

## **Раздел II**

# **ВОЗДЕЙСТВИЕ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ НА ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ УСТРОЙСТВА**

## Глава 6

# ВОЗДЕЙСТВИЕ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ НА ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

### § 1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

Как известно, устройства, которые осуществляют линейное преобразование входного сигнала в выходной, называются линейными, а остальные — нелинейными.

Любое радиотехническое устройство обычно состоит из комбинации линейных и нелинейных звеньев (каскадов). К линейным каскадам можно отнести усилители, фильтры, длинные линии и др. К нелинейным относятся все автоколебательные системы (автогенераторы, гультивибратор, блокинг-генератор), детекторы, смесители, модуляторы, ограничители, умножители, триггеры и др.

К числу линейным системам мы приходим, как правило, в результате упрощений, допустимых лишь при определенных условиях. Так, выше усилители были отнесены к числу линейных систем. Однако вольтамперные характеристики ламп и полупроводниковых приборов являются, вообще говоря, нелинейными и их можно приближенно считать линейными лишь в определенной области.

Точное указание области, где допустима линеаризация характеристики, для случайных сигналов является более сложной задачей, чем для регулярных сигналов. При выяснении возможности линеаризации необходимо учитывать, что хорошая аппроксимация характеристики должна быть на том участке, где имеет место достаточную большую вероятность пребывания случайного сигнала. Примечательно, что нормальным стационарным сигналам обычно стремятся подобрать хорошую аппроксимацию в интервале  $\pm 1,5\sigma$  около среднего значения.

Хотя полное описание поведения линейной системы определяется решением соответствующего дифференциального уравнения, однако для этих целей можно пользоваться передаточными функциями и импульсными характеристиками. Передаточная функция  $K(j\omega)$  равна отношению сигнала на выходе системы к входному гармони-

Таблица 6.1.1

Передаточные функции и импульсные характеристики простейших схем

ческому сигналу с частотой  $\omega$  (рис. 6.1). Импульсная характеристика представляет собой реакцию системы на сигнал в виде дельта-функции  $\delta(t)$ . Если на вход линейной системы действует сигнал  $\delta(t)$ , то сигнал  $G(t)$ , получающийся на выходе линейной системы, и называется импульсной характеристикой. Из физических соображений ясно, что выходной сигнал не может упреждать входной, т. е.  $G(t) = 0$  при  $t < 0$ , и, кроме этого,  $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = 0$ .

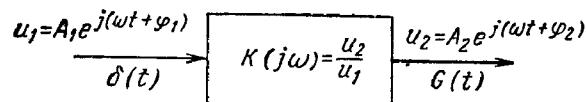


Рис. 6.1. К определению характеристик линейной системы.

Этот факт обычно формулируют в виде двух эквивалентных условий физической осуществимости линейных систем [1,2]:

$$G(t)=0 \text{ при } t < 0, \lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = 0; \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\log |K(j\omega)|^2}{1+\omega^2} \right| d\omega < \infty. \quad (6.1.1)$$

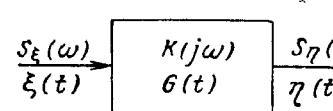


Рис. 6.2. Преобразование характеристик случайных сигналов.

Передаточная функция и импульсная характеристика связаны друг с другом преобразованием Фурье [1];

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (6.1.2)$$

$$K(j\omega) = \int_0^{\infty} G(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (6.1.3)$$

Выражения  $K(j\omega)$  и  $G(t)$  для нескольких простейших схем приведены в табл. 6.1.1. Для гауссова и идеального полосового фильтров условия (6.1.1) не выполняются и они физически неосуществимы (см. § 9).

Если на вход линейной системы (рис. 6.2) действует случайный сигнал  $\xi(t)$  со спектральной плотностью  $S_\xi(\omega)$ , то выходной сигнал  $\eta(t)$  определяется интегралом Дюамеля:

$$\eta(t) = \int_0^t G(t-\tau) \xi(\tau) d\tau = \int_0^t G(x) \xi(t-x) dx, \quad (6.1.4)$$

а спектральная плотность его равна

$$S_\eta(\omega) = S_\xi(\omega) |K(j\omega)|^2, \quad (6.1.5)$$

№	Схема	$K(j\omega) = \int_0^{\infty} G(t) e^{-j\omega t} dt$	$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$
1		$\frac{1}{1+j\omega RC}$	$\frac{1}{RC} e^{-t/RC}$
2		$\frac{j\omega RC}{1+j\omega RC}$	$\delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-t/RC}$
3		$\frac{R}{R+j\omega L}$	$\frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t}$
4		$\frac{j\omega L}{R+j\omega L}$	$\delta(t) - \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t}$

Продолжение

№	Схема	$K(j\omega) = \int_0^\infty G(t) e^{-j\omega t} dt$	$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$
5		$\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\omega}$ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ; $\alpha = \frac{R}{2L}$	$\omega_0 e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t$ при $\omega_0^2 \gg \alpha^2$ , $\alpha^2 t e^{-\alpha t}$ при $\omega_0^2 \ll \alpha^2$ . $\frac{\omega_0^2}{\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}} e^{-\alpha t} \times$ $\times \sin \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} t$ при $\omega_0^2 < \alpha^2$
6		$\frac{j2\alpha\omega R}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\alpha\omega}$ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ; $\alpha = \frac{1}{2RC}$	$\eta(t) = \frac{1}{\omega_0 C} \int_0^t e^{-\alpha(t-x)} \times$ $\times \sin \omega_0(t-x) \xi(x) dx$ , $\omega_0 \gg \alpha$
7	Гауссов фильтр	$e^{-\frac{\pi}{2} \left( \frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega} \right)^2 - j\omega_0(\omega - \omega_0)}$ $\Delta\omega \ll \omega_0$	$\frac{\Delta\omega}{\pi\sqrt{2}} \times$ $\times e^{-\frac{\Delta\omega^2}{2\pi} (t - t_0)^2 + j\omega_0 t}$
8	Идеальный полосовой фильтр	$e^{-j\omega_0(\omega - \omega_0)}$ , $\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} < \omega < \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$ , 0, при других $\omega$	$\frac{\Delta\omega}{2\pi} \frac{\sin \frac{\Delta\omega}{2}(t - t_0)}{\frac{\Delta\omega}{2}(t - t_0)} e^{j\omega_0 t}$

Итак, при рассмотрении преобразований случайных сигналов линейными системами можно пользоваться аппаратом дифференциальных уравнений, импульсными характеристиками и передаточными функциями.

В общем случае, когда интересуются как нестационарным, так и стационарным режимами работы системы и начальные условия в системе не нулевые, целесообразно пользоваться дифференциальными уравнениями. Если же начальные условия нулевые, то можно пользоваться импульсными характеристиками. С функциями передачи обычно оперируют в том случае, когда интересуются лишь стационарным состоянием системы.

Среди линейных преобразований случайных процессов некоторые специфические особенности имеют дифференцирование (см. § 2) и простое интегрирование (§ 3).

## § 2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть имеется случайная функция  $\xi(t)$ , удовлетворяющая условиям дифференцируемости (см. ниже), с математическим ожиданием  $M_\xi(t)$  и корреляционной функцией  $K_\xi(t_1, t_2)$ . Найдем математическое ожидание  $M_\eta(t)$  и корреляционную функцию  $K_\eta(t_1, t_2)$  для производной

$$\eta(t) = \dot{\xi}(t) = \frac{d\xi(t)}{dt}. \quad (6.2.1)$$

Конкретным примером такой задачи является определение статистических характеристик напряжения на индуктивности по заданным характеристикам протекающего через нее флюктуационного тока.

Представим производную в виде предела и статистически усредним обе части получающегося равенства:

$$M_\eta(t) = \langle \eta(t) \rangle = \left\langle \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\xi(t + \Delta t) - \xi(t)}{\Delta t} \right\rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \xi(t + \Delta t) - \xi(t) \rangle}{\Delta t} = \\ = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M_\xi(t + \Delta t) - M_\xi(t)}{\Delta t}.$$

Итак,

$$M_\eta(t) = \frac{dM_\xi(t)}{dt}, \quad (6.2.2)$$

т. е. математическое ожидание производной от случайной функции равно производной от ее математического ожидания.

Для определения  $K_\eta(t_1, t_2)$  перейдем к центрированным случайным функциям

$$\overset{\circ}{\eta}(t) = \eta(t) - M_\eta(t), \quad \overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - M_\xi(t), \quad \overset{\circ}{\eta}(t) = \frac{d\overset{\circ}{\xi}(t)}{dt}.$$

По определению

$$K_\eta(t_1, t_2) = \langle \dot{\eta}(t_1) \dot{\eta}(t_2) \rangle = \left\langle \frac{d\dot{\xi}(t_1)}{dt_1} \frac{d\dot{\xi}(t_2)}{dt_2} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 [\dot{\xi}(t_1) \dot{\xi}(t_2)]}{\partial t_1 \partial t_2} \right\rangle.$$

Но выше было доказано, что математическое ожидание производной случайной функции равно производной от математического ожидания, т. е. операции дифференцирования и статистического усреднения можно менять местами. Поэтому

$$K_\xi(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 K_\xi(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}. \quad (6.2.3)$$

Процесс  $\xi(t)$ , для которого существует конечная вторая смешанная производная от корреляционной функции по ее аргументам, называется дифференцируемым [см. условие (6.2.11)]; в противоположном случае — недифференцируемым.

Таким образом, чтобы найти корреляционную функцию производной дифференцируемого процесса, нужно дважды проинтегрировать корреляционную функцию исходного процесса: сначала по одному аргументу, а затем по другому.

Путем аналогичных рассуждений нетрудно доказать, что если процесс  $\xi(t)$  дифференцируем несколько раз и

$$\eta(t) = \frac{d^n \xi(t)}{dt^n}, \quad (6.2.4)$$

то справедливы формулы

$$M_\eta(t) = \frac{d^n M_\xi(t)}{dt^n}, \quad (6.2.5)$$

$$K_\eta(t_1, t_2) = \frac{\partial^{2n} K_\xi(t_1, t_2)}{\partial t_1^n \partial t_2^n}, \quad (6.2.6)$$

$$K_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \langle \xi(t_1) \eta(t_2) \rangle = \frac{\partial^n K_\xi(t_1, t_2)}{\partial t_2^n}. \quad (6.2.7)$$

Применим полученные формулы к стационарному процессу  $\xi(t)$ , для которого

$$m_\xi = \langle \xi(t) \rangle = m, \quad k_\xi(t_1, t_2) = k_\xi(\tau), \quad \tau = t_2 - t_1. \quad (6.2.8)$$

Если  $\eta(t) = \dot{\xi}(t)$ , то  $m_\eta = 0$  и

$$k_\xi(\tau) = -\frac{d^2 k_\xi(\tau)}{d\tau^2} = -k''_\xi(\tau), \quad (6.2.9)$$

$$k_{\xi\eta}(\tau) = \langle \dot{\xi}(t_1) \eta(t_2) \rangle = -\langle \dot{\xi}(t_2) \eta(t_1) \rangle = \frac{dk_\xi(\tau)}{d\tau}, \quad (6.2.10)$$

где  $\eta(t)$  — производная (6.2.1).

Если стационарный случайный процесс  $\xi(t)$  имеет корреляционную функцию

$$k_\xi(\tau) = \sigma^2 R(\tau), \quad R(\tau) = e^{-\alpha\tau^2},$$

то по формуле (6.2.9) находим коэффициент корреляции производной

$$R_2(\tau) = R_{\dot{\xi}}(\tau) = \frac{k''_\xi(\tau)}{k''_\xi(0)} = (1 - 2\alpha\tau^2)e^{-\alpha\tau^2}.$$

Коэффициент взаимной корреляции между случайной функцией и ее производной равен

$$R_1(\tau) = \frac{\langle \xi(t) \dot{\xi}(t + \tau) \rangle}{\sigma \sqrt{-k''_\xi(0)}} = -\tau \sqrt{2\alpha} e^{-\alpha\tau^2}.$$

На рис. 6.3 приведены графики коэффициентов корреляции  $R$ ,  $R_1$  и  $R_2$ . Коэффициенты автокорреляции для стационарной функции  $R(\tau)$  и ее производной  $R_2(\tau)$  есть четные функции своего аргумента,

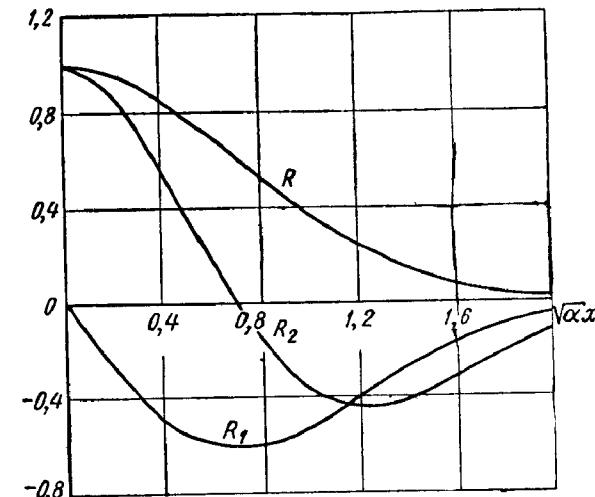


Рис. 6.3. Графики коэффициентов корреляции.

а коэффициент взаимной корреляции  $R_1(\tau)$  между стационарной функцией и ее производной всегда является нечетной функцией  $\tau$ .

Из формулы (6.2.9) следует, что в результате дифференцирования стационарного случайного процесса всегда получается стационарный (в широком смысле) случайный процесс с нулевым средним значением.

Воспользовавшись свойством автокорреляционной функции (3.6.8), можем написать

$$|k''_{\xi}(\tau)| \leq -k''_{\xi}(0) = \sigma_{\xi}^2. \quad (6.2.11)$$

Значит, конечная вторая производная от корреляционной функции стационарного процесса существует при любом  $\tau$ , если только она существует при  $\tau = 0$ , т. е. если существует конечная дисперсия для производной (скорости). Этот результат позволяет легко проверить, будет ли процесс дифференцируемым или нет. Например, корреляционные функции № 1, 2, 7, 8 и 10 табл. 3.14.1 недифференцируемы, так как для них либо  $k''(0) = \infty$ ; либо  $k''(+0) \neq k''(-0)$ .

На основании формул (3.10.1) и (3.10.2) находим связь между спектральными плотностями стационарной случайной функции и ее производной, а также выражение для дисперсии производной через спектральную плотность:

$$S_{\xi}(\omega) = \omega^2 S_{\xi}(\omega), \quad (6.2.12)$$

$$\sigma_{\xi}^2 = -k''_{\xi}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_{\xi}(\omega) d\omega. \quad (6.2.13)$$

Из последней формулы видно, что для дифференцируемого процесса спектральная плотность должна убывать при высоких частотах быстрее, чем  $\omega^{-3}$ . В противном случае процесс будет недифференцируемым.

Формула (6.2.10) показывает, что функция взаимной корреляции между стационарной случайной функцией и ее производной меняет знак в зависимости от того, берется производная справа или слева от значения самой случайной функции. Из четности корреляционной функции  $k_{\xi}(\tau)$ , а также из (6.2.10) при  $\tau = 0$  следует, что

$$k_{\xi\eta}(0) = k'_{\xi}(0) = 0. \quad (6.2.14)$$

Следовательно, стационарная случайная функция и ее производная в совпадающие моменты времени некоррелированы.

Этот важный результат позволяет просто находить совместные плотности вероятности  $w_2(\xi(t), \dot{\xi}(t))$ . Если, например, дифференцируемый стационарный процесс  $\xi(t)$  нормальный, то  $\xi(t)$  и  $\dot{\xi}(t)$  независимы:

$$w_2(\xi(t), \dot{\xi}(t)) = w(\xi) w(\dot{\xi}). \quad (6.2.15)$$

Так как в результате дифференцирования, являющегося линейной операцией, свойство нормальности сохраняется, то можем написать \*

$$w(\xi) = \frac{1}{\sigma_{\xi}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma_{\xi}^2}\right), \quad \sigma_{\xi}^2 = -k''_{\xi}(0). \quad (6.2.16)$$

\* Следует иметь в виду, что если производная случайного процесса имеет нормальную плотность вероятности, то это не означает, что сам процесс является тоже нормальным [см. формулу (7.5.10)].

Обозначим функцию корреляции процесса  $\xi(t)$  через

$$k_{\xi}(\tau) = \sigma^2 R(\tau). \quad (6.2.17)$$

Тогда формула (6.2.15) принимает вид

$$w_2(\xi, \dot{\xi}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2 \sqrt{-R''_0}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\xi^2 - \frac{1}{R''_0} \dot{\xi}^2\right)\right], \quad (6.2.18)$$

где

$$-R''_0 = -\frac{d^2 R(\tau)}{d\tau^2} \Big|_{\tau=0} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_{\xi}(\omega) d\omega > 0. \quad (6.2.19)$$

Оказывается, что для дифференцируемых стационарных случайных процессов плотность вероятности  $w_2(\xi(t), \dot{\xi}(t))$  является четной функцией относительно  $\dot{\xi}(t)$ . Действительно, пусть  $W_2(\xi_1, \dot{\xi}_2)$  — двумерная плотность вероятности значений стационарного процесса  $\xi(t)$  в два момента времени  $t_1 = t - \frac{\Delta}{2}$ ,  $t_2 = t + \frac{\Delta}{2}$ , где  $\Delta > 0$  малая величина. Для дифференцируемого процесса можем написать

$$\xi_1 = \xi - \xi \frac{\Delta}{2}, \quad \dot{\xi}_2 = \dot{\xi} + \dot{\xi} \frac{\Delta}{2}, \quad \dot{\xi} = \dot{\xi}(t).$$

Переходя в  $W_2(\xi_1, \dot{\xi}_2)$  от переменных  $\xi_1, \dot{\xi}_2$  к новым переменным  $\xi$  и  $\dot{\xi}$  и учитывая, что якобиан преобразования  $\partial(\xi_1, \dot{\xi}_2)/\partial(\xi, \dot{\xi}) = \Delta$ , имеем

$$w_2(\xi, \dot{\xi}) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta W_2\left(\xi - \xi \frac{\Delta}{2}, \dot{\xi} + \dot{\xi} \frac{\Delta}{2}\right).$$

Так как  $W_2(\xi_1, \dot{\xi}_2)$  удовлетворяет условию симметрии (т. е. не меняется при перестановке аргументов), то получим

$$w_2(\xi, \dot{\xi}) = w_2(\xi, -\dot{\xi}). \quad (6.2.20)$$

Применительно к стационарным процессам формулы (6.2.6) и (6.2.7) принимают вид

$$k_{\eta}(\tau) = (-1)^n \frac{d^{2n} k_{\xi}(\tau)}{d\tau^{2n}}, \quad k_{\xi\eta}(\tau) = \frac{d^n k_{\xi}(\tau)}{d\tau^n}. \quad (6.2.21)$$

Повторив предыдущие рассуждения, можно прийти к выводу, что если стационарный случайный процесс дифференцируем несколько раз, то производная  $n$ -го порядка некоррелирована с  $(n-1)$ -й и  $(n+1)$ -й производными, взятыми в один и тот же момент времени.

Применительно к нормальному стационарному процессу отсюда следует, что

$$w_3(\xi(t), \dot{\xi}(t), \ddot{\xi}(t)) = w_3(\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}) = w(\xi) w_2(\xi, \dot{\xi}). \quad (6.2.22)$$

Выполнив вычисления, получим

$$\omega_3(\xi, \xi, \xi) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sigma_1 V \gamma} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\gamma} [\sigma_2^2 \xi^2 + 2\sigma_1^2 \xi \xi + \sigma_2^2 \xi] - \frac{1}{2\sigma_1^2} \xi^2 \right\}, \quad (6.2.23)$$

где

$$\sigma_1^2 = -\sigma^2 R''_0, \sigma_2^2 = \sigma^2 \frac{d^4 R(\tau)}{d\tau^4} \Big|_{\tau=0} = \sigma^2 R_0^{(4)}, \gamma = \sigma^2 \sigma_2^2 - \sigma_1^4. \quad (6.2.24)$$

В ряде практических задач (например, при анализе действия помех на пороговые устройства) необходимо оперировать с дифференцируемыми случайными процессами. Дифференцируемые процессы можно формировать путем пропускания шума (в частности, белого) через соответствующие интегрирующие цепи [см. формулу (6.5.8)].

Иногда (при экспериментальных исследованиях) бывает известно, что исходный процесс  $\xi(t)$  стационарен и непосредственно определяется корреляционная функция для скорости  $\dot{\xi}(t)$ , т. е. —  $k_{\dot{\xi}}''(\tau)$ . При подборе аналитической аппроксимации для функции —  $k_{\dot{\xi}}''(\tau)$  и определении по ней  $k_{\dot{\xi}}(\tau)$  нужно учитывать, что —  $k_{\dot{\xi}}''(\tau)$  должна удовлетворять соотношениям (3.6.7) — (3.6.10), а также условию

$$\int_{-\infty}^0 k_{\dot{\xi}}''(\tau) d\tau = \int_0^\infty k''(\tau) d\tau = k'(\infty) - k'(0) = 0. \quad (6.2.25)$$

### § 3. ПРОЦЕСС СО СТАЦИОНАРНЫМИ И НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

Пусть требуется найти статистические характеристики процесса  $\eta(t)$ , причем

$$\dot{\eta}(t) = n(t), \quad (6.3.1)$$

где  $n(t)$  — нормальный стационарный белый шум с нулевым средним значением и функцией корреляции (3.16.1).

С таким процессом мы уже встречались в § 18 гл. 3 при упрощенном рассмотрении броуновского движения [см. (3.18.1)]. Аналогичным уравнением описывается поведение фазы автогенератора с учетом малых собственных флуктуационных шумов [см. (8.2.21)].

Запишем решение уравнения (6.3.1):

$$\eta(t_0 + T) = \eta(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+T} n(\tau) d\tau. \quad (6.3.2)$$

Видно, что характерная особенность процесса  $\eta(t)$  состоит в том, что он не переходит в стационарный процесс при сколь угодно боль-

шом интервале  $T$ . Рассмотрим приращение процесса за интервал времени  $T > 0$ :

$$\Delta\eta(T) = \eta(t_0 + T) - \eta(t_0) = \int_{t_0}^{t_0+T} n(\tau) d\tau. \quad (6.3.3)$$

Вследствие стационарности шума  $n(t)$  приращение имеет одинаковые статистические свойства независимо от выбранного момента времени  $t_0$  (стационарность приращений).

Из-за дельтообразного вида корреляционной функции шума  $n(t)$  приращения нормального процесса  $\eta(t)$  на неперекрывающихся интервалах времени независимы:

$$\langle [\eta(t_0 + T) - \eta(t_0)] [\eta(t_1 + T) - \eta(t_1)] \rangle = \\ = \frac{N_0}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{t_1}^{t_1+T} \delta(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 = \begin{cases} 0, |t_0 - t_1| > T, \\ \frac{N_0}{2} T, t_0 = t_1. \end{cases} \quad (6.3.4)$$

Поэтому нормальный процесс  $\Delta\eta(T)$  является марковским. Как и в задаче о случайных блужданиях, рассмотренной в § 6 гл. 2, дисперсия приращения растет пропорционально времени:

$$\sigma_{\Delta\eta}^2(T) = \frac{N_0}{2} T. \quad (6.3.5)$$

Плотность вероятности приращения процесса равна

$$w(\Delta\eta) = \frac{1}{V^{\pi N_0 T}} \exp \left( -\frac{\Delta\eta^2}{N_0 T} \right), \quad (6.3.6)$$

что совпадает с (3.19.30).

Описанный нормальный процесс с независимыми приращениями иногда называют процессом Винера.

### § 4. ДЕЙСТВИЕ БЕЛОГО ШУМА И ВИДЕОИМПУЛЬСА НА ИНТЕГРИРУЮЩУЮ ЦЕПОЧКУ RC

Пусть на цепочку  $RC$  (рис. 6.4, б) действует белый шум  $n(t)$ , имеющий нулевое среднее значение и функцию корреляции (3.16.1). Найдем среднее значение и функцию корреляции для напряжения  $\eta(t)$  на емкости  $C$ . Напряжение  $\eta(t)$  определяется линейным дифференциальным уравнением

$$\eta + \alpha\eta = \alpha n(t), \quad \alpha = \frac{1}{RC}. \quad (6.4.1)$$

Общее решение этого уравнения при начальном условии  $\eta = \eta_0$ ,  $t = 0$  имеет вид

$$\eta(t) = e^{-\alpha t} \left[ \eta_0 + \alpha \int_0^t e^{\alpha x} n(x) dx \right]. \quad (6.4.2)$$

Относительно характера начального условия нужно различать два случая:

- 1) начальное условие является детерминированным (неслучайным);
- 2) начальное условие является случайным.

Предположим пока, что начальное напряжение  $\eta_0$  является детерминированным. Из решения (6.4.2) находим среднее значение

$$M_\eta(t) = \langle \eta(t) \rangle = \eta_0 e^{-\alpha t} + \alpha e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha x} \langle n(x) \rangle dx = \eta_0 e^{-\alpha t}. \quad (6.4.3)$$

В данном случае, при нулевом среднем значении шума, среднее значение напряжения на конденсаторе обусловлено только начальным зарядом конденсатора, который в результате разряда конденсатора с течением времени стремится к нулю.

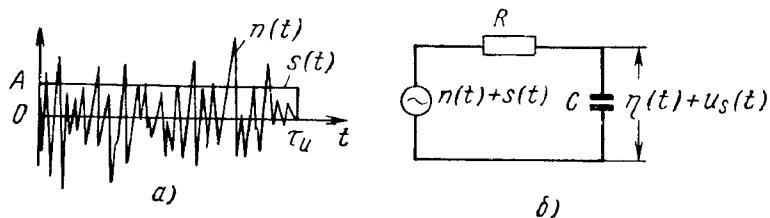


Рис. 6.4. Воздействие импульсного сигнала и шума на цепочку  $RC$ .

