Алексей Сергеевич Маругин 05.09.2024

почта для связи: ASM_ETU@mail.ru (ауд. 2214)

Экзамен: если будет тест (как на ТОР), то будут вопросы индивидуальны для каждой группы.

обнаружение сигнала → классификация сигнала → → измерение параметров сигнала

ДОПУСК ЕСТЬ

Литература: (может скинуть эл. версии)

- «Статистическая рад-техника», Тихонов В. И.
- —//—, Левин. Б. Р (рекомендация использовать трехтомник)
- «—//—, примеры и задачи». Журавлев Горелов
  *есть ошибки в ответах

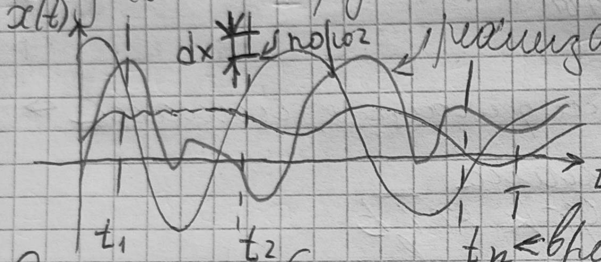
очень! • «Радиотехнические системы» под редакцией Казаринова (1991) - 2е переиздание

Учебные пособия «Модели сигналов и помех в рад. тех. и ТК системах» Ипатов, Коломенцкий, Маругин

- «Обнаружение и различение сигналов», —//—
- «Измерение параметров», различение —//—
- «Теория сигналов» Френкс

Математическое описание случайных процессов

Случайная функция $x(t)$, определенная на $[0;T]$



} ансамбль реализаций

← временные сечения

Описание случ. ф-ии

- Функция распределения $F(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, \dots t_n)$ = для каждого сечения временного выставляется порог, тогда

$$F(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = P(x(t_1) \le x_1, \dots, x(t_n) \le x_n)$$

Свойства:

- $F(-\infty, \dots, -\infty, t_1, \dots, t_n) = 0$ (также ! даже если $\forall$ аргумент $x_i = -\infty$)
- $F(+\infty, \dots, +\infty, t_1, \dots, t_n) = 1$
- $F(x_1, \dots, x_{n-1}, +\infty, t_1, \dots, t_n)$ - произойдет уменьшение размерности (условие согласованности) $= F(x_1, \dots, x_{n-1}, t_1, \dots, t_{n-1})$

ФР - неубывающая в любом направлении увеличения аргументов x_i

- Плотность вероятности $W(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)$

$$W(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$$

$$F(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots,t_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\dots\int_{-\infty}^{x_n} W(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots t_n)\,dx_1\dots dx_n$$

рассмотреть и для многомерного случая

[· Характеристическая функция – преобразование Фурье от W.] определить с помощью моментов определить ХФ; возвращение от моментов к W

$$W(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots t_n)\,dx_1\dots dx_n = P(x_1<x(t_1)\le x_1+dx_1,\dots,x_n<x(t_n)\le x_n+dx_n)$$

Свойства:

· $\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int W(x_1,\dots,x_n,t_1,\dots t_n)\,dx_1\dots dx_n = 1$ (Условие нормировки)

· $\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int W(x_1,\dots x_n,t_1,\dots t_n)\,dx_1\dots dx_{k\,(k<n)} = W(x_{k+1},\dots x_n,t_{k+1},\dots t_n)$

Условие согласованности

· $W(x_1,\dots x_n,t_1,\dots t_n)\ge 0$, ограничения сверху нет

$W(x_1,\dots x_n,t_1,\dots t_n)=\prod_{i=1}^{n} W(x_i,t_i)$ – условие независимости

Моменты

Пусть 12.09.2024

$\{k_i\}_{i=1}^{n}$ – числа $\in \mathbb{N}$

$m_{k_1,k_2,\dots k_n}(t_1,\dots t_n)$ – начальный момент $=$

$$= M\{x^{k_1}(t_1)\,x^{k_2}(t_2)\dots x^{k_n}(t_n)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\dots\int x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}\,W(x\dots,t)\,dx_1 dx_n$$

$\sum k_i$ – порядок момента

$\exists\, k_i=0,\ k_e=1,\ e\ne i,\ i=\overline{1,n} \Rightarrow m_1(t_e)=M\{x(t_e)\}=\int x_e W(x_e,t_e)\,dx_e = \overline{x}(t_e)$

Математическое ожидание

] $K_e = 2$

$m_2(t_e) = M\{x^2(t_e)\} = \int x_e^2 W(x_e, t_e)\,dx$ = мощность в t_e

] $K_m = K_e = 1$ - смешанный момент второго порядка

$m_{1,1}(t_e, t_m) = K(t_e, t_m) = \overline{x(t_e)\,x(t_m)} = \iint x_1 x_2 W(x_1, x_2, t_1, t_2)\,dx_1 dx_2$

мера линейной статистической взаимосвязи

Это ковариация (т.к. рассматриваем процесс)

Центральный момент

$M_{k_1,k_2,\dots,k_n}(t_1 \dots t_n) = M\{(x(t_1)-\overline{x(t_1)})^{k_1} \cdots (x(t_n)-\overline{x(t_n)})^{k_n}\} =$

$= \iint (x(t_1)-\overline{x(t_1)})^{k_1} \cdots (x_n - m(t_n))^{k_n} \cdot W(x_1, \dots x_n, t_1, \dots t_n)\,dx_1 \dots dx_n$

! Первый центральный момент равен 0!

$D(t_i) = M_2(t_i) = M\{(x(t_i) - m(t_i))^2\} = \int (x - m(t_i))^2 W(x_i, t_i)\,dx =$

$= m_2(t_i) - (\overline{m(t_i)})^2 = \sigma^2(t_i)$

$= m_2(t_i) - (\overline{x(t_i)})^2$

Смешанный центральный момент 2-го порядка

$R(t_i, t_j) = \overline{(x(t_i) - \overline{x(t_i)})(x(t_j) - \overline{x(t_j)})} =$

$= \iint (x_1 - m(t_i))(x_2 - m(t_j))\, W(x_1, x_2, t_i, t_j)\,dx_1 dx_2$

Мера статистической связи между центрированными моментами.

Св-во дисперсии

$\overline{(x_1 \pm x_2)^2} = \overline{x_1^2} + \overline{x_2^2} \pm 2\overline{x_1 x_2} = \{\text{мат. ожид} = 0\} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \pm 2R_{12}$

Стационарный случ. процесс

Стационарность – однородность протекания процесса

Узкий смысл стационарности (строгий)

$W(x_1, x_2, ..., x_n; t_1, t_2, ... t_n) = W(x_1, ..., x_n; t_1+\Delta, ..., t_n+\Delta) \overset{\Delta = t_n}{=}$

$= W(x_1, x_2, ..., x_n, \tau_1 ... \tau_{n-1}) \Rightarrow$ не зависит от t

Широкий смысл

$W(x, t) = W(x)$ ← не это условие

$W(x_1, x_2, t_1, t_2) = W(x_1, x_2, \tau)$ $\tau = t_1 - t_2$

$R(t_1, t_2) = R(\tau)$

Условия стационарности в широком смысле

это:
- $m_1(t) = m_1$ – не зависит матожид от t
- $R(t_1, t_2) = R(\tau)$
- дисперсия сюда не входит

Эргодический случ. процесс – усреднение по времени абсолютно равнозначно усреднению по ансамблю реализации

$\overline{m}$ – усреднение по ансамблю

$\langle m \rangle$ – усреднение по времени

$$\langle m \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$$

$$\langle R(\tau) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)\,dt$$

Можно сказать, что эргодический процесс — это процесс, у которого $\forall$ реализация представительна

Вернемся к стационарности

$m(t) = m$

$R(t_1, t_2) = R(\tau)$

$R(0) = \sigma^2$ и $|R(\tau)| \leq R(0)$ если $R(\tau) < 0$, то значения отсчетов противоположны по знаку

$r(\tau)$ - коэф-т корреляции

$r(\tau) = R(\tau) / R(0)$ $\quad |r(\tau)| \leq 1$

$$\text{СПМ} = \mathcal{F}(R\tau) = G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j2\pi f t} d\tau$$

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi f t} df$$

$G(f) \geq 0$

Для СП = Re $\Rightarrow$ $G(f)$ - четная

$\int G(f)\,df = \sigma^2$ $\quad G(0) = \int R(\tau)\,d\tau$

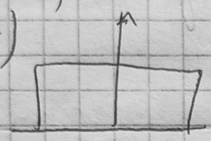
19.09.2024
(вторник 8^{30})

Свойства СПМ

Для Re СП - чётная ф-ия

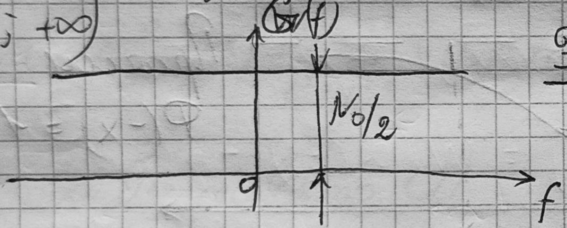
$W(\omega) \geq 0$

$\nexists\, R(\tau)$



т.к. $G(f) = \mathcal{F}\{R(\tau)\} \sim \text{sinc}$

Белый шум - случайный процесс, у которого уровень СПМ равномерен и равен $N_0/2$ (случай $f \in (-\infty; +\infty)$)



$\xrightarrow{\mathcal{F}} R(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$

Реализацию белого шума графически невозможно нарисовать

Из-за ограниченности полосы пропускания шумы за пределами могут быть определены $\forall$ образом, а в пределах полосы пропускания удобно использовать постоянный уровень

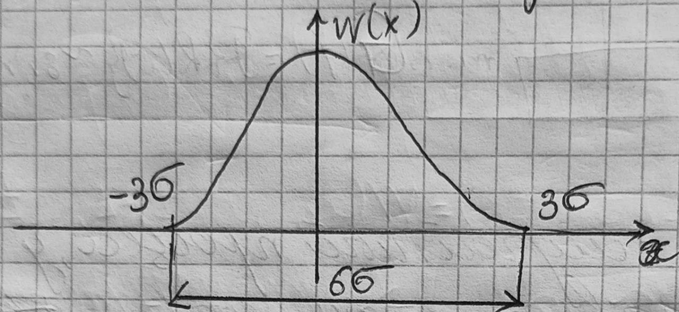
Гаусовский СП - $\forall$ совокупность отсчётов подчиняется нормальному распределению

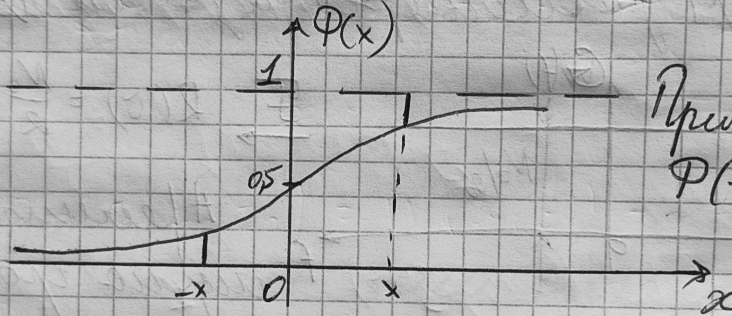
$$W(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(t)} \exp\left(-\frac{(x-m(t))^2}{2\sigma^2(t)}\right)$$

$$F(x,t) = \int_{-\infty}^{x} W(x,t)\,dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(t)} \exp\left(-\frac{(x-m(t))^2}{2\sigma^2(t)}\right) dx =$$

$$=\left|t=\frac{x-m(t)}{\sigma(t)}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{x-m(t)}{\sigma(t)}} e^{-t^2/2}\,dt = \Phi\left(\frac{x-m(t)}{\sigma(t)}\right)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt$$ – интеграл вероятности





Причём
$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

Аргумент времени, где это непринципиально, писаться не будут

$$W(x_1, \dots, x_n) = \boxed{W(\vec{x}) = K\exp\left(-\frac{1}{2}Q\right)}$$

Q - квадратичная форма

K - коэффициент

$$K = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \mathbb{R}}}$$

R - корреляционная матрица

$$\mathbb{R} = \begin{pmatrix} R_{11} & \dots & R_{1j} & \dots & R_{1n} \\ \vdots & & R_{ij} & & \\ R_{n1} & \dots & \dots & \dots & R_{nn} \end{pmatrix}$$

$$R_{ij} = R(t_i, t_j) = \overline{[x(t_i) - m(t_i)][x(t_j) - m(t_j)]}$$

Далее пусть мат. ожидание нуля (где это не оговорено) равно нулю [Это из-за разделительных конденсаторов в устройствах]

$\vec{\vec{x}}$ - вектор средних значений $=(m(t_1), \ldots, m(t_n))$

$\vec{x} = ((x(t_1), \ldots, x(t_n)) = (x_1, \ldots, x_n)$

$Q = (\vec{x} - \vec{\vec{x}}) R^{-1} (\vec{x} - \vec{\vec{x}})^T$ - сводится к числу

$R R^{-1} = E$

Q (в явном виде) $= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i - m(t_i)) R_{ij}^{-1} (x_j - m(t_j))$

Свойства Гауссовского СП

1) n-мерная плотность определяется конечным количеством моментов $R_{ij} = R_{ji}$ кол-во ~~м~~ необходимо знать $n^2 - \frac{n^2 - n}{2}$

2) $\forall$ лин. комбинация ~~об~~ обладает св-ами гауссовского процесса

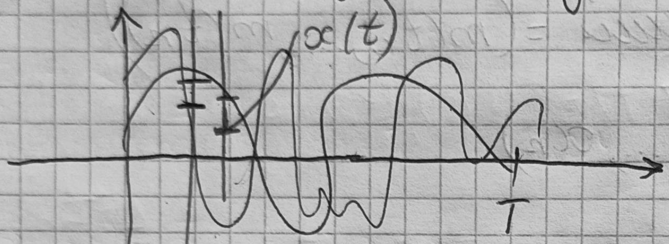
3) $\forall$ линейное преобразование на ГП приводит к гауссовскому процессу

4) Понятия независимости и некоррелированности совпадают (док-во как ДЗ)

5) ! только для процесса: стационарность в обоих смыслах совпадает (док-во как ДЗ)

Гауссовский белый шум

СПМ постоянно, отсчеты взятые из этого процесса образуют гауссовский вектор.



