{ju\xi} du = g^{(k)}(\xi) = \frac{d^k g(\xi)}{d\xi^k}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k \tilde{m}_{11}(\tau)}{\partial R^k} &= (\sigma_1 \sigma_2)^k \langle g_1^{(k)}(\xi) g_2^{(k)}(\xi_\tau) \rangle = \\ &= (\sigma_1 \sigma_2)^k \int_{-\infty}^{\infty} g_1^{(k)}(\xi) g_2^{(k)}(\xi_\tau) w_2(\xi, \xi_\tau) d\xi d\xi_\tau, \end{aligned} \quad (5.10.6)$$

где $w_2(\xi, \xi_\tau)$ — нормальная плотность вероятности (3.15.8).

Формула (5.10.6) устанавливает связь между производными от взаимного момента по коэффициенту корреляции входного процесса и средним значением соответствующих производных от нелинейных

характеристик. Эта формула может быть обобщена и на моменты более высокого порядка. Однако нас пока интересуют, наоборот, частные результаты, следующие из (5.10.6).

Если нормальный процесс $\xi(t)$ стационарен и рассматривается одно нелинейное преобразование, то в (5.10.6) нужно положить $g_1(\xi) = g_2(\xi) = g(\xi)$. При этом получим

$$\frac{\partial^k m_{11}(\tau)}{\partial R^k(\tau)} = \sigma^{2k} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g^{(k)}(\xi) g^{(k)}(\xi_\tau) w_2(\xi, \xi_\tau) d\xi d\xi_\tau, \quad (5.10.7)$$

где $w_2(\xi, \xi_\tau)$ — двумерная нормальная плотность вероятности (3.15.19).

Полагая в (5.10.6) $g_1(\xi) = g(\xi)$, $g_2(\xi_\tau) = \xi_\tau$ и $k = 1$, получаем формулу, устанавливающую статистическую зависимость между входным и выходным процессами:

$$\frac{\partial \tilde{m}_{11}(\tau)}{\partial R(\tau)} = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} g'(\xi) w_1(\xi) d\xi = \text{const}. \quad (5.10.8)$$

Следовательно,

$$\tilde{m}_{11}(\tau) = \text{const} \cdot R(\tau) + C_0.$$

Но из физических соображений ясно, что при $R(\tau) = 0$, $\tilde{m}_{11}(\tau) = C_0 = m_\xi m_\eta$. Поэтому

$$k_{\xi\eta}(\tau) = \langle (\xi - m_\xi)(\eta - m_\eta) \rangle = \text{const} \cdot R(\tau), \quad (5.10.9)$$

т. е. взаимная корреляционная функция между входным нормальным процессом и процессом на выходе безынерционного нелинейного элемента по форме совпадает с автокорреляционной функцией входного процесса.

При вычислении по формуле (5.10.7) функции корреляции процесса на выходе нелинейных элементов с кусочно-разрывными характеристиками, как и в прямом методе [10], нужно брать такое значение k , при котором $g^{(k)}(\xi)$ представляет сумму дельта-функций [21]. Тогда интеграл в правой части всегда вычисляется и, следовательно, находится производная $\partial^k m_{11}/\partial R^k$. Что касается последующего интегрирования по коэффициенту корреляции R с целью определения $m_{11}(\tau)$, то оно легко выполняется лишь в частных случаях, например, когда воздействующий нормальный стационарный процесс $\xi(t)$ имеет нулевое среднее значение и характеристика имеет разрыв в нуле, т. е. $g^{(k)}(\xi) = \pm \delta(\xi)$ [22].

Формулу (5.10.6) можно обобщить на нелинейные безынерционные преобразования более общего типа [23].

$$\eta_{12}(t_1, t_2) = g_{12}(\xi_1(t_1), \xi_2(t_2)), \quad (5.10.10)$$

где $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — нормальные случайные процессы с нулевыми средними значениями. В данном случае она принимает вид:

$$\frac{\partial^k \tilde{m}_{11}}{\partial R^k} = (\sigma_1 \sigma_2)^k \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^{2k} g_{12}(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1^k \partial \xi_2^k} \right\} w_2(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (5.10.11)$$

где $\tilde{m}_{11} = \langle \eta_{12}(t_1, t_2) \rangle$.