Для функции корреляции напряжения на конденсаторе на основании (6.4.2) и (3.16.1) можем написать

$$\begin{aligned} K_\eta(t_1, t_2) &= \langle [\eta(t_1) - M_\eta(t_1)] [\eta(t_2) - M_\eta(t_2)] \rangle = \\ &= \frac{\alpha^2 N_0}{2} e^{-\alpha(t_1+t_2)} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} e^{\alpha(x+y)} \delta(x-y) dx dy. \end{aligned} \quad (6.4.4)$$

При вычислении данного интеграла нужно воспользоваться формулой (П.4). Области интегрирования в выражении (6.4.4) для  $t_2 = t_1 + \tau$  при  $\tau > 0$  и  $\tau < 0$  показаны соответственно на рис. 6.5, а и б. Дельта-функция  $\delta(x-y)$  обращается в бесконечность лишь на том участке биссектрисы координатного угла плоскости переменных  $x, y$ , который определяется наименьшим из пределов  $t_1, t_2$ . В заштрихованных областях  $\delta(x-y)$  обращается в нуль. Поэтому при вычислении интеграла в выражении (6.4.4) оба предела интегрирования нужно полагать одинаковыми и равными наименьшему:  $t = \min(t_1, t_2)$ .

Так, например, если  $t_1 < t_2$ , то при вычислении интеграла полагаем  $t_1 = t_2 = t$ :

$$\begin{aligned} J &= \int_0^t \int_0^t e^{\alpha(x+y)} \delta(x-y) dx dy = \\ &= \int_0^t e^{\alpha x} dx \int_0^t e^{\alpha y} \delta(x-y) dy = \frac{1}{2\alpha} (e^{2\alpha t} - 1). \end{aligned}$$

Тогда (6.4.4) можем записать

$$K_\eta(t_1, t_2) = \frac{\alpha}{4} N_0 e^{-\alpha(t_1+t_2)} (e^{2\alpha t} - 1).$$

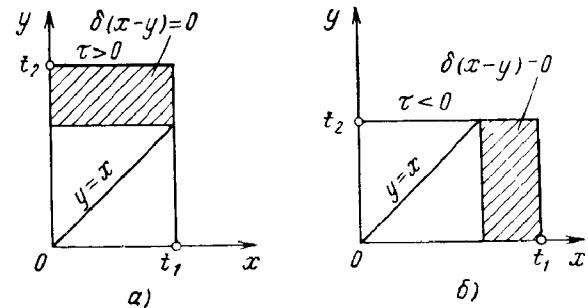


Рис. 6.5. Области интегрирования.

Полагая  $t_1 = t + \tau$ , где в данном случае  $\tau > 0$ , получим

$$K_\eta(t, t+\tau) = \frac{\alpha}{4} N_0 e^{-\alpha\tau} (1 - e^{-2\alpha t}).$$

Рассмотрев аналогичным образом случай  $\tau < 0$ , получим окончательную формулу

$$K_\eta(t, t+\tau) = \frac{\alpha}{4} N_0 e^{-\alpha|\tau|} (1 - e^{-2\alpha t}). \quad (6.4.5)$$

Отсюда при  $\tau = 0$  получаем выражение для дисперсии

$$\sigma_\eta^2(t) = \frac{\alpha}{4} N_0 (1 - e^{-2\alpha t}) \quad (6.4.6)$$

Формулы для функции корреляции и дисперсии в стационарном состоянии получаются из (6.4.5) и (6.4.6) при  $t \rightarrow \infty$ :

$$k_\eta(\tau) = \frac{\alpha}{4} N_0 e^{-\alpha|\tau|}, \quad \sigma_\eta^2 = \frac{\alpha}{4} N_0. \quad (6.4.7)$$

Предположим теперь, что на рассматриваемую цепочку  $RC$  совместно с белым шумом  $n(t)$  действует сигнальный видеоимпульс  $s(t)$  прямоугольной формы с амплитудой  $A$  и длительностью  $\tau_s$

(рис. 6.4, а). Начальное напряжение на конденсаторе положим равным нулю ( $\eta_0 = 0$ ). Нужно найти отношение сигнал/шум в конце импульса, т. е. при  $t = \tau_u$ . Под отношением сигнал/шум будем понимать отношение напряжения на конденсаторе  $u_s(t)$ , обусловленного только видеоимпульсом  $s(t)$ , к среднеквадратичному значению напряжения нестационарного шума  $\sigma_\eta(t)$  в конце импульса.

Как известно, напряжение сигнала на конденсаторе в конце импульса равно

$$u_s(\tau_u) = A(1 - e^{-\alpha\tau_u}).$$

Дисперсия шума в конце импульса определяется формулой (6.4.6) при  $t = \tau_u$ :

$$\sigma_\eta^2(\tau_u) = \frac{\alpha}{4} N_0 (1 - e^{-2\alpha\tau_u}). \quad (6.4.8)$$

Поэтому отношение сигнал/шум равно

$$\frac{u_s(\tau_u)}{\sigma_\eta(\tau_u)} = \frac{2A(1 - e^{-\alpha\tau_u})}{\sqrt{\alpha N_0 (1 - e^{-2\alpha\tau_u})}}. \quad (6.4.9)$$

Если постоянная времени  $RC$  очень велика, так что выполняется неравенство  $\alpha\tau_u \ll 1$ , то, применяя приближенное равенство  $e^{-\alpha x} \approx 1 - \alpha x$ , из формулы (6.4.9) получим

$$\frac{u_s(\tau_u)}{\sigma_\eta(\tau_u)} = \sqrt{\frac{2E}{N_0}}, \quad (6.4.10)$$

где  $E = A^2 \tau_u$  — энергия сигнального импульса.

Таким образом, при выполнении условия  $\alpha\tau_u \ll 1$ , обеспечивающего хорошее интегрирование в течение длительности импульса, отношение сигнал/шум определяется только отношением удвоенной энергии сигнала к спектральной плотности шума и не зависит по-разному от амплитуды и длительности импульса. Применимально к радиоимпульсам формула (6.4.10) остается также справедливой, только теперь интегрирование нужно осуществлять при помощи оптимальных фильтров [см. формулу (10.6.8)].

Этот результат имеет фундаментальное значение в теории помехоустойчивости (см. § 4 гл. 10). Он показывает, что путем интегрирования или оптимальной фильтрации можно выделить из шума импульс даже очень малой амплитуды лишь бы он обладал большой длительностью (энергией).

## § 5. ПРИМЕРЫ УЧЕТА СЛУЧАЙНЫХ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

Проиллюстрируем методику учета случайных начальных условий на двух частных примерах.

1. **Действие шумовых импульсов на цепочку  $RC$ .** Пусть на последовательную цепочку  $RC$  (рис. 6.4, б) действуют два импульса

шума, отстоящие друг от друга на интервал  $T$  (рис. 6.6). Каждый из шумовых импульсов представляет собой отрезок длительностью  $\tau_u$  нормального стационарного напряжения  $\xi(t)$  с нулевым средним значением и функцией корреляции

$$k_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 e^{-\beta|\tau|}. \quad (6.5.1)$$

Начальное напряжение на конденсаторе считается равным нулю ( $\eta_0 = 0$ ,  $t = 0$ ). Найдем дисперсию напряжения  $\eta(t)$  в конце второго импульса, т. е. при  $t = T + \tau_u$ .

Из (6.4.2) следует, что напряжение на конденсаторе в конце первого импульса равно:

$$\eta(\tau_u) = \alpha e^{-\alpha\tau_u} \int_0^{\tau_u} e^{\alpha x} \xi(x) dx.$$

Так как  $\langle \xi(t) \rangle = 0$ , то  $\langle \eta(\tau_u) \rangle = 0$ . Поэтому для дисперсии можем написать выражение

$$\begin{aligned} \sigma_\eta^2(\tau_u) &= \langle \eta^2(\tau_u) \rangle = \\ &= \alpha^2 e^{-2\alpha\tau_u} \int_0^{\tau_u} \int_0^{\tau_u} e^{\alpha(x+y)} k_\xi(y-x) dx dy = \\ &= \alpha^2 \sigma_\xi^2 e^{-2\alpha\tau_u} \int_0^{\tau_u} \int_0^{\tau_u} e^{\alpha(x+y)-\beta|y-x|} dx dy. \end{aligned} \quad (6.5.2)$$

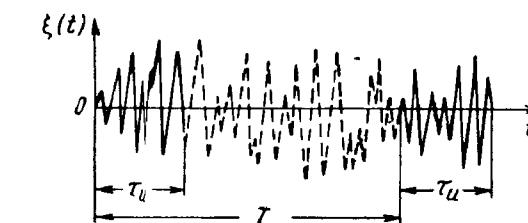


Рис. 6.6. Два шумовых импульса.

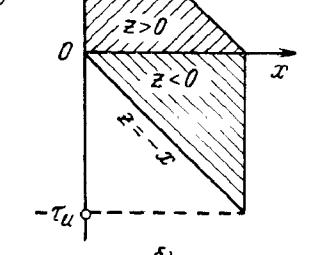
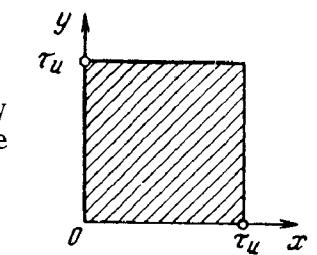


Рис. 6.7. Области интегрирования.

При вычислении этого интеграла целесообразно сделать замену переменной  $y$  по формуле  $z = y - x$ . При этом прямоугольная область интегрирования (рис. 6.7, а) переходит в параллелограмм (рис. 6.7, б). Учитывая знак переменной  $z$ , можем написать

$$\begin{aligned} \sigma_\eta^2(\tau_u) &= \alpha^2 \sigma_\xi^2 e^{-2\alpha\tau_u} \int_0^{\tau_u} e^{2\alpha x} dx \left[ \int_{-x}^0 e^{(\alpha+\beta)z} dz + \int_0^{\tau_u-x} e^{(\alpha-\beta)z} dz \right] = \\ &= \frac{\alpha \sigma_\xi^2}{\alpha^2 - \beta^2} [(\alpha - \beta) + (\alpha + \beta) e^{-2\alpha\tau_u} - 2\alpha e^{-(\alpha + \beta)\tau_u}]. \end{aligned} \quad (6.5.3)$$

В интервале между импульсами происходит разряд конденсатора по экспоненциальному закону. Напряжение в начале второго импульса (т. е. при  $t = T$ ) равно:

$$\eta(T) = e^{-\alpha(T-\tau_i)} \eta(\tau_i) = \alpha e^{-\alpha T} \int_0^{\tau_i} e^{\alpha x} \xi(x) dx.$$

Среднее значение этого напряжения равно нулю, а дисперсия определяется формулой

$$\sigma_\eta^2(T) = \sigma_\eta^2(\tau_i) e^{-2\alpha(T-\tau_i)}. \quad (6.5.4)$$

Случайное напряжение  $\eta(T)$  является начальным напряжением при рассмотрении действия второго шумового импульса на схему. При  $\eta_0 = \eta(T)$  выражение (6.4.2) принимает вид

$$\eta(t) = e^{-\alpha t} \left[ \eta(T) + \alpha \int_T^t e^{\alpha y} \xi(y) dy \right], \quad T \leq t \leq T + \tau_i.$$

Полагая здесь  $t = T + \tau_i$ , получаем напряжение в конце второго импульса:

$$\eta(T + \tau_i) = e^{-\alpha(T + \tau_i)} \left[ \eta(T) + \alpha \int_T^{T + \tau_i} e^{\alpha y} \xi(y) dy \right]. \quad (6.5.5)$$

Статистически усредня левую и правую части этого равенства и учитывая, что  $\langle \xi(t) \rangle = 0$ , находим  $\langle \eta(T + \tau_i) \rangle = 0$ . Поэтому выражение для дисперсии в конце второго импульса имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_\eta^2(T + \tau_i) &= e^{-2\alpha(T + \tau_i)} \left[ \sigma_\eta^2(T) + 2\alpha \int_T^{T + \tau_i} e^{\alpha y} \langle \eta(T) \xi(y) \rangle dy + \right. \\ &\quad \left. + \alpha^2 \int_T^{T + \tau_i} \int_T^{T + \tau_i} e^{\alpha(x+y)} k_\xi(y-x) dx dy \right]. \end{aligned} \quad (6.5.6)$$

После вычислений получим

$$\sigma_\eta^2(T + \tau_i) = (1 + e^{-4\alpha\tau_i}) \sigma_\eta^2(\tau_i) + I_0, \quad (6.5.7)$$

где

$$\begin{aligned} I_0 &= 2\alpha^2 e^{-3\alpha T - 2\alpha\tau_i} \int_T^{T + \tau_i} dy \int_0^{\tau_i} e^{\alpha(x+y)} k_\xi(y-x) dx = \\ &= \frac{2\alpha^2 \sigma_\xi^2}{\alpha^2 - \beta^2} e^{-(2\alpha + \beta)T} [1 + e^{-2\alpha\tau_i} - e^{-(\alpha + \beta)\tau_i} - e^{-(\alpha - \beta)\tau_i}]. \end{aligned}$$

По существу член  $I_0$  учитывает взаимную корреляцию двух интегральных эффектов от одной и той же случайной функции на разных временных интервалах, разделенных промежутком  $T - \tau_i$ . Поэтому случайное начальное напряжение  $\eta(T)$  оказывается коррелированным с шумовым напряжением  $\xi(t)$  второго импульса. Степень этой коррелированности зависит от значений  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $T$  и  $\tau_i$ . Если бы напряжение  $\xi(t)$  было белым шумом, то  $I_0 = 0$  независимо от значений  $\alpha$ ,  $T$  и  $\tau_i$ . При  $\alpha(T - \tau_i) \gg 1$  слагаемое  $I_0$  также равно нулю, так как в данном случае система «забывает» результат действия на нее внешнего возмущения к моменту появления второго импульса и  $\eta(T) = 0$ . Однако даже при  $\alpha T \leq 1$  слагаемое  $I_0$  обращается в нуль, если интервал между импульсами  $T - \tau_i > \tau_k$ , где  $\tau_k = \frac{1}{\beta}$  — время корреляции шума  $\xi(t)$ . В данном случае значения  $\xi(t)$ , разделенные интервалом времени  $T - \tau_i$ , некоррелированы.

Укажем, что при воздействии стационарного шума  $\xi(t)$  с функцией корреляции (6.5.1) на цепочку  $RC$  с постоянной времени  $RC = \frac{1}{\alpha}$  функция корреляции напряжения  $\eta(t)$  на емкости в стационарном состоянии равна

$$k_\eta(\tau) = \frac{\alpha^2 \sigma_\xi^2}{\alpha^2 - \beta^2} \left( e^{-\beta|\tau|} - \frac{\beta}{\alpha} e^{-\alpha|\tau|} \right). \quad (6.5.8)$$

Заметим, что флюктуационное напряжение с функцией корреляции (6.4.7) недифференцируемо, а с функцией корреляции (6.5.8) дифференцируемо. Ранее было показано, что функцию корреляции (6.4.7) или (6.5.1) можно получить пропусканием белого шума через интегрирующую цепочку  $RC$ . Следовательно, функцию корреляции (6.5.8) можно получить пропусканием белого шума через две интегрирующие цепочки  $RC$ . Из сказанного следует, что для получения из белого шума дифференцируемых флюктуаций его нужно проинтегрировать с той или иной весовой функцией по крайней мере два раза, или преобразовать при помощи соответствующей линейной системы, описываемой дифференциальным уравнением второго порядка.

**2. Флюктуационный характер установления амплитуды колебаний в автогенераторе.** Если в автогенераторе выполнены условия возбуждения, то в отсутствие «больших» внешних электрических помех будет происходить возбуждение генератора из-за электрических флюктуаций, органически присущих элементам схемы автогенератора, а именно, из-за флюктуаций тока лампы или тепловых флюктуаций сопротивлений потерь. Можно привести несколько случаев, когда может быть практически реализован флюктуационный характер самовозбуждения.

Пусть автогенератор, принципиальная схема которого изображена на рис. 6.8, питается от идеально стабильных источников напряжения и расположен в металлическом экране. Если конденса-

тор  $C_1$  большой емкости, шунтирующий катушку обратной связи (или колебательный контур), отсоединить в момент времени  $t = 0$ , то генератор возбуждается, причем единственной причиной возбуждения в данном случае являются собственные флюктуации генератора.

Предположим, что в рассматриваемом генераторе конденсатор  $C_1$  отсутствует, а напряжение на аноде лампы, начиная с момента  $t = 0$ , медленно увеличивается во времени. Тогда в окрестности некоторого момента времени  $t_0$ , когда анодное напряжение окажется таким, что будут выполнены условия возбуждения, возникнут колебания также вследствие собственных флюктуаций. Если такой запуск автогенератора осуществляется многократно, то будет иметь место разброс времени  $\tau$  (отсчитываемого от  $t_0$ ), по истечении которого амплитуда автоколебаний достигнет некоторого фиксированного значения. Такое положение наблюдается на практике в автогенераторах с импульсной модуляцией, так как из-за

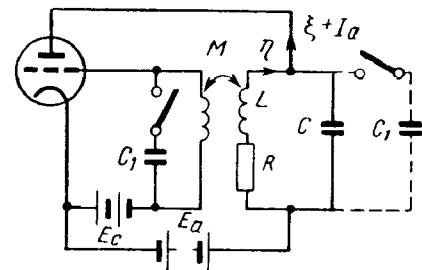


Рис. 6.8. Упрощенная схема автогенератора.

наличия паразитных емкостей можно считать приближенно трапециевидным.

В дальнейшем мы ограничимся учетом только флюктуаций тока лампы, имея в виду, что уровень тепловых флюктуаций обычно в несколько раз меньше дробовых.

Рассмотрим в линейном приближении флюктуационное возбуждение автогенератора с колебательным контуром в цепи анода (рис. 6.8), считая, что сеточный ток отсутствует [3,4]. Обозначим ток в индуктивной ветви колебательного контура через  $\eta$ . Тогда можем написать

$$L\dot{\eta} + R\eta = \frac{1}{C} \int (J_a - \eta) dt$$

или

$$\dot{\eta} + \frac{R}{L}\eta + \frac{1}{LC}\eta = \frac{1}{LC}J_a, \quad (6.5.9)$$

где отдельные величины указаны на рис. 6.8.

Но анодный ток лампы равен

$$J_a = \langle J_a \rangle + \xi(t) = I_a + \xi(t),$$

где  $I_a$  — среднее значение анодного тока;  
 $\xi(t)$  — флюктуации анодного тока.

Учитывая, что в линейном приближении  $I_a = Su_g$ , где  $S$  — крутизна анодно-сеточной характеристики лампы, а  $u_g = M\dot{\eta}$ , имеем

$$I_a = SM\dot{\eta}.$$

Поэтому из (6.5.9) получим следующее дифференциальное уравнение автогенератора в линейном приближении:

$$\ddot{\eta} - \mu\omega\dot{\eta} + \omega^2\eta = \omega^2\xi(t), \quad (6.5.10)$$

$$\text{где } \mu = (LC)^{-\frac{1}{2}};$$

$$\mu = (SM - RC).$$

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка (6.5.10) представляет собой уравнение колебательного контура с отрицательным затуханием, на который действует флюктуационный ток  $\xi(t)$ . Решение этого уравнения с начальными условиями  $\eta = \zeta_0$ ,  $\dot{\eta} = \dot{\zeta}_0$  при  $t = 0$  имеет вид

$$\eta(t) = A_0 e^{\frac{1}{2}\mu\omega t} \sin(\omega t - \varphi_0) + \omega \int_0^t e^{\frac{1}{2}\mu\omega(t-x)} \sin\omega(t-x)\xi(x) dx, \quad (6.5.11)$$

где

$$A_0 = \zeta_0^2 + \left( \frac{\dot{\zeta}_0}{\omega} - \frac{1}{2}\mu\zeta_0 \right)^2 \approx \zeta_0^2 + \omega^2\dot{\zeta}_0^2, \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{\omega\dot{\zeta}_0}{\zeta_0 - \frac{1}{2}\mu\omega\zeta_0}. \quad (6.5.12)$$

В выражении (6.5.11) первый член представляет собственные колебания, обусловленные начальными условиями, а второй — вынужденные колебания. Мы рассмотрим вынужденные колебания и собственные раздельно с тем, чтобы можно было их количественно сравнить. Это целесообразно сделать также потому, что в данном примере физически могут быть реализованы два случая, а именно: начальные условия могут быть нулевыми и ненулевыми.

Если в генераторе (рис. 6.8) большая емкость  $C_1$  шунтирует катушку обратной связи, то через индуктивность колебательного контура протекает часть флюктуаций  $\xi(t)$  анодного тока лампы, независимо от того, отсоединен или нет конденсатор  $C_1$ . Поэтому здесь  $\zeta_0 \neq 0$ ,  $\dot{\zeta}_0 \neq 0$ , и необходимо учитывать начальные условия, т. е. собственные колебания контура. Если же в генераторе большая емкость  $C_1$  шунтирует колебательный контур, то можно приближенно считать, что весь флюктуационный ток протекает через нее и начальные условия будут нулевыми ( $\zeta_0 = 0$ ,  $\dot{\zeta}_0 = 0$ ).

Строго говоря, при обоих способах отсоединения конденсатора  $C_1$  флюктуации  $\xi(t)$  нельзя считать стационарными, так как при

этом скачком изменяется нагрузка лампы. Однако если внутреннее сопротивление лампы много больше резонансного сопротивления контура, то этим эффектом можно пренебречь и считать флюктуации стационарными.

При нулевых начальных условиях из выражения (6.5.11) имеем

$$\eta_1(t) = \omega e^{\frac{1}{2} \mu \omega t} \int_0^t e^{-\frac{1}{2} \mu \omega x} \sin \omega(t-x) \xi(x) dx.$$

Отсюда для функции корреляции получим

$$K_1(t, \tau) = \omega^2 e^{\mu \omega t + \frac{1}{2} \mu \omega \tau} \int_0^t \int_0^{t+\tau} e^{-\frac{1}{2} \mu \omega (x+y)} \sin \omega(t-x) \times \\ \times \sin \omega(t+\tau-y) k_\xi(y-x) dx dy. \quad (6.5.13)$$

Если считать стационарные флюктуации  $\xi(t)$  дельта-коррелированными, т. е. положить

$$k_\xi(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau), \quad (6.5.14)$$

то из выражения (6.5.13) получим

$$K_1(t, \tau) = \frac{\omega}{4\mu} N_0 e^{\mu \omega t} e^{\frac{1}{2} \mu \omega \tau} \cos \omega \tau. \quad (6.5.15)$$

При вычислениях было использовано условие

$$\omega \gg \mu \omega, \quad (6.5.16)$$

а также предполагалось, что нас интересуют времена  $t$ , для которых  $\exp(\mu \omega t) \gg 1$ .

Заметим, что флюктуации анодного тока  $\xi(t)$  являются нормальными. Поэтому вынужденные колебания  $\eta_1(t)$ , получающиеся из  $\xi(t)$  при помощи линейного преобразования, будут также нормальными, но не эргодическими.

В § 1 гл. 7 будет показано, что нормальные флюктуации  $\eta_1(t)$ , обладающие функцией корреляции (6.5.15), при условии (6.5.16) можно представить в виде нестационарного квазигармонического колебания

$$\eta_1(t) = A(t) e^{\frac{1}{2} \mu \omega t} \sin(\omega t - \varphi), \quad (6.5.17)$$

где случайная фаза  $\varphi$  распределена равномерно в интервале  $(-\pi, \pi)$ , а огибающая  $A(t)$  имеет релеевскую плотность вероятности

$$W_1(A) dA = \frac{A}{\sigma_1^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_1^2}\right) dA, \quad \sigma_1^2 = \frac{\omega}{4\mu} N_0. \quad (6.5.18)$$

Будем интересоваться нарастанием амплитуды колебаний

$$a_1(t) = e^{\frac{1}{2} \mu \omega t} A. \quad (6.5.19)$$

Тем самым при вычислении времени  $\tau$ , по истечении которого амплитуда  $a_1$  достигнет некоторого фиксированного значения  $a_0 = \text{const}$ , может быть допущена погрешность не более периода  $T = 2\pi/\omega$ .

Положив в формуле (6.5.18)

$$A = a_0 e^{-\frac{1}{2} \mu \omega \tau}, \quad (6.5.20)$$

можно вычислить среднее значение  $\langle \tau \rangle$  и дисперсию  $\sigma_\tau^2$ , а также найти плотность вероятности для  $\tau$ .