Белый шум: $f_B = \infty$
Чтобы восстановить по отсчетам $\Delta t \le \frac{1}{2f_B} \Rightarrow \Delta t \to 0$
Берем ∞ кол-во отсчетов с $|t_i - t_{i-1}| \to 0$

Из-за ∞ число t_i нижняя граница окошек формирует функцию $x(t)$, верхние $x(t)+dx$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ |t_i-t_{i-1}|\to 0}} W(x_1,\dots,x_n; t_1,\dots,t_n) = W(x(t))$$ — функционал плотности в-р-ти

Функционал — отображение функционального пространства на числовую ось

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ |t_i-t_{i-1}|\to 0}} W(x_1,\dots,x_n; t_1,\dots,t_n) = \{\overline{x}=0\} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ |t_i-t_{i-1}|\to 0}} K\exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_i\sum_j x_i \underbrace{R^{-1}_{ij}}_{\text{элемент обратной матрицы}} x_j\Big) =$$

$$= K\exp\Big(-\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^T x(t_1)\underbrace{R^{-1}(t_1,t_2)}_{\text{функ-я, обратная корреляционной}} x(t_2)\,dt_1\,dt_2$$

$RR^{-1} = \mathbb{E}$
в явном виде

$$\sum_i R_{ki} R^{-1}_{il} = \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k=l \\ 0, & k\ne l \end{cases}$$

$\int R(t_1, t)\, R^{-1}(t, t_2)\,dt = \delta(t_1 - t_2)$; $\underbrace{R(t_1, t_2)}_{БШ} = \frac{N_0}{2}\delta(t_1 - t_2)$

Значит $R^{-1}(t_1, t_2) = \frac{2}{N_0}\delta(t_1 - t_2)$ – дельта-функция Дирака

$\boxed{W(x(t)) = K\exp\left(-\frac{1}{N_0}\int_0^T x^2(t)\,dt\right)}$ Надо знать

Энергия реализации БШ

Энергия ↑ → реализация ↓ (шанс)

26.09.2024

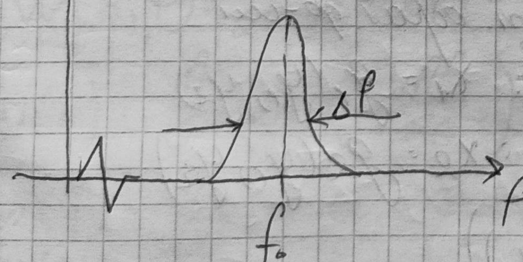
Пусть $x(t)$ – СП

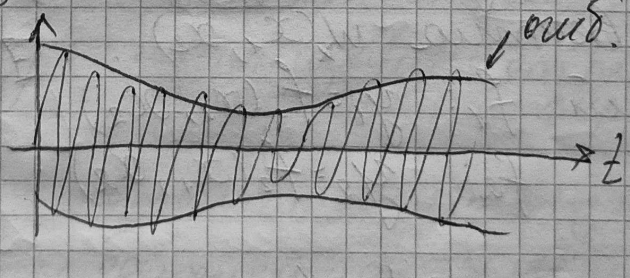
$s(t)$ – детерм. сигнал

$x(t) + s(t)$ – подумать дома на этим описанием

Узкополосные случ. процессы и распределение отсчетов огибающей и фазы узкополосного случ. процесса

Узкополосность: $\Delta f \ll f_0$





кор. функции

Вид огибающей $R(\tau)\,\sigma^2 r(\tau)\cos(2\pi f_0 \tau)$

$x(t) = A(t)\cos(2\pi f_0 t + \varphi(t)) = A(t)\cos\Phi(t)$ отсюда и следует понятие огибающей

Требования к огибающей
1) для гарм. колеб. огиб. = const
2) фаза - неэнергетический параметр
3) малым изм. самого сигнала - должны соответствовать малые изменения огибающей.

Аналитический сигнал

$\dot{x}(t) = x(t) + j x_\perp(t)$ $\quad x_\perp(t) = \frac{1}{\pi}\int \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau$

$\dot{x}(t) = $ —//— $= A(t) e^{j\Phi(t)}$ где $A(t) = \sqrt{x^2(t) + x_\perp^2(t)}$

Здесь все однозначно определено

$tg\,\Phi(t) = \frac{x_\perp(t)}{x(t)}$
(так просто проще ☺) где-то он сравнивал выше

Данное преобразование линейно

Фильтр Гильберта $h(t) = \frac{1}{\pi t}$ $t \in \mathbb{R}$ $|\mathcal{F}\{h(t)\}| = const$

Пусть $x(t)$ - гауссовский случайный процесс

Пусть случ. вектор (x_1, x_2)
и известна $w_x(x_1, x_2)$

$\exists$ ф-ций сист $f_1: \ y_1 = f_1(x_1, x_2)$
$f_2: \ y_2 = f_2(x_1, x_2)$

$\exists$ сист. обрат. ф-ций
$g_1: \ x_1 = g_1(y_1, y_2)$
$g_2: \ x_2 = g_2(y_1, y_2)$

$w_y(y_1, y_2) = |J|\, w_x(g_1(y_1, y_2), g_2(y_1, y_2))$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

Т.к. x - гауссовский, то $x_\perp$ - тоже гауссовский

Операции интегрирования и усреднения линейны, поэтому их можно менять местами

$$\overline{x_\perp}(t) = \frac{1}{\pi}\int \frac{\overline{x(\tau)}}{t-\tau}\, dt = \int 0 = 0$$

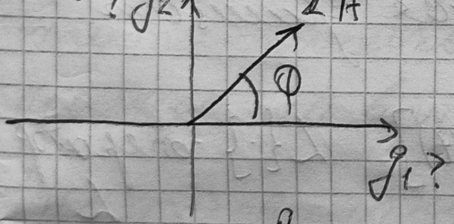
Дисперсии не меняются при прохождении через фильтр Гильберта.

$$R_{xx_\perp} = \overline{x(t)x_\perp(t)} = \overline{x(t)\frac{1}{\pi}\int\frac{x(\tau)}{t-\tau}d\tau} = \overline{\frac{1}{\pi}\int\frac{x(\tau)x(t)}{t-\tau}d\tau} =$$

кор. функция

$$= \frac{1}{\pi}\int\frac{\overline{x(\tau)x(t)}}{t-\tau}d\tau = \frac{1}{\pi}\int\frac{R_x(t-\tau)}{t-\tau}d\tau = \{t-\tau = x\} = \frac{1}{\pi}\int\frac{R(x)}{x}dx =$$

$= \left\{\int \frac{\text{чет}}{\text{нечет}}\, dx\right\} = 0 \Rightarrow x_\perp$ и x независимы (т.к. они гауссовские) $\Rightarrow W(x, x_\perp) = W(x)W(x_\perp) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2+x_\perp^2}{2\sigma^2}\right)$



$g_1(A,\varphi) = A\cos\varphi$

$g_2(A,\varphi) = A\sin\varphi$

$\Rightarrow |J| = A$

$$W(A,\varphi) = \frac{A}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right)$$

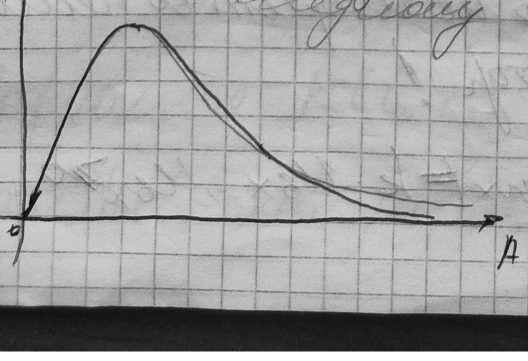
[*Условие согласованности, "хотим избавиться от переменной — проинтегрируй по ней"]

$$W(A) = \frac{A}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$W(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$$

центр. тяжести и моду и медиану

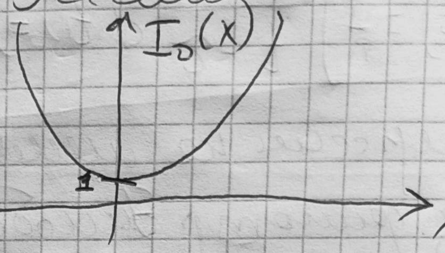
Отсчеты, взятые из ~~ам~~ огибающей и фазы независимы



] $A(t)\cos(2\pi f_0 t+\varphi(t)) + U\cos(2\pi f_0 t) = y(t)$

$W(y)=\frac{y}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{y^2+U^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{yU}{\sigma^2}\right)$ - обобщенное распределение Рэлея -

I_0 - модифицированная ф-я Бесселя 0-го порядка



$I_0(x)=I_0(-x)$, $I_0(0)=1$

$|x|<<1$ $I_0(x)\sim 1+\frac{x^2}{4}$

$x>>1$ $I_0(x)\sim e^x$

10.10.2024

Прохождение случайных процессов через линейные системы

Система линейна - выполняется принцип суперпозиции

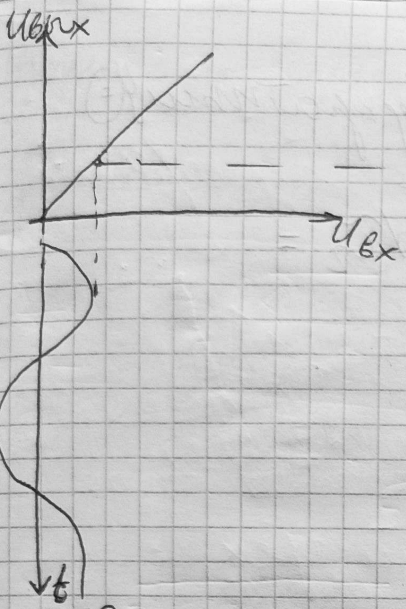
$x(t)\to \boxed{L} \to y(t)$ $\quad y(t)=L[x(t)]$ $\quad L\{\cdot\}$ - оператор L

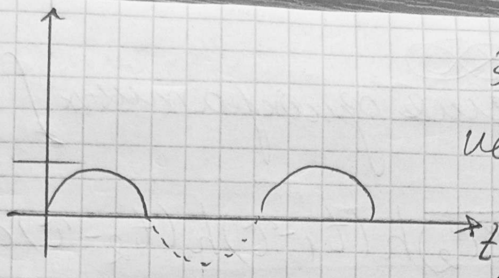
1) Условие однородности: $L\{cx(t)\}=cL\{x(t)\}$

2) Условие аддитивности: $L\{\sum x_i(t)\}=\sum L\{x_i(t)\}$

! появление на выходе уст-ва не говорит об нелинейности; Пример - коррелятор!

Линейный детектор: $u_{вых}=k\cdot u_{вх}$, $u_{вх}>0$





Это устр-во нелинейно! т.к. если подать sin + C, то на выходе будет sin, а не Σ вход. сиг.

Описание систем (линейных)

$h(\tau) = L\{\delta(t-\tau)\}$

$y(t) = \int x(\tau) h(t-\tau)\, d\tau$

Статистически описан это значит мы знаем ∀ n-ую плотность вер-ти

Не ∃ ~~решения~~ задача отыскания полного статистического описания случайного процесса на выходе линейной цепи.

! Но такое можно решить для гауссовской случайной величины

$$\overline{y(t)} = \int \overline{x(\tau) h(t-\tau)}\, d\tau = \{\text{но } h(\tau) - \text{детерм.}\} =$$

$$= \int \overline{x(\tau)}\, h(t-\tau)\, d\tau = \{\overline{x(\tau)} = m_x\} = \int m_x(\tau) h(t-\tau)\, d\tau = m_y(\tau)$$

Ковариация $K(t_1, t_2) = \overline{y(t_1)\, y(t_2)} =$

$$= \int x(\tau) h(t_1-\tau)\, d\tau \cdot \int x(\tau) h(t_2-\tau)\, d\tau \; =$$

(=) {произведение однократных $\int$ — двукратный $\int$} (=)

$$= \iint \overline{x(\tau_1)x(\tau_2)}\, h(t_1-\tau)h(t_2-\tau)\,d\tau_1 d\tau_2 =$$

$$= \iint K_x(\tau_1,\tau_2)\, h(t_1-\tau)h(t_2-\tau)\,d\tau_1 d\tau_2$$

Частотная область

$K(jf) = |K(jf)|e^{j\Phi(f)}$ — К-коэффициент передачи

$S_1(jf) = S(jf)K(jf)$ ← детерм. сигнал

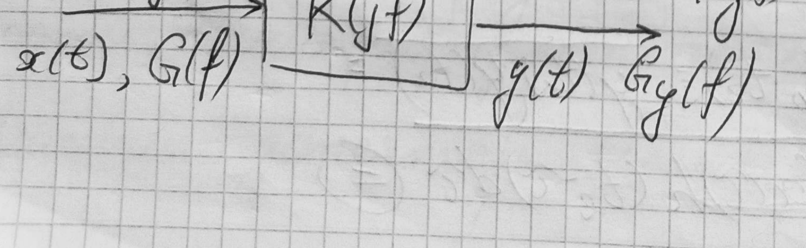
$G_1(f) = G(f)|K(jf)|^2$

! Работая в частотной области, мы теряем информацию о переходных процессах!

Линейные фильтры, максимизирующие на выходе ОСШ

Соглас. фильт — фильтр, который максимизирует ОСШ в t_0 для $\forall$ случ. процесса с СПМ

$$q = \frac{|s(t-t_0)|}{\sigma}$$

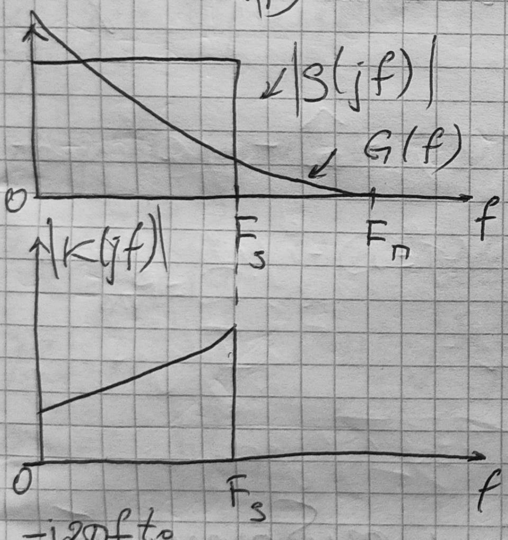


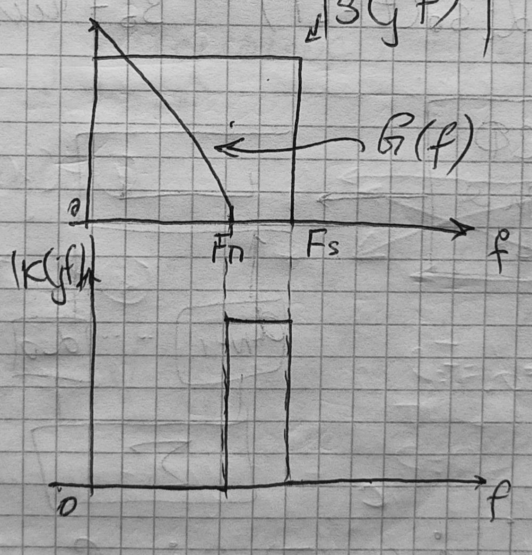
Рассматриваем установившийся режим

$$q = \frac{|s(t_0)|}{\sigma} = \frac{\left|\int S(jf)K(jf)e^{j2\pi f t_0}df\right|}{\sqrt{\int G_x(f)|K(jf)|^2 df}}$$

должно быть еще $e^{j2\pi f t}$, тогда получим корреляц. ф-ию, но $\sigma^2 = K(0)$, поэтому $e^{j2\pi f 0} = 1 \Rightarrow$ $e^{j2\pi f t}$ не имеем

$$K(jf) = c\frac{S^*(jf)}{G(f)}e^{-j2\pi f t_0}$$





17.10.2024

$e^{-j2\pi f t_0}$ – элемент задержки для соблюдения принципа причинности и физ. реализуемости. $t_0 \geq t_s$ (t_s - время (длительность) сигнала)

Далее считаем, что $G(f) = \frac{N_0}{2}$ - белый шум

Тогда $K(jf) = C_1 S^*(jf) e^{-j2\pi f T}$ T - длительность сигнала

$h(t) = S(T-t)C_1$

$s_1(t) = C_1 R_S(t-T)$

Т.к. на входе АБГШ, то и на выходе из-за линейности фильтра, тоже будет гауссовский шум.