В том частном случае, когда

$$\eta_{12}(t_1, t_2) = \eta_1(t_1) \eta_2(t_2) = g_1(\xi_1(t_1)) g_2(\xi_2(t_2)),$$

формула (5.10.11) переходит в (5.10.6).

Рассмотрим два примера.

1. Частотная модуляция гармонического колебания нормальным шумом. Различные виды модуляции гармонического колебания случайными сообщениями подробно рассмотрены в работах [11, 18]. Приведем здесь один частный пример [11], результаты решения которого будут использованы в дальнейшем.

Пусть имеется стохастический сигнал

$$\zeta(t) = A(t) \cos [\omega t + \varphi(t) - \theta], \quad (5.10.12)$$

в котором $A(t)$ и $\varphi(t)$ — действительные стационарные случайные функции, θ — случайная начальная фаза, равномерно распределенная на интервале $(-\pi, \pi)$.

Функция корреляции такого сигнала равна

$$\begin{aligned} k_\zeta(\tau) &= \langle A(t) A(t+\tau) \cos [\omega t + \varphi(t) - \theta] \cos [\omega(t+\tau) + \varphi(t+\tau) - \theta] \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle A(t) A(t+\tau) \{ \cos [\omega t + \varphi(t) - \varphi(t)] + \\ &\quad + \cos [\omega(2t+\tau) + \varphi(t+\tau) + \varphi(t) - 2\theta] \} \rangle. \end{aligned}$$

В этом выражении необходимо выполнять усреднение по ансамблю реализаций $A(t)$ и $\varphi(t)$, а также по случайной фазе θ . Если значения θ не зависят от $A(t)$ и $\varphi(t)$, то в результате усреднения по θ последнее слагаемое в фигурных скобках обратится в нуль и, следовательно,

$$k_\zeta(\tau) = \frac{1}{2} \langle A(t) A(t+\tau) \cos [\omega t + \varphi(t+\tau) - \varphi(t)] \rangle.$$

Такую формулу можно записать иначе:

$$k_\zeta(\tau) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \langle A(t) A(t+\tau) \exp j[\omega t + \varphi(t+\tau) - \varphi(t)] \rangle. \quad (5.10.13)$$

Применим формулу (5.10.13) к частному виду сигнала, модулированного по частоте нормальным стационарным шумом $\xi(t)$ с нулевым средним значением, дисперсией σ^2 и коэффициентом корреляции $R(\tau)$:

$$\xi(t) = A_0 \cos [\omega_0 t + \varphi(t)], \quad \varphi(t) = \chi \int_0^t \xi(x) dx. \quad (5.10.14)$$

Имеем

$$k_\xi(\tau) = \frac{1}{2} A_0^2 \operatorname{Re} \langle \exp[i\chi \eta(\tau)] \rangle \cos \omega_0 \tau, \quad (5.10.15)$$

где

$$\eta(\tau) = \left\{ \int_0^{t+\tau} \xi(x) dx - \int_0^t \xi(x) dx \right\} = \int_t^{t+\tau} \xi(x) dx = \int_0^\tau \xi(x) dx.$$

Если $\xi(t)$ — нормальный шум, то $\eta(\tau)$ будет также нормальным процессом, причем дисперсия его равна:

$$\sigma_\eta^2(\tau) = \sigma^2 \int_0^\tau \int_0^\tau R(x-y) dx dy. \quad (5.10.16)$$

Одномерная характеристическая функция для η определяется формулой (3.15.18):

$$\Theta_1(u) = \langle \exp(iu\eta) \rangle = \exp \left(-\frac{1}{2} \sigma_\eta^2 u^2 \right). \quad (5.10.17)$$

Из сравнения формул (5.10.15) и (5.10.17) следует, что

$$k_\xi(\tau) = \frac{1}{2} A_0^2 \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau, \quad \rho(\tau) = \exp \left[-\frac{1}{2} \chi^2 \sigma_\eta^2(\tau) \right]. \quad (5.10.18)$$