При рассмотрении собственных колебаний нужно предварительно вычислить  $\zeta_0$  и  $\dot{\zeta}_0$ . Из выражения (6.5.11) следует, что амплитуда автоколебаний из-за начальных условий нарастает по закону

$$a_2(t) = A_0 e^{\frac{1}{2} \mu \cdot t}, \quad (6.5.21)$$

где

$$A_0^2 = \zeta_0^2 + \omega^{-2} \dot{\zeta}_0^2. \quad (6.5.22)$$

Флюктуационный ток  $\xi(t)$ , протекающий через индуктивность колебательного контура, связан с флюктуациями анодного тока лампы  $\xi(t)$  дифференциальным уравнением

$$\ddot{\xi} + 2\alpha \dot{\xi} + \omega^2 \xi = \omega^2 \xi(t), \quad (6.5.23)$$

$$\text{где } \omega = (LC)^{-\frac{1}{2}};$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{1}{2} \frac{\omega}{Q},$$

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ — добродатность колебательного контура.}$$

Из уравнения (6.5.23) для вынужденных колебаний следует

$$\xi(t) = \omega e^{-\omega t} \int_0^t e^{\omega x} \sin \omega(t-x) \xi(x) dx. \quad (6.5.24)$$

Отсюда для функции корреляции имеем

$$K_\xi(t, \tau) = \omega^2 e^{-2\omega t - \omega \tau} \int_0^t \int_0^{t+\tau} e^{\omega(x+y)} k_\xi(y-x) \sin \omega(t-x) \times \\ \times \sin \omega(t+\tau-y) dx dy. \quad (6.5.25)$$

Подставив в (6.5.25) выражение (6.5.14) и выполнив интегрирование, для стационарного состояния ( $t \rightarrow \infty$ ) получим

$$k_\zeta(\tau) = \frac{\omega^2}{8\alpha} N_0 e^{-\alpha|\tau|} \left( \cos \omega |\tau| + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega |\tau| \right) \quad (6.5.26)$$

Отсюда нетрудно получить формулы для дисперсий тока  $\zeta(t)$  и его производной  $\zeta'(t)$ , которые обозначим соответственно через  $\sigma_\zeta^2$  и  $\sigma_{\zeta'}^2$ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\zeta^2 &= k_\zeta(0) = \frac{\omega^2}{8\alpha} N_0 = \frac{\omega Q}{4} N_0, \\ \sigma_{\zeta'}^2 &= -\frac{d^2 k_\zeta(\tau)}{d\tau^2} \Big|_{\tau=0} = \frac{\omega^4}{8\alpha} N_0 = \frac{\omega^3 Q}{4} N_0. \end{aligned} \right\} \quad (6.5.27)$$

Здесь мы воспользовались обычно выполняющимся неравенством  $\omega \gg \alpha$ .

Из формул (6.5.27) видно, что дисперсия производной флуктуационного тока  $\zeta(t)$  больше дисперсии для самого тока в  $\omega^2$  раз. Это и является оправданием сделанного в формуле (6.5.12) пренебрежения величиной  $\mu_{\zeta_0}$  по сравнению с  $\omega^{-1}\zeta_0$ . Стационарная случайная функция  $\zeta(t)$  и ее производная определяют начальные условия для уравнения (6.5.10).

Из физических соображений и из вида функции корреляции (6.5.26) следует, что флуктуации  $\zeta(t)$  являются нормальными и квазигармоническими. Случайная функция  $A_0$ , связанная с нормальными квазигармоническими флуктуациями  $\zeta(t)$  соотношением (6.5.22), имеет релеевскую плотность вероятности:

$$W_1(A_0) dA_0 = \frac{A_0}{\sigma_\zeta^2} \exp \left( -\frac{A_0^2}{2\sigma_\zeta^2} \right) dA_0. \quad (6.5.28)$$

Подставив сюда выражение для  $A_0$

$$A_0 = a_0 e^{-\frac{1}{2}\mu_{\zeta_0}\tau},$$

найдем плотность вероятности для времени  $\tau$ , по истечении которого амплитуда собственных колебаний будет равна  $a_0$ .

В случае, когда конденсатор  $C_1$  шунтирует катушку обратной связи, необходимо одновременно учитывать вынужденные колебания и собственные колебания из-за начальных условий. Как следует из сравнения формул (6.5.18) и (6.5.28), это можно приблизенно сделать путем подстановки, например, в формулу (6.5.28) вместо  $\sigma_1^2$  суммарной дисперсии

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_\zeta^2 = \frac{1}{4} \omega \left( Q + \frac{1}{\mu} \right) N_0 \approx \frac{1}{2} \omega Q N_0 = \varepsilon I_s \omega Q, \quad (6.5.29)$$

так как матый параметр имеет порядок  $1/Q$ . Здесь последнее равенство написано на основании формулы (3.16.8).

Таким образом, в данном случае собственные колебания и вынужденные обусловливают примерно одинаковый результат.

## § 6. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ НА ВЫХОДЕ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Пусть на вход линейной системы с импульсной характеристикой  $G(t)$  воздействует случайный процесс  $\xi(t)$  с известными плотностями вероятности  $w_k(\xi_1, \dots, \xi_k)$ , и требуется найти плотности вероятности  $W_l(\eta_1, \dots, \eta_l)$ ,  $l < k$ , случайного процесса  $\eta(t)$  на выходе линейной системы.

За исключением того важного, но частного случая, когда процесс  $\xi(t)$  является нормальным, не существует метода, который бы позволял находить непосредственно плотности вероятности для процесса  $\eta(t)$  на выходе линейной системы.

Сформулированную задачу приходится решать следующим образом [5]. При помощи формул (3.4.1) по заданным плотностям вероятностей  $w_k(\xi_1, \dots, \xi_k)$  сначала находят моментные функции, а затем по формулам (3.4.10) — корреляционные функции процесса  $\xi(t)$ . По корреляционным функциям входного процесса  $\xi(t)$  можно вычислить корреляционные функции процесса  $\eta(t)$  на выходе системы. Определив их, находят характеристические функции и соответствующие плотности вероятности  $W_l(\eta_1, \dots, \eta_l)$ . Установим правила, по которым находятся корреляционные (или моментные) функции процесса на выходе линейной системы при известных корреляционных функциях процесса на входе.

Из формулы (6.1.4) имеем

$$\eta(t) = \int_0^t G(t-\tau) \xi(\tau) d\tau. \quad (6.6.1)$$

Разобьем интервал интегрирования на  $n$  равных отрезков длительностью  $\Delta = t/n$  и обозначим средние точки этих отрезков  $\tau_\mu$ ,  $\mu = 1, 2, \dots, n$ , ( $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n$ ). Тогда интеграл можно приближенно представить в виде суммы

$$\eta(t) = \sum_{\mu=1}^n G(t-\tau_\mu) \xi(\tau_\mu) \Delta.$$

Согласно формуле (2.4.8) среднее значение суммы случайных величин равно сумме средних значений отдельных слагаемых. Поэтому можем написать

$$M_\eta(t) = \langle \eta(t) \rangle = \sum_{\mu=1}^n G(t-\tau_\mu) M_\xi(\tau_\mu) \Delta.$$

Если положить здесь  $\Delta \rightarrow 0$ , то приближенное равенство перейдет в точное, а сумма справа — в интеграл. Таким образом получим окончательную формулу для математического ожидания

$$M_\eta(t) = \int_0^t G(t-\tau) M_\xi(\tau) d\tau. \quad (6.6.2)$$

Эта формула показывает, что операцию интегрирования можно менять местами с операцией статистического усреднения.

Вычтем из (6.6.1) выражение (6.6.2) и обозначим центрированные функции кружочком сверху:

$$\dot{\bar{\eta}}(t) = \int_0^t G(t-\tau) \dot{\bar{\xi}}(\tau) d\tau.$$

Напишем это равенство для двух моментов времени:  $t_1$  и  $t_2$ , перемножим левые и правые части полученных равенств и результат статистически усредним. Поменяв местами операции интегрирования и статистического усреднения, получим

$$K_\eta(t_1, t_2) = \langle \dot{\bar{\eta}}(t_1) \dot{\bar{\eta}}(t_2) \rangle = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} G(t_1-\tau_1) G(t_2-\tau_2) K_\xi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (6.6.3)$$

Отсюда при  $t_2 = t_1 = t$  получаем формулу для дисперсии

$$\sigma_\eta^2(t) = \int_0^t \int_0^t G(t-\tau_1) G(t-\tau_2) K_\xi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (6.6.4)$$

Аналогичным образом находятся высшие корреляционные функции. Например,

$$\begin{aligned} K_{3\eta}(t_1, t_2, t_3) &= \langle \dot{\bar{\eta}}(t_1) \dot{\bar{\eta}}(t_2) \dot{\bar{\eta}}(t_3) \rangle = \\ &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \int_0^{t_3} G(t_1-\tau_1) G(t_2-\tau_2) G(t_3-\tau_3) K_{3\xi}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3. \end{aligned} \quad (6.6.5)$$

Следует заметить, что одномерный кумулянт  $x_l$  для случайного процесса на выходе линейной системы выражается через  $l$ -мерную корреляционную функцию случайного процесса на входе системы. Поэтому, если для процесса  $\eta(t)$  нужно найти приближенное выражение одномерной плотности вероятности (с учетом лишь первых  $l$  кумулянтов [см. формулу (3.4.7)]), то должны быть известны корреляционные (моментные) функции процесса  $\xi(t)$  вплоть до  $K_{l\xi}(t_1, t_2, \dots, t_l)$ . Если процесс  $\xi(t)$  задан своими плотностями вероятности, то необходимо знать  $l$ -мерную плотность вероят-

ности, по которой можно найти эти корреляционные функции. Разумеется, что процесс вычисления  $l$ -кратных интегралов типа (6.6.5) является весьма трудоемким и сложным. В этом и состоит основная трудность решения задач о преобразовании плотностей вероятностей инерционными линейными системами.

Применительно к стационарным входным процессам  $\xi(t)$  предыдущие формулы несколько упрощаются. Так, формулы (6.6.2) и (6.6.3) принимают соответственно вид:

$$M_\eta(t) = m_\xi \int_0^t G(t-\tau) d\tau = m_\xi \int_0^t G(x) dx, \quad (6.6.6)$$

$$K_\eta(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} G(t_1-\tau_1) G(t_2-\tau_2) k_\xi(\tau_2-\tau_1) d\tau_1 d\tau_2. \quad (6.6.7)$$

В случае линейных пассивных систем с затуханием по истечении достаточно большого времени от момента  $t = 0$  случайный процесс  $\eta(t)$  будет приближаться к стационарному. Для стационарного процесса  $\eta(t)$  формула (6.6.6) принимает вид:

$$m_\eta = m_\xi \int_0^\infty G(x) dx. \quad (6.6.8)$$

Чтобы получить выражение для функции корреляции, сделаем в (6.6.3) замену переменных

$$\tau_1 = t_1 - x, \quad \tau_2 = t_2 - y.$$

Получим

$$K_\eta(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} G(x) G(y) k_\xi(t_2 - t_1 + x - y) dx dy.$$

Положим  $t_2 - t_1 = \tau$  и вместо  $y$  введем новую переменную  $z = \tau + x - y$ :

$$K_\eta(t_1, t_1 + \tau) = \int_0^{t_1} G(x) dx \int_{x-t_1}^{x+\tau} G(\tau + x - z) k_\xi(z) dz. \quad (6.6.9)$$

Переходя к пределу при  $t_1 \rightarrow \infty$ , получаем окончательную формулу для функции корреляции в стационарном состоянии:

$$k_\eta(\tau) = \int_0^\infty G(x) dx \int_{-\infty}^{\tau+x} G(\tau + x - z) k_\xi(z) dz. \quad (6.6.10)$$

Можно показать, что формула (6.6.5) для стационарного состояния принимает вид:

$$k_{\xi\eta}(\tau_1, \tau_2) = \int_0^\infty G(x) dx \int_{-\infty}^{\tau_1+x} \int_{-\infty}^{\tau_2+x} G(\tau_1+x-y) \times \\ \times G(\tau_2+x-z) k_{\xi\xi}(y, z) dy dz. \quad (6.6.11)$$

Если входной процесс  $\xi(t)$  является стационарным белым шумом, то формула (6.6.10) упрощается:

$$k_\eta(\tau) = \frac{N_0}{2} \int_0^\infty G(x) G(x + |\tau|) dx. \quad (6.6.12)$$

Из этой формулы, в частности, легко получается результат (6.4.7). Применение этих формул и встречающиеся при этом особенности рассматриваются на конкретных примерах в § 9.

В заключение укажем, что функция взаимной корреляции между входным процессом  $\xi(t)$  и выходным процессом  $\eta(t)$  равна

$$K_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \langle \dot{\xi}(t_1) \dot{\eta}(t_2) \rangle = \int_0^{t_2} G(t_2 - \tau) K_\xi(t_1, \tau) d\tau. \quad (6.6.13)$$

Если процесс  $\xi(t)$  стационарен, то

$$K_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} G(t_2 - \tau) k_\xi(t_1 - \tau) d\tau. \quad (6.6.14)$$

Когда процессом  $\xi(t)$  является стационарный белый шум, это выражение примет вид

$$K_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \begin{cases} \frac{N_0}{2} G(t_2 - t_1) & \text{при } 0 < t_1 \leq t_2, \\ 0 & \text{при } t_1 < 0, \quad t_1 > t_2. \end{cases} \quad (6.6.15)$$

Из формулы (6.6.15) видно, что с точностью до постоянного множителя  $N_0/2$  импульсная характеристика линейной системы совпадает с функцией взаимной корреляции между входным стационарным белым шумом, действующим на систему, и выходным случайным процессом. Этим результатом часто пользуются для экспериментального определения импульсной характеристики неизвестной линейной системы при помощи коррелометров.

## § 7. ВОЗДЕЙСТВИЕ БЕЛОГО ШУМА НА КОНТУР

Пусть контур, составленный из параллельно соединенных конденсатора  $C$  и катушки индуктивности  $L$  с омическим сопротивлением  $R$ , включен в анодную цепь лампы (рис. 6.9). Анодный ток лампы  $J_a$  состоит из постоянной составляющей  $I_a$  и флюктуаций

$\eta(t)$ :  $J_a = I_a + \eta(t)$ . Флюктуации анодного тока лампы будем рассматривать как стационарный белый шум. Требуется найти функцию корреляции для тока  $\eta(t)$  в индуктивной ветви и напряжения  $u(t)$  на контуре в стационарном состоянии.

Флюктуационный ток  $\eta(t)$  определяется линейным дифференциальным уравнением второго порядка:

$$\ddot{\eta} + 2\alpha\dot{\eta} + \omega_0^2 \eta = \omega_0^2 \xi(t), \\ \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad 2\alpha = \frac{R}{L}. \quad (6.7.1)$$

Импульсные характеристики для данного случая приведены в 5-й строке табл. 6.1.1. Подставив их выражения в формулу (6.6.12), после несложных вычислений получим:

$$k_\eta(\tau) = \sigma_\eta^2 e^{-\alpha|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right), \\ \sigma_\eta^2 = \frac{N_0 \omega_0^2}{8\alpha} \quad \text{при } \omega_0 \gg \alpha, \quad (6.7.2)$$

$$k_\eta(\tau) = \sigma_\eta^2 e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|), \quad \sigma_\eta^2 = \frac{\alpha}{8} N_0, \quad \text{при } \omega_0 = \alpha, \quad (6.7.3)$$

$$k_\eta(\tau) = \sigma_\eta^2 e^{-\alpha|\tau|} \left( \operatorname{ch} V \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \tau + \frac{\alpha}{V \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}} \operatorname{sh} V \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} |\tau| \right), \\ \sigma_\eta^2 = \frac{\omega_0^2 N_0}{8\alpha} \quad \text{при } \omega_0 < \alpha. \quad (6.7.4)$$

Для колебательного случая ( $\omega_0 \gg \alpha$ ) напряжение на контуре приближенно равно:

$$u(t) = L \frac{d\eta(t)}{dt},$$

Воспользовавшись выражением (6.7.2) и выполнив вычисления согласно формуле (6.2.9), найдем

$$k_u(\tau) = \sigma_u^2 e^{-\alpha|\tau|} \left( \cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right), \quad (6.7.5)$$

где

$$\sigma_u^2 = \omega_0^2 L^2 \sigma_\eta^2 = N_0 \Delta f, R_{oe}^2;$$

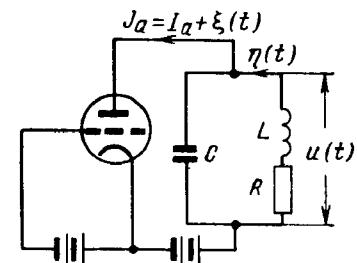


Рис. 6.9. Воздействие флюктуаций тока лампы на колебательный контур.

$\Delta f_s = \alpha/2$  — энергетическая полоса контура;

$R_{oe} = L/RC$  — резонансное сопротивление параллельного колебательного контура.

Отметим, что флюктуационный ток  $\eta(t)$  является дифференцируемым процессом, а флюктуационное напряжение  $u(t)$  — недифференцируемым.

## § 8. ВОЗДЕЙСТВИЕ СИГНАЛА И ШУМА НА КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

Предположим, что на колебательный контур, составленный из параллельного соединения конденсатора  $C$ , сопротивления  $R$  и индуктивности  $L$  (рис. 6.10) воздействует сумма сигнала  $s(t)$  и белого шума  $n(t)$ :

$$\xi(t) = s(t) + n(t). \quad (6.8.1)$$

Сигнал  $s(t)$  представляет собой два когерентных прямоугольных радиоимпульса амплитудой  $A_0$  и длительностью  $\tau_u$  (рис. 6.11);

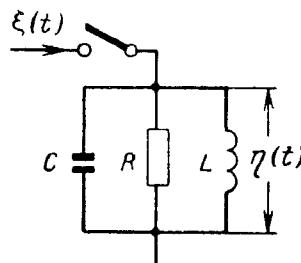


Рис. 6.10. Параллельный колебательный контур.

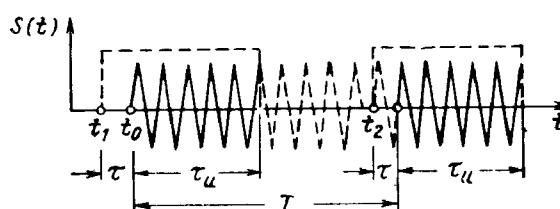


Рис. 6.11. Два когерентных радиоимпульса

период следования импульсов  $T$  кратен периоду высокой частоты:  $T = 2\pi k/\omega_0$ , где  $k$  — целое число. Следовательно,

$$s(t) = \begin{cases} A_0 \sin \omega_0 t & \text{при } t_0 \leq t \leq t_0 + \tau_u, t_0 + T \leq t \leq t_0 + T + \tau_u, \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases} \quad (6.8.2)$$

Резонансная частота колебательного контура предполагается совпадающей с частотой сигнала, т. е.  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . Найдем отношение сигнал/шум (отношение амплитуды сигнала к среднеквадратичному значению шума) в конце первого и второго импульсов в двух случаях: 1) колебательный контур включен всегда; 2) осуществляется стробирование, т. е. контур подключается к источнику тока  $\xi(t)$  на время  $\tau + \tau_u$  в моменты времени  $t_1 = t_0 - \tau$ ,  $t_2 = t_0 + T - \tau$  (рис. 6.11).

При выполнении условия  $\omega_0 \gg 1/2RC$  импульсная характеристика контура приведена на 6-й строке табл. 6.1.1. Поэтому для выходного напряжения на контуре можем написать выражение

$$\eta(t) = \frac{1}{\omega_0 C} e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha x} \sin \omega_0 (t-x) \dot{\xi}(x) dx. \quad (6.8.3)$$

Известно, что для линейных систем справедлив принцип суперпозиции. Поэтому можно раздельно находить сигнал и шум на выходе системы. Из (6.8.3) для напряжения сигнала и шума на контуре имеем соответственно формулы

$$\begin{aligned} \eta_s(t) &= \frac{1}{C} A_0 e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha x} \sin \omega_0 (t-x) \cos \omega_0 x dx = \\ &= A_0 R (1 - e^{-\alpha t}) \sin \omega_0 t, \end{aligned} \quad (6.8.4)$$

$$\eta_n(t) = \frac{1}{\omega_0 C} e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha x} \sin \omega_0 (t-x) \hat{n}(x) dx. \quad (6.8.5)$$

Для определения дисперсии напряжения  $\eta_n(t)$  нужно подставить в формулу (6.6.4) вместо  $K_\xi(\tau_1, \tau_2)$  функцию корреляции производной от стационарного белого шума, которая равна

$$k_n(\tau) = -\frac{N_0}{2} \delta''(\tau). \quad (6.8.6)$$

Воспользовавшись при вычислении получающимся интеграла формулой (П.12), получим

$$\sigma_n^2(t) = \frac{N_0 R}{4C} (1 - e^{-2\alpha t}). \quad (6.8.7)$$

Если колебательный контур подключен к источнику тока  $\xi(t)$  задолго до момента  $t_0$ , то шумовое напряжение на контуре  $\eta_n(t)$  к моменту действия импульсов сигнала будет стационарным с дисперсией

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0 R}{4C}. \quad (6.8.8)$$

Согласно (6.8.4) амплитуды напряжения сигнала  $\eta_s(t)$  в конце первого и второго импульсов будут соответственно равны:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \eta_s(t_0 + \tau_u) = A_0 R (1 - e^{-\alpha \tau_u}), \\ U_2 &= \eta_s(t_0 + T + \tau_u) = A_0 R (1 - e^{-\alpha \tau_u})(1 + e^{-\alpha T}). \end{aligned} \right\} \quad (6.8.9)$$

Из (6.8.8) и (6.8.9) находим отношение сигнал/шум в конце первого и второго импульсов:

$$\frac{U_1}{\sigma_n} = \sqrt{\frac{2E}{N_0}} \rho(\alpha\tau_i), \quad \frac{U_2}{\sigma_n} = \sqrt{\frac{2E}{N_0}} (1 + e^{-\alpha T}) \rho(\alpha\tau_i), \quad (6.8.10)$$

где  $E = A_0^2 \tau_i / 2$  — энергия одного радиоимпульса;

$$\rho(\alpha\tau_i) = \sqrt{\frac{2}{\alpha\tau_i}} (1 - e^{-\alpha\tau_i}). \quad (6.8.11)$$

График функции  $\rho(\alpha\tau_i)$  приведен на рис. 6.12 (кривая  $v = \infty$ ). Из него находим оптимальное значение параметра  $\alpha\tau_i$ , при котором отношение сигнал/шум в конце первого импульса достигает максимального значения:

$$\rho_{max} \approx 0,9 \text{ при } \alpha\tau_i \approx 1,25. \quad (6.8.12)$$

Учитывая, что полоса пропускания контура на уровне 0,5 по мощности равна  $\Delta f = \alpha/\pi$ , находим оптимальную ширину полосы пропускания контура  $\Delta f \approx 0,4/\tau_i$ .

Из сравнения первой и второй формул (6.8.10) видно, что в рассматриваемом случае отношение сигнал/шум в конце второго импульса больше, чем в конце первого импульса, причем это увеличение характеризуется слагаемым  $e^{-\alpha T}$ . Например, при

$T = 2\tau_i$  и  $\alpha\tau_i = 1,25$  имеем  $e^{-\alpha T} \approx 0,08$ , т. е. отношение сигнал/шум увеличивается примерно на 8%. Очевидно, что при  $\alpha T \gg 1$  отношения сигнал/шум в конце первого и второго импульсов одинаковы.

Поэтому говорят, что колебательный контур можно применять для суммирования («накопления») когерентных радиоимпульсов небольшой скважности  $T/\tau_i$ . Суммирование когерентных радиоимпульсов оказывается особенно эффективным, когда применяется стробирование (поочередное подключение контура на некоторое время, когда имеются импульсы).

Пусть контур подключается в момент времени  $t_1$ , а первый импульс появляется в момент  $t_0 \geq t_1$ . Тогда амплитуда сигнала в кон-

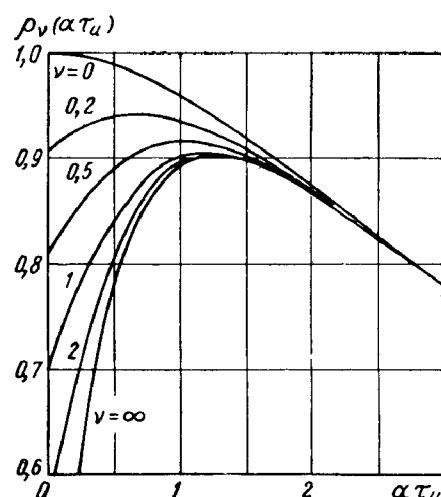


Рис. 6.12. Зависимость отношения сигнал/шум на выходе колебательного контура при стробировании и без стробирования ( $v = \infty$ ).

це первого импульса по-прежнему равна  $U_1$ , а дисперсию шума находим из формулы (6.8.7)

$$\sigma_{n_1}^2 = \frac{N_0 R}{4C} (1 - e^{-2\alpha\tau_i(1+v)}), \quad v = \frac{\tau}{\tau_i}. \quad (6.8.13)$$

Отношение сигнал/шум равно

$$\frac{U_1}{\sigma_{n_1}} = \sqrt{\frac{2E}{N_0}} \rho_v(\alpha\tau_i), \quad \rho_v(\alpha\tau_i) = \rho(\alpha\tau_i) [1 - e^{-2\alpha\tau_i(1+v)}]^{-\frac{1}{2}}. \quad (6.8.14)$$

Графики функции  $\rho_v(\alpha\tau_i)$  для шести значений  $v$  приведены на рис. 6.12. Из графиков видно, что если без стробирования ( $v = \infty$ ), величина  $\rho_{max} = 0,9$  при  $\alpha\tau_i = 1,25$ , то при идеальном стробировании ( $v = 0$ ), т. е. когда контур подключается в момент  $t_0$  появления импульса  $\rho_{max} = 1$  при  $\alpha\tau_i = 0$ . При других значениях  $v$  получаются промежуточные случаи.

Улучшение отношения сигнал/шум при стробировании объясняется тем, что при значениях  $\tau$ , меньших времени установления колебаний в контуре, нестационарный выходной шум за время  $\tau + \tau_i$  не успевает нарасти до максимального стационарного значения, которое имеет место в отсутствие стробирования.