$R(\tau) = C_1^2 \frac{N_0}{2} R_S(\tau)$ $\sigma^2 = C_1^2 \frac{N_0 E}{2}$

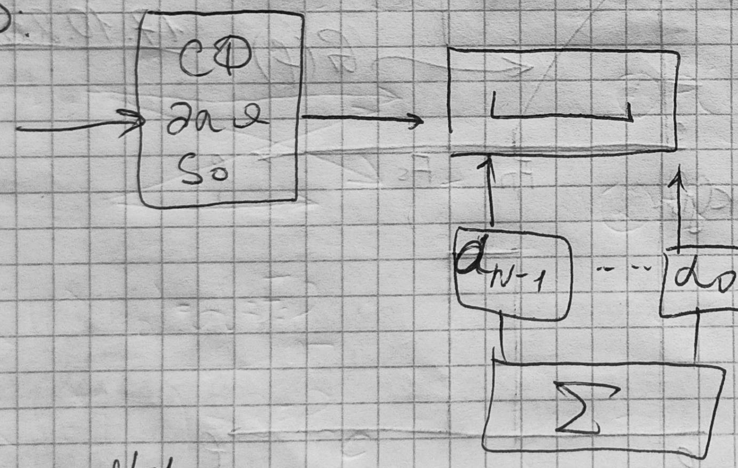
кор. ф-я шума на выходе

$U_M = C_1 E$

$\boxed{q = \sqrt{\frac{2E}{N_0}}}$ ← Забывать это сущий грех

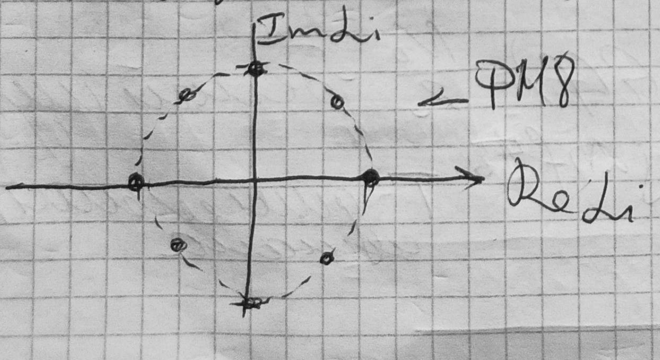
] $s(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i s_0(t - iT)$ s_0 – чип-элем. импульс

СФ:

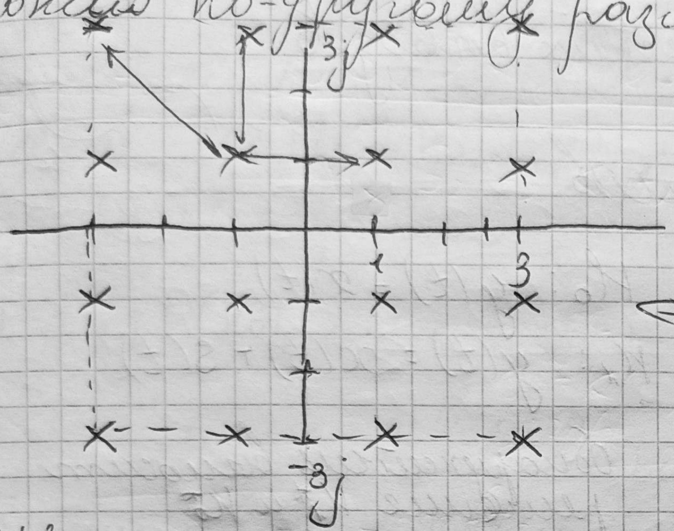


$\dot S(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \dot\alpha_i \dot S_0(t - iT)$ $\dot S$ - Компл. огибающей

ФМi $i = 2^n$ – количество коэф-ов $\dot\alpha_i$



Можно по-другому разместить 16 точек



расстояния между z_i одинаковое

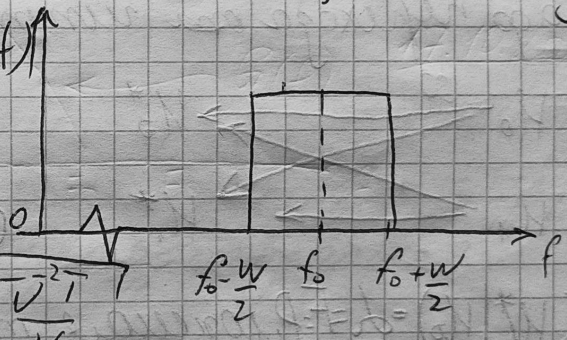
← КАМ 16

ЧМ сигнал

Спектр в районе f_0, длительность T, амплитуда U

W - девиация частоты

W·T - база сигнала = B



$$q=\sqrt{\frac{2E}{N_0}}=\{\text{т.к. ЛЧМ}\}=\sqrt{\frac{2\frac{1}{2}U^2T}{N_0}}=\sqrt{\frac{U^2T}{N_0}}$$ ← согл. фильтр

$$q_{ПФ}=\frac{U}{\sqrt{N_0W}}$$

ПФ фильтр

$$\eta=\frac{q_{СФ}}{q_{ПФ}}=\sqrt{WT}=\sqrt{B}$$

Использование квазиоптимальной фильтрации для сложных сигналов — величайшее преступление из-за неучитывание ~~ФЧХ~~ фазового спектра сигнала

На этом повторение окончено

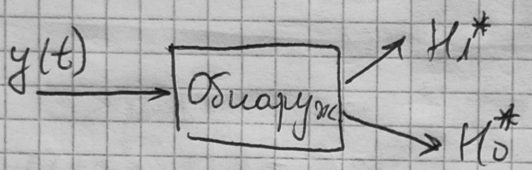
24.10.2021

Основы теории статистических выводов

Обнаружение сигналов

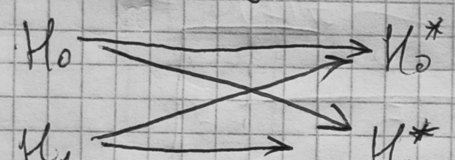
Введены две гипотезы: $H_0: y(t) = x(t)$

$H_1: y(t) = x(t) + s(t)$



Обнаружитель выносит решение H_1^* и H_0^*

Граф перехода от гипотезы к решению



① $P(H_0^*|H_0) = \hat{\alpha}$ — правильное не обнаружение

② $P(H_1^*|H_1) = D$ — правильное обнаружение. $D = P_{по}$

③ $P(H_1^*|H_0) = \alpha = F = P_{лт}$ ложная тревога — ошибка I рода

④ $P(H_0^*|H_1) = \beta = P_{пс}$ пропуск — ошибка II рода

← пропуск сигнала

① + ③ = 1

② + ④ = 1

$P(H_0) + P(H_1) = 1$

Пусть $\exists$ штрафы Π_α и Π_β, чтобы устройство работало хорошо, нужно минимизировать Σ штрафов; Π_α — штраф за ЛТ, Π_β — за пропуск

Вер-ть Π_α $P(H_0)\alpha \Rightarrow \Sigma$ за $\Pi_\alpha = \Pi_\alpha P(H_0)\alpha$

для Π_β: $\Pi_\beta(1-P(H_0))\beta$

Критерий Байеса (минимума среднего риска) $\overline{\Pi} = \Pi_\alpha P(H_0)\alpha + \Pi_\beta(1-P(H_0))\beta$

Устройство хорошее, если $\overline{\Pi} = \min\overline{\Pi}$

Пусть $\Pi_\alpha = \Pi_\beta$

$$\overline{\Pi} = \Pi_\alpha\Big[\underbrace{P(H_0)\alpha + (1-P(H_0))\beta}_{\text{полная вер-ть ошибки}}\Big] = P_{ош}$$

Минимизация полной ошибки (критерий идеального наблюдателя) - критерий $\min P_{ош}$

Пусть $P(H_0) = 1/2$.

Тогда остается $(\alpha+\beta) = \overline{\Pi}$ - критерий минимума суммы вероятности ошибки = критерий максимума правдоподобия

Зафиксируем α, тогда $\min\overline{\Pi} \sim \min\beta$

Приняло y_i

$\mathcal{Y}_0 \;|\; \mathcal{Y}_1 \;|\; \mathcal{Y}_0 \;|\; \mathcal{Y}_1 \rightarrow y$

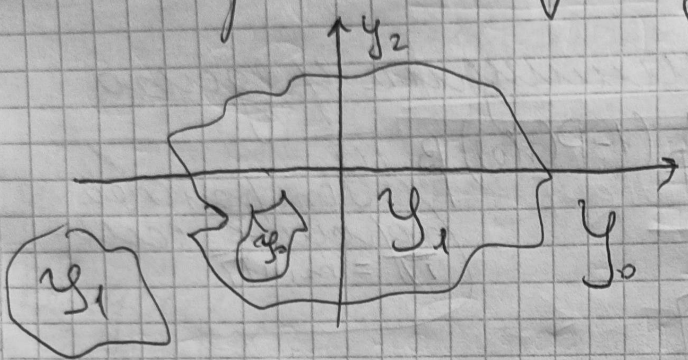
Множество $\mathcal{Y}$ - пространство наблюдений - множество точек прямой y

Пусть $\underset{\substack{\uparrow\\ \text{допустимая область}}}{\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_0} \cup \mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_0 \cap \underset{\substack{\uparrow\\ \text{критическая область}}}{\mathcal{Y}_1} = \varnothing$

Дробить y на $\mathcal{Y}_0$ и $\mathcal{Y}_1$ произвольно

Если $y_i \in \mathcal{Y}_0 \Rightarrow H_0^*$, если $y_i \in \mathcal{Y}_1 \Rightarrow H_1^*$

Если приняло y_1 и y_2

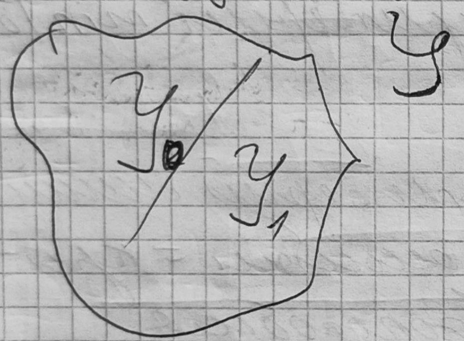


Пл-ть $y_1 y_2 = Y$

Разграничение на области Y_1 и Y_0 тоже произвольно, но $Y_1 \cup Y_0 = Y$

$Y_1 \cap Y_0 = \emptyset$

Если доступна непрерывная реализация, то Y образует функциональное пространство



! Шумы на входе статистически описаны

$w(x_1, x_2, \dots x_n; t_1, t_2, \dots t_n)$

$w(y_1, y_2, \dots y_n, t_1, t_2, \dots t_n \mid H_0) \xrightarrow{\text{непрерыв.}} w(y(t) \mid H_0)$

$H_1: \ x(t) = y(t) - s(t) \Rightarrow w(y(t) \mid H_1)$

детерминир.

$\alpha = P(H_1^* \mid H_0) = P(y(t) \in Y_1 \mid H_0) =$ вер-ть ложной тревоги

$= \int\limits_{(Y_1)} w(y(t) \mid H_0)\, dy(t)$

$$\beta = P(H_0^*|H_1) = P(y(t)\in Y_0|H_1) = \int\limits_{(Y_0)} W(y(t)|H_1)\,dy(t) =$$

пропуск

$$= 1 - \int\limits_{(Y_1)} W(y(t)|H_1)\,dy(t)$$

31.10.2021

Средний риск $\bar{П} = П_\alpha P(H_0)\alpha + П_\beta(1-P(H_0))\beta =$

$$= П_\alpha P(H_0)\cdot\int\limits_{(Y_1)} W(y(t)|H_0)\,dy(t) + П_\beta(1-P(H_0))\Big[1 - \underbrace{\int\limits_{(Y_1)} W(y(t)|H_1)\,dy(t)}_{\text{вероятность правильного обнаружения}}\Big]$$

$$= П_\beta(1-P(H_0)) - \int\limits_{(Y_1)}\Big[П_\beta(1-P(H_0))W(y(t)|H_1) - П_\alpha P(H_0)W(y(t)|H_0)\Big]\,dy(t) =$$

= {минимизировать − в Y_1 поместить неотрицательные значения подынтегральной функции

при $П_\beta(1-P(H_0))W(y(t)|H_1) > П_\alpha P(H_0)W(y(t)|H_0)$

подынтегральная ф-ия будет минимальна

$$\frac{W(y(t)|H_1)}{W(y(t)|H_0)} > \frac{П_\alpha P(H_0)}{П_\beta(1-P(H_0))}$$

Если принято $y(t)$, то $W(y(t)|H_i)$ → число, которое называется числом правдоподобия, а их отношение − отношение правдоподобий

Работа обнаружителя сходится к вычислению отношения правдоподобия и сравнению этого отношения с числом

По байесу $\dfrac{W(y(t)|H_1)}{W(y(t)|H_0)} \underset{H_0^*}{\overset{H_1^*}{\gtrless}} \dfrac{\Pi_1 p(H_0)}{\Pi_{\cancel{1}} p(H_0)}$

Крит. max правдоподоб.: $\dfrac{W(y(t)|H_1)}{W(y(t)|H_0)} \underset{H_0^*}{\overset{H_1^*}{\gtrless}} 1$

Крит. идеал. наблюд.: $\dfrac{W(y(t)|H_1)}{W(y(t)|H_0)} \underset{H_0^*}{\overset{H_1^*}{\gtrless}} \dfrac{p(H_0)}{1-p(H_0)}$

[Для монотонно возраст. ф-ии:
] $A > B$, тогда $F(A) > F(B)$]

Обнаружение детерминированного сигнала

H_0: $y(t) = x(t)$ - чистый шум

H_1: $y(t) = x(t) + s(t)$ ← сигнал $s(t)$ полностью известен, неизвестно только его наличие

$$W(y(t)|H_1) = K \exp\left(-\frac{1}{N_0}\int (y(t)-s(t))^2 dt\right)$$

$$W(y(t)|H_0) = \{\text{функционал БГШ}\} = K \exp\left(-\frac{1}{N_0}\int y^2(t) dt\right)$$

$$\frac{W(y(t)|H_1)}{W(y(t)|H_0)} = \frac{K\exp\left(-\frac{1}{N_0}\int (y(t)-s(t))^2 dt\right)}{K\exp\left(-\frac{1}{N_0}\int y^2(t) dt\right)} = \exp\left(\frac{2}{N_0}\int y(t)s(t)dt\right)\exp\left(-\frac{1}{N_0} \times \int s^2(t)dt\right) = \{\underbrace{\int y(t)s(t)dt}_{Z}, \underbrace{\int s^2(t)dt}_{E}\} =$$

Z - значение корреляц. интеграла / скалярное произв.