Можно показать, что

$$\begin{aligned} \sigma_\eta^2 &= 2\sigma^2 \alpha^{-2} (\alpha |\tau| + e^{-\alpha|\tau|} - 1) \quad \text{при } R(\tau) = R_1(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|), \\ \sigma_\eta^2 &= \sigma^2 \alpha^{-2} \{e^{-\alpha^2 \tau^2} + \alpha \tau \sqrt{\pi} [2\Phi(\sqrt{2}\alpha\tau) - 1] - 1\} \\ &\quad \text{при } R(\tau) = R_2(\tau) = \exp(-\alpha^2 \tau^2). \end{aligned}$$

Соответственно для $\rho(\tau)$ получим формулы

$$\begin{aligned} \rho_1(s) &= \exp[-\beta(s + e^{-s} - 1)], \\ \rho_2(s) &= \exp \left\{ -\beta \left[\frac{1}{2} (e^{-s^2} - 1) + s \sqrt{\pi} \left(\Phi(\sqrt{2}s) - \frac{1}{2} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.10.19)$$

где

$$s = \alpha |\tau|, \quad \beta = \chi^2 \sigma^2 \alpha^{-2}. \quad (5.10.20)$$

Графики функций $\rho_1(s)$ и $\rho_2(s)$ для двух значений $\beta = 1$ и 10 приведены на рис. 5.23. Пунктиром показаны те же функции, вычисленные приближенным методом (см. § 6 гл. 8).

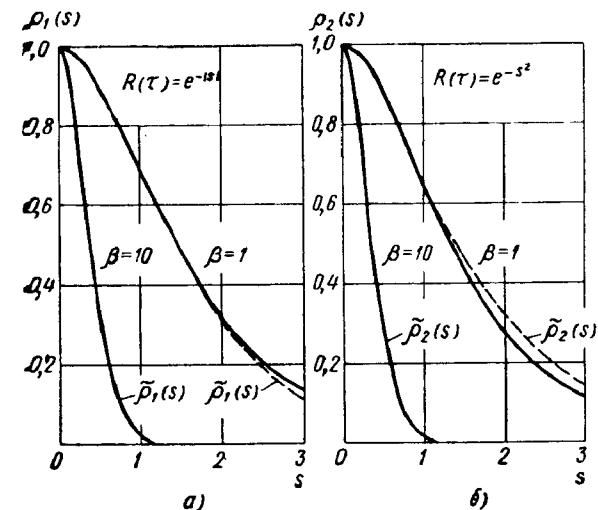


Рис. 5.23. Нормированные корреляционные функции для ЧМ стохастических сигналов.

2. Воздействие нормального шума на сглаженный ограничитель. Пусть нормальный стационарный шум $\xi(t)$ с нулевым средним значением и функцией корреляции $k(\tau) = \sigma^2 R(\tau)$ воздействует на нелинейный элемент (сглаженный ограничитель) с характеристикой [24]

$$\eta(\xi) = a + \frac{2a}{\gamma \sqrt{2\pi}} \int_0^{\xi} e^{-\frac{x^2}{2\gamma^2}} dx, \quad (5.10.21)$$

где a и γ — постоянные величины.

Нужно найти функцию корреляции шума $\eta(t)$, получающуюся на выходе такого ограничителя.

Характеристика рассматриваемого ограничителя изображена на рис. 5.24. Из (5.10.21) следует, что $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \eta(\xi) = 0$; $\eta(0) = a$ и $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \eta(\xi) = 2a$. Поэтому величина a характеризует уровень ограничения. Величина γ характе-

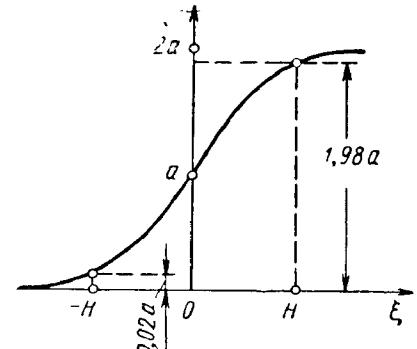


Рис. 5.24. Характеристика сглаженного ограничителя.