Чтобы найти дисперсию шума в конце второго импульса, учтем, что согласно (6.6.15) выходные шумы, накапливающиеся в контуре при действии первого и второго импульсов, некоррелированы. Поэтому получим

$$\sigma_{n_2}^2 = \sigma_{n_1}^2 e^{-2\alpha T} + \sigma_{n_1}^2 = \sigma_{n_1}^2 (1 + e^{-2\alpha T}). \quad (6.8.15)$$

Следовательно, отношение сигнал/шум в конце второго импульса равно:

$$\frac{U_2}{\sigma_{n_2}} = \frac{U_1}{\sigma_{n_1}} \frac{1 + e^{-\alpha T}}{\sqrt{1 + e^{-2\alpha T}}}. \quad (6.8.16)$$

Отсюда следует, что при  $\alpha T \ll 1$

$$\frac{U_2}{\sigma_{n_2}} = \sqrt{2} \frac{U_1}{\sigma_{n_1}}. \quad (6.8.17)$$

Таким образом, для колебательного контура с очень большой добротностью отношение сигнал/шум по напряжению для двух импульсов в  $\sqrt{2}$  раз больше, чем для одного импульса.

Укажем, что если сигналом  $s(t)$  является узкополосный шум, имеющий функцию корреляции

$$k_s(\tau) = \sigma_s^2 e^{-\beta |\tau|} \cos \omega_0 \tau, \quad (6.8.18)$$

то вместо формулы (6.8.14) для отношения сигнал/шум по мощности в конце первого импульса получается следующая формула:

$$\frac{\sigma_{s_1}^2}{\sigma_{n_1}^2} = \frac{2\sigma_s^2 \tau_n}{N_0} \rho_v^2(\alpha \tau_n), \quad (6.8.19)$$

где

$$\rho_v^2(\alpha \tau_n) = \frac{(1+\gamma) - 2e^{-(1+\gamma)\alpha \tau_n} + (1-\gamma)e^{-2\alpha \tau_n}}{\alpha \tau_n (1-\gamma^2)(1-e^{-2\alpha \tau_n(1+\gamma)})}, \quad \gamma = \frac{3}{a}. \quad (6.8.20)$$

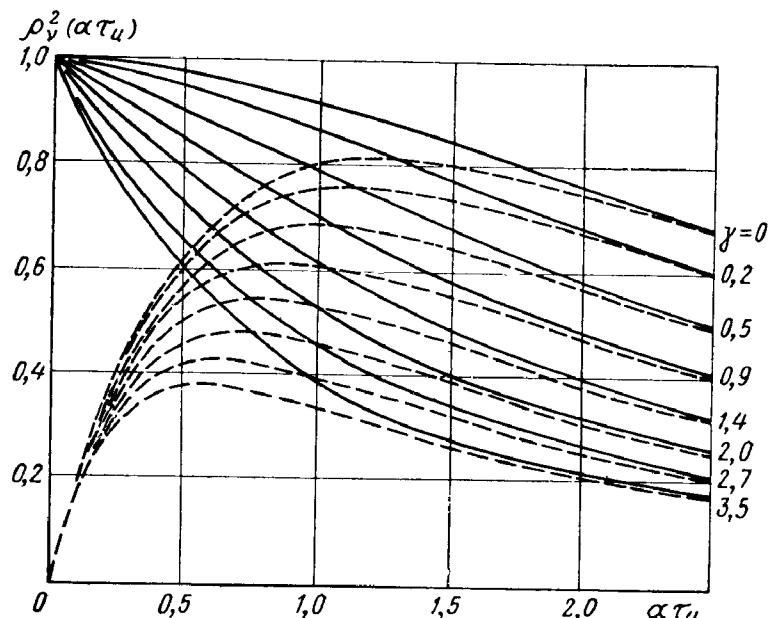


Рис. 6.13. Зависимость отношения сигнал/шум на выходе колебательного контура для шумового импульсного сигнала при стробировании ( $v=0$  — сплошные линии) и без стробирования ( $v=\infty$  — пунктирные линии).

Графики функции  $\rho_v^2(\alpha \tau_n)$  для двух предельных значений  $v = 0$  и  $\infty$  и шести значений  $\gamma$  изображены на рис. 6.13. Нетрудно убедиться, что при  $\gamma = 0$  (т. е.  $\beta = 0$ ) и  $\sigma_s^2 = A_0^2/2$  результаты, получаемые из (6.8.19) и (6.8.14), согласуются, а именно:

$$\frac{\sigma_{s_1}^2}{\sigma_{n_1}^2} = \frac{U_1^2}{\sigma_{n_1}^2}.$$

С увеличением  $\gamma$  и, следовательно,  $\beta$  время корреляции шумового сигнала уменьшается; сигнал становится все более хаотичным и не

способным когерентно накапливаться в контуре. Поэтому при прохождении одиночных условиях с увеличением  $\gamma$  отношение сигнал/шум  $\sigma_{s_1}^2/\sigma_{n_1}^2$  и коэффициент  $\rho_v^2(\alpha \tau_n)$  уменьшаются.

## § 9. ФУНКЦИИ КОРРЕЛЯЦИИ СИНГУЛЯРНЫХ И УЗКОПОЛОСНЫХ ПРОЦЕССОВ

Рассмотрим воздействие белого шума на идеализированные линейные системы, одна из которых имеет прямоугольную, а вторая гауссову форму амплитудно-частотной характеристики. Хотя такие характеристики не могут быть реализованы практически, ввиду простоты аналитической записи они часто применяются для аппроксимации характеристик реальных систем.

1. Пусть стационарный белый шум с функцией корреляции  $k(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$  действует на линейную систему с функцией передачи

$$K(j\omega) = \begin{cases} K_0 & \text{при } -\omega_2 \leq \omega < -\omega_1, \quad \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2, \\ 0 & \text{при других } \omega. \end{cases} \quad (6.9.1)$$

Найдем функцию корреляции шума  $\eta(t)$  на выходе системы.

Спектральная плотность выходного шума, очевидно, равна:

$$S_\eta(\omega) = \frac{N_0}{2} |K(j\omega)|^2.$$

По формуле (3.10.2) находим функцию корреляции

$$k_\eta(\tau) = \frac{N_0 K_0^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} d\omega = N_0 K_0^2 \left( \frac{\Delta\omega}{2\pi} \right) \frac{\sin \frac{\Delta\omega\tau}{2}}{\frac{\Delta\omega\tau}{2}} \cos \omega_0 \tau, \quad (6.9.2)$$

где  $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$ ,  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ .

Если в (6.9.2) положить  $\omega_1 = 0$ ,  $\Delta\omega = \omega_2$  («низкочастотный» шум), то получим

$$k_\eta(\tau) = N_0 K_0^2 \left( \frac{\Delta\omega}{2\pi} \right) \frac{\sin \Delta\omega\tau}{\Delta\omega\tau}. \quad (6.9.3)$$

Из (6.9.3) видно, что в результате воздействия белого шума на низкочастотный линейный фильтр с прямоугольной частотной характеристикой получается флуктуационный шум  $\eta(t)$ , два любых значения которого, разделенные интервалом времени  $\Delta\tau = \pi/\Delta\omega = 1/2\Delta f$ , некоррелированы, а в случае нормального шума  $\eta(t)$  — независимы. Следовательно, в реализации нормального шума  $\eta(t)$  длительностью  $T$  будет  $T/\Delta\tau = 2T\Delta f$  независимых от-

счетных значений. Этот результат согласуется с теоремой отсчетов (теоремой В. А. Котельникова)\* [6].

Следует, однако, отметить, что не всякие флуктуации со спектральной плотностью, отличной от нуля в определенном диапазоне частот, имеют равнотстоящие некоррелированные значения. Это, например, справедливо для шума с ограниченным, но неравномерным спектром вида

$$S_\eta(\omega) = \begin{cases} K_0 \cos \omega l & \text{при } |\omega| \leq \pi/2l, \\ 0 & \text{при } |\omega| > \pi/2l. \end{cases}$$

2. Вычислим функцию корреляции шума на выходе усилителя с гауссовой частотной характеристикой:

$$K(j2\pi f) = K_0 \exp \left[ -\frac{\pi}{2} \left( \frac{f-f_0}{\Delta f_s} \right)^2 \right], \quad (6.9.4)$$

где  $\Delta f_s$  — энергетическая полоса пропускания квадрата модуля функции передачи.

В данном случае спектральная плотность выходного шума равна

$$S_\eta(f) = N_0 K_0 \exp \left[ -\pi \left( \frac{f-f_0}{\Delta f_s} \right)^2 \right], \quad f \geq 0.$$

Согласно формуле (3.10.11) по спектральной плотности находим функцию корреляции

$$k_\eta(\tau) = N_0 K_0^2 \int_0^\infty \exp \left[ -\pi \left( \frac{f-f_0}{\Delta f_s} \right)^2 \right] \cos 2\pi f \tau df.$$

После замены переменной интегрирования  $f-f_0=v$  будем иметь

$$k_\eta(\tau) = N_0 K_0^2 \int_{-f_0}^\infty \exp \left[ -\pi \left( \frac{v}{\Delta f_s} \right)^2 \right] \cos 2\pi f_0 \tau dv.$$

При малой ширине полосы пропускания ( $\Delta f_s \ll f_0$ ) нижний предел интегрирования в этом интеграле можно заменить на  $-\infty$ . Тогда получим

$$k_\eta(\tau) = N_0 \Delta f_s K_0^2 e^{-\pi (\Delta f_s \tau)^2} \cos 2\pi f_0 \tau. \quad (6.9.5)$$

Необходимо указать, что стационарные случайные процессы с функциями корреляции (6.9.2), (6.9.3), (6.9.5) и некоторые другие обладают следующей специфической особенностью. Они дифференцируемы бесконечное число раз и, следовательно, являются аналитическими функциями времени. Поэтому такие процессы при

\* Более полное рассмотрение затронутых здесь вопросов приведено в работе [18].

помощи ряда Тейлора в принципе всегда можно с любой наперед заданной точностью как угодно далеко экстраполировать (прогнозировать) в «будущее» по небольшому отрезку «прошлой» реализации. В этом смысле рассматриваемые случайные процессы подобны детерминированным и называются сингулярными [7, 8].

Стационарный случайный процесс  $\eta(t)$  называется сингулярным, если для него является расходящимся интеграл [9]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\log S_\eta(\omega)}{1+\omega^2} \right| d\omega = \infty. \quad (6.9.6)$$

Если считать, что процесс  $\eta(t)$  порожден белым шумом, пропущенным через линейный фильтр с передаточной функцией  $K(j\omega)$ , то согласно формуле (6.1.5) условие сингулярности процесса можно записать так:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\log |K(j\omega)|^2}{1+\omega^2} \right| d\omega = \infty. \quad (6.9.7)$$

Сопоставляя это выражение с (6.1.1), замечаем, что сингулярный процесс нельзя получить из белого шума при помощи физически осуществимого линейного фильтра.

Заметим что прогноз сингулярного процесса на длительный срок вперед будет надежным лишь тогда, когда с высокой степенью точности известна корреляционная функция, причем требования к степени точности возрастают пропорционально квадрату срока прогноза.

3. Установим вид корреляционной функции узкополосного случайного процесса. Из рассмотренных частных примеров следует, что в ряде случаев коэффициент корреляции стационарного случайного процесса можно представить в виде

$$R(\tau) = \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau. \quad (6.9.8)$$

Покажем, что такой вид коэффициента корреляции является характерным для узкополосных случайных процессов со спектральной плотностью, симметричной относительно частоты  $f_0 = \omega_0/2\pi$ . При этом под узкополосным понимается процесс, спектральная плотность которого в основном сосредоточена в сравнительно узкой полосе частот  $\Delta f$  около некоторой центральной частоты  $f_0$  ( $\Delta f \ll f_0$ ). Под  $\Delta f$  можно, например, понимать ширину энергетического спектра процесса  $S(f)$  на уровне 0,5 (рис. 6.14).

Если в формуле (3.10.11) перейти к новой переменной  $v = f_0 - f$ , то можем написать

$$k(\tau) = \int_0^\infty S(f) \cos 2\pi f \tau df = \int_{-\infty}^{f_0} S(f_0 - v) \cos 2\pi (f_0 - v) \tau dv. \quad (6.9.9)$$

Используя обозначения

$$\begin{aligned}\sigma^2 \rho_c(\tau) &= \int_{-\infty}^{f_0} S(f_0 - v) \cos 2\pi v \tau dv, \\ \sigma^2 \rho_s(\tau) &= \int_{-\infty}^{f_0} S(f_0 - v) \sin 2\pi v \tau dv,\end{aligned}\quad (6.9.10)$$

получим

$$\begin{aligned}k(\tau) &= \sigma^2 [\rho_c(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau + \rho_s(\tau) \sin 2\pi f_0 \tau] = \\ &= \sigma^2 \rho(\tau) \cos [\omega_0 \tau + \gamma(\tau)],\end{aligned}\quad (6.9.11)$$

где

$$\rho(\tau) = \sqrt{\rho_c^2(\tau) + \rho_s^2(\tau)}, \quad \operatorname{tg} \gamma(\tau) = -\frac{\rho_s(\tau)}{\rho_c(\tau)}. \quad (6.9.12)$$

Таким образом, функция корреляции узкополосного стационарного процесса всегда может быть представлена выражением (6.9.11).

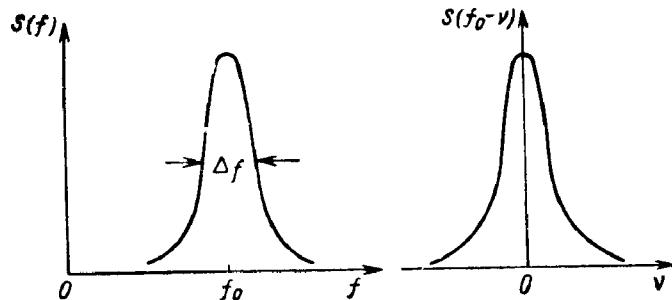


Рис. 6.14. Спектральная плотность узкополосных процессов.

Предположим теперь, что спектральная плотность  $S(f)$  симметрична относительно центральной частоты  $f_0 = \omega_0/2\pi$ . Так как для узкополосных процессов ширина спектра мала по сравнению с  $\omega_0$ , то верхний предел интегрирования в выражении (6.9.10) без значительной погрешности можно заменить на бесконечность. Тогда  $\rho_s(\tau) = 0$  и из (6.9.11) получаем нужный результат:

$$k(\tau) = \sigma^2 \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} S(f_0 - v) \cos 2\pi v \tau dv \right] \cos \omega_0 \tau. \quad (6.9.13)$$

Заметим, что энергетический спектр  $S(f_0 - v)$  расположен в низкочастотной области частот  $v$  (см. рис. 6.14). Поэтому функции  $\rho_c(\tau)$  и  $\rho_s(\tau)$ , как  $\rho(\tau)$  и  $\gamma(\tau)$ , будут медленно изменяющимися по сравнению с  $\cos \omega_0 \tau$ .

## § 10. ВЗАЙМНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ ШУМОВ НА ВЫХОДЕ УСИЛИТЕЛЕЙ С ПЕРЕКРЫВАЮЩИМИСЯ ЧАСТОТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Для решения некоторых радиотехнических задач применяются многоканальные системы. При воздействии на вход такой системы флюктуационного шума от одного и того же источника выходные напряжения соседних каналов будут коррелированы, если частотные характеристики соседних каналов перекрываются.

Вычислим коэффициент взаимной корреляции для двухканальной схемы [10, 11]. Пусть на вход двух линейных каналов с перекрывающимися частотными характеристиками  $K_1(j\omega)$  и  $K_2(j\omega)$  воздействует стационарный случайный процесс  $\xi(t)$  с нулевым средним значением, функцией корреляции  $k(\tau)$  и спектральной плотностью  $S_\xi(\omega)$  (рис. 6.15). В стационарном состоянии на выходе каналов будем иметь два действительных стационарных и стационарно связанных случайных процесса  $\eta_1(t)$  и  $\eta_2(t)$ :

$$\eta_1(t) = \int_0^\infty F_1(x) \xi(t-x) dx, \quad \eta_2(t) = \int_0^\infty G_2(y) \xi(t-y) dy, \quad (6.10.1)$$

где  $F_1(t)$  и  $G_2(t)$  — импульсные характеристики каналов.

По определению (3.6.2) функция взаимной корреляции между  $\eta_1(t+\tau)$  и  $\eta_2(t)$  равна

$$k_{12}(\tau) = \langle \eta_1(t+\tau) \eta_2(t) \rangle = \int_0^\infty \int_0^\infty F_1(x) G_2(y) k_\xi(\tau-x+y) dx dy. \quad (6.10.2)$$

Если согласно формуле (3.10.1) в (6.10.2) перейти от функции корреляции  $k(\tau)$  к спектральной плотности  $S_\xi(\omega)$ , то с учетом соотношения (6.1.3) после простых преобразований получим

$$k_{12}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega) K_1(j\omega) K_2^*(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad (6.10.3)$$

где  $K_2^*(j\omega) = K_2(-j\omega)$ .

Если учесть соотношение (6.1.5), то эта формула при  $K_1(j\omega) = -K_2(j\omega)$  переходит в формулу (3.10.2), выражающую функцию

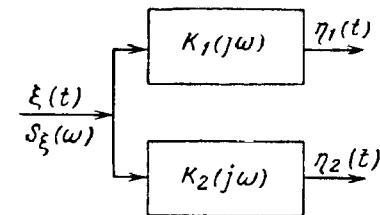


Рис. 6.15. Двухканальная линейная схема.

корреляции на выходе линейной системы. Представим функции передачи в виде

$$K_n(j\omega) = |K_n(j\omega)| e^{j\varphi_n(\omega)} = K_n(\omega) e^{j\varphi_n(\omega)}, \quad n=1, 2.$$

Так как для действительных функций времени спектральная плотность  $S_c(\omega)$  и амплитудно-частотные характеристики  $K_n(\omega)$  — четные функции, а фазовые характеристики  $\varphi_n(\omega)$  — нечетные, то (6.10.3) можем записать иначе:

$$k_{12}(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_\xi(\omega) K_1(\omega) K_2(\omega) \cos[\omega\tau + \varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega)] d\omega. \quad (6.10.4)$$

Из данной формулы видно, что если частотные характеристики  $K_1(\omega)$  и  $K_2(\omega)$  не перекрываются, то выходные напряжения  $\eta_1(t + \tau)$  и  $\eta_2(t)$  некоррелированы, а в случае нормальных процессов и независимы.

По определению (3.7.1) коэффициент взаимной корреляции между  $\eta_1(t + \tau)$  и  $\eta_2(t)$  равен:

$$R_{12}(\tau) = \frac{k_{12}(\tau)}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} S_\xi(\omega) K_1(j\omega) K_2^*(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (6.10.5)$$

или

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{\pi \sigma_1 \sigma_2} \int_0^\infty S_\xi(\omega) K_1(\omega) K_2(\omega) \cos[\omega\tau + \varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega)] d\omega, \quad (6.10.6)$$

где  $\sigma_1^2$  и  $\sigma_2^2$  — дисперсии процессов  $\eta_1(t)$  и  $\eta_2(t)$ :

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_\xi(\omega) K_n^2(\omega) d\omega, \quad n=1, 2. \quad (6.10.7)$$

Рассмотрим два конкретных примера. Пусть на два расстроенных друг относительно друга колебательных контура воздействует белый шум со спектральной плотностью  $S_c(\omega) = N_0/2$ . Принимая величину максимального усиления равной единице, функции передачи контуров можно записать в виде [1]

$$K_1(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}, \quad K_2(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0 + \Delta\omega} - \frac{\omega_0 + \Delta\omega}{\omega} \right)}, \quad (6.10.8)$$

где  $\omega_0/2\pi$  — резонансная частота;

$Q$  — добротность контура;

$\Delta\omega$  — расстройка по частоте второго контура относительно первого.

Будем считать контура узкополосными и расстройку не очень большой:

$$\Delta\omega_1 \ll \omega_0, \quad \Delta\omega \ll \omega_0, \quad (6.10.9)$$

где  $\Delta f = \Delta\omega_1/2\pi = \omega_0/2\pi Q$  — ширина полосы контура по уровню половинной мощности.

Подставив выражения (6.10.8) в (6.10.6) и (6.10.7), после вычислений получим

$$R_{12}(\tau) = \frac{e^{-\frac{\Delta\omega|\tau|}{2}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_1}\right)^2}} \cos(\omega_0\tau + \varphi), \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \frac{\pi}{2} N_0 \Delta f, \quad (6.10.10)$$

где  $\varphi = \arctg \frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_1}$ .

Из формулы (6.10.10) видно, что огибающая коэффициента взаимной корреляции уменьшается с увеличением  $\tau$  и  $\Delta\omega$  и в пределе стремится к нулю. При  $\tau = 0$  из (6.10.10) имеем

$$R_{12}(0) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_1}\right)^2}. \quad (6.10.11)$$

Зависимость  $R_{12}(0)$  от расстройки приведена на рис. 6.16 (кривая  $n = 1$ ). Она имеет вид монотонно убывающей функции.

Рассмотрим случай, когда белый шум действует на два расстроенных усилителя с гауссовыми частотными характеристиками [1, 11]:

$$K_1(j\omega) = e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{\Delta\omega_1^2}} e^{-jt_0(\omega - \omega_0)}, \\ K_2(j\omega) = e^{-\frac{(\omega - \omega_0 - \Delta\omega)^2}{\Delta\omega_1^2}} e^{-jt_0(\omega - \omega_0 - \Delta\omega)} \quad (6.10.12)$$

Как известно, частотные характеристики (6.10.12) являются хорошей аппроксимацией для резонансного усилителя, состоящего из большого числа  $n$  ( $n \geq 5$ ) одинаково настроенных одиночных контуров, причем в этом случае время запаздывания  $t_0 = 2\sqrt{n \ln 2 / \Delta\omega_n}$ , где  $\Delta\omega_n = \Delta\omega_1 \sqrt{\ln 2 / 2}$  — ширина полосы на уровне половинной мощности.

Подставив (6.10.12) в (6.10.4) и введя переменную  $x = \frac{2(\omega - \omega_0) - \Delta\omega}{\Delta\omega_1}$ , получим

$$k_{12}(\tau) = \frac{N_0 \Delta\omega_1}{4\pi} e^{-2\left(\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_1}\right)^2} \int_0^\infty e^{-2x^2} \times \\ - \frac{(2\omega_0 + \Delta\omega)}{\Delta\omega_1}$$

$$\times \cos\left(\frac{\Delta\omega_1\tau}{2}x + \omega_0\tau + \frac{\Delta\omega\tau}{2} - \Delta\omega t_0\right)dx.$$

Величиной  $\Delta\omega\tau/2$  можно пренебречь по сравнению с  $\omega_0\tau$ . Поскольку предполагается  $\omega_0/\Delta\omega_1 \gg 1$ , то нижний предел интегрирования можно положить равным  $-\infty$ . После интегрирования получим

$$k_{12}(\tau) = N_0 \Delta f_s \exp\left[-2\left(\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_1}\right)^2 - \frac{(\Delta\omega_1\tau)^2}{32}\right] \cos(\omega_0\tau - \Delta\omega t_0), \quad (6.10.13)$$

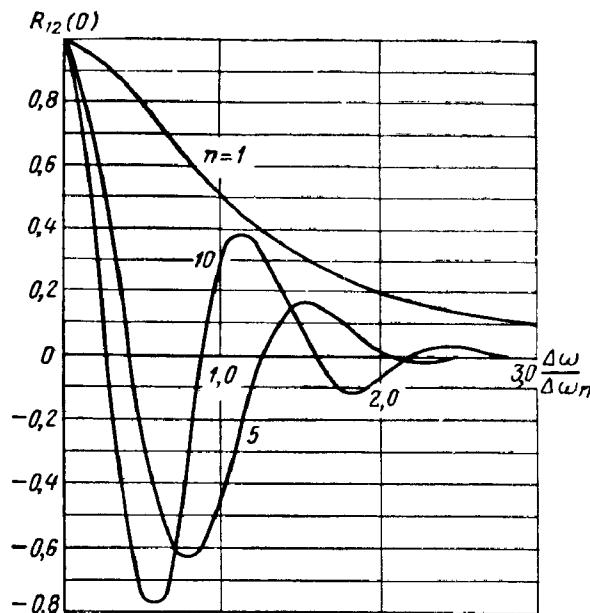


Рис. 6.16. Зависимость коэффициента взаимной корреляции шумов на выходе двух идентичных усилителей от относительной расстройки.

где  $\Delta f_s = \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta\omega_1}{2\pi} \right) \sqrt{\frac{\pi}{2}}$  — энергетическая ширина полосы гауссово фильтра. Так как

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = k_{12}(\tau) \Big|_{\substack{\Delta\omega=0 \\ \tau=0}} = N_0 \Delta f_s,$$

то

$$R_{12}(\tau) = \exp\left[-2\left(\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_1}\right)^2 - \frac{(\Delta\omega_1\tau)^2}{32}\right] \cos(\omega_0\tau - \Delta\omega t_0). \quad (6.10.14)$$

При  $\tau = 0$  отсюда получаем

$$R_{12}(0) = \exp\left[-2\left(\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_1}\right)^2\right] \cos \Delta\omega t_0 = \exp\left[-\left(\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_n}\right)^2 \ln 2\right] \times \cos\left(2\sqrt{n \ln 2} \frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_n}\right). \quad (6.10.15)$$

На рис. 6.16 нанесены кривые коэффициента взаимной корреляции (6.10.15) в зависимости от относительной расстройки для  $n = 5$  и  $10$ . С увеличением числа каскадов взаимное перекрытие частотных характеристик (при неизменной ширине полосы на уровне полувинной мощности) уменьшается, что приводит к уменьшению коэффициента взаимной корреляции. В многоакадных усилителях, в отличие от однокаскадного коэффициент взаимной корреляции в совпадающие моменты времени имеет осциллирующий характер. Это объясняется тем, что в однокаскадных усилителях разность фаз выходных напряжений в совпадающие моменты времени не может достигать значения  $\pi/2$  ни при каких расстройках, а в многоакадных усилителях при некоторых расстройках она может превышать  $\pi/2$ .