ведение / степень похожести

$\Rightarrow e^{\frac{2Z}{N_0}} e^{-E/N_0} \gtrless L_п$ $L_п$ - пороговое значение

логарифмируем обе части

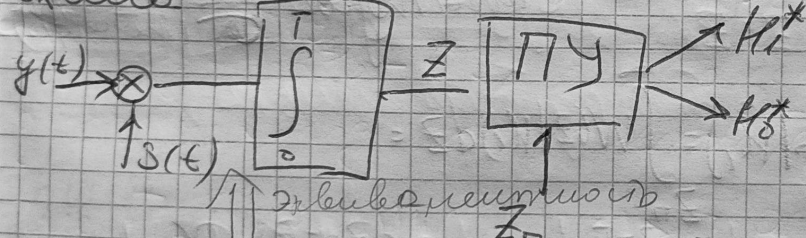
$\frac{2Z}{N_0} - \frac{E}{N_0} \gtrless \ln L_п$

$2Z - E \gtrless N_0 \ln L_п$

$2Z \gtrless N_0 \ln L_п + E$

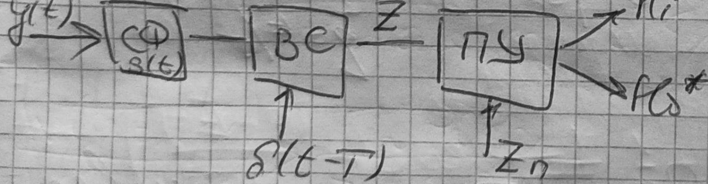
$Z \gtrless Z_п = (N_0 \ln L_п + E)\frac{1}{2}$ - т.е. чтобы сделать вывод достаточно найти корреляцию принятого сигнала с пороговым значением

Схема



ПУ - пороговое устройство

$\Updownarrow$ эквивалентность
дают одно и то же



ВС - временной селектор

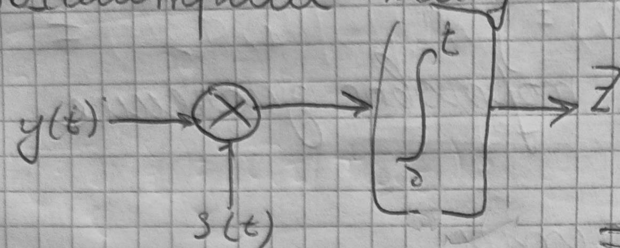
Z - отсчет, выхваченный из потока в момент T

Вер-ть ложной тревоги $\alpha = P(H_1^*|H_0) = P(Z>Z_п|H_0) =$

$= \int_{Z_п}^{\infty} W(Z|H_0)\,dZ$ {на входе Гауссовский шум, до ПУ с ним проводятся линейные преобразования линейные $\Rightarrow Z$ - тоже гауссовская величина)

$\overline{Z} = \int \overline{y(t)}\, s(t)\,dt = \begin{cases} 0 \text{ при } H_0, \text{ т.к. } \overline{шум}=0 \\ E,\ H_1 \end{cases}$

Рассмотрим схему



t - переменный предел

$$\sigma_Z^2 = \overline{Z(t_1)Z(t_2)}\Big|_{t_1=t_2=T} = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \underbrace{\overline{x(\tau_1)x(\tau_2)}}_{=\frac{N_0}{2}\delta(\tau_1-\tau_2)} s(\tau_1)s(\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2$$

при $t_1=t_2=T$

$$= \frac{N_0}{2}\int_0^T s^2(t)\,dt = \frac{N_0 E}{2}$$

$$\alpha = P(H_1^*|H_0) = P(Z>Z_п|H_0) = \int_{Z_п}^{\infty} W(Z|H_0)\,dZ = \int_{Z_п}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{Z^2}{2\sigma^2}\right)dZ$$

$$= \{t = Z/\sigma\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{Z_п/\sigma}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt = 1-\Phi(h)$$, h - нормированный порог $\frac{Z_п}{\sigma}$

$$D = P(H_1^*|H_1) = P(Z>Z_п|H_1) = \int_{Z_п}^{\infty} W(Z|H_1)\,dZ =$$

$$= \int_{Z_п}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(Z-E)^2}{2\sigma^2}\right)dZ = \left|t=\frac{Z-E}{\sigma}\right| = 1-\Phi\left(\frac{Z_п-E}{\sigma}\right) = \Phi(q-h)$$

$q = E/\sigma$

$\alpha = 1-\Phi(h)$

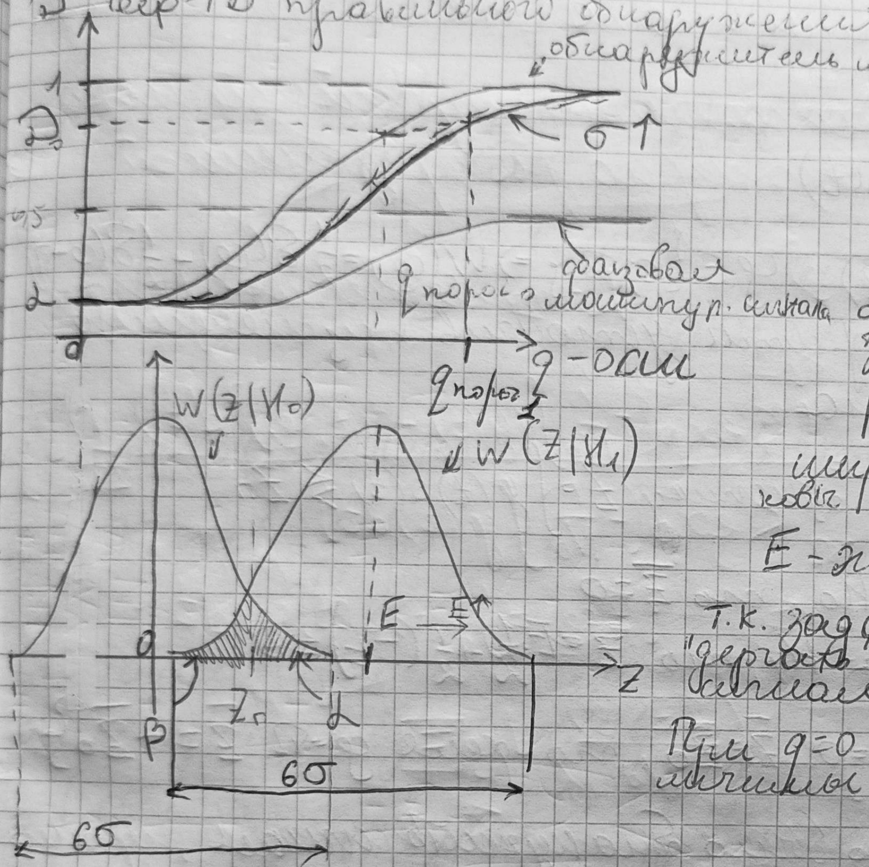
$h = \Phi^{-1}(1-\alpha)$ - функция обратная к интегралу вер-ти

$$D = \Phi\left(q-\Phi^{-1}(1-\alpha)\right) = f(q, \alpha=\mathrm{const})$$

характеристика обнаружения - зав-ть вер-ти "+" обнаружения от знач q при фиксир значении ложной тревоги

Д - вер-ть правильного обнаружения

07.11.2024



H_0 - нет нужного сигнала

H_1 - есть нужный сигнал

α - вер-ть ложной тревоги

β - пропуск

ширины W одинаковы

E - энергия сигнала

т.к. задано α, то "двигать" можем только сигнал

При $q=0$ $H_0=H_1$, т.е. неразличимы

были α, β, Д $\quad \sigma\uparrow \Rightarrow \alpha\uparrow\ \beta\uparrow\ Д\downarrow$ при этом уменьшится максимум $W(z/H_1)$

$q_{порог}$ - q, при котором при заданном α и β обеспечивается $Д_0$, если $q > q_{порог}$, то все требования выполняются с запасом

Если заменить СФ на квазиоптимальный фильтр, то см. черный график

$\eta = \frac{q_{порог}}{q_{0\,порог}}$ - потери, удобно $\eta_{дБ} = 20 \lg \eta$ (чтобы было понятно по напряжению и по мощности q)

Оставляем шум в покое (т.е. не меняем его модель)

$H_1: y(t) = x(t) + s(t)$

$\exists\ s(t) \to s(t, \varphi),\ \varphi \in \{0, \pi\} \Rightarrow W_\varphi(\varphi) = \frac{1}{2}\delta(\varphi) + \frac{1}{2}\delta(\varphi - \pi)$

Насколько алгоритм устойчив к изменению модели сигнала

Вычисляем статистику $Z = \int y(t) s(t) \lessgtr Z_п$

Если истина H_0, то $\bar{Z} = 0$

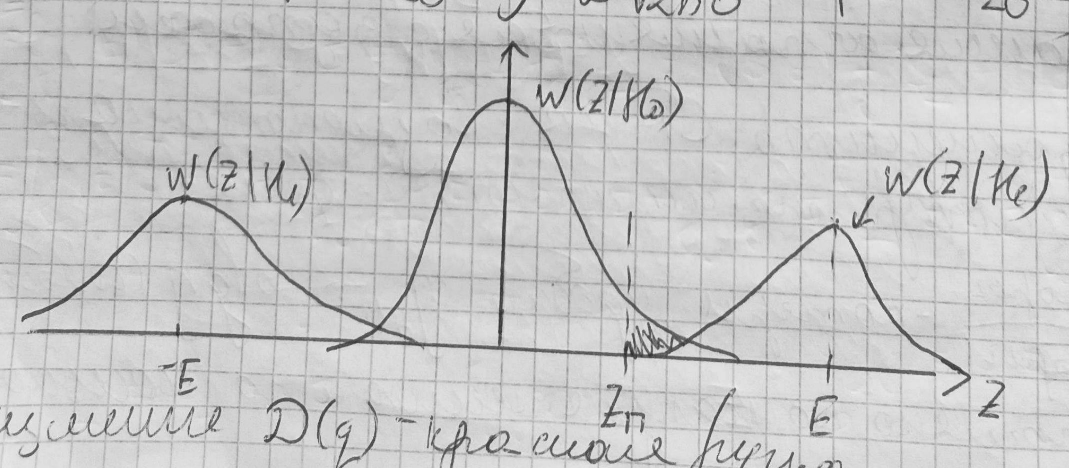
Если истина H_1, то $\bar{Z} = E \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-E) = 0$

{если для $\varphi = 0$ $\bar{Z} = \bar{Z}_0$, то для $\varphi = \pi$ $\bar{Z} = -\bar{Z}_0$}

Чтобы можно было обнаружить сигнал, нужно $Z \neq f(\varphi)$

$$W(z|H_1) = \int \underbrace{W(z|H_1, \varphi)\, W(\varphi)}_{\text{совместная } W \text{ расп. статистики и фазы}} d\varphi = \cancel{\neq} \; =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(Z - E)^2}{2\sigma^2}\right) + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(Z + E)^2}{2\sigma^2}\right)$$



изменение $D(q)$ - красная ручка

поэтому потери стремятся к ∞

$$L(\varphi) = \frac{W(y(t)|H_1,\varphi)}{W(y(t)|H_0)}$$ – отношение правдоподобия

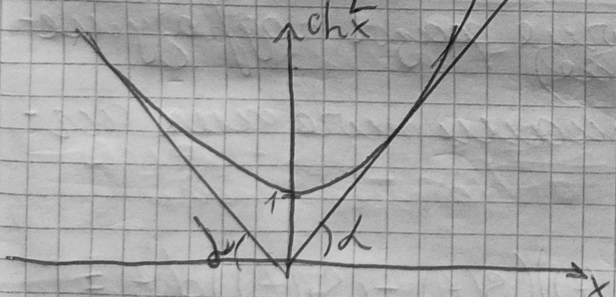
$$L = \int L(\varphi) W(\varphi) d\varphi = \frac{\int W(y(t)|H_1,\varphi) W(\varphi) d\varphi}{W(y(t)|H_0)}$$

$$L = \frac{\int K \exp\left(-\frac{1}{N_0}\int (y(t)-s(t,\varphi))^2 dt\right)\left[\frac{1}{2}\delta(\varphi) + \frac{1}{2}\delta(\varphi-\pi)\right] d\varphi}{K \exp\left(-\frac{1}{N_0}\int y^2(t) dt\right)} =$$

$=\{$знаменатель сокращается, так как в числителе присутствует $y^2(t)\}=$

$$= \int \frac{1}{2}[\delta(\varphi) + \delta(\varphi-\pi)] \exp\left(\frac{2Z(\varphi)}{N_0}\right) \exp\left(-\frac{E}{N_0}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{E}{N_0}\right)\left[e^{-\frac{2Z}{N_0}} + e^{+\frac{2Z}{N_0}}\right] = \exp(-E/N_0)\, ch\frac{2Z}{N_0}$$



апроксимируем ch(x) модулем |x|

$\boxed{|Z| \gtrless Z_n}$ – оптимальное решение

14.11.2024

Обнаружение сигнала со случайной начальной фазой, равномерно распределённой

$y(t) = x(t) + s(t, \varphi)$

$w(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$

L - отношение правдоподобия

$$\int L(\varphi) w(\varphi) d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{K \exp\left(-\frac{1}{N_0}\int (y(t) - s(t,\varphi))^2 dt\right)}{K \exp\left(-\frac{1}{N_0}\int y^2(t) dt\right)} \frac{1}{2\pi} d\varphi$$

$$= \left\{ \int s^2(t,\varphi) dt = E \right\} = \quad \left\{ Z(\varphi) = \int y(t) s(t,\varphi) dt \right\}$$

$$= \exp\left(-\frac{E}{N_0}\right) \frac{1}{2\pi} \int \exp\left(\frac{2Z(\varphi)}{N_0}\right) d\varphi \boxed{=}$$

Введём аналитический сигнал

$\dot{y}(t) = y(t) + j y_\perp(t)$

$\dot{S}(t) + s(t) + j S_\perp(t)$, (наличие фазы подразумевается)

Найдём корреляцию аналитических сигналов $\dot{y}$ и $\dot{s}$

$$2\dot{Z} = \int \dot{y}(t) \dot{s}^*(t) dt = \int (y(t) + j y_\perp(t))(s(t) - j s_\perp(t)) dt =$$

$$= \int y(t) s(t) dt + j \int y_\perp(t) s(t) dt - j \int y(t) S_\perp(t) dt + \int y_\perp(t) S_\perp(t)$$

согласно неравенству Парсеваля $\int y(t) s(t) dt =$ $= \int y_\perp(t) s_\perp(t) dt$, т.к. здесь просто меняет бази

$\dot{z} = \frac{1}{2}\int \dot{y}(t)\dot{s}^*(t)\,dt$ здесь С-огибающие

$z(t,\varphi) = Re\{\dot{z}(\varphi)\} = Z\cos(\varphi - \arg\dot{z})$

$Z = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}$, $Z_1 = \int y(t)s(t)\,dt$

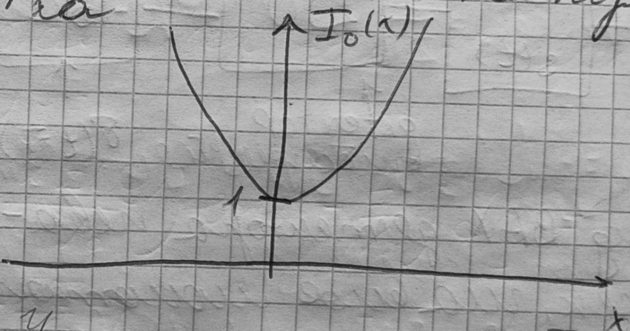
$Z_2 = \int y(t)s_\perp(t)\,dt$

$$\ominus\ k_E \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(\frac{2Z}{N_0}\cos(\varphi - \arg\dot{z})\right)d\varphi \ominus$$

$I_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp(x\cos(\varphi-\theta))\,d\varphi$ – модифицированная ф-я Бесселя 0-го порядка

$I_0(0) = 1$

$I_0(x) = I_0(-x)$



при $x \ll 1$: $I_0(x) \sim 1 + x^2/4$

при $x \gg 1$: $I_0(x) \sim e^x$

$\ominus\ k_E I_0\left(\frac{2Z}{N_0}\right) \gtrless L_п$

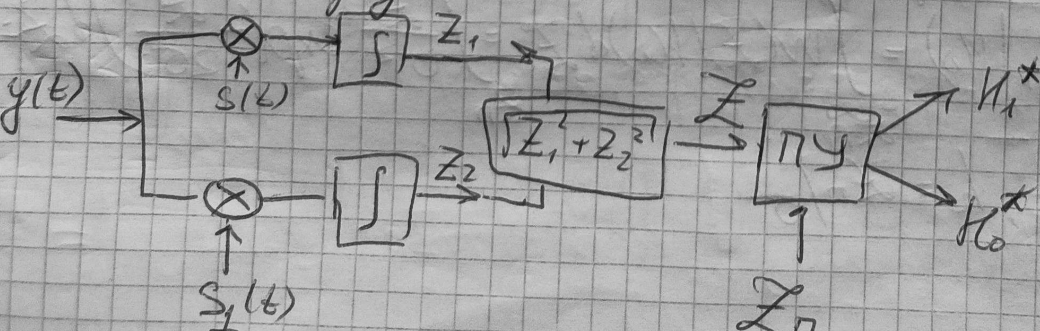
Что такое критерий Неймана-Пирсона

$I_0\left(\frac{2Z}{N_0}\right) \gtrless \frac{L_п}{k_E}$ потом применим к обеим частям обратную ф-ю Бесселя 0-го порядка