ризует наклон характеристики ограничителя (точнее, значение производной при $\xi = 0$). Чем больше γ , тем меньше наклон. При $\gamma \rightarrow 0$ сглаженный ограничитель переходит в идеальный.

Написав формулу (5.10.7) при $k = 1$ и подставив производную

$$\eta'(\xi) = \frac{2a}{\gamma V^{2\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\gamma^2}\right),$$

после преобразований получим

$$\frac{\partial m_{11}(\tau)}{\partial R(\tau)} = \frac{2a^2}{\pi\gamma^2} \sqrt{\frac{b^2 - d^2}{1 - R^2}} \int_0^\infty \frac{1}{2\pi\sqrt{b^2 - d^2}} \exp\left[-\frac{b\xi^2 - 2d\xi\xi_\tau + b\xi_\tau^2}{2(b^2 - d^2)}\right] d\xi d\xi_\tau, \quad (5.10.22)$$

где

$$d = \frac{R\gamma^2 b}{\gamma^2 + \sigma^2(1 - R^2)}, \quad b = \frac{\sigma^2\gamma^2 [\gamma^2 + \sigma^2(1 - R^2)]}{(\gamma^2 + \sigma^2) - \sigma^4 R^2}.$$

Двукратный интеграл в правой части (5.10.22) есть интеграл от двумерной нормальной плотности вероятности по всей области изменения переменных, и поэтому он равен единице. Следовательно,

$$\frac{\partial m_{11}(\tau)}{\partial R(\tau)} = \frac{2a^2}{\pi\gamma^2} \sqrt{\frac{b^2 - d^2}{1 - R^2}} = \frac{2a^2}{\pi} \left(1 + \frac{\gamma^2}{\sigma^2}\right) \left[1 - \left(\frac{\sigma^2}{\gamma^2 + \sigma^2} R\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Отсюда находим

$$m_{11}(\tau) = \frac{2a^2}{\pi} \int_0^{\frac{\sigma^2}{\gamma^2 + \sigma^2} R(\tau)} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + C = \frac{2a^2}{\pi} \arcsin\left[\frac{R(\tau)}{1 + \left(\frac{\gamma}{\sigma}\right)^2}\right] + C, \quad (5.10.23)$$

где C — произвольная постоянная интегрирования. Она определяется из условия $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) = 0$, $\lim_{\tau \rightarrow \infty} m_{11}(\tau) = C = m_\eta^2 = a^2$. Поэтому, функция корреляции шума на выходе сглаженного ограничителя равна

$$k_\eta(\tau) = \frac{2a^2}{\pi} \arcsin\left[\frac{R(\tau)}{1 + (\gamma/\sigma)^2}\right]. \quad (5.10.24)$$

Если воспользоваться разложением $\arcsin z$ в ряд Тейлора, то по формулам (3.10.1) или (3.10.10) можно вычислить спектр шума $\eta(t)$ [25].

§ 11. НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИГНАЛА И ШУМА

Рассуждения, приведенные в § 9, легко обобщаются, когда нелинейному преобразованию подвергается сумма нормального шума $\xi(t)$ и гармонического колебания $s(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \theta)$, имеющего случайную начальную фазу θ , не зависящую от $\xi(t)$.

Характеристическая функция суммы $\eta(t) = s(t) + \xi(t)$ равна произведению характеристических функций слагаемых:

$$\langle e^{j\eta\tau} \rangle = \langle e^{js\tau} \rangle \langle e^{j\xi\tau} \rangle = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{jA_0 u \cos \theta} d\theta = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2} J_0(A_0 u), \quad (5.11.1)$$

где $J_0(A_0 u)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

Аналогично для двумерной характеристической функции с учётом (3.15.2) и (5.3.9) получим

$$\begin{aligned} \langle e^{j(u_1 \eta_1 + u_2 \eta_2)} \rangle &= \langle e^{j(u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2)} \rangle \langle e^{j(u_1 s_1 + u_2 s_2)} \rangle = \\ &= \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}(u_1^2 + 2R u_1 u_2 + u_2^2)\right\} J_0(A_0 \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + 2u_1 u_2 \cos \omega_0 \tau}). \end{aligned} \quad (5.11.2)$$

Если представить эти выражения для характеристических функций в (5.9.4), то получим формулы для первых двух моментов. При вычислении $m_{11}(\tau)$ часто используется известная теорема сложения бесселевых функций:

$$\begin{aligned} J_0(A_0 \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + 2u_1 u_2 \cos \omega_0 \tau}) &= \\ &= \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v J_v(A_0 u_1) J_v(A_0 u_2) \cos v\omega_0 \tau, \end{aligned} \quad (5.11.3)$$

где $\in_0 = 1$; $\in_v = 2$ ($v \neq 0$).