## § 11. НОРМАЛИЗАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ИНЕРЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ

Предположим, что ненормальный случайный процесс  $\xi(t)$  с временем корреляции  $\tau_k$  действует на инерционную линейную систему (с постоянной времени  $\tau_c \gg \tau_k$ ). Покажем, что процесс  $\eta(t)$  на выходе такой системы приближается к нормальному по мере увеличения отношения  $\tau_c/\tau_k$  [5], и затем приведем несколько конкретных примеров.

Явление нормализации случайных процессов при линейных преобразованиях интегрального типа является прямым следствием центральной предельной теоремы, доказательство которой при весьма общих условиях было дано А. М. Ляпуновым и впоследствии развито в ряде работ советских ученых [12]. Если  $\xi_1, \dots, \xi_n$  — независимые случайные величины, имеющие конечные математические ожидания и дисперсии, то плотность вероятности суммы

$$\eta = \sum_{i=1}^n \xi_i \quad (6.11.1)$$

приближается к нормальному при увеличении числа слагаемых  $n$ .

Для оценки степени приближения плотности вероятности суммы к нормальному целесообразно использовать коэффициенты асимметрии и когеренса (3.17.8).

Предположим, что все величины  $\xi_i$  имеют одинаковые плотности вероятности и, следовательно, одинаковые кумулянты (3.4.8.).

Будем обозначать величины, относящиеся к сумме  $\eta$ , волнистой линией сверху. Согласно (6.11.1) находим

$$\tilde{\eta}_2 = \sum_{i=1}^n \eta_{2i} = n\eta_2, \quad \tilde{\eta}_3 = \sum_{i=1}^n \eta_{3i} = n\eta_3, \quad \tilde{\eta}_4 = \sum_{i=1}^n \eta_{4i} = n\eta_4.$$

Подставив эти значения в формулу (3.17.8), получим

$$\tilde{\gamma}_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \gamma_1, \quad \tilde{\gamma}_2 = \frac{1}{n} \gamma_2. \quad (6.11.2)$$

Заметим, что коэффициенты асимметрии и эксцесса являются первыми и наиболее важными членами ряда (3.17.7), учитывающими отклонение плотности вероятности от нормальной. Причем из (6.11.2) видно, что с увеличением  $n$  коэффициент асимметрии стремится к нулю, как  $n^{-\frac{1}{2}}$ , и медленнее, чем коэффициент эксцесса и другие, высшие коэффициенты ряда (3.17.7). Отсюда следует, что при увеличении  $n$  плотность вероятности суммы  $\eta$  стремится к нормальной.

Можно показать, что плотность вероятности для суммы (6.11.1) будет стремиться к нормальной и в том случае, когда величины  $\xi_i, i = 1, 2, \dots, n$ , зависимы. Однако в этом случае коэффициенты  $\tilde{\gamma}_1$  и  $\tilde{\gamma}_2$  при заданном  $n$  будут больше, чем для независимых величин.

Приведенные рассуждения переносятся на линейные преобразования интегрального вида. Пусть случайные процессы  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  связаны соотношением типа (6.1.4):

$$\eta(t) = \int_0^t G(t-\tau) \xi(\tau) d\tau, \quad (6.11.3)$$

где случайный процесс  $\xi(t)$  является ненормальным. Будем считать  $t \gg \tau_c$  (стационарное состояние) и  $\tau_c \gg \tau_k$ .

Интеграл (6.11.3) можно представить в виде суммы

$$\eta(t) \approx \sum_{i=1}^n G(t-\tau_i) \xi(\tau_i) \Delta. \quad (6.11.4)$$

Элементарный интервал  $\Delta$  возьмем таким, что  $\tau_c \gg \Delta \gg \tau_k$ . При этом отдельные слагаемые суммы будут практически независимы. Так как  $t \gg \tau_c \gg \Delta \gg \tau_k$ , то на интервале интегрирования  $(0, T)$  содержится большое число  $n$  членов суммы. Следовательно, плотность вероятности для  $\eta(t)$  при  $\tau_c \gg \tau_k$  стремится к нормальной, независимо от вида плотности вероятности для  $\xi(t)$ .

Можно показать [5], что применительно к преобразованию (6.11.3) коэффициенты асимметрии и эксцесса для  $\eta(t)$  и  $\xi(t)$  связаны приближенными соотношениями

$$\tilde{\gamma}_1 \approx \sqrt{\frac{\tau_k}{\tau_c}} \gamma_1, \quad \tilde{\gamma}_2 \approx \frac{\tau_k}{\tau_c} \gamma_2. \quad (6.11.5)$$

Эти формулы по характеру совпадают с (6.11.2), если положить  $n \approx \tau_c / \tau_k$ .

Приведем теперь несколько конкретных примеров, иллюстрирующих явление нормализации.

1. Пусть арифметически суммируются  $N$  независимых выборочных значений (отсчетов) стационарных случайных процессов, имеющих плотности вероятности (7.2.9) и (7.5.3) [13]. Характер изменения плотностей вероятностей  $W_N(v)$  в зависимости от числа суммируемых отсчетов показан на рис. 6.17, причем пунктирные кри-

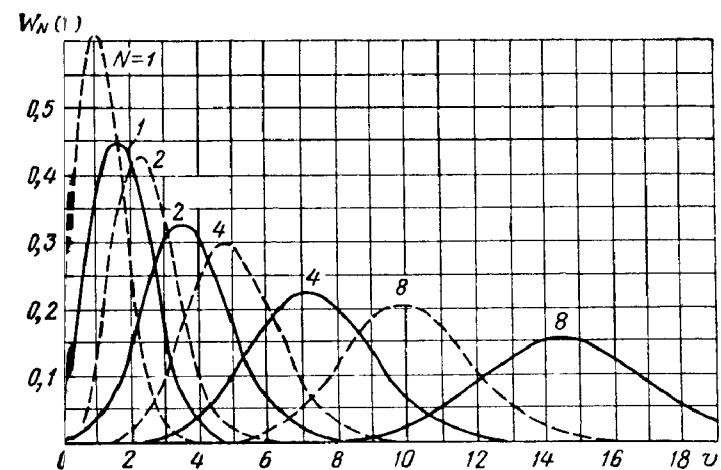


Рис. 6.17. Плотности вероятности суммы  $N$  независимых отсчетов сгибающей узкополосного случайного процесса в отсутствии сигнала ( $a^2 = 0$  — пунктирные линии) и при наличии сигнала ( $a^2 = 2$  — сплошные линии).

вые относятся к случайному процессу с плотностью вероятности (7.2.9), а сплошные — с плотностью вероятности (7.5.3) при  $a^2 = 2$ . Эти результаты получены при помощи ряда Эджворта (3.17.7).

Аналогичные кривые для плотностей вероятностей (7.5.7) при  $a^2 = 0$  и 2, полученные при помощи гамма-распределения (3.17.25), показаны на рис. 6.18 соответственно пунктирными и сплошными линиями. Из рисунков явно усматривается приближение плотностей вероятностей  $W_N$  к нормальной с увеличением числа  $N$  суммируемых отсчетов.

2. На рис. 6.19 приведены две плотности вероятности напряжения на нагрузке  $RC$  линейного диодного детектора, когда на вход детектора действует нормальный стационарный низкочастотный шум с гауссовой спектральной плотностью шириной  $\Delta f$  (на уровне 0,5). Видно, что с увеличением постоянной времени  $RC$  плотность вероятности выходного напряжения приближается к нормальной [14].

3. В задачах обнаружения быстро фадингующих сигналов приходится рассматривать плотность вероятности случайной величины

$$\eta = \frac{1}{T} \int_0^T \xi^2(t) dt, \quad (6.11.6)$$

где  $\xi(t)$  — нормальный стационарный шум с нулевым средним значением и спектральной плотностью вида [см. (6.10.8)]:

$$S_\xi(\omega) = \frac{\text{const}}{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}. \quad (6.11.7)$$

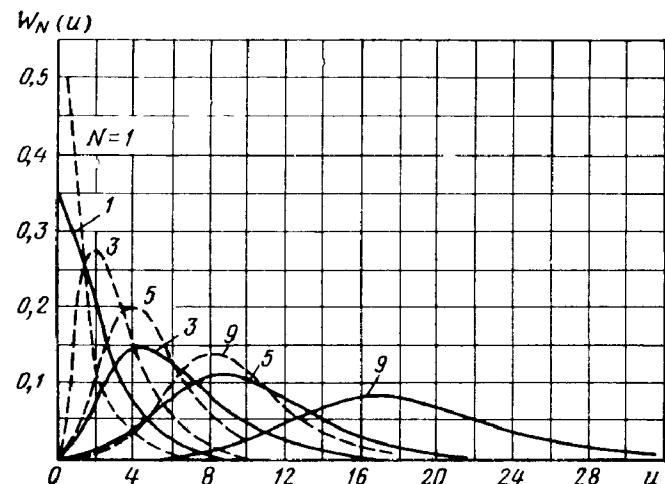


Рис. 6.18. Плотности вероятности суммы  $N$  независимых отсчетов квадрата огибающей узкополосного случайного процесса в отсутствие сигнала ( $a=0$  — пунктирные линии) и при наличии сигнала ( $a^2=2$  — сплошные кривые).

На рис. 6.20 приведены плотности вероятности  $W(\eta)$  при  $Q = 100$  для трех значений параметра  $\lambda = \omega_0 T$ , пропорционального числу периодов  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ , укладывающихся на интервале времени  $T$  [15]. Замечаем, что с увеличением времени интегрирования  $T$  плотность вероятности  $W(\eta)$  стремится к нормальному.

4. Рассмотрим уравнение

$$\varphi + \beta \varphi = \gamma \xi^2(t), \quad (6.11.8)$$

где  $\xi(t)$  — нормальный стационарный шум с нулевым средним значением и корреляционной функцией

$$k_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 R(\tau) = \sigma_\xi^2 e^{-\alpha |\tau|}. \quad (6.11.9)$$

Уравнение (6.11.8) определяет отклонение стрелки термоэлектрического прибора при воздействии на него флуктуационного шума  $\zeta(t)$ , причем коэффициент  $\gamma$  характеризует чувствительность, а

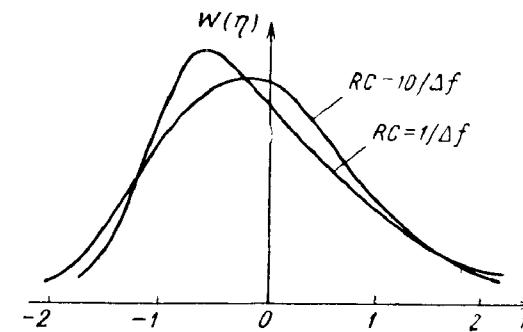


Рис. 6.19. Нормализация напряжения на выходе линейного инерционного детектора.

$\beta$ -инерционные свойства прибора [16]. Будем считать, что выполняется условие

$$\tau_c = \frac{1}{\beta} \gg \tau_k \approx \frac{1}{\alpha}. \quad (6.11.10)$$

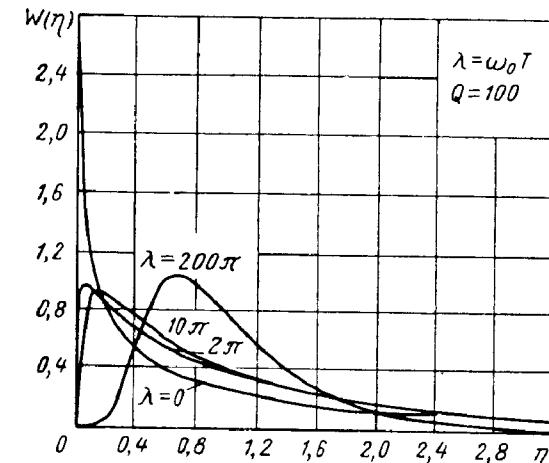


Рис. 6.20. Нормализация флюктуаций при интегрировании.

Плотность вероятности  $w(\eta)$  при условии (6.11.10) можно найти из решения соответствующего уравнения Фоккера — Планка. С этой целью приведем уравнение (6.11.8) к виду (3.20.18). Введем вместо  $\xi^2(t)$  новую случайную функцию  $\xi(t) = \gamma [\xi^2(t) - \sigma_\xi^2]$ , имеющую

нулевое среднее значение и функцию корреляции, которая находится из (3.15.23) и равна:

$$\langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle = 2\gamma^2 k^2(\tau). \quad (6.11.11)$$

Теперь уравнение (6.11.8) можно записать так:

$$\varphi = f(\varphi) + \xi(t), \quad f(\varphi) = -\beta\varphi + \gamma\sigma_\xi^2.$$

Подставив в формулу (3.20.20) отдельные величины и определив коэффициент  $C$  из условия нормировки, получим

$$w(\varphi) = \frac{1}{\sigma_\varphi \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(\varphi - m_\varphi)^2}{2\sigma_\varphi^2} \right], \quad m_\varphi = \frac{\gamma\sigma_\xi^2}{\beta}, \quad \sigma_\varphi = \frac{\gamma\sigma_\xi^2}{\sqrt{\alpha\beta}}. \quad (6.11.12)$$

Убеждаемся, что при выполнении условия (6.11.10) плотность вероятности для  $\varphi(t)$  оказывается нормальной.

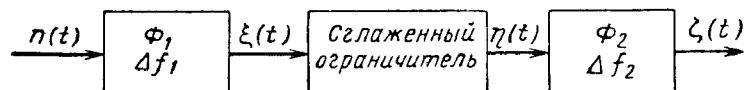


Рис. 6.21. Система фильтр — ограничитель — фильтр.

Отметим, кстати, что в данном примере можно сделать оценку отношения  $\tau_c/\tau_k = \alpha/\beta$ , при котором можно пользоваться уравнением Фоккера — Планка.

Из решения линейного уравнения (6.11.8)

$$\varphi(t) = \gamma e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta x} \xi^2(x) dx$$

в стационарном состоянии ( $t \rightarrow \infty$ ) получим

$$m_\varphi = \frac{\gamma\sigma_\xi^2}{\beta}, \quad \sigma_\varphi = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\beta}{2\alpha}}} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\beta}{2\alpha}}} = \frac{\gamma\sigma_\xi^2}{\sqrt{\alpha\beta}} \left[ 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{\beta}{\alpha} \right) + \frac{3}{16} \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^2 - \dots \right]. \quad (6.11.13)$$

Из сравнения точной формулы (6.11.13) с приближенной (6.11.12) следует, что среднеквадратичное значение в первом случае содержит поправку порядка  $\beta/\alpha$ , которая при условии (6.11.10) мала.

5. Приведем характер изменения плотностей вероятностей на выходе системы фильтр — ограничитель — фильтр (рис. 6.21), когда на вход такой системы воздействует белый шум [17]. Амплитудно-частотная характеристика первого линейного фильтра  $\Phi_1$  предполагается гауссовой, а второго  $\Phi_2$  определяется резонансной

кривой колебательного контура; слаженный ограничитель имеет характеристику вида (5.10.21):

$$\eta(\xi) = \frac{2a}{\gamma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{x^2}{2\gamma^2}} dx. \quad (6.11.14)$$

Обозначим соотношение полос пропускания фильтров на уровне 0,5 через

$$\delta = \frac{\Delta f_1}{\Delta f_2}. \quad (6.11.15)$$

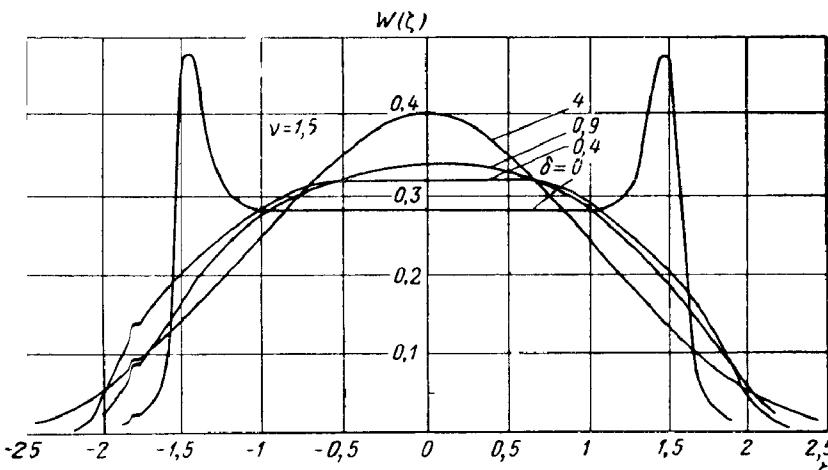


Рис. 6.22. Плотности вероятности шума на выходе системы фильтр — ограничитель — фильтр при фиксированном пороге ограничения ( $\gamma = 1,5$ ) и разных соотношениях полос фильтров  $\delta$ .

По формуле (5.1.4) находим плотность вероятности шума  $\eta(t)$  на выходе ограничителя в функции входного шума  $\xi(t)$ :

$$W_\eta(\xi) = \frac{1}{2a\gamma} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\xi}{\gamma} \right)^2 \left( \frac{1}{\gamma^2} - 1 \right) \right], \quad \gamma = \frac{\sigma_\xi}{\sqrt{2\pi}}, \quad (6.11.16)$$

Для частных случаев слабого, среднего и сильного ограничения эта формула преобразуется в более простые выражения. При слабом ограничении ( $\gamma \ll 1$ ) можно считать, что работа осуществляется на линейном участке характеристики ограничителя и, следовательно,

$$W(\eta) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\eta}{\sigma} \right)^2 \right], \quad \sigma \ll 1.$$

Для среднего ограничения ( $v \approx 1$ ) из (6.11.16) получим равномерную плотность вероятности

$$W(\eta) = \frac{1}{2a}, |\eta| < a, v \approx 1.$$

В случае сильного ограничения ( $v \gg 1$ ) придем к сумме двух дельта-функций:

$$W(\eta) = \frac{1}{2} [\delta(a - \eta) + \delta(a + \eta)], v \gg 1.$$

Ненормальный шум  $\eta(t)$ , проходя через второй линейный фильтр  $\Phi_2$ , в той или иной мере нормализуется, в зависимости от величины относительного порога ограничения  $v$  и соотношения полос  $\delta$ . На рис. 6.22 показан характер изменения плотностей вероятностей

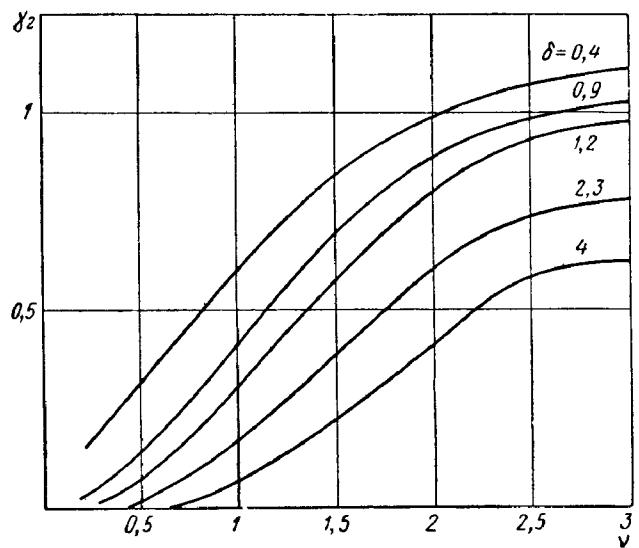


Рис. 6.23. Зависимость коэффициента эксцесса от относительного порога ограничения при разных отношениях полос пропускания  $\delta$ .

$W(\zeta)$  для напряжения  $\zeta(t)$  на выходе второго фильтра при  $v = 1,5$  для четырех значений  $\delta = 0; 0,4; 0,9$  и  $4$ . Видно, что с увеличением  $\delta$  плотность вероятности  $W(\zeta)$  стремится к нормальному.

Этот результат подтверждается также рис. 6.23, на котором приведена зависимость коэффициента эксцесса  $\gamma_2$  от относительного порога ограничения  $v$  для нескольких значений  $\delta$ . (Очевидно, что при симметричном ограничении нормального шума коэффициент асимметрии равен нулю.) Сказанное поясняет смысл используемого в инженерной практике термина: «шум на выходе системы широкая полоса — ограничитель — узкая полоса является нормальным».

## § 12. О НЕОБХОДИМОЙ ДЕТАЛЬНОСТИ РАССМОТРЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Приступая к решению какой-либо конкретной задачи, связанной с линейными и нелинейными преобразованиями случайных процессов, нужно прежде всего наметить план ее решения. План решения обязательно включает два момента: во-первых, уяснение необходимой степени детальности исследования интересующих нас случайных процессов и, во-вторых, выбор соответствующего метода решения.

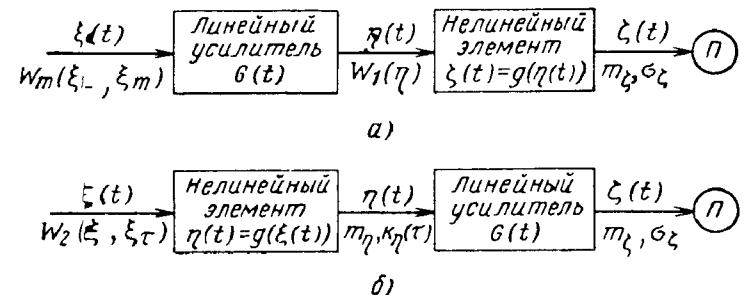


Рис. 6.24. Прибор  $\Pi$ , измеряющий среднее значение.

Остановимся здесь подробнее на вопросе о необходимой степени детальности рассмотрения случайных процессов. Под этим термином понимается следующее: какими статистическими характеристиками выходного случайного процесса нужно интересоваться применительно к конкретно поставленной задаче и какие при этом характеристики входного процесса должны быть заданы. Так как нами пока изучены правила преобразования статистических характеристик случайных процессов линейными и нелинейными безынерционными системами, то рассмотрим несколько конкретных примеров из области радиоизмерений, радиосвязи и радиолокации, содержащих лишь такие системы.

Пусть имеется два устройства (рис. 6.24, а, б), представляющие собой последовательное соединение линейного усилителя с заданной импульсной характеристикой  $G(t)$  и нелинейного безынерционного элемента с известной характеристикой  $\zeta(t) = g(\eta(t))$ . Будем пока считать, что на вход обоих устройств действует нормальный стационарный случайный процесс (сигнал)  $\xi(t)$ . Обозначим выходной процесс через  $\zeta(t)$ . Пусть к выходу обоих устройств присоединен некоторый регистрирующий прибор  $\Pi$  и нас интересует лишь стационарный режим работы.

Рассмотрим несколько частных случаев, соответствующих различным типам регистрирующих приборов.

1. Предположим, что прибор измеряет среднее значение выходного процесса  $\zeta(t)$ , причем показания прибора определяются уравнением

$$\psi + \alpha\psi = \alpha\zeta(t), \quad (G_\pi(t) = \alpha e^{-\alpha t}), \quad (6.12.1)$$

где  $\alpha$  — постоянная времени прибора.

Требуется найти зависимость показаний прибора  $\psi$  от воздействующего на него процесса  $\zeta(t)$ .

В стационарном состоянии среднее отклонение стрелки прибора по формуле (6.6.8) равно:

$$\langle \psi(t) \rangle = \langle \zeta(t) \rangle = m, \quad (6.12.2)$$

а дисперсия показаний прибора, характеризующая погрешность измерений, определяется формулой

$$\sigma_\psi^2 = \sigma_\zeta^2. \quad (6.12.3)$$

Следовательно, из соотношений (6.12.2) и (6.12.3) видно, что для решения сформулированной задачи нужно знать среднее значение  $m$ , и дисперсию  $\sigma_\zeta^2$  выходного процесса  $\zeta(t)$ .

Методика вычисления этих характеристик несколько различна для приведенных двух устройств. Величины  $m$  и  $\sigma_\zeta^2$  для схемы рис. 6.24, а определяются одномерной плотностью вероятности  $w_1(\eta)$  процесса  $\eta(t)$  по формулам (2.4.6) и (2.5.2) соответственно. В свою очередь при входном нормальном случайном процессе  $\xi(t)$  случайный процесс  $\eta(t)$  на выходе линейного усилителя будет также нормальным, и его одномерная плотность вероятности полностью определяется средним значением  $m_\eta$  и дисперсией  $\sigma_\eta^2$ , которые находятся по формулам (6.6.8) и (6.6.10) через соответствующие характеристики процесса  $\xi(t)$ .

Для схемы рис. 6.24, б среднее значение  $m$ , и дисперсия  $\sigma_\zeta^2$  определяются по формулам (6.6.8) и (6.6.10) через среднее значение  $m_\eta$  и функцию корреляции  $k_\eta(\tau)$  процесса  $\eta(t)$ . При вычислении  $k_\eta(\tau)$  нужно воспользоваться формулой (5.1.10).

Мы рассмотрели наиболее простой случай, когда входной процесс  $\xi(t)$  является нормальным. Если допустить, что процесс  $\xi(t)$  не-гауссов, то задача существенно усложняется, причем ее решение для схемы рис. 6.24, а окажется более сложным и громоздким, чем для схемы рис. 6.24, б. Теперь для первой схемы нужно по многомерным корреляционным функциям процесса  $\xi(t)$  предварительно вычислить кумулянты (семиинварианты) процесса  $\eta(t)$ , по ним согласно формуле (3.4.7) найти сначала характеристическую функцию, а затем одномерную плотность вероятности  $W_1(\eta)$ . Для схемы рис. 6.24, б величины  $m_\eta$  и  $k_\eta(\tau)$  находим по одномерной  $W_1(\xi)$  и двумерной  $W_2(\xi, \xi_m)$  плотностям вероятности процесса  $\xi(t)$ .