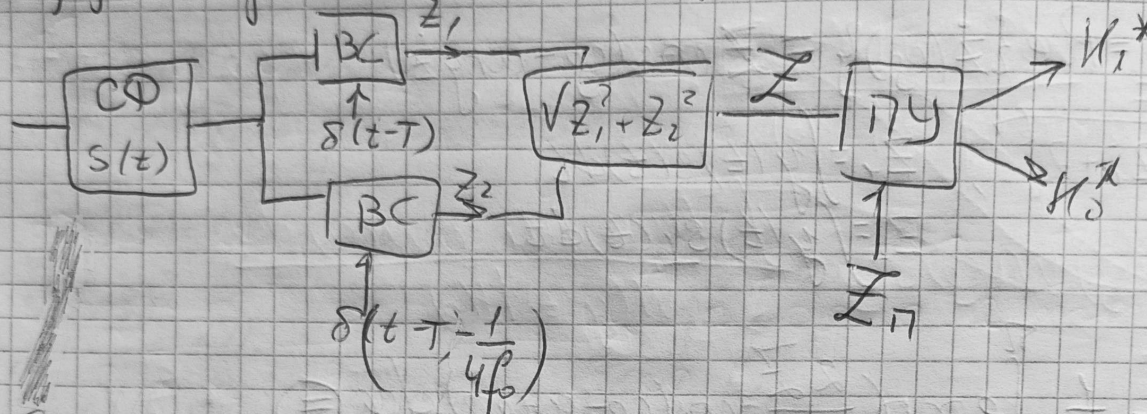
$Z \underset{H_0^*}{\overset{H_1^*}{\gtrless}} Z_п$ $\quad Z_п = I_0^{-1}\left(\frac{L_п}{k_E}\right)\frac{N_0}{2}$

Схема обнаружения

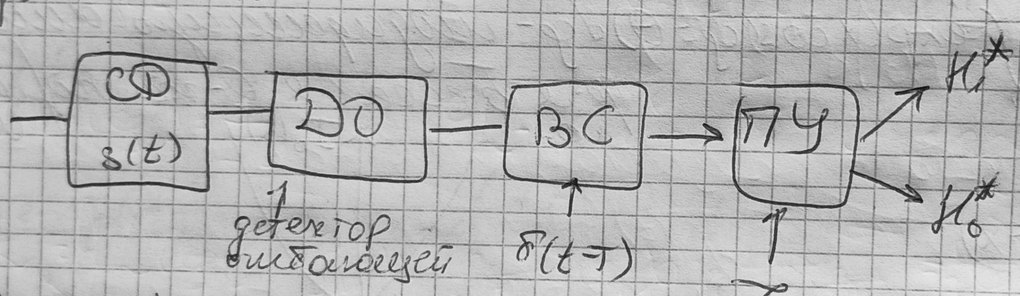
ПУ - пороговое устройство



Другой вариант схемы (практически эквивалент)



Третья схема



Вид ВАХ детектора неважен, главное монотонное возрастание при $u_{вх} \geq 0$

$$W(Z|H_0) = \frac{Z}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{Z^2}{2\sigma^2}\right),\ Z \geq 0 \text{ — Релея}$$

$$W(Z|H_1) = \frac{Z}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{Z^2+E^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{ZE}{\sigma^2}\right) \text{ — Релея-Райса (обобщенный Релея)}$$

α — ложная тревога

$$\alpha = P(Z > Z_п | H_0) = \int_{Z_п}^{\infty} W(Z|H_0)\,dZ = \int_{Z_п}^{\infty} \frac{Z}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{Z^2}{2\sigma^2}\right) dZ =$$

$$= \exp\left(-\frac{h^2}{2}\right),\ h = Z_п/\sigma$$

вероятность пропуска β

$$\beta = P(Z < Z_П \mid H_1) = \int_0^{Z_П} \frac{Z}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{Z^2+E^2}{\sigma^2 \cdot 2}\right) I_0\left(\frac{ZE}{\sigma^2}\right) dZ \text{ —}$$

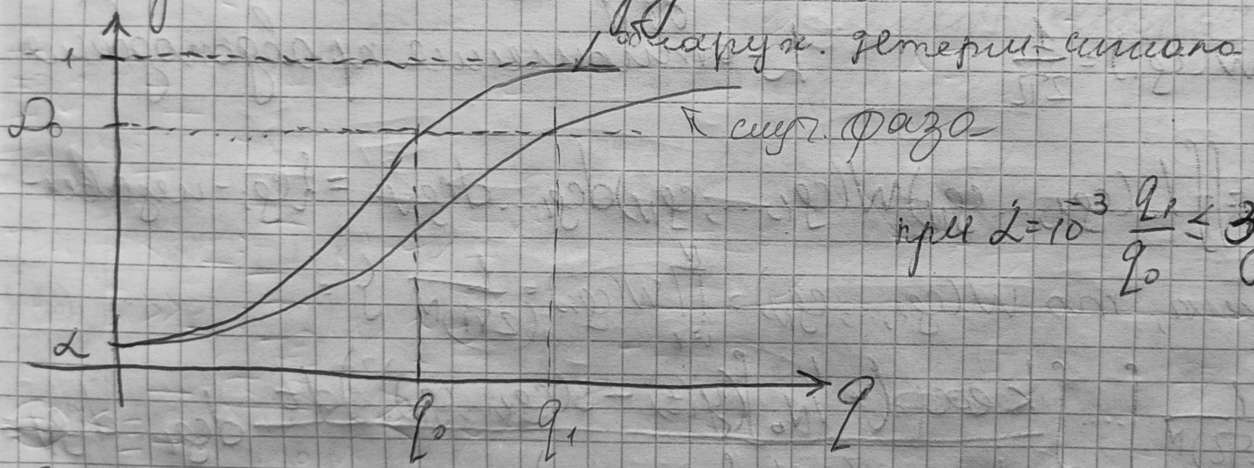
— функция распределения обобщенного Рэлеевского закона

$$Q(t,q) = \int_0^t t \exp\left(-\frac{t^2+q^2}{2}\right) I_0(tq)\,dt$$

q — ОСШ

$$q = \sqrt{2E/N_0}$$

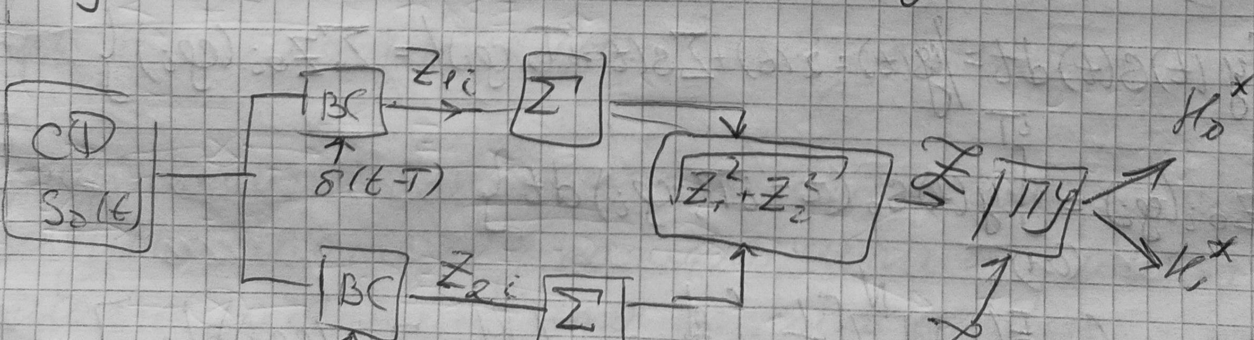
D — правильное обнаружение



при $\alpha = 10^{-3}$ $\frac{q_1}{q_0} \leq 3$ дБ

Теперь пусть

$s(t,\varphi) = \sum S_0(t - iT, \varphi)$! Схема с перемножителями сохранится



21.11.2024

Обнаружение некогерентной последовательности импульсов

Некогерентная посл-ть (пачка) — сигнал, у которого накопление на радиочастоте крайне неэффективно.

$$s(t)=\sum_{i=1}^{N} s_0(t-iT;\varphi_i)$$ фазы распределены независимо друг от друга

$\exists\ w(\varphi_i)=\frac{1}{2\pi}$ L — отношение правдоподобия

$$L=\int\!\!\int L(\varphi_1,\dots,\varphi_N)\,w(\varphi_1,\dots,\varphi_N)\,d\varphi_1\dots d\varphi_N=\{\varphi_i \text{ — независимы, то } w(\varphi_1,\dots,\varphi_N)=\prod_{i=1}^{N} w(\varphi_i)=\frac{1}{(2\pi)^N}\}=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^N}\int\dots\int\frac{k\exp\left(-\frac{1}{N_0}\int\left(y(t)-s(\varphi_1,\dots,\varphi_N)\right)^2dt\right)}{k\exp\left(-\frac{1}{N_0}\int y^2(t)\,dt\right)}\,d\varphi_1\dots d\varphi_N=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^N}\exp\left(-\frac{E}{N_0}\right)\prod_{i=1}^{N}\int\cancel{\tfrac{2}{N_0}}\exp\left(\frac{2}{N_0}Z_{0i}(\varphi_i)\right)d\varphi_i \;=$$

$$\left\{\int y(t)s(t)\,dt=/y(t)=x(t)+\sum s(t-iT;\varphi_i)/=\sum Z_{0i}(\varphi_i)\right\}$$

$$\left\{Z_{0i}(\varphi_i)=\int_{(i-1)T}^{iT} y(t)\,s_0(t-iT;\varphi_i)\,dt\right\}$$

$$=\exp\left(-E/N_0\right)\prod_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{2\pi}\int\cancel{\tfrac{2}{N_0}}\exp\left(2/N_0\,Z_{0i}(\varphi_i)\right)d\varphi_i\right]=$$

$$= \exp(-E/N_0) \prod_{i=1}^{N} I_0\left(\frac{2Z_{0i}}{N_0}\right) \qquad (z_{0i} = Z_{0i}\cos\arg \dot{z}_i)\,?$$

$$\underbrace{\exp(-E/N_0)}_{k_E}$$

$$Z_{0i} = \sqrt{z_{01i}^2 + z_{02i}^2}$$

$$z_{01i} = \int_{(i-1)T}^{iT} y(t)\, s_0(t-iT)\,dt$$

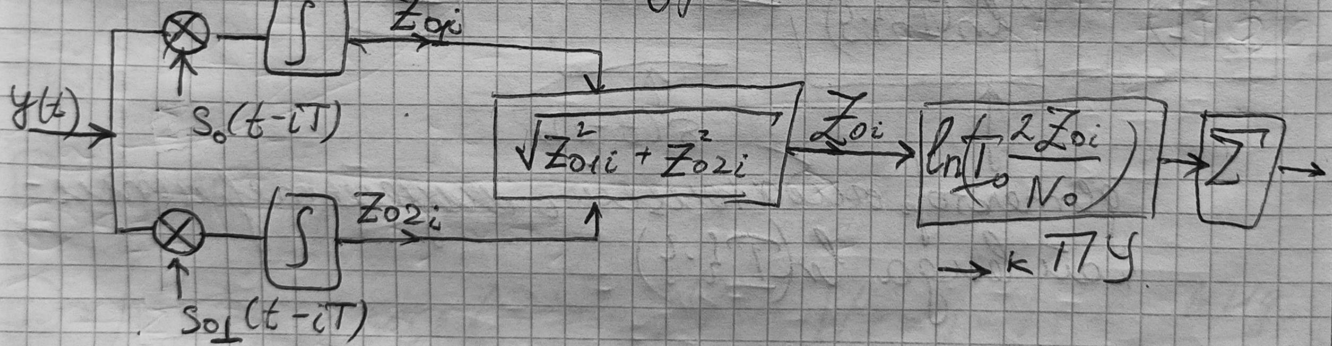
$$z_{02i} = \int_{(i-1)T}^{iT} y(t)\, s_{0\perp}(t-iT)\,dt$$

$$k_E \prod_{i=1}^{N} I_0\left(\frac{2Z_{0i}}{N_0}\right) \gtrless L_\Pi$$

$$\prod_{i=1}^{N} I_0\left(\frac{2Z_{0i}}{N_0}\right) \gtrless L_\Pi / k_E = L'_\Pi$$

$$\ln L_\Pi = \sum_{i=1}^{N} \ln\left(I_0\left(2Z_{0i}/N_0\right)\right) \gtrless L'_\Pi$$

оптимальный алгоритм обнаружение сигнал с некогер. структурой

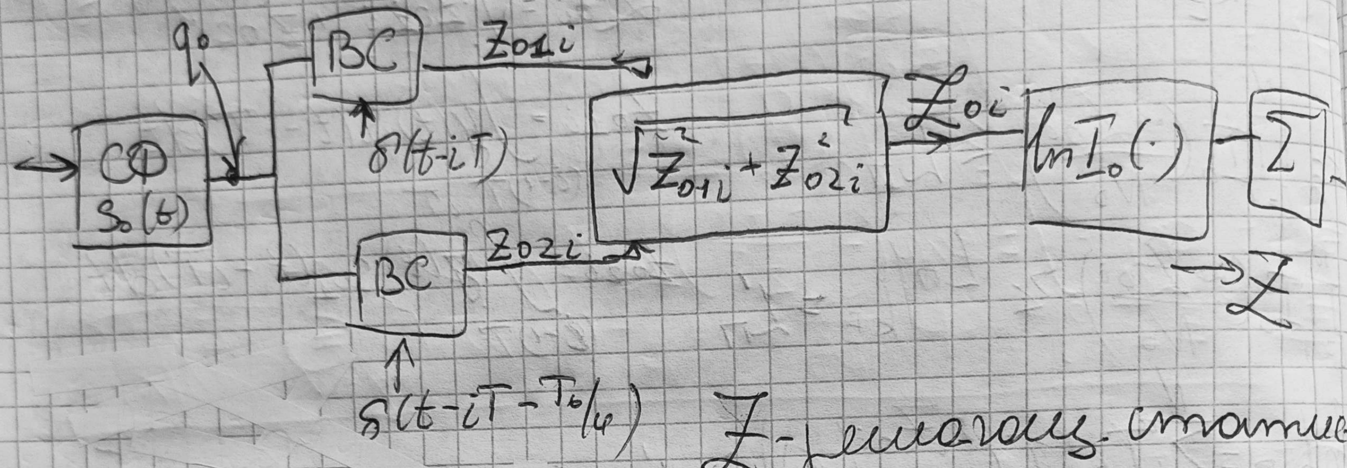


При малых ОСШ $= q$ ln ~ квадратичный детектор

При больших q: ln ~ линейный детектор

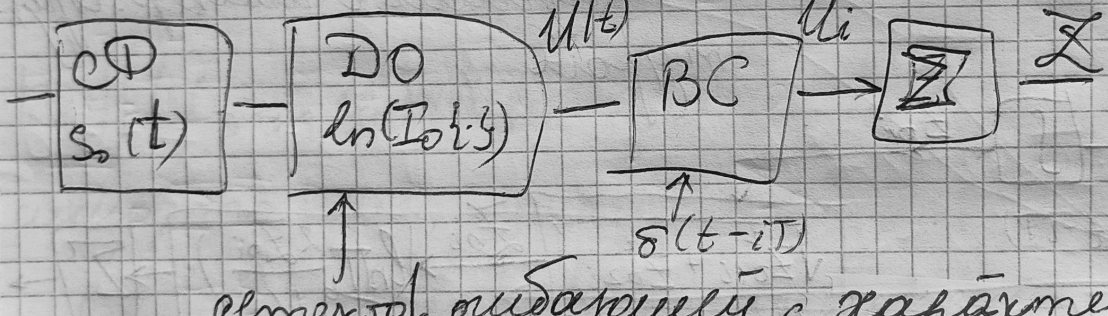
Отсутствует возможность накопления на радиочастоте => у каждого чипа выделяется огибающая и только потом накопление

Этот же алгоритм но на базе согласованного фильтра для чипа



Z - решающ. статистика

Еще схема



детектор огибающей с характеристикой вида $\ln(I\{\cdot\})$

Пусть $q_0 \ll 1 \Rightarrow N \gg 1$ - количество накапливаемых отсчетов

Центральная предельная теорема: некоррелированность, распределены примерно одинаково и имеют конечные дисперсии.