Воспользовавшись также разложением экспоненты $\exp(-\sigma^2 R u_1 u_2)$ в ряд, получим

$$\begin{aligned} m_{11}(\tau) &= \langle g(\eta(t)) g(\eta(t + \tau)) \rangle = \\ &= \sum_{n, v=0}^{\infty} \frac{\in_v}{n!} C_{nv}^2 \sigma^{2n} R^n(\tau) \cos v\omega_0 \tau, \end{aligned} \quad (5.11.4)$$

где

$$C_{nv} = \frac{J^{n+v}}{2\pi} \int_L u^n F(ju) J_v(A_0 u) e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2} du. \quad (5.11.5)$$

Корреляционная функция $k_\eta(\tau)$ получается из формулы (5.11.4), если исключить член, соответствующий $n=0$, $v=0$:

$$k_\eta(\tau) = \sum_{\substack{n, v=0 \\ (n=v \neq 0)}}^{\infty} \frac{C_{nv}}{n!} \sigma^{2n} R^n(\tau) \cos v\omega_0 \tau. \quad (5.11.6)$$

Таким образом, задача нахождения корреляционной функции сведена к формальному вычислению интегралов (5.11.5).

Рассмотрим в качестве примера воздействие сигнала и шума на слаженный ограничитель (5.10.21). В данном случае

$$F(ju) = \frac{2a}{ju} e^{-\frac{1}{2} (\gamma^2 + \sigma^2) u^2}. \quad (5.11.7)$$

Подставив (5.11.7) в (5.11.5), имеем

$$C_n = j^{n+v-1} \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u^{n-1} e^{-\frac{1}{2} (\gamma^2 + \sigma^2) u^2} [J_v(A_0 u) + (-1)^{n-1} J_v(-A_0 u)] du.$$

Для функций Бесселя справедливы соотношения:

$$J_v(z) = \begin{cases} J_v(-z) & \text{при } v \text{ четном,} \\ -J_v(-z) & \text{при } v \text{ нечетном.} \end{cases}$$

Поэтому все коэффициенты C_{nv} , для которых сумма $n+v$ есть четное число, равны нулю. При $n+v$ нечетном можем написать

$$C_{nv} = j^{n+v-1} \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} u^{n-1} e^{-\frac{1}{2} (\gamma^2 + \sigma^2) u^2} J_v(A_0 u) du.$$

В результате вычисления этого интеграла получим

$$C_{nv} = \begin{cases} \frac{al^{-n/2} \lambda^{v/2}}{v! \Gamma\left(\frac{2-n-v}{2}\right)} {}_1F_1\left(\frac{n+v}{2}; v+1; -\lambda\right) & \text{при } n+v \text{ нечетном,} \\ 0 & \text{при } n+v \text{ четном,} \end{cases} \quad (5.11.8)$$

где ${}_1F_1(\alpha; \beta; -z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция,

$$\lambda = \frac{A_0^2}{2(\sigma^2 + \gamma^2)}, \quad l = \frac{\sigma^2 + \gamma^2}{2}. \quad (5.11.9)$$

Полагая в (5.11.8) и (5.11.9) $\gamma = 0$, получим соответствующие формулы для идеального ограничителя.