Таким образом, для решения сформулированной задачи применительно к первому устройству нужно знать многомерные плотности вероятности (многомерные корреляционные или моментные функции) входного процесса  $\xi(t)$ , а применительно ко второму устройству достаточно знать только двумерную плотность вероятности входного процесса.

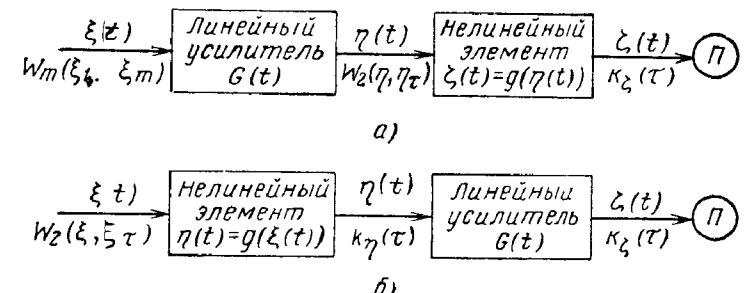


Рис. 6.25. Прибор П — спектроанализатор.

2. Пусть прибором П является спектроанализатор (коррелометр). Если дополнительно учесть характеристики чувствительности человеческого уха, то такая постановка задачи оказывается характерной для радиотелефонной связи.

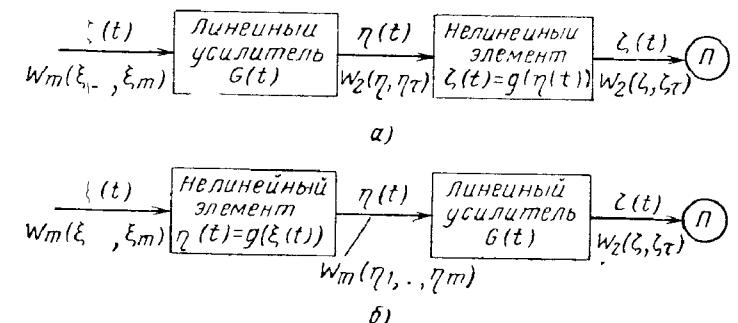


Рис. 6.26. Прибор П — счетчик.

Поскольку спектр случайного процесса однозначно определяется корреляционной функцией, то для выходного процесса  $\zeta(t)$  нужно знать корреляционную функцию  $k_\zeta(\tau)$ . В случае схемы рис. 6.25, а она определяется двумерной плотностью вероятности  $W_2(\eta, \eta_m)$  процесса  $\eta(t)$ , а для схемы рис. 6.25, б — корреляционной функцией  $k_\eta(\tau)$ . Если процесс  $\xi(t)$  негауссов, то  $W_2(\eta, \eta_m)$  можно приближенно вычислить, зная многомерную плотность вероятности  $W_m(\xi_1, \dots, \xi_m)$  входного процесса  $\xi(t)$ , а  $k_\eta(\tau)$  определяется двумерной плотностью

вероятности  $W_2(\xi, \xi_t)$ . Решение данной задачи для второй схемы также проще, чем для первой.

3. Предположим, что прибором является безынерционный счетчик, который за некоторый интервал времени считает число  $N$  пересечений случайнм процессом  $\zeta(t)$  фиксированного уровня  $C$  снизу вверх.

В § 3 гл. 9 показано, что среднее число пересечений  $N$  определяется двумерной плотностью вероятности  $W_2(\xi, \xi_t)$ . Эта плотность вероятности для схемы рис. 6.26,а выражается через двумерную плотность вероятности  $W_m(\eta, \eta_t)$ , которая в свою очередь может быть приближенно вычислена по многомерной плотности вероятности  $\hat{W}_m(\xi_1, \dots, \xi_m)$  путем «пересчета» многомерных корреляционных функций через линейный усилитель.

Применительно к схеме рис. 6.26,б для вычисления  $W_2(\xi, \xi_t)$  нужно знать многомерную плотность вероятности  $W_m(\eta_1, \dots, \eta_m)$  процесса  $\eta(t)$ , которая выражается через плотность вероятности  $W_m(\xi_1, \dots, \xi_m)$  по формуле (5.1.10).

Решение рассматриваемой задачи будет более сложным для второй схемы, чем для первой.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Евтиянов С. И. Переходные процессы в приемно-усилительных схемах. Связьиздат, 1948
- 2 Железнов Н. А. Некоторые вопросы теории информационных электрических систем. Докторская диссертация. ЛКВВИА им. А. Ф. Можайского, 1960
- 3 Тихонов В. И. О флюктуационном характере установления амплитуды колебаний в автогенераторе. «Радиотехника и электроника», 1956, № 9
- 4 Ахманов С. А. О флюктуационном характере установления амплитуды колебаний в автогенераторе. «Известия вузов», Радиофизика, 1960, № 1.
5. Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И. Прохождение некоторых случайных функций через линейные системы. «Автоматика и телемеханика», 1953, № 2
- 6 Котельников В. А. Теория потенциальной помехоустойчивости. Госэнергоиздат, 1956
- 7 Яглом А. М. Введение в теорию стационарных случайных функций. УМН, 1952, вып. 5 (51)
- 8 Вайнштейн Л. А., Зубаков В. Д. Выделение сигналов на фоне случайных помех. Изд-во «Советское радио», 1960
- 9 Давенпорт В. Б., Рут В. Л. Введение в теорию случайных сигналов и шумов. Изд-во иностранной литературы, 1960
- 10 Максимов М. В. Взаимная корреляция флюктуационных помех на выходе частотных фильтров. «Радиотехника», 1956, № 9.
11. Черняк Ю. Б. Взаимная корреляция напряжений шумов на выходе усилителей с перекрывающимися частотными характеристиками. «Радиотехника и электроника», 1960, № 5.
- 12 Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Пределные распределения для сумм независимых случайных величин. Гостехиздат, 1949.
- 13 Магсит J. I. A statistical theory of target detection by pulsed radar. Trans IRE, 1960, IT-6, № 2.

14 Тихонов В. И., Толкачев А. А. Воздействие ненормальных флюктуаций на линейные системы. «Известия АН СССР», ОТН, 1956, № 12.

15. Slepian D. Fluctuation of random noise power BSTJ, 1958, № 1

16. Тихонов В. И. К вопросу об измерении электрических флюктуаций при помощи термоэлектрических приборов ЖТФ, 1955, № 5.

17. Тихонов В. И., Горяинов В. Т. Воздействие нормального шума на ограничитель. «Электросвязь», 1961, № 11.

18. Zaki M. Band-limited functions and the sampling theorem Information and control, 1965, № 2

## Глава 7

### УЗКОПОЛОСНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

#### § 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОГИБАЮЩЕЙ И ФАЗЫ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФЛУКТУАЦИЙ

Линейные радиотехнические системы, работающие на высоких и промежуточных частотах, как правило, являются узкополосными. Если обозначить ширину амплитудно-частотной характеристики системы (допустим на уровне 0,5 по мощности) через  $\Delta f$ , а центральную частоту полосы пропускания через  $f_0$ , то обычно выполняется неравенство

$$\Delta f \ll f_0. \quad (7.1.1)$$

На основании формулы (6.9.11) можно сказать, что при воздействии на такую систему стационарных флуктуаций с широким спектром флукутаций  $\xi(t)$  на выходе в общем случае имеют коэффициент корреляции вида

$$R(\tau) = \rho(\tau) \cos [\omega_0 \tau + \gamma(\tau)], \quad \omega_0 = 2\pi f_0, \quad (7.1.2)$$

а когда амплитудно-частотная характеристика симметрична относительно частоты  $f_0$ , то

$$R(\tau) = \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau. \quad (7.1.3)$$

Здесь  $\rho(\tau)$  — медленно изменяющаяся функция по сравнению с  $\cos \omega_0 \tau$ , т. е. функция  $\rho(\tau)$  практически не изменяется за время  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ .

По виду флукутаций  $\xi(t)$  напоминают модулированное гармоническое колебание (рис. 7.1, *a*, *b*). Из сопоставления осциллограмм этих флукутаций с осциллограммами широкополосных флукутаций (рис. 7.1, *в*) хорошо заметно различие между ними. Чтобы подчеркнуть это различие, будем называть стационарные узкополосные флукутации, имеющие коэффициент корреляции вида (7.1.2), квазигармоническими. Спектральная плотность квазигармонических флукутаций практически отлична от нуля лишь в узкой полосе частот  $\Delta\omega = |\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ .

Квазигармонические флукутации  $\xi(t)$  можно представить в виде гармонического сигнала, случайно модулированного по амплитуде и фазе:

$$\xi(t) = A(t) \cos [\omega_0 t - \phi(t)], \quad (7.1.4)$$

где  $A(t)$  и  $\phi(t)$  — медленно изменяющиеся функции по сравнению с  $\cos \omega_0 t$ .

Случайную функцию  $A(t)$  можно назвать огибающей узкополосных флукутаций, а функцию  $\phi(t)$  — случайной фазой флукутаций.

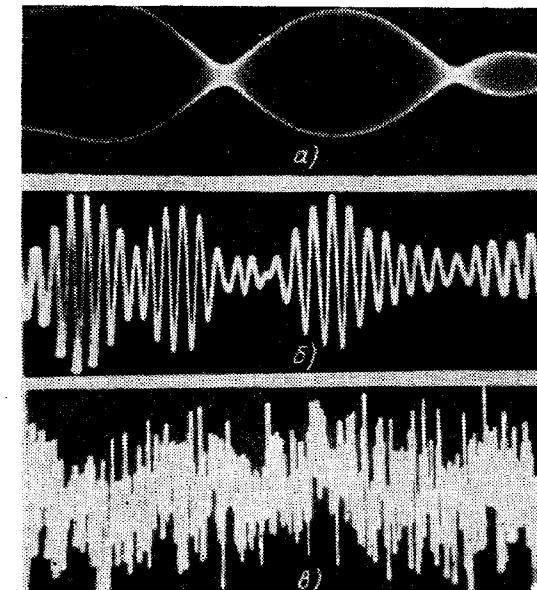


Рис. 7.1. Нормальные флукутации с выхода узкополосного фильтра ( $f_0 = 5$  кГц,  $\Delta f = 3,5$  кГц) при двух скоростях развертки (*а*, *б*) и с выхода видеовысилителя (*в*).

Скорость изменения огибающей и фазы характеризуется величиной, обратной полосе пропускания системы. При условии (7.1.1) огибающая и фаза в течение периода  $T_0 = 1/f_0$  практически не изменяются. Ввиду этого в некоторых задачах со случайным процессом  $\xi(t)$  можно оперировать так же, как с модулированным гармоническим колебанием.

Само собой разумеется, что представление квазигармонических флукутаций  $\xi(t)$  в форме (7.1.4) не является однозначным, так как при заданных статистических характеристиках  $\xi(t)$  имеется некоторая степень произвола в определении статистических характеристик  $A(t)$  и  $\phi(t)$ . Пользуясь ею, огибающую можно определить по-разному.

Часто огибающую определяют формулой [1, 2]

$$A(t) = \sqrt{\xi^2(t) + \zeta^2(t)}, \quad (7.1.5)$$

где  $\zeta(t)$  — так называемый сопряженный процесс.

Исходный случайный процесс  $\xi(t)$  и сопряженный процесс  $\zeta(t)$  связаны друг с другом при помощи пары преобразований Гильберта:

$$\zeta(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^t \frac{\xi(x)}{t-x} dx, \quad \xi(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^t \frac{\zeta(x)}{t-x} dx. \quad (7.1.6)$$

Воспользовавшись соотношением

$$\xi(t) = \frac{A_m}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega_0 x - \varphi_0)}{t-x} dx = -A_m \sin(\omega_0 t - \varphi_0)$$

убеждаемся, что формула (7.1.5) дает точное определение амплитуды в случае гармонического колебания  $\xi(t) = A_m \cos(\omega_0 t - \varphi_0)$ .

Применительно к квазигармоническим флуктуациям вида (7.1.4) формула (7.1.5) имеет приближенный характер. Убедимся в этом. Используя обозначения

$$A_c(t) = A(t) \cos \varphi(t), \quad A_s(t) = A(t) \sin \varphi(t), \quad (7.1.7)$$

можем написать

$$\xi(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{t-x} A_c(x) \cos \omega_0 x + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{t-x} A_s(x) \sin \omega_0 x.$$

Разложим функции  $A_c(x)$  и  $A_s(x)$  в подынтегральных выражениях в ряд Тейлора в окрестности точки  $x = t$  и почленно проинтегрируем. Получим

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{t-x} \cos \omega_0 x \left[ A_c(t) + (x-t) A'_c(t) + \frac{1}{2!} (x-t)^2 A''_c(t) + \dots \right] + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{t-x} \sin \omega_0 x \left[ A_s(t) + (x-t) A'_s(t) + \frac{1}{2!} (x-t)^2 A''_s(t) + \dots \right] = \\ &= -A_c(t) \sin \omega_0 t + A_s(t) \cos \omega_0 t + Q(t) = -A(t) \sin [\omega_0 t - \varphi(t)] + Q(t). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что если можно пренебречь остаточным членом  $Q(t)$ , то сопряженный процесс  $\zeta(t)$  имеет ту же огибающую  $A(t)$ ,

что и исходный процесс  $\xi(t)$ . При этом формула (7.1.5) будет давать правильный результат.

Покажем, что для узкополосных случайных процессов член  $Q(t)$  действительно является малым. Для этого воспользуемся соотношениями:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (x-t)^n \cos \omega_0 x dx = \frac{2n!}{\omega_0^{n+1}} \begin{cases} j^n \cos \omega_0 t & \text{при } n \text{ четном}, \\ j^{n+1} \sin \omega_0 t & \text{при } n \text{ нечетном}, \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (x-t)^n \sin \omega_0 x dx = \frac{2n!}{\omega_0^{n+1}} \begin{cases} j^n \sin \omega_0 t & \text{при } n \text{ четном}, \\ j^{n-1} \cos \omega_0 t & \text{при } n \text{ нечетном}. \end{cases}$$

С учетом этих равенств для остаточного члена можем написать

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} Q(t) &= \frac{1}{\omega_0} (A'_c \cos \omega_0 t - A'_s \sin \omega_0 t) - \\ &- \frac{1}{2\omega_0^2} (A''_c \sin \omega_0 t + A''_s \cos \omega_0 t) + \dots \end{aligned}$$

Наивысшая существенная частота в энергетических спектрах функций  $A_c(t)$  и  $A_s(t)$  приближенно равна  $\Delta\omega$ . Производные  $A_c^{(j)}(t)$  и  $A_s^{(j)}(t)$  по порядку величин не превосходят  $\Delta\omega A(t)$ . Поэтому  $Q(t) \approx \frac{\Delta\omega}{\omega_0} A(t)$ . Следовательно,

$$\xi(t) = -A(t) \sin [\omega_0 t - \varphi(t)] + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} A(t). \quad (7.1.8)$$

Отсюда следует, что для узкополосных случайных процессов функции  $\xi(t)$  и  $\zeta(t)$  имеют одинаковую огибающую с погрешностью, определяемой отношением ширины спектра к средней частоте. Соотношение (7.1.8) оправдывает возможность определения огибающей узкополосных случайных процессов при помощи формулы (7.1.5).

Огибающую квазигармонических флуктуаций можно определить иначе, а именно, соотношением [3]

$$A(t) = \sqrt{\xi^2(t) + \omega_0^{-2} \dot{\xi}^2(t)}, \quad \dot{\xi}(t) = \frac{d\xi(t)}{dt}. \quad (7.1.9)$$

При таком определении огибающей в отличие от определения при помощи преобразования Гильберта предполагается, что флуктуации  $\xi(t)$  являются дифференцируемыми. В этом смысле данное определение огибающей является менее общим, хотя оно имеет ряд преимуществ и физически более наглядно.

Из определения (7.1.9) следует, что  $A(t) \geq \xi(t)$ , причем  $A(t) = \xi(t)$  при  $\dot{\xi}(t) = 0$ . Таким образом, случайные функции  $A(t)$  и

$\xi(t)$  не пересекаются и имеют общие касательные в точках, где  $\xi(t)$  имеет максимумы (минимумы). Это свойство также говорит о целесообразности назвать  $A(t)$  огибающей. Рис. 7.2 дает наглядную иллюстрацию сказанному.

Очевидно, что фаза  $\varphi(t)$  случайного процесса  $\xi(t)$  теперь однозначно определяется соотношениями (7.1.4) и (7.1.9). Из (7.1.9) следует, что производную  $\dot{\xi}(t)$  нужно полагать равной

$$\dot{\xi}(t) = -\omega_0 A(t) \sin [\omega_0 t - \varphi(t)], \quad (7.1.10)$$

т. е. при вычислении производной квазигармонических флюктуаций нужно пренебречь производными по времени от медленно изменяющихся функций  $A(t)$  и  $\varphi(t)$ .

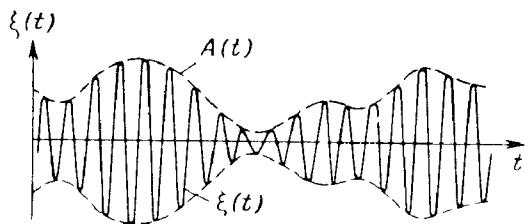


Рис. 7.2. Квазигармонический шум  $\xi(t)$  и его огибающая  $A(t)$ .

Квазигармонические флюктуации  $\xi(t)$  можно также представить в другом виде. В обозначениях (7.1.7) формулы (7.1.4) и (7.1.10) можно записать так:

$$\begin{aligned} \xi(t) &= A_c(t) \cos \omega_0 t + A_s(t) \sin \omega_0 t, \\ \omega_0^{-1} \dot{\xi}(t) &= A_s(t) \cos \omega_0 t - A_c(t) \sin \omega_0 t \end{aligned} \quad \left. \right\}. \quad (7.1.11)$$

Из равенств (7.1.7) также следует, что

$$A(t) = \sqrt{A_c^2(t) + A_s^2(t)}, \quad \operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{A_s(t)}{A_c(t)}. \quad (7.1.12)$$

Графически квазигармонические флюктуации  $\xi(t)$  можно представить вектором, вращающимся в среднем с угловой скоростью  $\omega_0$  и имеющим медленно изменяющуюся случайную длину  $A(t)$  и медленно изменяющийся случайный фазовый угол  $\varphi(t)$  (рис. 7.3). Случайная функция  $A_s(t)$  представляет проекцию этого вектора на вертикальную ось, а  $A_c(t)$  — на горизонтальную.

В соответствии с таким геометрическим представлением можно ввести понятие мгновенной частоты квазигармонического шума (7.1.4), определив ее равенством

$$\omega = \omega(t) = \omega_0 - \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 - \frac{A_s(t) A_c(t) - A_s(t) \dot{A}_c(t)}{A^2(t)}. \quad (7.1.13)$$

Следует обратить внимание на то, что  $\omega(t)$  является случайной функцией времени и вопреки впечатлению, которое создает термин «частота», не является частотой в обычном смысле. В частности, если вектор  $\vec{A}(t)$  на плоскости делает петли, т. е. изменяет направление вращения (см. рис. 7.3), то функция  $\omega(t)$  принимает отрицательные значения.

Укажем некоторые свойства случайных функций  $A_c(t)$  и  $A_s(t)$ . При этом ради простоты математических выкладок в дальнейшем в основном будет рассматриваться тот практически важный случай, когда спектр узкополосных флюктуаций  $\xi(t)$  симметричен относительно частоты  $\omega_0$  и, следовательно, коэффициент корреляции имеет вид (7.1.3).

1. Если случайный процесс  $\xi(t)$  является нормальным, то случайные функции  $A_c(t)$  и  $A_s(t)$  являются также нормальными. Решая уравнения (7.1.11) относительно  $A_c(t)$  и  $A_s(t)$ , получим

$$\begin{aligned} A_c(t) &= \xi(t) \cos \omega_0 t - \omega_0^{-1} \dot{\xi}(t) \sin \omega_0 t, \\ A_s(t) &= \omega_0^{-1} \dot{\xi}(t) \cos \omega_0 t + \xi(t) \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (7.1.14)$$

Если случайный процесс  $\xi(t)$  является нормальным, то  $\xi(t)$  будет тоже нормальным процессом. Так как случайные функции  $A_c(t)$  и  $A_s(t)$  получаются в результате линейного преобразования двух нормальных процессов, то сами они будут иметь нормальную плотность вероятности.

2. Пусть квазигармонический процесс  $\xi(t)$  нормален, стационарен, имеет нулевое среднее значение и функцию корреляции

$$k(\tau) = \langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle = \sigma^2 R(\tau) = \sigma^2 \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau. \quad (7.1.15)$$

Для такого процесса  $\xi(t)$  случайные функции  $A_s(t_1)$  и  $A_c(t_2)$  являются также нормальными, стационарными и обладают следующими свойствами: их средние значения равны нулю, они независимы и имеют одинаковые автокорреляционные функции, т. е.

$$\langle A_s(t_1) \rangle = \langle A_c(t_2) \rangle = 0, \quad (7.1.16)$$

$$\langle A_s(t_1) A_c(t_2) \rangle = 0, \quad (7.1.17)$$

$$\langle A_s(t_1) A_s(t_1 + \tau) \rangle = \langle A_c(t_2) A_c(t_2 + \tau) \rangle = \sigma^2 \rho(\tau) \quad (7.1.18)$$

Соотношение (7.1.16) получается в результате статистического усреднения равенств (7.1.14).

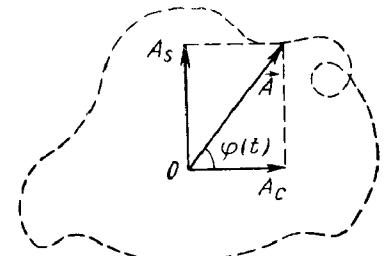


Рис. 7.3. Геометрическое представление квазигармонических флюктуаций

Докажем формулу (7.1.18). На основании (7.1.14) можем написать

$$\begin{aligned} \langle A_c(t) A_c(t+\tau) \rangle &= \langle \xi(t) \xi(t+\tau) \rangle \cos \omega_0 t \cos \omega_0(t+\tau) + \\ &+ \omega_0^{-2} \langle \xi(t) \xi(t+\tau) \rangle \sin \omega_0 t \sin \omega_0(t+\tau) - \omega_0^{-1} [\langle \xi(t) \xi(t+\tau) \rangle \times \\ &\times \sin \omega_0 t \cos \omega_0(t+\tau) + \langle \xi(t) \xi(t+\tau) \rangle \cos \omega_0 t \sin \omega_0(t+\tau)]. \end{aligned} \quad (7.1.19)$$

Согласно формулам (6.2.9) и (6.2.10) имеем

$$\langle \dot{\xi}(t) \dot{\xi}(t+\tau) \rangle = -\frac{d^2 k(\tau)}{dt^2}, \quad \langle \xi(t) \dot{\xi}(t+\tau) \rangle = -\langle \dot{\xi}(t+\tau) \xi(t) \rangle = \frac{dk(\tau)}{d\tau}.$$

Для узкополосных процессов множитель  $\rho(\tau)$  в (7.1.15) является медленно изменяющейся функцией по сравнению с  $\omega_0$ , т. е.  $\rho'(\tau) \ll \omega_0$ . Пренебрегая производной  $\rho'(\tau)$  по сравнению с  $\omega_0$ , получим

$$\frac{dk(\tau)}{d\tau} = -\omega_0 \sigma^2 \rho(\tau) \sin \omega_0 \tau, \quad \frac{d^2 k(\tau)}{dt^2} = -\omega_0^2 k(\tau).$$

Подставив эти выражения в (7.1.19), придем к формуле (7.1.18). Аналогичным путем доказывается формула (7.1.17).

Таким образом, нормальный квазигармонический случайный процесс  $\xi(t)$  с симметричной спектральной плотностью относительно частоты  $\omega_0$  можно представить в виде

$$\xi(t) = A_s(t) \cos \omega_0 t + A_c(t) \sin \omega_0 t, \quad (7.1.20)$$

где  $A_s(t_1)$  и  $A_c(t_2)$  — независимые, нормальные, медленно изменяющиеся стационарные случайные функции.

Вообще говоря, представление случайного процесса  $\xi(t)$  в форме (7.1.5), (7.1.9) или (7.1.20) не требует, чтобы он был узкополосным [4]. Однако для широкополосных процессов случайные функции  $A_s(t)$ ,  $A_c(t)$ ,  $A(t)$  и  $\Phi(t)$  не будут медленно изменяющимися. Поэтому при решении практических задач представление случайных процессов при помощи формул (7.1.5), (7.1.9) и (7.1.20) можно продуктивно использовать лишь тогда, когда они относятся к квазигармоническим процессам.

Рассмотрим основные статистические характеристики огибающей  $A(t)$ , фазы  $\Phi(t)$  и их производных по времени для практически важного случая, когда квазигармонический процесс  $\xi(t)$  является нормальным.

## § 2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ОГИБАЮЩЕЙ И ФАЗЫ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФЛУКТУАЦИЙ

Если воспользоваться формулой (7.1.12) и результатами § 1, то одномерные плотности вероятности для огибающей и фазы нормальных квазигармонических флуктуаций легко получить,

повторив преобразования, которые применялись при выводе формул (5.2.26) — (5.2.27).