H_0: $\overline{U_i} = U_{g0}$, - U детектор.

H_1: $\overline{U_i} = U_{g1}$

σ^2 не известная

H_0 - истина $\overline{\sum U_i} = N \cdot U_{g0}$

H_1 —"— $\overline{\sum U_i} = N \cdot U_{g1}$

$\sigma^2 N$

α - ложная тревога

$$\alpha = \int_{Z_п}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi N}\sigma} \exp\left(-\frac{(Z - NU_{g0})^2}{2N\sigma^2}\right) dZ = 1 - \Phi(h), \quad h = \frac{Z_п - NU_{g0}}{\sqrt{N}\sigma}$$

D - вер-ть правильного обнаруж.

$$D = \int_{Z_п}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi N}\sigma} \exp\left(-\frac{(Z - U_{g1})^2}{2N\sigma^2}\right) dZ = 1 - \Phi\left(\frac{Z_п - NU_{g1}}{\sqrt{N}\sigma}\right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{Z_п - NU_{g1} - NU_{g0} + NU_{g0}}{\sqrt{N}\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(h - \frac{(U_{g1} - U_{g0})N}{\sqrt{N}\sigma}\right)$$

$U_{g1} - U_{g0}$ - приращение на выходе при появлении сигнала, и это можно трактовать (эту разницу) как ОСШ, поэтому

$$D = 1 - \Phi(h - \sqrt{N} q_g) = \Phi(\sqrt{N} q_g - h)$$

g - детектор

Чтобы обнаружением когер. и некогер пос-ледо-тей были эквивал, надо и там и там брать одинак. h.

Т.е. выполняется условие $\sqrt{N_К}\, q_0 = \sqrt{N_{НК}}\, q_д$

$q_д \approx \frac{q_0^2}{2}$

На Экзамен все группы в 11 даже если вр. писали в другое время

28.11.2024

Краткое резюме пройденного

$\alpha = 1-\Phi(h)$

$D = \Phi(q\sqrt{N} - h)$

h для когер и некогер одинаково

Когер: $q = q_0$ – на выходе согл. фильтра

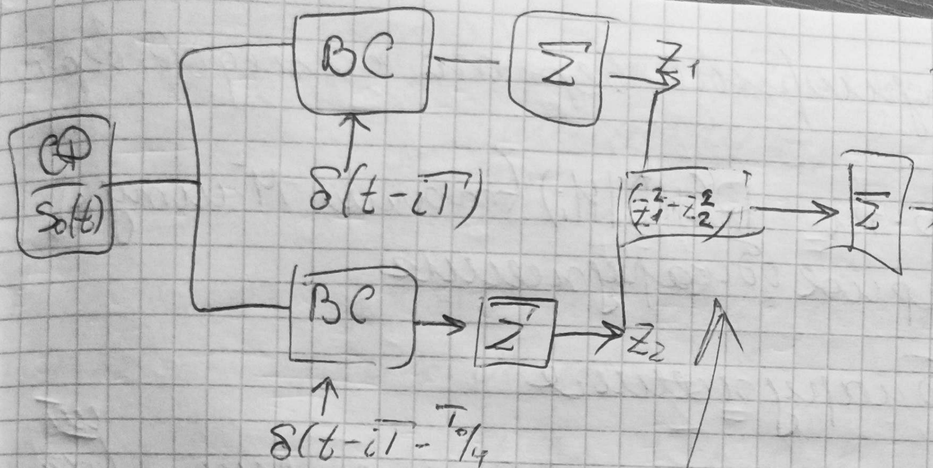
Некогер: $q = q_д = q_0^2/2$ – на выходе детектора

$q_0\sqrt{N_К} = q_0^2/2\sqrt{N_{НК}} = q_{ПУ}$ – на входе ПУ

$\frac{N_{НК}}{N_К} = 4/q_0^2$

Пусть $q_{ПУ} = 10$ и $q_0 = 10^{-2}$, тогда нужно копить кол-во «импульсов» $N_К = \frac{q_{ПУ}}{q_0^2} = 10^5$ (длительность чипа в GPS $t = 1$мкс) тогда копить придется 1с

$N_{НК} = \frac{q_{ПУ}^2 \cdot 4}{q_0^2} = 4\cdot 10^{10} \sim 3$ часа



При малом ОСШ некогер. посл-ть накапливается очень неэффективно

При малом ОСШ функция Бесселя ведет себя практически квадратично, поэтому здесь используется квадратичная характеристика

Различение сигналов

$$y(t) \longrightarrow \boxed{\text{Различитель}} \longrightarrow H_k^*$$

$y(t) = x(t) + s_i(t)$, $i = \overline{1,M}$ — что есть на входе может присутствовать $\forall$ из M сигналов

$x(t)$ - белый шум

Т.е. на входе может быть M гипотез, а на выходе — одно из M решений

$H_1 \longrightarrow H_1^*$

$H_i \longrightarrow H_i^*$

$H_m \longrightarrow H_m^*$

Зададим априорные вер-ть каждой вер-ти $P(H_i)$

Условные вер-ти $P(H_k^*|H_i)$ (таких M^2 штук),
если $k=i$ - верное обнаружение

Критерии обнаружения

• Байесовский - минимизация риска (штрафа)

Вводим матрицу штрафов

$$\Pi = \begin{pmatrix} \Pi_{11} & \cdots & \Pi_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Pi_{m1} & \cdots & \Pi_{mm} \end{pmatrix} \quad \Pi_{ii}=0 \quad \Pi_{ij}>0$$

$$\overline{\Pi} = \sum_i \sum_k \Pi_{ik} P(H_i) P(H_k^*|H_i)$$ - средний риск

Если $\overline{\Pi} = \min$, то различитель оптимален по Байесу.

• Критерий идеального наблюдателя

$\Pi_{ji} = \Pi, \ i \neq j$

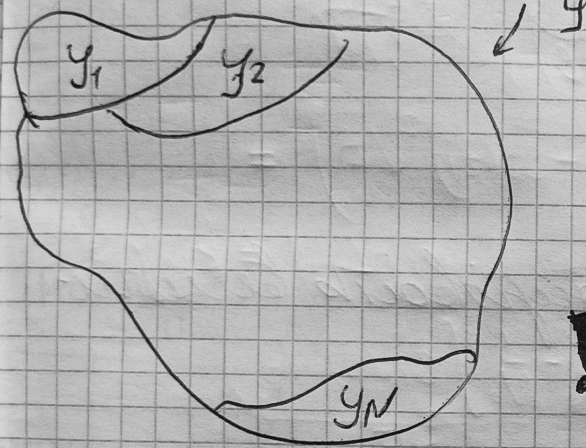
Тогда $\overline{\Pi} = \Pi \cdot \sum_i \sum_k P(H_i) P(H_k^*|H_i)$ и $\overline{\Pi} \to \min$ при

$\sum_i \sum_{k \, (i\neq k)} \ldots \to \min \Leftarrow$ полная вер-ть ошибки $= P_{ош}$

Полагаем $P(H_i) = p$

Тогда $\sum\limits_{\substack{i \\ (i\neq k)}}\sum\limits_{k} P(H_k^*|P_i) \to \min$ ← Это критерий минимуму вер-ти ошибки или максимум правдоподобия

Пространство наблюдений Y разобьем на M непересек. областей



$Y_i \cap Y_j = \emptyset$ при $i \neq j$

$\cup Y_i = Y$

Если $y(t) \in Y_k \Rightarrow H_k^*$

! • Шумы — стат. описаны

• $y(t) = x(t) + s_i(t)$, т.е. $\exists$ аддитив. взаимодействие и сигнал $s_i(t)$ — детерминирован

• известно $W(y(t)|H_i)$

$$P(H_k^*|P_i) = \int\limits_{(Y_k)} W(y(t)|H_i)\, dy(t)$$

$$\Pi = \sum_i \sum_k \Pi_{ik} P(H_i) \int\limits_{(Y_k)} W(y(t)|H_i)\, dy(t) = \sum_k \int\limits_{(Y_k)} \underbrace{\overbrace{\sum_i \Pi_{ik} P(H_i) W(y(t)|H_i)}^{\to \min}\, dy(t)}_{\Pi(y(t),k)}$$

Байесовский критерий стремится минимизировать апостериорный риск

$$\min_l \sum_i \Pi_{il} P(H_i) W(y(t)|H_i) = \sum_i \Pi_{ik} P(H_i) W(y(t)|H_i),\ l \in \overline{1,M} \Rightarrow H_k^*$$

выбрали min из M посчитанных чисел

Критерий идеального наблюдателя ($\Pi_{ii} = 0$, ...)

Π, что можно написать, т.к. не влияет на min

$$\sum_{\substack{i \\ i \neq k}} P(H_i) W(y(t)|H_i) = W(y(t))$$

$$\min_{\substack{l \\ i \neq l}} \sum_{i} P(H_i) W(y(t)|H_i) = \sum$$

[illegible]

<u>5. 12. 2024</u>

Стремимся минимизировать величину среднего штрафа

$$\overline{\Pi} = \sum_i \sum_k \Pi_{ik} P(H_i) P(H_k^*|H_i)$$

$$P(H_k^*|H_i) = \int\limits_{(Y_k)} W(y(t)|H_i)\, dy(t)$$ подставим и поменяем порядок Σ и $\int$

$$\overline{\Pi} = \sum_k \int\limits_{(Y_k)} \underbrace{\sum_i \Pi_{ik} P(H_i) W(y(t)|H_i)}_{\Pi(y(t))} dy(t)$$ апостериорный риск принятой реализации

$$\sum_i \Pi_{ik} P(H_i) W(y(t)|H_i) \overset{H_k^*}{\leq} \sum_i \Pi_{il} P(H_i) W(y(t)|H_i), \quad l \leq \overline{1, M}$$

Если для некоторого k выражение имеет min значение, то делаем выбор в пользу этой гипотезы.

Критерий идеального наблюдателя $\Pi_i,\ l=\Pi,\ i\neq l$

$$\sum_{i\neq k} P(H_i)\,W(y(t)|H_i) \overset{H_k^*}{\lessgtr} \sum_{i\neq l} P(H_i)\,W(y(t)|H_i),\quad l=\overline{1,M}$$

$$P(H_k)\,W(y(t)|H_k) \overset{H_k^*}{\geqslant} P(H_l)\,W(y(t)|H_l),\quad l=\overline{1,M}$$

Воспользовавшись теоремой умножения, получим

$$W(y(t))\,P(H_k|y(t)) \overset{H_k^*}{\geqslant} W(y(t))\,P(H_l|y(t))$$

$$\boxed{P(H_k|y(t)) \underset{H_k^*}{\geqslant} P(H_l|y(t))}$$

Правило работы различителя по критерию идеального наблюдателя

Правило максимума апостериорной вероятности.

Т.е. различитель должен максимизировать апостериорную вероятность. В сторону максимальной вероятности склоняемся при выборе решения

Критерий максимума правдоподобия ($P(H_i)=P(H_k)$)

$$W(y(t)|H_k) \overset{H_k^*}{\geqslant} W(y(t)|H_l)$$

Ориентироваться будем на критерий максимума правдоподобия, т.к. чтобы получить апостериорные вероятности нужно знать априорные

Преобразуем этот критерий, взяв ln

$$\ln W(y(t)|H_k) \overset{H_k^*}{\geq} \ln W(y(t)|H_l),\quad l=\overline{1,M}$$

$$W(y(t)|H_i) = k\exp\left(-\frac{1}{N_0}\int (y(t)-s_i(t))^2 dt\right) =$$

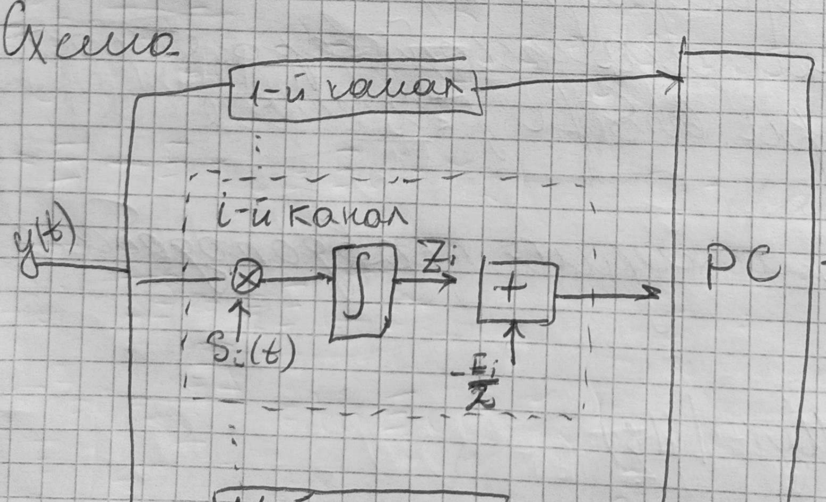
$$=\left\{\forall H_i\ \exp\left(-1/N_0\int y^2(t)dt\right) = const \Rightarrow k\cdot\exp(\dots) = k_y\right\} =$$

$$= k_y \exp\left(\frac{2}{N_0}\underbrace{\int y(t)s_i(t)dt}_{z_i}\right)\exp\left(-\frac{1}{N_0}\underbrace{\int s_i^2(t)dt}_{E}\right)$$

$$\ln(w(y(t)|H_i)) = \ln k_y + \frac{2}{N_0}z_i - \frac{E_i}{N_0}$$

$$\max_i\left\{z_i - E_i/2\right\} = z_k - E_k/2 \Rightarrow H_k^*$$ ← решающее правило

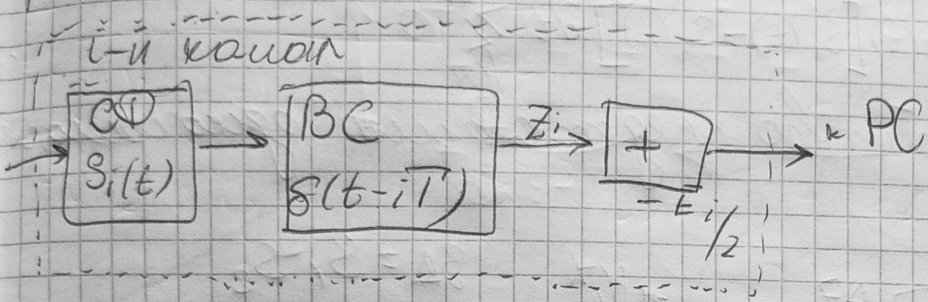
Схема.