Основная компонента корреляционной функции сигнала на выходе ограничителя $k_{0s}(\tau)$ соответствует в формуле (5.11.6) члену при $n=0$, $v=1$ и равна:

$$k_{0s}(\tau) = \frac{2a^2 \lambda}{\pi} {}_1F_1^2\left(\frac{1}{2}; 2; -\lambda\right) \cos \omega_0 \tau. \quad (5.11.10)$$

Будем относить все остальные члены к корреляционной функции шума на выходе ограничителя $k_{0\xi}(\tau)$:

$$k_{0\xi}(\tau) = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{\sigma^2 R(\tau)}{l} \right]^n \frac{\lambda^v}{[v! \Gamma\left(\frac{2-n-v}{2}\right)]^2} \times \\ \times {}_1F_1^2\left(\frac{n+v}{2}; v+1; -\lambda\right) \cos v\omega_0 \tau. \quad (5.11.11)$$

Полагая в формулах (5.11.10) и (5.11.11) $\tau = 0$, можно найти отношение сигнал/шум $k_{0s}(0)/k_{0\xi}(0)$ на выходе ограничителя. В ряде радиотехнических устройств применяется схема, когда за

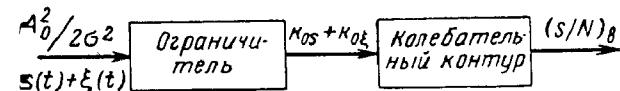


Рис. 5.25. Воздействие сигнала и шума на ограничитель и узкополосный колебательный контур.

ограничителем стоит узкополосный фильтр (рис. 5.25). При этом обычно интересуются отношением сигнал/шум на выходе этого фильтра.

Предположим, что узкополосным фильтром является колебательный контур, настроенный на частоту сигнала ω_0 и имеющий энергетическую полосу пропускания $\Delta f_{\text{эк}} \ll \Delta f_{\text{ш}}$, где $\Delta f_{\text{ш}}$ — энергетическая ширина спектра шума $\xi(t)$. Пусть центральная частота спектра шума $\xi(t)$ также совпадает с частотой сигнала ω_0 . Определим порог ограничения H как максимальное значение амплитуды гармонического колебания $s(t)$, при которой выходное напряжение ограничителя достигает 98% от его максимума (см. рис. 5.24). Нетрудно убедиться, что

$$H = 2,33 \gamma. \quad (5.11.12)$$

Обозначим через $(S/N)_B$ отношение квадрата эффективного значения сигнала к дисперсии шума на выходе рассматриваемой схемы (рис. 5.25) и через (\bar{S}/N) — аналогичное отношение для случая, когда ограничитель отсутствует. Тогда для небольших значений

параметра λ оказывается справедливой приближенная формула [26]

$$\left(\frac{S}{N}\right)_B = k_1 \left(\frac{S}{N}\right) \left[1 + k_2 \frac{\Delta f_\xi}{\Delta f_{\xi_k}} \left(\frac{S}{N}\right) \right], \quad \left(\frac{S}{N}\right) = \frac{\Delta f_{\xi_k}}{\Delta f_{\xi_k}} \left(\frac{A_0^2}{2\sigma^2} \right), \quad (5.11.13)$$

где Δf_ξ — ширина энергетического спектра шума $\xi(t)$ на уровне 0,5;

$\Delta f_k = \frac{2}{\pi} \Delta f_{\xi_k}$ — полоса пропускания контура на уровне 0,5 по мощности.

Значения коэффициентов k_1 и k_2 в зависимости от относительного порога ограничения приведены на рис. 5.26 для трех случаев: когда спектральная плотность шума $\xi(t)$ определяется резонансной

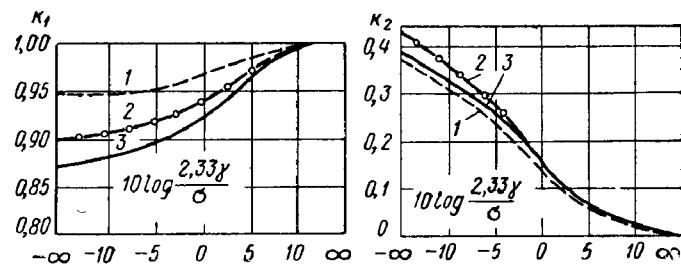


Рис. 5.26. Зависимость коэффициентов κ_1 и κ_2 от относительного порога ограничения (1 — спектр шума определяется резонансной кривой колебательного контура; 2 — гауссов; 3 — равномерный).