Двумерную плотность вероятности огибающей  $A(t)$  можно получить, исходя из формул (7.1.4) и (7.1.10). Воспользуемся известным выражением для четырехмерной плотности вероятности нормальных переменных

$$y_1 = \xi(t_1), \quad y_2 = \dot{\xi}(t_2), \quad y_3 = \dot{\xi}(t_1), \quad y_4 = \ddot{\xi}(t_2);$$

$$w_4(y_1, y_2, y_3, y_4) = \frac{1}{4\pi^2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sqrt{D}} \exp \left[ -\frac{1}{2D} \sum_{\mu, \nu=1}^4 D_{\mu\nu} \frac{y_\mu y_\nu}{\sigma_\mu \sigma_\nu} \right]. \quad (7.2.1)$$

Пусть квазигармонический процесс  $\xi(t)$  имеет нулевое среднее значение и функцию корреляции (7.1.15). Тогда получим следующие соотношения:

$$D(\tau) = \begin{vmatrix} 1 & R & 0 & S \\ R & 1 & -S & 0 \\ 0 & -S & 1 & R \\ S & 0 & R & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{array}{l} \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma, \quad \sigma_3 = \sigma_4 = \omega_0 \sigma, \\ R(\tau) = \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau, \\ S(\tau) = -\rho(\tau) \sin \omega_0 \tau, \\ \tau = t_2 - t_1. \end{array}$$

Выполнив необходимые вычисления, выражение (7.2.1) можем записать так:

$$\begin{aligned} w_4(y_1, y_2, y_3, y_4) &= \frac{1}{4\pi^2 \omega_0^2 \sigma^4 r^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2r^2} [(y_1^2 + y_2^2) + \right. \\ &\left. + \omega_0^{-2} (y_3^2 + y_4^2) - 2R(y_1 y_2 + \omega_0^{-2} y_3 y_4) + 2\omega_0^{-1} S(y_2 y_3 - y_1 y_4)] \right\}, \end{aligned} \quad (7.2.2)$$

где

$$r^2 = r^2(\tau) = 1 - R^2 - S^2 = 1 - \rho^2(\tau). \quad (7.2.3)$$

Перейдем к новым переменным согласно формулам (7.1.4) и (7.1.10), а именно, положим

$$\begin{aligned} y_1 &= A \cos \psi, \quad y_2 = A_\tau \cos \psi_\tau, \quad \psi = \omega_0 t - \varphi, \\ y_3 &= -\omega_0 A \sin \psi, \quad y_4 = -\omega_0 A_\tau \sin \psi_\tau, \quad \psi_\tau = \omega_0(t + \tau) - \varphi_\tau. \end{aligned}$$

Здесь величины без индекса относятся к моменту времени  $t_1 = t$ , а с индексом « $\tau$ » — к моменту времени  $t_2 = t + \tau$ . Якобиан преобразования переменных равен:

$$\frac{\partial(y_1, y_2, y_3, y_4)}{\partial(A, A_\tau, \varphi, \varphi_\tau)} = \omega_0^2 A A_\tau.$$

Получим

$$W_4(A, A_\tau, \varphi, \varphi_\tau) = \\ = \frac{AA_\tau}{4\pi^2 \sigma^4 r^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2 r^2} [(A^2 + A_\tau^2) - 2\rho AA_\tau \cos(\varphi_\tau - \varphi)] \right\}. \quad (7.2.4)$$

Если вспомнить определение (2.9.19) бесселевой функции  $I_0(z)$  и выполнить интегрирование по  $\varphi_\tau$ , то получим

$$W_3(A, A_\tau, \varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} W_4(A, A_\tau, \varphi, \varphi_\tau) d\varphi_\tau = W_2(A, A_\tau) W(\varphi), \quad (7.2.5)$$

где

$$W_2(A, A_\tau) = \frac{AA_\tau}{\sigma^4(1-\rho^2)} \exp \left[ -\frac{A^2 + A_\tau^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)} \right] I_0 \left( \frac{\rho}{1-\rho^2} \frac{AA_\tau}{\sigma^2} \right), \quad A, A_\tau \geq 0, \quad (7.2.6)$$

$$W(\varphi) = \frac{1}{2\pi}, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi. \quad (7.2.7)$$

Формула (7.2.5) показывает, что для нормального квазигармонического процесса с симметричной спектральной плотностью огибающая  $A(t)$  и фаза  $\varphi(t + \tau)$  независимы как в совпадающие, так и в разные моменты времени. Можно показать, что они становятся зависимыми в разные моменты времени, если спектральная плотность исходного узкополосного процесса несимметрична.

Здесь и в дальнейшем без обоснований принимается, что возможные значения случайной фазы заключены в интервале  $(-\pi, \pi)$ . При этом одномерная плотность вероятности (7.2.7) фазы  $\varphi(t)$  оказалась равномерной. В ряде задач это ограничительное предположение не позволяет получить практически важные результаты (например, так называемые перескоки фазы — см. § 3 гл. 8) и необходимо учитывать тот факт, что фаза может принимать значения  $\varphi(t) \pm 2m\pi$ , где  $m = 0, 1, 2, \dots$ .

Если воспользоваться известным интегралом (10.8.18) и выполнить интегрирование по  $A_\tau$ , то для одномерной плотности вероятности огибающей  $A(t)$  получим релеевский закон вида (5.2.26):

$$W(A) = \frac{A}{\sigma^2} \exp \left( -\frac{A^2}{2\sigma^2} \right), \quad A \geq 0, \quad (7.2.8)$$

или

$$W(z) = z e^{-\frac{1}{2} z^2}, \quad z = \frac{A}{\sigma} \geq 0. \quad (7.2.9)$$

Релеевская плотность вероятности для безразмерной переменной  $z$  приведена на рис. 7.4. При  $z=1$  она имеет максимум  $W(1) \approx 0.6$ .

Среднее значение и дисперсия огибающей равны

$$m = \langle A \rangle = \int_0^\infty AW(A) dA = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \sigma_A^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 = \left( 2 - \frac{\pi}{2} \right) \sigma^2. \quad (7.2.10)$$

Одномерные четные моменты огибающей равны

$$\langle A^{2m} \rangle = \frac{2^{2m} (m!) (2m-1)!!}{(2m)!} \sigma^{2m}. \quad (7.2.11)$$

Используя формулу (7.2.6), можно показать [5], что двумерная плотность вероятности для безразмерных величин

$$z_1 = A/\sigma, \quad z_2 = A_\tau/\sigma \quad (7.2.12)$$

может быть представлена рядом по ортогональным полиномам Лагерра

$$W_1(z_1, z_2) = z_1 z_2 e^{-\frac{z_1^2 + z_2^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} L_n \left( \frac{1}{2} z_1^2 \right) L_n \left( \frac{1}{2} z_2^2 \right) \frac{\rho^{2n}}{n! n!}, \quad (7.2.13)$$

где  $L_n(x)$  — полиномы Лагерра, определяемые равенством

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) = \sum_{\mu=0}^n (-1)^\mu C_n^\mu [n(n-1)\dots(\mu+1)] x^\mu.$$

Разложением (7.2.13) часто пользуются при рассмотрении безынерционных нелинейных преобразований огибающей [6, 7]. В частности, используя его, можно показать [8], что двумерный момент огибающей равен:

$$\langle AA_\tau \rangle = \sigma^2 [2E(\rho) - (1 - \rho^2) K(\rho)] = \sigma^2 (1 + \rho) E \left( \frac{2\sqrt{\rho}}{1+\rho} \right) = \\ = \frac{\pi}{2} \sigma \left\{ 1 + \frac{\rho^2}{(2!!)^2} + \frac{\rho^4}{(4!!)^2} + \frac{(1 \cdot 3)^2}{(6!!)^2} \rho^6 + \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5)^2}{(8!!)^2} \rho^8 + \dots \right\}, \quad (7.2.14)$$

где  $K$  и  $E$  — полные эллиптические интегралы первого и второго родов [9].

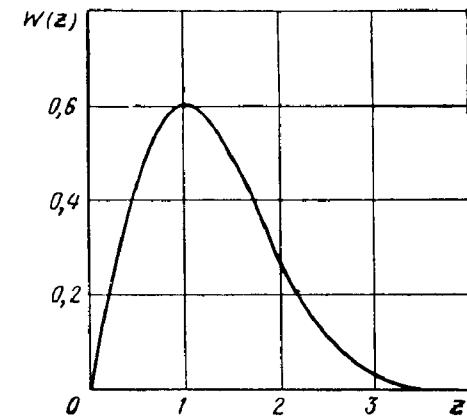


Рис. 7.4. Релеевская плотность вероятности огибающей квазигармонических флюктуаций

Отсюда получаем формулы для функции корреляции и коэффициента корреляции огибающей

$$k_A(\tau) = \langle AA_\tau \rangle - \langle A \rangle^2 = \frac{\pi \sigma^2}{2} \left\{ \left( \frac{1}{2} \right)^2 \rho^2(\tau) + \left( \frac{1}{2.4} \right)^2 \rho^4(\tau) + \left( \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \rho^6(\tau) + \dots \right\}, \quad (7.2.15)$$

$$\rho_A(\tau) = \frac{k_A(\tau)}{\sigma_A^2} = \frac{\pi}{4 - \pi} \left\{ \left( \frac{1}{2} \right)^2 \rho^2(\tau) + \left( \frac{1}{2.4} \right)^2 \rho^4(\tau) + \left( \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \rho^6(\tau) + \dots \right\} = 0.921 \rho^2(\tau) + 0.058 \rho^4(\tau) + \dots \approx \rho^2(\tau). \quad (7.2.16)$$

Итак, коэффициент корреляции огибающей приближенно равен квадрату медленно изменяющегося множителя в выражении (7.1.3) для коэффициента корреляции квазигармонических флюктуаций.

Интересно отметить, что коэффициент корреляции огибающей (7.2.16) практически совпадает с коэффициентом корреляции квадрата огибающей. Действительно, воспользовавшись формулой (7.1.12) и учитывая соотношения (7.1.16) — (7.1.18), имеем

$$k_{A^2}(\tau) = \langle A^2 A_\tau^2 \rangle - \langle A^2 \rangle^2 = \langle A_s^2 A_{s\tau}^2 \rangle + \langle A_c^2 A_{c\tau}^2 \rangle - 2\sigma^4.$$

На основании формул (3.15.23) и (7.1.18) имеем

$$\langle A_s^2 A_{s\tau}^2 \rangle = \langle A_c^2 A_{c\tau}^2 \rangle = \sigma^4 + 2\sigma^4 \rho^2(\tau).$$

Поэтому

$$k_{A^2}(\tau) = 4\sigma^4 \rho^2(\tau), \quad \rho_{A^2}(\tau) = \rho^2(\tau). \quad (7.2.17)$$

Выражения (7.2.16) и (7.2.17) для коэффициентов корреляции позволяют найти энергетические спектры огибающей и ее квадрата. При этом оказывается, что ширина физического (одностороннего) спектра огибающей (ее квадрата) всегда меньше ширины аналогичного спектра самих квазигармонических флюктуаций; степень сужения зависит от вида спектра исходных флюктуаций и может быть рассчитана по формуле (3.10.10).

Если в основной формуле (7.2.4) перейти от  $\Phi_\tau$  к новой переменной  $\Delta\phi = \Phi_\tau - \Phi = \phi(t + \tau) - \phi(t)$  и затем выполнить интегрирование по всем возможным значениям  $A$ ,  $A_\tau$  и  $\phi$ , то получим следующую плотность вероятности для разности фаз [10, 11]:

$$W(\Delta\phi) = \frac{1 - \rho^2(\tau)}{2\pi} \left[ \frac{1}{1 - x^2} + x \frac{\frac{\pi}{2} + \arcsin x}{(1 - x^2)^{3/2}} \right], \quad (7.2.18)$$

$$x = \rho(\tau) \cos \Delta\phi.$$

### § 3. ВЗАИМНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ ОГИБАЮЩИХ ШУМОВ НА ВЫХОДЕ УЗКОПОЛОСНЫХ УСИЛИТЕЛЕЙ С ПЕРЕКРЫВАЮЩИМИСЯ ЧАСТОТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Предположим, что двухканальная схема рис. 6.15, содержащая два узкополосных усилителя с общим входом, дополнена двумя одинаковыми детекторами огибающей (рис. 7.5). Если на вход схемы действует широкополосный нормальный шум  $\xi(t)$ , то на выходах детекторов выделяются огибающие  $A_1(t)$  и  $A_2(t)$  узкополосных флюктуационных процессов  $\eta_1(t)$  и  $\eta_2(t)$ . Вычислим коэффициент

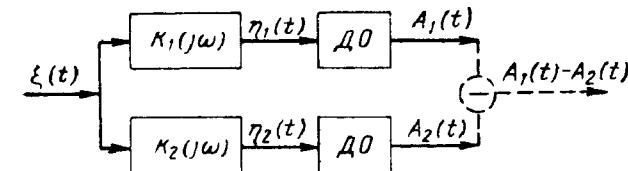


Рис. 7.5. Двухканальная схема.

взаимной корреляции  $\rho_{12}(\tau)$  между огибающими  $A_1(t + \tau)$  и  $A_2(t)$  [12]. При этом используем результаты и обозначения, приведенные в § 10 гл. 6.

Представим напряжения  $\eta_n(t)$  в виде

$$\eta_n(t) = A_n(t) \cos \psi_n(t), \quad n = 1, 2, \quad (7.3.1)$$

где  $A_n(t)$  — огибающие,  $\psi_n(t) = \omega_n t + \varphi_n(t)$  — случайные фазы.

Введем два вспомогательных нормальных процесса  $\zeta_n(t)$ , находящихся в квадратуре с  $\eta_n(t)$ :

$$\zeta_n(t) = A_n(t) \cos \left( \psi_n(t) + \frac{\pi}{2} \right) = -A_n(t) \sin \psi_n(t), \quad n = 1, 2. \quad (7.3.2)$$

Случайные процессы  $\zeta_n(t)$  имеют те же статистические характеристики, что и процессы  $\eta_n(t)$ , так как различие между ними состоит лишь в разности случайных фаз на постоянную величину  $\pi/2$ .

Пренебрегая малыми слагаемыми, содержащими гармоники двойной частоты, можно показать, что функции взаимной корреляции между отдельными процессами равны

$$\begin{cases} \langle \eta_1(t + \tau) \eta_2(t) \rangle = \langle \zeta_1(t + \tau) \zeta_2(t) \rangle = \sigma_1 \sigma_2 R_{12}(\tau), \\ \langle \eta_1(t + \tau) \zeta_1(t + \tau) \rangle = \langle \eta_2(t) \zeta_2(t) \rangle = 0, \\ \langle \eta_1(t + \tau) \zeta_2(t) \rangle = -\langle \eta_2(t) \zeta_1(t + \tau) \rangle = \sigma_1 \sigma_2 S_{12}(\tau), \end{cases} \quad (7.3.3)$$

где коэффициент взаимной корреляции  $S_{12}(\tau)$  выражается формулой, аналогичной (6.10.6) с той лишь разницей, что в подынтегральном выражении нужно заменить косинус на синус.

Процессы  $\eta_1(t)$  и  $\zeta_1(t)$  являются нормальными с нулевыми средними значениями и дисперсиями  $\sigma_n^2$ . По формуле (3.15.15) можем написать их совместную плотность вероятности

$$w_4(\eta_1(t+\tau), \zeta_1(t+\tau), \eta_2(t), \zeta_2(t)) = \frac{1}{4\pi^2\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{\eta_1^2 + \zeta_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\eta_2^2 + \zeta_2^2}{\sigma_2^2} - \frac{2R_{12}(\tau)}{\sigma_1\sigma_2} (\eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2S_{12}(\tau)}{\sigma_1\sigma_2} (\eta_1\zeta_2 - \eta_2\zeta_1) \right] \right\}, \quad (7.3.4)$$

где

$$\rho^2 = \rho^2(\tau) = R_{12}^2(\tau) + S_{12}^2(\tau). \quad (7.3.5)$$

Коэффициент  $\rho(\tau)$  представляет собой медленно изменяющийся множитель в выражении (6.10.6) для коэффициента взаимной корреляции узкополосных шумов на выходе усилителей.

Переходя в (7.3.4) к полярным координатам по формулам (7.3.1) и (7.3.2) и выполнив интегрирование по  $\psi_1$  и  $\psi_2$  в пределах от  $-\pi$  до  $\pi$ , получим совместную плотность вероятности для огибающих:

$$W_2(A_1(t+\tau), A_2(t)) = \frac{A_1 A_2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1-\rho^2)} \exp \left\{ -\frac{A_1^2 + A_2^2}{2(1-\rho^2)} \right\} I_0 \left( \frac{\rho}{1-\rho^2} \frac{A_1 A_2}{\sigma_1 \sigma_2} \right). \quad (7.3.6)$$

Плотность вероятности (7.3.6) является обобщением двумерной плотности вероятности огибающей в одном канале (7.2.6). Последняя получается из (7.3.6), если считать  $K_1(j\omega) \equiv K_2(j\omega)$ .

Если теперь проделать те же математические вычисления, которые указывались при написании формул (7.2.14) и (7.2.16), то получим следующие результаты:

$$\langle A_1(t+\tau) A_2(t) \rangle = \sigma_1 \sigma_2 (1+\rho) E \left( \frac{2\sqrt{\rho}}{1+\rho} \right), \quad (7.3.7)$$

где  $E$  — полный эллиптический интеграл второго рода,

$$\rho_{12}(\tau) \approx 0,92 \rho^2(\tau). \quad (7.3.8)$$

Здесь  $\rho_{12}(\tau)$  — коэффициент взаимной корреляции между  $A_1(t+\tau)$  и  $A_2(t)$ .

Используя формулу (6.10.6), выражение (7.3.5) для  $\rho^2(\tau)$  можно записать иначе:

$$\rho^2(\tau) = \frac{1}{\pi^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2} \int_0^\infty \int_0^\infty S_\xi(\omega') S_\xi(\omega'') K_1(\omega') K_1(\omega'') K_2(\omega') K_2(\omega'') \times \\ \times \cos[(\omega'' - \omega')\tau + \varphi_1(\omega'') - \varphi_1(\omega') + \varphi_2(\omega'') - \varphi_2(\omega')] d\omega' d\omega''. \quad (7.3.9)$$

Применив формулу (7.3.8), находим коэффициент взаимной корреляции между огибающими на выходе двухканальной схемы рис. 7.5. Так, если используются два расстроенных колебательных контура, то на основании формулы (6.10.10) получим

$$\rho_1^2(\tau) = \frac{\exp(-\Delta\omega_1 |\tau|)}{1 + \left( \frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_1} \right)^2}. \quad (7.3.10)$$

Когда фильтры имеют частотные характеристики гауссовой формы, из (6.10.14) имеем

$$\rho_n^2(\tau) = \exp \left[ -2 \ln 2 \left( \frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_n} \right)^2 - \frac{(\Delta\omega_n \tau)^2}{8 \ln 2} \right]. \quad (7.3.11)$$

На рис. 7.6 приведены кривые, характеризующие зависимость  $\rho_1^2(0)$  и  $\rho_n^2(0)$  от расстройки. В обоих случаях с увеличением расстройки коэффициент взаимной корреляции огибающих монотонно

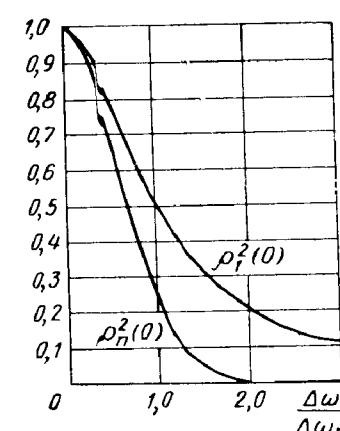


Рис. 7.6. Зависимость коэффициента взаимной корреляции огибающих шумов на выходе симметричной двухканальной схемы.

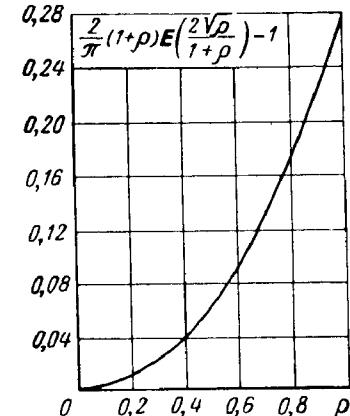


Рис. 7.7. График функции  $\frac{2}{\pi} \left( \frac{2\sqrt{\rho}}{1+\rho} \right) E \left( \frac{2\sqrt{\rho}}{1+\rho} \right) - 1$ .

уменьшается. Интересно заметить, что коэффициент взаимной корреляции огибающих на выходе резонансных усилителей в совпадающие моменты времени ( $\tau = 0$ ) определяется (с точностью до множителя 0,92) значением квадрата (при  $n = 1$ ) или четвертой степени (при  $n \geq 5$ ) амплитудной характеристики в точке пересечения амплитудных характеристик.

Укажем, что схема рис. 7.5, дополненная вычитающим устройством (см. пунктир), на практике часто применяется в качестве частотного детектора. При этом фильтры выбирают так, чтобы разность  $K_1(\omega) - K_2(\omega)$  была приближенно линейной в окрестности

сти некоторой частоты. Обычно это условие не связывают с фазовыми характеристиками фильтров  $\varphi_n(\omega)$ . Покажем [13], что дисперсия шума на выходе рассматриваемой схемы минимальна при условии  $\varphi_1(\omega) = \varphi_2(\omega)$ .

Действительно, с учетом формул (7.2.10), (7.2.11) и (7.3.7) легко находим дисперсию разности огибающих

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \langle (A_1 - A_2)^2 \rangle - \langle A_1 - A_2 \rangle^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \\ &- \pi \sigma_1 \sigma_2 \left[ \frac{2}{\pi} (1 + \rho) E\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1+\rho}\right) - 1 \right].\end{aligned}\quad (7.3.12)$$

Выражение в квадратных скобках представлено на рис. 7.7. Видно, что кривая является монотонно возрастающей функцией аргумента  $\rho$ . Дисперсия  $\sigma^2 \geq 0$  будет минимальной в том случае когда второй отрицательный член в (7.3.12) максимален. Поэтому при фиксированных  $K_1(\omega)$  и  $K_2(\omega)$  и, следовательно, фиксированных  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , дисперсия шума на выходе дискриминатора достигает минимума при максимальном значении  $\rho = \rho(0)$ . Из (7.3.9) видно, что коэффициент  $\rho^2(0)$  при фиксированных других параметрах максимальен тогда, когда косинус равен единице, т. е. при условии  $\varphi_1(\omega) = \varphi_2(\omega)$ .

#### § 4. СОВМЕСТНАЯ ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ ОГИБАЮЩЕЙ, ФАЗЫ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ СУММЫ СИГНАЛА И ШУМА

Пусть имеется сумма узкополосного нормального стационарного шума  $\xi(t) = A(t) \cos[\omega_0 t - \varphi(t)]$  и гармонического сигнала  $s(t) = A_m \cos \omega_c t$ . Чтобы определить огибающую и фазу, запишем сумму сигнала и шума следующим образом:

$$\begin{aligned}s(t) + \xi(t) &= A_m \cos(\omega_0 t + \Delta\omega t) + A(t) \cos(\omega_0 t - \varphi(t)) = \\ &= V(t) \cos[\omega_0 t - \psi(t)] = V(t) \cos[\omega_c t - \theta(t)],\end{aligned}\quad (7.4.1)$$

где

$$\Delta\omega = \omega_c - \omega_0, \quad \theta(t) = \Delta\omega t + \psi(t), \quad (7.4.2)$$

$$V(t) = \{[A_c(t) + A_m \cos \Delta\omega t]^2 + [A_s(t) - A_m \sin \Delta\omega t]^2\}^{1/2}, \quad (7.4.3)$$

$$\operatorname{tg} \psi(t) = \frac{A_s(t) - A_m \sin \Delta\omega t}{A_c(t) + A_m \cos \Delta\omega t}. \quad (7.4.4)$$

Случайная функция  $V(t)$  называется огибающей, а функция  $\theta(t)$  (или  $\psi(t)$ ) — случайной фазой суммы сигнала и шума. Как и ранее, функции  $V(t)$  и  $\theta(t)$  при  $\Delta\omega \ll \omega_0$  являются медленно изменяющимися по сравнению с  $\cos \omega_0 t$ . Представлению суммы сигнала

и шума в виде (7.4.1) можно дать геометрическую интерпретацию, аналогичную рис. 7.3. Иногда сам сигнал следует рассматривать как квазигармонический шум.