Интегрируем в пределах существования сигнала

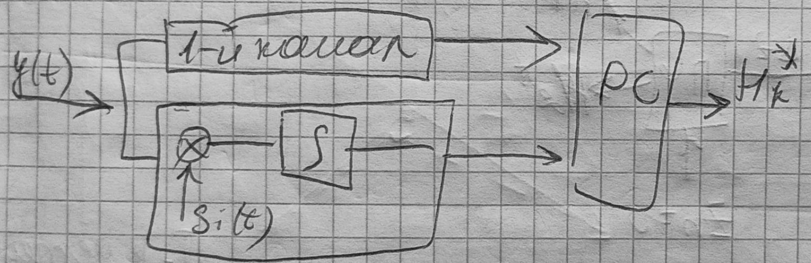
PC — Portable computer (решающая схема)

Реализуем схему на согласованных фильтрах:

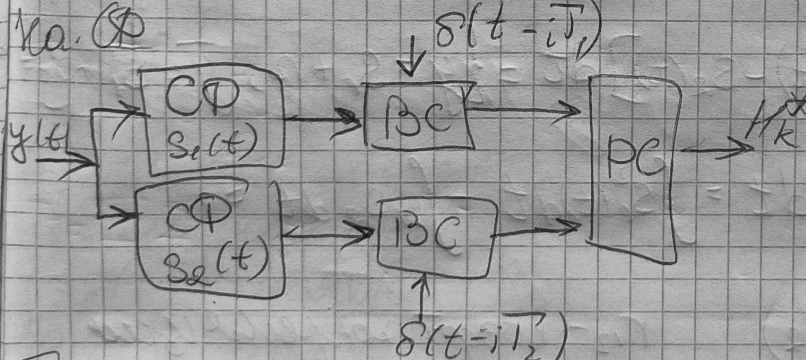


Упростим: $E_i = E$ => можно выкинуть сумматоры в каждом канале

Полагаем $M=2$



На СФ



Полная вероятность ошибки

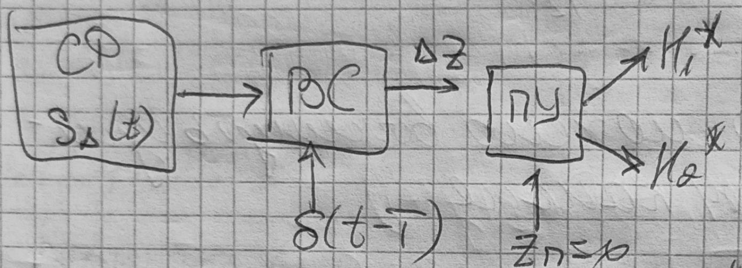
$$P_{ош} = \frac{P(H_2^*|H_1) + P(H_1^*|H_2)}{2}$$

$$P(H_2^*|H_1) = P(z_2 > z_1|H_1) = \iint\limits_{(z_2>z_1)} W(z_1, z_2|H_1)\,dz_1\,dz_2$$

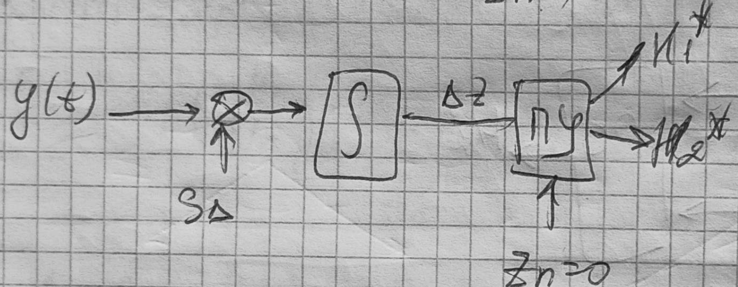
Решающее правило $z_1 \underset{H_2^*}{\overset{H_1^*}{\gtrless}} z_2$

$$\Delta z = z_1 - z_2 = \int y(t)\left[s_1(t) - s_2(t)\right] dt \underset{H_2^*}{\overset{H_1^*}{\gtrless}} 0$$

тогда устройство представимо одноканально:



$s_\Delta = s_1 - s_2$



$$H_1:\ \overline{\Delta z} = \int \overline{y(t)}\left[s_1(t) - s_2(t)\right] dt = \left\{ y = s_1 + n,\ \bar{y} = \overset{\text{т.к. детерм.}}{s_1} + 0 \right\}$$

$$= \int s_1(t)\left[s_1(t) - s_2(t)\right] dt = \int s_1^2(t)\,dt - \int s_1 s_2\,dt =$$

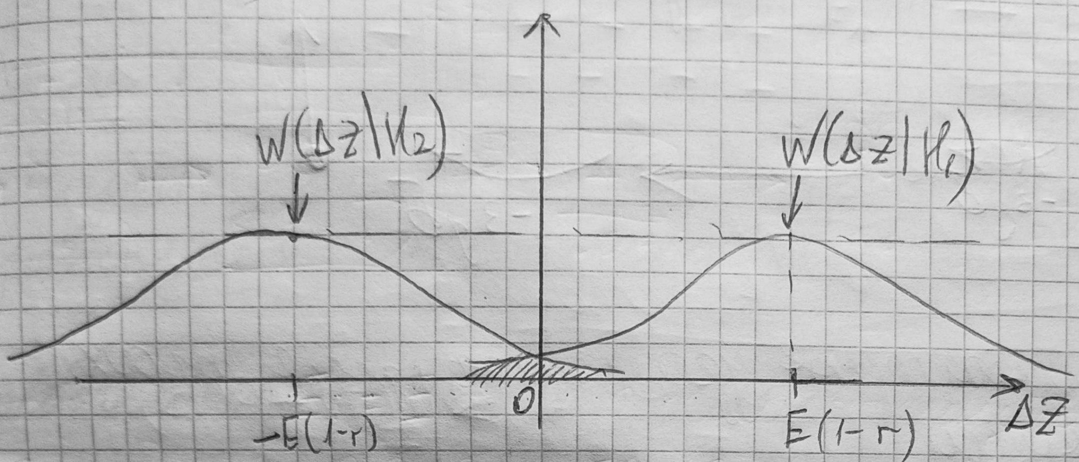
$$= E - E r_{12} = E(1 - r_{12})$$ r_{12} – коэфф. корреляции

$$H_2:\ \overline{\Delta z} = -E(1 - r_{12})$$

$$\sigma^2 = \frac{N_0 E_\Delta}{2} = N_0 E(1 - r_{12})$$ если посчитать $E_\Delta = \int (s_1 - s_2)^2 dt$, получится то, что получили

$$P(\gamma_2^* \mid H_1) = P(\Delta z < 0 \mid H_1) = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0 E(1-r)}} \exp\left(-\frac{(\Delta z - E(1-r))^2}{2N_0 E(1-r)}\right) d$$

$=1-\Phi\left(q\sqrt{\frac{1-r}{2}}\right)=\underline{P_{ош}}$ $\quad$ $P_{ош}\downarrow$ при $q\uparrow$ и/или $r\downarrow$



12.12.2024

$$P_{ош}=1-\Phi\left(q\sqrt{\frac{1-r}{2}}\right)$$

На практике зачастую используют ортогональные сигналы, что дает проигрыш в 3дБ, по ср-ю с противоположными

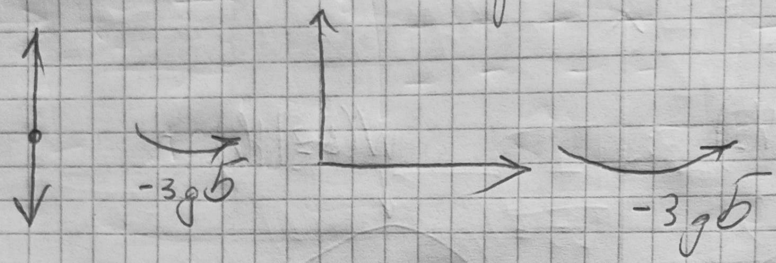
Пример: Пусть есть 3 пары узкополос сигналов

$$\begin{cases} S_1(t)=\cos 2\pi f_0 t \\ S_2(t)=\cos(2\pi f_0 t+\pi) \end{cases}$$

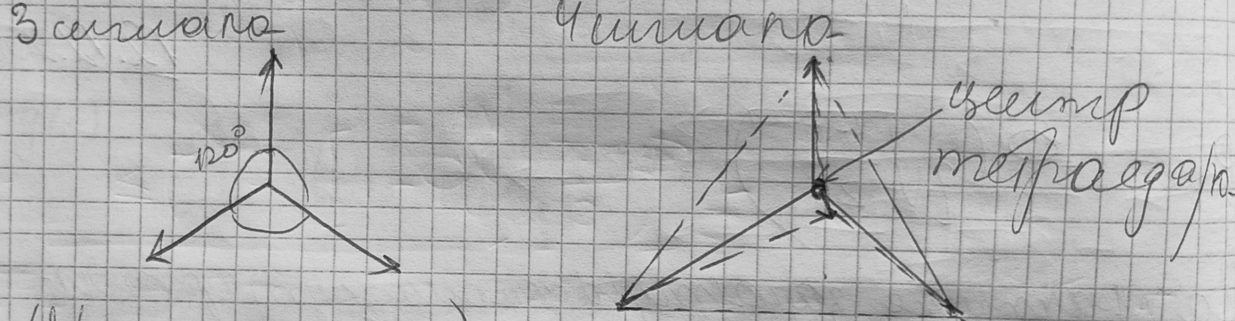
$$\begin{cases} S_1(t)=\cos(2\pi f_1 t) \\ S_2=\cos(2\pi f_2 t) \end{cases} \quad f_1-f_2 \gg 1/T$$

$$\begin{cases} S_1(t)=\cos 2\pi f t \\ S_2(t)=0 \end{cases}$$

Возможные геометр. интерпретаций: сигнал-вектор



Максимальное удаление для max корреляции



(Минимальное)
Максимальное значение коэф-та у ансамбля сигналов из M сигналов

$$r = \frac{-1}{M-1}$$

Док-во

$$\sum_{i,k} r_{i,k} = \frac{1}{E}\int \sum_{i,k} s_i(t)\,s_k(t)\,dt = \cancel{\ldots}$$

$$= \frac{1}{E}\int \left[\sum_{i=1}^{M-1} s_i(t)\right]^2 dt \geq 0$$

$$\left.\right] \max_{i,k} r_{i,k} = r_m$$

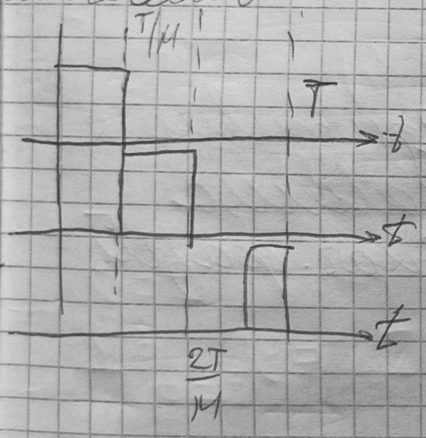
$\sum_{i,k} r_{ik} = M + \sum_{\substack{i,k \\ i\neq k}} r_{ik} \le M + M(M-1)\,r_m$ (Из суммы вынимаем M, т.к. $r_{ii}=1$ и их M штук) ≥ 0

отсюда $r_m \ge -\frac{1}{M-1}$ ← это

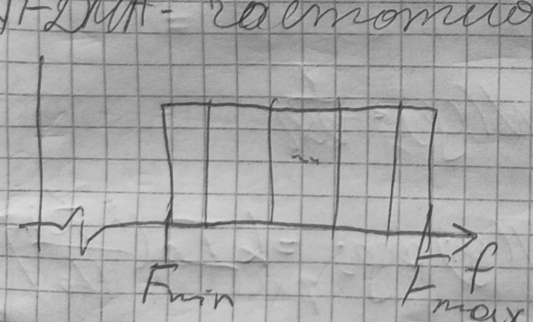
Ансамбль, у которого выполняется это, называется симплексным

Способы обеспечения ортогональности

1) TDMA - временное уплотнение и разделение сигналов



2) FDMA - частотное



3) CDMA - кодовое

$H_2 = \begin{bmatrix} + & + \\ + & - \end{bmatrix}$ матрица Адамара (строки ортогональны)

$$H_4 = \begin{bmatrix} H_2 & H_2 \\ H_2 & \overline{H_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & - & + & - \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \end{bmatrix}$$

лог. "не"

Курение во время движения — вредный закон

Различение M сигналов

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \leq P(A) + P(B)$$

A и B – вер-ти различения сигналов (точнее их ошибки)

$$P_{ош} \leq (M-1)\left[1 - \Phi\left(q\sqrt{\frac{1-r}{2}}\right)\right]$$ – аддитивная граница

Различение сигналов со случ. нач. фазой

$$H_i: y(t) = x(t) + s_i(t, \varphi_i)$$

$$W(y(t)|H_i, \varphi_i)$$

Считаем, что знаем $W(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$

$$W(y(t)|H_i) = \int W(y(t)|H_i, \varphi_i)\, W(\varphi_i)\, d\varphi_i = k I_0\left(\frac{2Z_i}{N_0}\right)$$

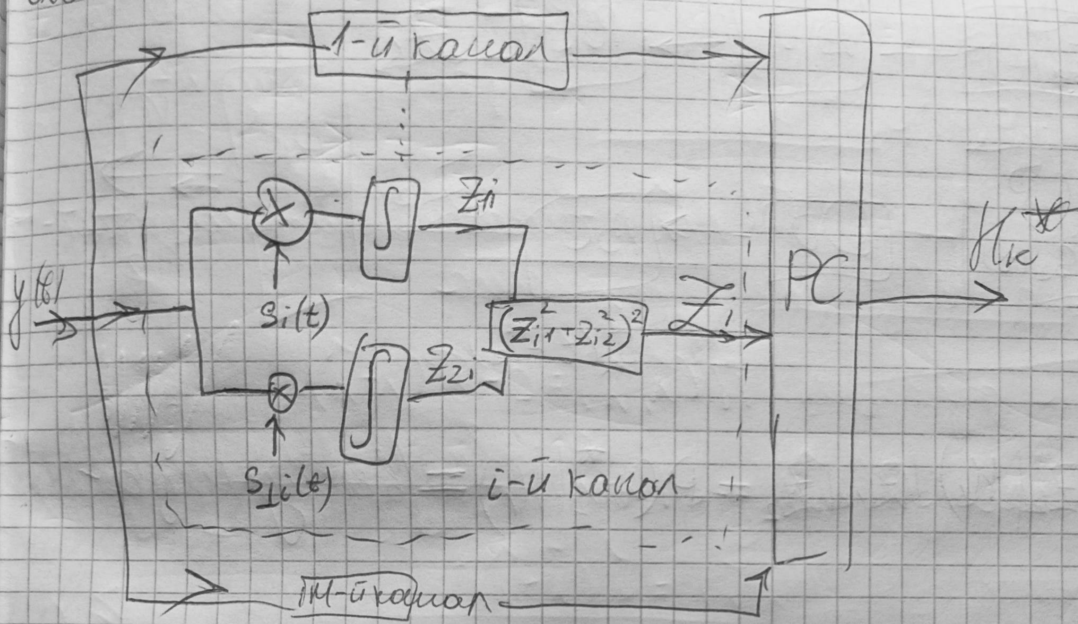
см. лекцию от 14.11

$$Z_i = \sqrt{Z_{1i}^2 + Z_{2i}^2}$$

$$Z_{1i} = \int y(t)\, s_i(t)\, dt$$

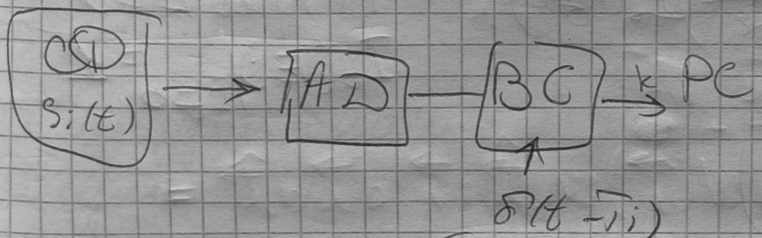
$$Z_{2i} = \int y(t)\, s_{i\perp}(t)\, dt$$

Схема:



Можно построить на базе СФ
Можно — на базе ампл. Д.