кривой колебательного контура (1), когда имеет вид гауссовой кривой (2) и когда она равномерна (3).

При анализе «узкополосных нелинейностей» рассматриваемого вида (рис. 5.25) в ряде случаев могут оказаться полезными результаты работ [27, 28].

ЛИТЕРАТУРА

1. Axelson G. S. Random noise with bias signals in nonlinear devices. Trans. IRE, 1959, AC-4, № 2.
2. Lampard D. G. The probability distribution of the filtered output of multiplier whose inputs are correlated, stationary, gaussian time series. Trans. IRE, 1956, IT-2, № 1.
3. Райс С. Теория флюктуационных шумов. Сб. статей: «Теория передачи электрических сигналов при наличии помех» (пер. с англ.). Изд-во иностранной литературы, 1953.
4. Боеv Г. П. Теория вероятностей. Гостехиздат, 1950.
5. Крамер Г. Математические методы статистики. Изд-во иностранной литературы, 1948.

6. Battell J. F., Lampard D. G. An expansion for some second-order probability distributions and its application to noise problems. Trans. IRE, 1955, IT-1, № 1.

7. Рытев С. М. Связь распределения квазимохроматического стационарного процесса с распределением его огибающей. ЖЭТФ, 1955, № 5 (11).

8. Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И. Прохождение случайных функций через нелинейные системы. «Автоматика и телемеханика», 1953, № 4.

9. Таблицы функции ошибок и ее первых двадцати производных. Пер. с англ. Баркл. С. и Большева Л. Н. Вычислительный центр АН СССР, 1965.

10. Амантов И. Н., Тихонов В. И. Воздействие флукутаций на типовые нелинейные элементы (прямой метод). «Известия АН СССР», ОГН, 1956, № 4.

11. Тихонов В. И. Воздействие электрических флукутаций на нелинейные радиотехнические устройства. Докторская диссертация. В ВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1956.

12. Амантов И. Н. Безынерционные преобразования огибающей квазигармонических флукутаций. «Радиотехника и электроника», 1959, № 3.

13. Веннет W. R. Spectra of quantized signals. BSTJ, 1948, № 3.

14. May J. Quantizing for minimum distortion. Trans. IRE, 1960, IT-6, № 1.

15. Тихонов В. И., Амантов И. Н. Воздействие сигнала и шума на нелинейные элементы (прямой метод). «Радиотехника и электроника», 1957, № 5.

16. Лэйнинг Дж. Х., Бэттиен Р. Г. Случайные процессы в задачах автоматического управления. Пер. с англ. Изд-во иностранной литературы, 1958.

17. Давенпорт В. Б., Рут В. Л. Введение в теорию случайных сигналов и шумов. Пер. с англ. Изд-во иностранной литературы, 1960.

18. Мидлтон Д. Введение в статистическую теорию связи, т. 1, 2. Пер. с англ. Изд-во «Советское радио», 1961.

19. Первозванский А. А. Случайные процессы в нелинейных автоматических системах. ГИФМЛ, 1962.

20. Деч Р. Нелинейные преобразования случайных процессов. Изд-во «Советское радио», 1965.

21. Price R. A useful theorem for nonlinear devices having gaussian input. Trans. IRE, 1958, IT-4, № 2.

22. Papoulis A. Comment on «an extension of Price's theorem». Trans. IEEE, 1965, IT-11, № 1.

23. McLean E. L. An extension of Price's theorem. Trans. IEEE, 1964, IT-10, № 2.

24. Battell R. F. The correlation function of smoothly limited gaussian noise. Trans. IRE, 1957, IT-3, № 3.

25. Мишев Б. Н. Определение временного положения импульсов при наличии помех. Изд-во «Советское радио», 1962.

26. Gales J. Signal-to-noise ratios in smooth limiters. Trans. IRE, 1959, IT-5, № 2.

27. Blachman N. M. Band-pass nonlinearities. Trans. IEEE, 1964, IT-10, № 2.

28. Nutall A. H. On the envelopes of zonal filter output of memoryless distortions of narrow-band processes. Trans. IEEE, 1965, IT-11, № 2.