i-й канал

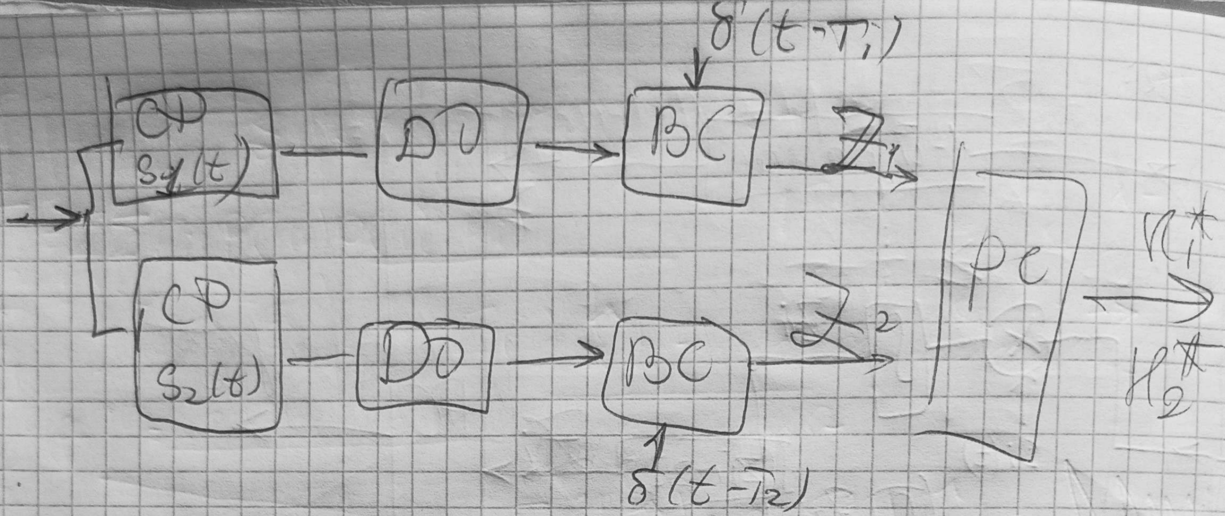


Рассмотрим обнаружение двух $\perp$ сигналов при их усиленной ортогональности

$$\int s_i(t,\varphi_i)\, s_j(t,\varphi_j)\, dt = 0, \quad i \neq j, \ \forall \varphi_i \text{ и } \forall \varphi_j$$

$$\int \dot{S}_i(t)\, \dot{S}_j^*(t)\, dt = 0$$

условие усиленности



$$\iint\limits_{(Z_2>Z_1)} W(Z_1, Z_2 | H_1)\, dZ_1 dZ_2 = P(H_2^* | H_1) =$$ /в силу незави-симости/ $$= W(Z_1|H_1)\, W(Z_2|H_1)$$

Релея-Райса

$$\frac{Z_1}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{Z_1^2+E^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{Z_1 E}{\sigma^2}\right)$$

Релеевский закон

РР при $E=0$

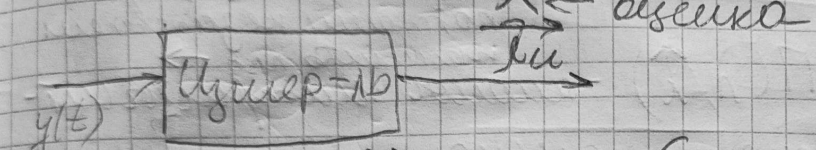
$$I_0(E\cdot)\big|_{E=0} = 1$$

$$P_{ош} = \frac{1}{2}\exp\left(-q^2/4\right)$$

$$P_{ош} \le (M-1)\,\frac{1}{2}\exp\left(-q^2/4\right)$$

19.12.2024

Измерение параметров сигнала



$y(t) = x(t) + s(t, \vec{\lambda}_u, \vec{\lambda}_{ku})$ Объединим $\vec{\lambda}_u$ и $\vec{\lambda}_{ku}$ в $\vec{\lambda}$

$\vec{\lambda}_{u(ku)}$ - вектор информационных (неинформ.) параметров

Шумы аддитивные, статистически описанные, белые гауссовские.

За время наблюдения параметры неизменны (если параметры меняются во времени — смотри курс радиоавтоматики)

На семинаре => наш путь детерминированные алгоритмы: $\hat{\vec{\lambda}} = f(y(t))$

Пусть есть минимальное значение параметров в $\vec{\lambda}$ — $\vec{\lambda}_{min}$, и макс. $\vec{\lambda}_{max}$

У определяемых параметров есть точность, выше которой определять не нужно = $\vec{\Delta\lambda}$

$\vec{\Delta\lambda}$ - вектор точности (max допуст. отклонения)

Минимизация среднего риска – критерий Байеса

$\overline{П} = \sum\limits_i \sum\limits_k П_{ik} P(H_i) P(H_k^*|H_i)$

По хорошему λ – вектор, поэтому не забываем помнить про →

Функция потери $П(\lambda, \hat{\lambda})$ – аналог матрицы штрафов, но только континуальна

Простая функция $П(\lambda, \hat{\lambda}) = C - \delta(\lambda - \hat{\lambda})$

Модульная $П(\lambda, \hat{\lambda}) = C|\lambda - \hat{\lambda}|$

Квадратичная $П(\lambda, \hat{\lambda}) = C(\lambda - \hat{\lambda})^2$

Т.к. λ – непрерывна, то $P(H_i) \rightleftarrows w(\lambda)$

$P(H_k^*|H_i) \rightleftarrows w(\hat{\lambda}|\lambda)$

$$\overline{П} = \iint П(\vec{\lambda}, \hat{\vec{\lambda}})\, w(\vec{\lambda})\, w(\hat{\vec{\lambda}}|\vec{\lambda})\, d\vec{\lambda}\, d\hat{\vec{\lambda}}$$

Апостериорный риск

$$\overline{П}(\ ) = \iint П(\vec{\lambda}, \hat{\vec{\lambda}})\, w(\vec{\lambda})\, w(\hat{\vec{\lambda}}|\vec{\lambda})\, d\vec{\lambda}\, d\hat{\vec{\lambda}} =$$

$$= \int w(y(t)) \underbrace{\int П(\lambda, \hat{\lambda})\, w(\lambda|y(t))\, d\lambda}_{\text{апостериорный средний риск}}\, dy(t)$$

$$= \int [C - \delta(\lambda - \hat{\lambda})]\, w(\lambda|y(t))\, d\lambda = C - \int \delta(\lambda - \hat{\lambda}) \times$$

$\times\, w(\lambda|y(t))\, d\lambda \to \min$ при $\hat{\lambda} = \lambda_m$, т.е. самое наивероятное значение

↑ это мода

если взять $П = c|\lambda-\hat\lambda|$, то λ_m - медиана $W(\lambda)$

если взять $c(\lambda-\hat\lambda)^2$ то λ_m - центр тяжести

Очень плохо использовать $W(\lambda)$, т.к. если и брать то только с потолка. Поэтому <u>отказываемся от Байесовского критерия</u>

Предъявляем требования $\qquad \frac{d}{d\lambda}\hat\lambda$

1) $\overline{\hat\lambda} = \lambda \Leftrightarrow \int(\lambda-\hat\lambda)\, W(y(t)|\lambda)\, dy(t) = 0$ - требование несмещенности оценки

2) $D(\hat\lambda|\lambda) = \min = \int(\lambda-\hat\lambda)^2 W(y(t)|\lambda)\, dy(t)$ - эффективность оценки (минимально возможная дисперсия) $\hat\lambda$ - истинное значение параметра

Граница Крамера-Рао $\qquad (x+1)'$

$$\frac{d}{d\lambda}\int(\lambda-\hat\lambda)\, W(y(t)|\lambda)\, dy(t) = 0$$

$$\underbrace{\int W(y(t)|\lambda)\, dy(t)}_{1,\ \text{по усл. нормировки}} + \int(\lambda-\hat\lambda)\frac{dW(y(t)|\lambda)}{d\lambda}\, dy(t) = 0$$

$$\frac{d\ln W(y(t)|\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{W(y(t)|\lambda)}\frac{dW(y(t)|\lambda)}{d\lambda}$$

$$\int(\hat\lambda-\lambda)\frac{d\ln W(y(t)|\lambda)}{d\lambda}\, W(y(t)|\lambda)\, dy(t) = 1$$

$$\left[\int f\cdot g\,dx\right]^2 \le \int f^2\,dx\cdot\int g^2\,dx$$

$$f(\cdot) = (\hat\lambda-\lambda)\sqrt{W(y(t)|\lambda)}$$

$$g(\cdot) = \frac{d\ln W(y(t)|\lambda)}{d\lambda}\sqrt{W(y(t)|\lambda)}$$

$$\underbrace{\int(\hat\lambda-\lambda)^2 W(y(t)|\lambda)\,dy(t)}_{\int f^2 dx}\cdot\overbrace{\int\left[\frac{d\ln W(y(t)|\lambda)}{d\lambda}\right]^2 W(y(t)|\lambda)}^{\int g^2 dx} \ge 1$$

$$D(\hat\lambda|\lambda) \ge \left[\int\left\{\frac{d\ln W(y(t)|\lambda)}{d\lambda}\right\}^2 W(y(t)|\lambda)\,dy(t)\right]^{-1} =$$

$$= 1\Big/\overline{\left[\frac{d\ln W(y(t)|\lambda)}{d\lambda}\right]^{2}} = \left[-\overline{\frac{d^2\ln W(y(t)|\lambda)}{d\lambda^2}}\right]^{-1}$$

$$\Phi = -\overline{\frac{d^2\ln W(y(t)|\lambda)}{d\lambda^2}}$$ — ~~?~~ информация Фишера

хох ?

26.12.2024

теперь для $\vec\lambda$

$$\Phi_{ik} = -\overline{\frac{\partial^2\ln W(y(t)|\vec\lambda)}{\partial\lambda_i\,\partial\lambda_k}}$$

Оценки по правилу максимума правдоподобия

$$\ln W(y(t)/\hat{\lambda}) = \max_{\lambda} \ln W(y(t)|\lambda)$$

ОМП пар-ов $\{\lambda_i\}$ совместно нормальны с корреляц. матрицей R, обратной информационной матрице Фишера

ОМП - асимптотически несмещённые (т.е. высокоточные оценки)

Оценки эффективны, т.е. min возможная дисперсия

ОМП - асимптотически байесовские

$$W(y(t)|\vec{\lambda}) = \int W(y(t)|\vec{\lambda}_э) W_0(\vec{\theta}) d\vec{\theta}$$

неинформационные параметры

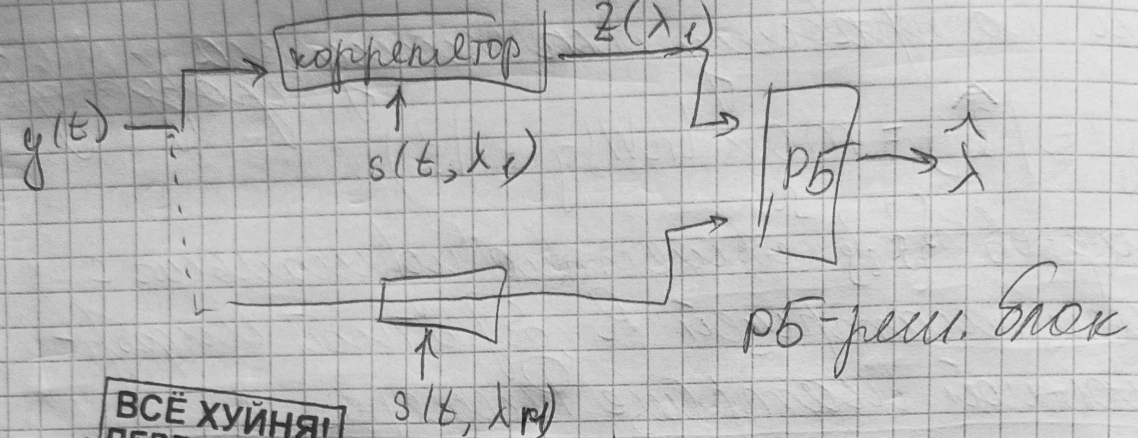
Положение максимума апостериорной W практически совпадает с максимумом правдоподобия

$$W(y(t)|s(t,\vec{\lambda}_э)) = C \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T [y(t) - s(t,\vec{\lambda}_э)]^2 dt\right\} =$$

$$= \Big/ Z(\lambda_э) = \int_0^T y(t) s(t,\vec{\lambda}_э) dt, \quad E(\vec{\lambda}_э) = \int_0^T s^2(t,\vec{\lambda}_э) dt \Big/ =$$

$$= C_y \exp\left[\frac{2Z(\vec{\lambda}_э) - E(\vec{\lambda}_э)}{N_0}\right]$$

$$Z(\hat{\lambda}) - E(\hat{\lambda})/_2 = \max_{\lambda}\{2Z(\vec{\lambda}_э) - E(\vec{\lambda})\}$$



ВСЁ ХУЙНЯ! ~~ПЕРЕДЕЛАТЬ!~~ РАЗОБРАТЬСЯ

Случайная начальная фаза — неинф. параметр

$$w(y(t)|\lambda) = c\int \exp\left[\frac{2Z(\lambda_э) - E(\lambda_э)}{N_0}\right] W_0(\alpha)\, d\alpha =$$

$$\Phi_{ik} = -\frac{2}{N_0}\frac{\partial^2 \overline{Z(\lambda)}}{\partial\lambda_i\, \partial\lambda_k} \qquad \overline{Z(\lambda)} = \int \overline{(n(t)+s(t,\lambda_0))\, s(t,\lambda)}\,dt$$

пар-р принятого сигнала

пар-р опорного сигнала на корреляторе

$$\psi(\vec{\lambda}_0,\vec{\lambda}) = \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty} s(t,\lambda_0)\, s(t,\vec{\lambda})\,dt$$

$$\Phi_{ik} = -q^2 \frac{\partial^2}{\partial\lambda_i\,\partial\lambda_k}\psi(\lambda_0,\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_0}$$

ищем производную в районе λ_0 (т.к. интересует высокая точность)

ф-я неопределенности

$$|\psi(\vec{\lambda}_0,\vec{\lambda})| \le |\psi(\vec{\lambda}_0,\vec{\lambda}_0)| = 1$$

Для неэнергетических пар-ов

$$\psi(\vec{\lambda}) = \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty} s(t,\vec{0})\, s(t,\vec{\lambda})\,dt$$ ← это стационарность

Оценка амплитуды сигнала

$s(t,A) = s_0(t)\cdot A$

Ф-я правдоподобия

$W(y(t)|A) = k\exp\left(-\frac{1}{N_0}\int(y(t)-s(t,A))^2dt\right) =$

$= k_y \exp\left(\frac{2}{N_0} A z_0\right)\exp(-A^2E_0/N_0)$

$W(y(t)|\hat{A}) = \max\limits_{A} W(y(t)|A)$ после ln получаем

$\hat{A} = z_0/E_0$, z_0 — корреляция принятого сигнала с s_0

Оценка дисперсии $D(\hat{A}|A) = 1/q_0^2$

Оценка запаздывания сигнала

$s(t,\tau) = s_0(t-\tau)$ задержку полагаем неэнергетическим пар-ом

Фу-я правдоподобия

$W(y(t)|\tau) = k\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int(y(t)-s(t-\tau))^2dt\right\} = k_1\exp\left(\frac{2}{N_0}Az(\tau)\right)$

$z(\hat{\tau}) = \max\limits_{\tau} z(\tau)$

После СФ $\exists\, t_M$, что $s_{вых}(t_M) = \max$, тогда
$t_M = \hat{\tau} + T_c$

Дисперсия оценки $\frac{1}{(2\pi f_э)^2 q^2}$, $q \gg 1$