Найдем совместную плотность вероятности для  $V(t)$ ,  $V(t)$ ,  $\theta(t)$  и  $\theta(t)$ . С этой целью запишем предварительно совместную плотность вероятности случайных переменных  $A_c(t)$ ,  $A_s(t)$ ,  $A_c(t)$ ,  $A_s(t)$ . В § 1 было установлено, что эти переменные являются нормальными и, как следует из формул (7.1.17) и (6.2.14), независимыми. Они имеют нулевые средние значения, а дисперсии их согласно (7.1.18) равны

$$\langle A_c^2 \rangle = \langle A_s^2 \rangle = \sigma^2, \quad \langle A_c^2 \rangle = \langle A_s^2 \rangle = -\sigma^2 \rho''(0) = -\sigma^2 \rho''.$$

Применяя общую формулу (3.15.1) к данному случаю, получим

$$\begin{aligned}w_4(A_c, A_s, A_c, A_s) &= \frac{1}{4\pi^2 \sigma^4 (-\rho_0'')} \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2 (-\rho_0'')} [-\rho_0'' (A_c^2 + A_s^2) + (A_c^2 + A_s^2)]\right\}.\end{aligned}$$

Перейдем от переменных  $A_c$ ,  $A_s$ ,  $A_c$ ,  $A_s$  к новым переменным  $V$ ,  $V$ ,  $\psi$ ,  $\psi$  при помощи соотношений, следующих из (7.4.3):

$$A_c = V \cos \psi - A_m \cos \Delta\omega t, \quad A_s = V \sin \psi + A_m \sin \Delta\omega t,$$

$$A_c = V \cos \psi - \dot{\psi} V \sin \psi + \Delta\omega A_m \sin \Delta\omega t,$$

$$A_s = V \sin \psi + \dot{\psi} V \cos \psi + \Delta\omega A_m \cos \Delta\omega t.$$

Нетрудно убедиться, что модуль якобиана преобразования переменных равен:

$$\left| \frac{\partial (A_c, A_s, A_c, A_s)}{\partial (V, V, \psi, \psi)} \right| = V^2.$$

Поэтому получим

$$\begin{aligned}W_4(V, V, \psi, \psi) &= \frac{V^2}{4\pi^2 \sigma^4 (-\rho_0'')} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2 (-\rho_0'')} \times \right. \\ &\times \left. [-\rho_0'' (V^2 + A_m^2 - 2VA_m \cos(\psi + \Delta\omega t)) + V^2 + V^2 \dot{\psi}^2 + \Delta\omega^2 A_m^2 + \right. \\ &\left. + 2\Delta\omega A_m (V \sin(\psi + \Delta\omega t) + V \psi \cos(\psi + \Delta\omega t))] \right\}.\end{aligned}\quad (7.4.5)$$

Переходя здесь от  $\psi$  к случайной фазе  $\theta$ , можем написать

$$\begin{aligned}W_4(V, V, \theta, \theta) &= \frac{V^2}{4\pi^2 \sigma^4 (-\rho_0'')} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2 (-\rho_0'')} \times \right. \\ &\times \left. [(\Delta\omega^2 - \rho_0'') (V^2 + A_m^2 - 2VA_m \cos \theta) + V^2 + V^2 \dot{\theta}^2 - 2\Delta\omega V^2 \theta + \right. \\ &\left. + 2\Delta\omega A_m (V \sin \theta + V \theta \cos \theta)] \right\}.\end{aligned}\quad (7.4.6)$$

Если воспользоваться известным интегралом

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-px^2 \pm qx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{\frac{q^2}{4p}}, \quad p > 0,$$

и проинтегрировать (7.4.5) по всем возможным значениям  $V$  и  $\theta$ , то получим совместную плотность вероятности для огибающей и фазы в один и тот же момент времени:

$$W_2(V, \theta) = \frac{V}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(V^2 + A_m^2 - 2VA_m \cos\theta)\right\}, \quad V \geq 0. \quad (7.4.7)$$

В том частном случае, когда гармонический сигнал  $s(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \phi)$  имеет частоту, совпадающую с центральной частотой спектра шума ( $\Delta\omega = 0$ ), указанным выше путем можно получить совместную плотность вероятности  $W_6(V, V, V, \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})$ . Поскольку она потребуется в дальнейшем, приведем ее здесь без вывода [14]:

$$\begin{aligned} W_6(z, z, z, \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) = \\ = \frac{-z^3}{(2\pi)^3 \rho_0'' (\rho_0^{(4)} - \rho_0''^2)} \exp\left\{ \frac{1}{2\rho_0'' (\rho_0^{(4)} - \rho_0''^2)} \left[ -\rho_0'' \rho_0^{(4)} (a^2 + z^2 - 2az \cos\theta) + \right. \right. \\ + (\rho_0^{(4)} - \rho_0''^2) z^2 + (\rho_0^{(4)} - 3\rho_0'') z^2 \theta^2 - \rho_0'' (z^2 - 2z\dot{\theta}^2 + 4z^2\theta^2 + z^2\dot{\theta}^4 + \\ + 4z\ddot{\theta}\theta + z^2\theta^2) + 2\rho_0''^2 (zz - az \cos\theta + 2az\dot{\theta} \cos\theta + \\ \left. \left. + az\ddot{\theta} \sin\theta + az\dot{\theta}^2 \cos\theta) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (7.4.8)$$

где

$$a = \frac{A_m}{\sigma}; \quad z = \frac{V}{\sigma}. \quad (7.4.9)$$

При  $a = 0$  из (7.4.8) получается соответствующая плотность вероятности для одного квазигармонического шума.

Заметим, что в предыдущих формулах величина  $\rho_0$  является отрицательной, а  $(\rho_0^{(4)} - \rho_0''^2)$  — положительной. Действительно, на основании формул (3.10.9) и (6.9.13) можем написать

$$\rho(\tau) = \frac{2}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} S^*(\Omega) \cos \Omega \tau d\Omega, \quad S^*(\Omega) = S(\omega_0 - 2\pi\nu) = S(\omega_0 - \Omega), \quad (7.4.10)$$

$$\sigma^2 = 2 \int_{-\infty}^{\infty} S^*(\Omega) d\Omega. \quad (7.4.11)$$

Из (7.4.10) находим

$$\rho_0'' = \frac{d^2 \rho(\tau)}{d\tau^2} \Big|_{\tau=0} = -\frac{2}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2 S^*(\Omega) d\Omega. \quad (7.4.12)$$

Так как спектральная плотность  $S^*(\Omega)$  является существенно положительной функцией, то величина  $\rho_0''$  не может быть положительной.

Из (7.4.10) имеем

$$\rho_0^{(4)} = \frac{d^4 \rho(\tau)}{d\tau^4} \Big|_{\tau=0} = \frac{2}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^4 S^*(\Omega) d\Omega > 0. \quad (7.4.13)$$

На основании равенств (7.4.11) — (7.4.13) можем написать

$$\begin{aligned} \sigma^4 (\rho_0^{(4)} - \rho_0''^2) &= 4 \int_{-\infty}^{\infty} S^*(\Omega_1) d\Omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_2^4 S^*(\Omega_2) d\Omega_2 - \\ &- 4 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2 S^*(\Omega) d\Omega \right]^2 = 4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\Omega_2^4 - \Omega_1^2 \Omega_2^2) S^*(\Omega_1) S^*(\Omega_2) d\Omega_1 d\Omega_2. \end{aligned}$$

Ясно, что здесь индексы можно поменять местами. Переписав это выражение с переставленными индексами и суммируя с написанным выражением, получим

$$\rho_0^{(4)} - \rho_0''^2 = \frac{2}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\Omega_2^2 - \Omega_1^2)^2 S^*(\Omega_1) S^*(\Omega_2) d\Omega_1 d\Omega_2. \quad (7.4.14)$$

Отсюда видно, что величина  $\rho_0^{(4)} - \rho_0''^2$  не может быть отрицательной.

Рассмотрим подробнее частные результаты, следующие из общей формулы (7.4.6).

## § 5. ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ ОГИБАЮЩЕЙ И ЕЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Если в формуле (7.4.7) проинтегрировать  $W_2(V, \theta)$  по фазе  $\theta$  в пределах от  $-\pi$  до  $\pi$ , то придет к закону Райса (5.2.21) для плотности вероятности огибающей суммы сигнала и шума [15, 16]:

$$W(V) = \frac{V}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{V^2 + A_m^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{VA_m}{\sigma^2}\right), \quad V \geq 0. \quad (7.5.1)$$

В отсутствие регулярного сигнала ( $A_m = 0, I_0(0) = 1$ ) плотность вероятности (7.5.1) переходит в закон Релея (7.2.8).

На рис. 7.8 приведены осциллограммы огибающей (относительно ее среднего значения) суммы сигнала и шума  $V(t)$  для трех значений отношения сигнала/шум  $a = A_m/\sigma = 0; 1,5; 5$ . Из осциллограмм видно, что с увеличением  $a$  огибающая  $V(t)$  становится приближенно «симметричной» функцией относительно своего среднего значения (см. ниже).

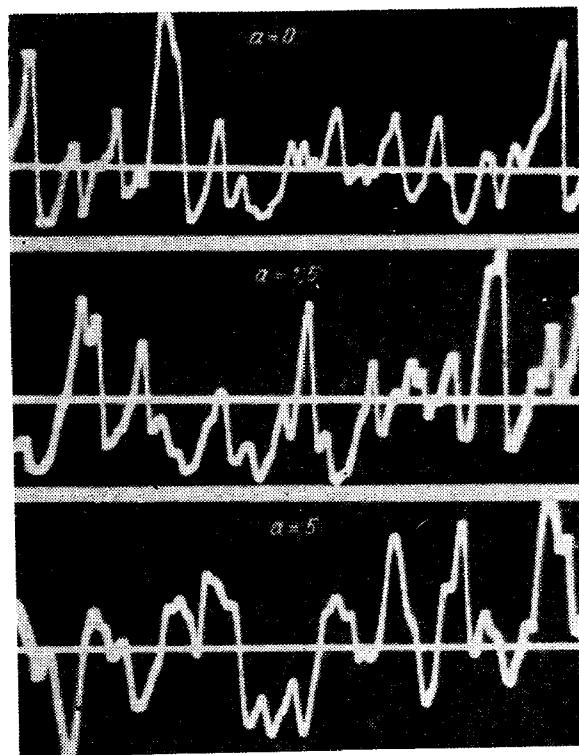


Рис. 7.8. Осциллограммы огибающей суммы сигнала и шума при различных отношениях сигнал/шум  $a$ .

Несколько преобразуем плотность вероятности Райса (7.5.1). Если, вместо огибающей, ввести безразмерную переменную  $v = V/\sigma$  и обозначить отношение сигнал/шум через

$$a = A_m/\sigma, \quad (7.5.2)$$

то получим

$$W(v) = v \exp\left(-\frac{v^2 + a^2}{2}\right) I_0(av), \quad v \geq 0. \quad (7.5.3)$$

Графики этой плотности вероятности для значений  $a = 0, 1, 2, 3, 5$  приведены на рис. 7.9.

При малых отношениях сигнал/шум плотность вероятности  $W(v)$  близка к релеевской (7.2.9), а при больших — к нормальной. В этом можно убедиться, воспользовавшись известными асимптотическими представлениями функций Бесселя:

$$I_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^n}{n!} \left[ 1 + \frac{z^2}{2(2n+2)} + \frac{z^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} + \dots \right], \quad z < 1, \quad (7.5.4)$$

$$I_n(z) \approx \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left[ 1 + \frac{1-4n^2}{1!(8z)} + \frac{(1-4n^2)(9-4n^2)}{2!(8z)^2} + \dots \right], \quad z \gg 1. \quad (7.5.5)$$

В частности, для больших отношений сигнал/шум из (7.5.3) с учетом (7.5.5) получим

$$W(v) = \sqrt{\frac{v}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(v-a)^2}{2}}, \quad a \gg 1. \quad (7.5.6)$$

Если  $A_m \gg \sigma$ , то вероятные значения  $v$  будут сгруппированы около  $a$ , т. е. с некоторым приближением можно положить  $\sqrt{v/a} \approx 1$ . При этом плотность вероятности огибающей (7.5.6) приближенно будет нормальной.

Переходя в формуле (7.5.3) к новой переменной  $u = v^2/2$ , получим одномерную плотность вероятности для квадрата огибающей суммы сигнала и шума:

$$W(u) = e^{-\frac{u-a^2}{2}} I_0(a\sqrt{2u}),$$

$$u = \frac{v^2}{2\sigma^2} > 0. \quad (7.5.7)$$

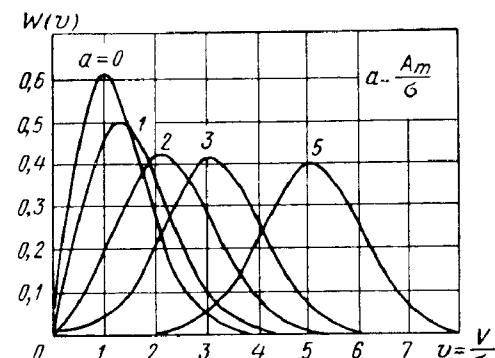


Рис. 7.9. Плотность вероятности Райса.

Графики этой плотности вероятности для трех значений  $a^2 = 0, 2$  и 4 приведены на рис. 7.10.

Из общей формулы (7.4.6) можно получить совместные плотности вероятности  $W_2(V, \dot{V})$  и  $W_2(\theta, \dot{\theta})$ . Однако для простоты и краткости конечных формул ограничимся в дальнейшем рассмотрением важ-

ного частного случая, когда  $\Delta\omega = 0$ . В данном случае формула (7.4.6) упрощается:

$$W_4(V, V, \theta, \theta) = \frac{V^2}{4\pi^2 \sigma^4 (-\rho_0'')} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2 (-\rho_0'')} \times \right. \\ \left. \times [-\rho_0''(V^2 + A_m^2 - 2VA_m \cos \theta) + V^2 + V^2 \theta^2] \right\}. \quad (7.5.8)$$

Если это выражение проинтегрировать сначала по  $\theta$ , а затем по  $\theta$ , то получим совместную плотность вероятности для огибающей и ее производной:

$$W_2(V, V) = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} W_4(V, V, \theta, \theta) d\theta = W(V) w(V), \quad (7.5.9)$$

где  $W(V)$  — плотность вероятности огибающей (7.5.1), а

$$w(V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} (-\rho_0'')} \exp \left[ -\frac{V^2}{2\sigma^2 (-\rho_0'')} \right]. \quad (7.5.10)$$

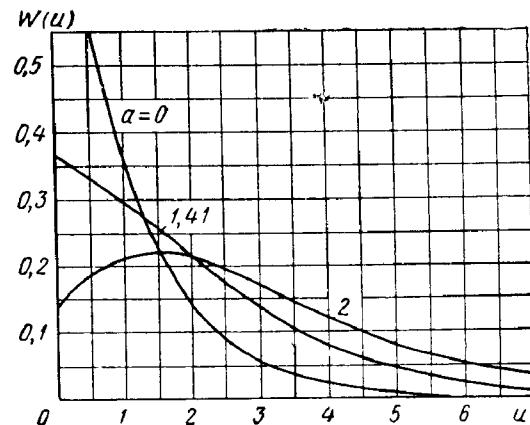


Рис. 7.10. Плотность вероятности квадрата огибающей суммы сигнала и шума.

Из (7.5.9) видно, что огибающая и ее производная независимы в совпадающий момент времени, причем производная от огибающей имеет нормальную плотность вероятности (7.5.10). Следовательно, в результате дифференцирования ненормального случайного процесса в некоторых случаях может получиться нормальный процесс.

Из (7.5.8) можно получить совместную плотность вероятности для случайной фазы и ее производной в совпадающий момент времени

[14]. Для этого нужно сначала выполнить интегрирование по всем возможным значениям  $V$ , а затем по  $V$ , используя при этом известный интеграл

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-\mu x^2 - 2\nu x} dx = -\frac{\nu}{2\mu^2} + \sqrt{\frac{\pi}{\mu^3}} \left( \nu^2 + \frac{1}{2} \mu \right) e^{\frac{\nu^2}{\mu}} \left[ 1 - \Phi \left( \nu \sqrt{\frac{2}{\mu}} \right) \right], \quad (7.5.11)$$

где  $\Phi(z)$  — интеграл вероятности.

В данном случае  $\theta(t)$  и  $\dot{\theta}(t)$  оказываются зависимыми, причем плотность вероятности  $W(\theta)$  будет ненормальной.

## § 6. ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ ФАЗЫ И КОСИНУСА ФАЗЫ

Для того чтобы получить плотность вероятности фазы  $\theta$  нужно проинтегрировать соотношение (7.4.7) по всем возможным значениям огибающей  $V$  от 0 до  $\infty$ :

$$W(\theta) = \int_0^{\infty} W_2(V, \theta) dV.$$

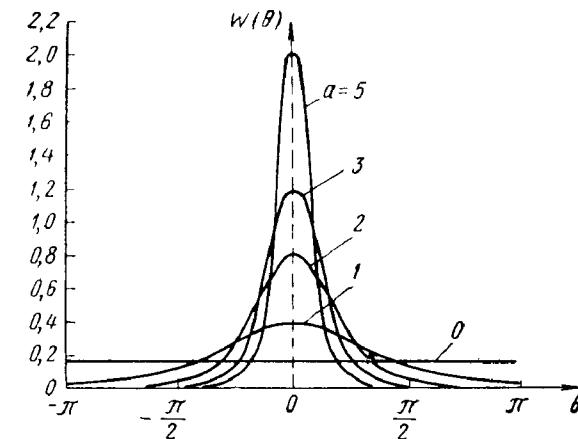


Рис. 7.11. Плотность вероятности фазы суммы сигнала и шума.

Повторив те же преобразования, которые применялись при выводе формулы (5.2.23) из (5.2.17), придем к следующему результату:

$$W(\theta) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2} a^2} \left[ 1 + \sqrt{2\pi} a \cos \theta \Phi(a \cos \theta) e^{\frac{1}{2} a^2 \cos^2 \theta} \right], \quad -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad (7.6.1)$$

где  $\Phi(z)$  — интеграл вероятности (2.8.8).

Графики плотности вероятности фазы для нескольких значений отношения сигнал/шум представлены на рис. 7.11. Из формулы (7.6.1) видно, что плотность вероятности  $W(\theta)$  симметрична относительно оси ординат. Поэтому все нечетные одномерные моменты для случайной фазы равны нулю.

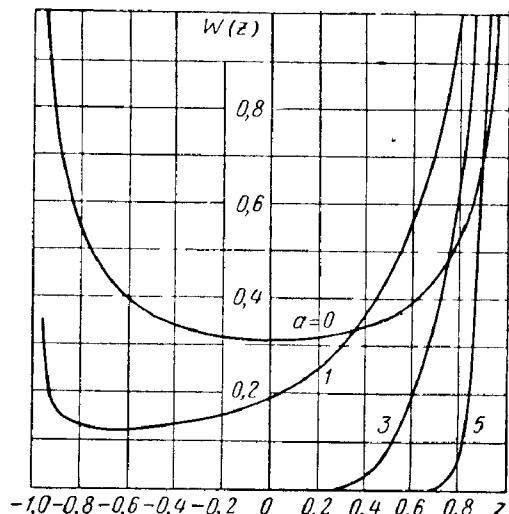


Рис. 7.12. Плотность вероятности косинуса фазы.

Для малых и больших отношений сигнал/шум формула (7.6.1) упрощается. Если  $a \ll 1$ , то можно приближенно положить  $\exp\left(\pm \frac{1}{2} a^2\right) \approx 1$ ,  $\Phi(a \cos \theta) \approx \frac{1}{2}$  и тогда получим

$$W(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left( 1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} a \cos \theta \right), a \ll 1. \quad (7.6.2)$$

В частности, при  $a = 0$  формула (7.6.2) переходит в равномерный закон (7.2.7).

Когда  $a \gg 1$ , из формул (7.4.4) и (7.4.2) имеем  $\psi(t) \approx -\Delta\omega t$ ,  $\theta(t) \ll 1$ . Следовательно, в формуле (7.6.1) с некоторым приближением можно положить  $\exp\left(-\frac{1}{2}a^2\right) \approx 0$ ,  $\cos \theta \approx 1$ ,  $\sin \theta \approx 0$ ,  $\Phi(a) \approx 1$ . При этом получаем нормальную плотность вероятности

$$W(\theta) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}a^2 \theta^2}, \quad a \gg 1. \quad (7.6.3)$$

В ряде случаев необходимо знать плотность вероятности не самой случайной фазы  $\theta(t)$ , а  $\cos \theta(t)$ . Если, например, сумма гармонического сигнала и узкополосного шума пропускается через идеальный ограничитель и затем воздействует на фазовый детектор, то при определенных условиях выходное напряжение оказывается пропорциональным косинусу разности фаз суммарного колебания и опорного гармонического сигнала.

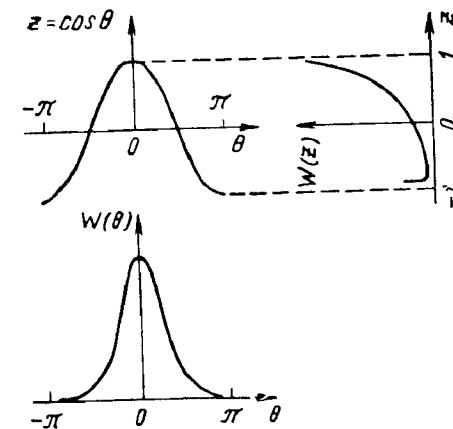


Рис. 7.13. Преобразование плотности вероятности фазы в плотность вероятности косинуса фазы

Для нахождения одномерной плотности вероятности  $\cos \theta$  нужно в формуле (7.6.1) сделать замену переменной

$$z = \cos \theta. \quad (7.6.4)$$

При этом нужно учесть, что функция  $\theta = \arccos z$  при  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  является двузначной, т. е. имеет две ветви:  $\theta_1(z)$  и  $\theta_2(z)$ . Применяя к данному случаю формулу (5.1.7), можем написать

$$W(z) = W[\theta_1(z)] \left| \frac{d\theta_1}{dz} \right| + W[\theta_2(z)] \left| \frac{d\theta_2}{dz} \right|.$$

Так как

$$\left| \frac{d\theta_1}{dz} \right| = \left| \frac{d\theta_2}{dz} \right| = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}},$$

то получим

$$W(z) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-z^2}} e^{-\frac{a^2}{2}} \left[ 1 + \sqrt{2\pi} az \Phi(az) e^{\frac{1}{2}a^2 z^2} \right], \quad -1 \leq z \leq 1, \quad (7.6.5)$$

На рис. 7.12 приведены кривые  $W(z)$  для четырех значений  $a$ . В отсутствие сигнала ( $a = 0$ ) формула (7.6.5) переходит в плотность

вероятности (5.3.5) для гармонического колебания единичной амплитуды с равномерно распределенной начальной фазой. При  $a \neq 0$  кривые становятся асимметричными, причем для фиксированного  $a$  значения плотности вероятности при  $z > 0$  больше, чем при  $z < 0$ . Это поясняется рис. 7.13, иллюстрирующим преобразование плотности вероятности фазы в плотность вероятности косинуса фазы. По смыслу этот рисунок аналогичен рис. 5.5.

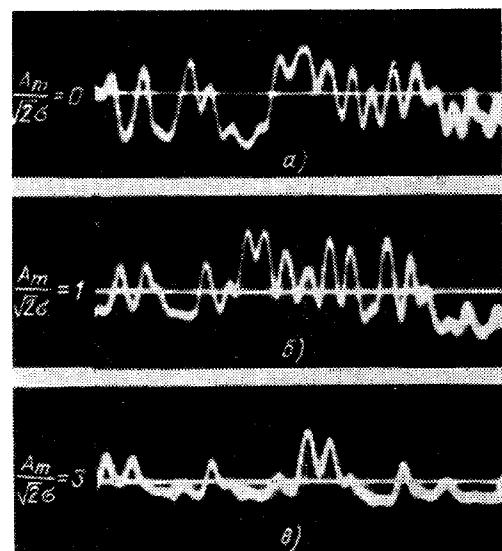


Рис. 7.14. Осциллограммы напряжения на выходе фазового детектора для трех значений отношения сигнал/шум.

Для наглядной иллюстрации характера временных реализаций на рис. 7.14 приведены осциллограммы напряжения  $z(t)$  на выходе фазового детектора для трех отношений сигнал/шум.

## § 7. ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ ЧАСТОТЫ

Если проинтегрировать выражение (7.4.6) последовательно сначала по  $V$ , а затем по  $V$  и  $\theta$ , то получим плотность вероятности для мгновенной частоты  $\theta$  (т. е. производной от фазы):

$$W(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} dV \int_{-\infty}^{\infty} W_4(V, V, \theta, \theta) dV. \quad (7.7.1)$$

В результате вычислений получится следующая формула [17]:

$$W(y) = W_0(y) e^{-\frac{a^2(1+y)}{4}} \left\{ \left( 1 + \frac{1}{2} a^2 \gamma \right) I_0 \left[ \frac{a^2(1+y)}{4} \right] + \frac{1}{2} a^2 \gamma I_1 \left[ \frac{a^2(1+y)}{4} \right] \right\}, \quad (7.7.2)$$

где

$$W_0(y) = \frac{1}{2[1+(q-y)^2]^{3/2}}, \quad y = \frac{\theta}{\sqrt{-\rho_0''}}, \quad q = \frac{\Delta\omega}{\sqrt{-\rho_0''}}; \quad (7.7.3)$$

$$\nu = \frac{y^2}{1+(q-y)^2}, \quad \gamma = \frac{(1+\nu^2-qy)^2}{1+(q-y)^2}, \quad a = \frac{A_m}{\sigma}; \quad (7.7.4)$$

$I_0(z)$  и  $I_1(z)$  — функции Бесселя нулевого и первого порядков от минимого аргумента.

Рассмотрим несколько частных случаев.

1) Пусть сигнал отсутствует. Тогда, полагая в формуле (7.7.2)  $a = 0$ ,  $q = 0$ , получим плотность вероятности для случайной частоты  $\theta = \varphi$  узкополосного шума:

$$W(y) = W_0(y) = \frac{1}{2(1+y^2)^{3/2}}, \quad W_0(\varphi) = \frac{-\rho_0''}{2(\varphi^2 - \rho_0'')^{3/2}}. \quad (7.7.5)$$

Плотность вероятности  $W_0(\varphi)$  симметрична относительно оси ординат. Поэтому среднее значение случайной частоты  $\varphi$  равно нулю. Из формулы

$$\sigma_{\varphi}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2 W_0(\varphi) d\varphi = -\rho_0'' \int_0^{\infty} \frac{\varphi^2}{(\varphi^2 - \rho_0'')^{3/2}} d\varphi \quad (7.7.6)$$

следует, что дисперсия случайной частоты не существует (равна бесконечности), так как при  $\varphi \rightarrow \infty$  подынтегральная функция убывает как  $1/\varphi$ . Поэтому в качестве простейшей числовой характеристики распределения производной от случайной фазы можно принять среднее ее абсолютного значения, т. е.

$$\langle |\varphi| \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi| W_0(\varphi) d\varphi = 2 \int_0^{\infty} \varphi W(\varphi) d\varphi = \sqrt{-\rho_0'}. \quad (7.7.7)$$

2) Предположим, что частота гармонического сигнала совпадает с центральной частотой спектра шума, т. е.

$$\Delta\omega = 0. \quad (7.7.8)$$

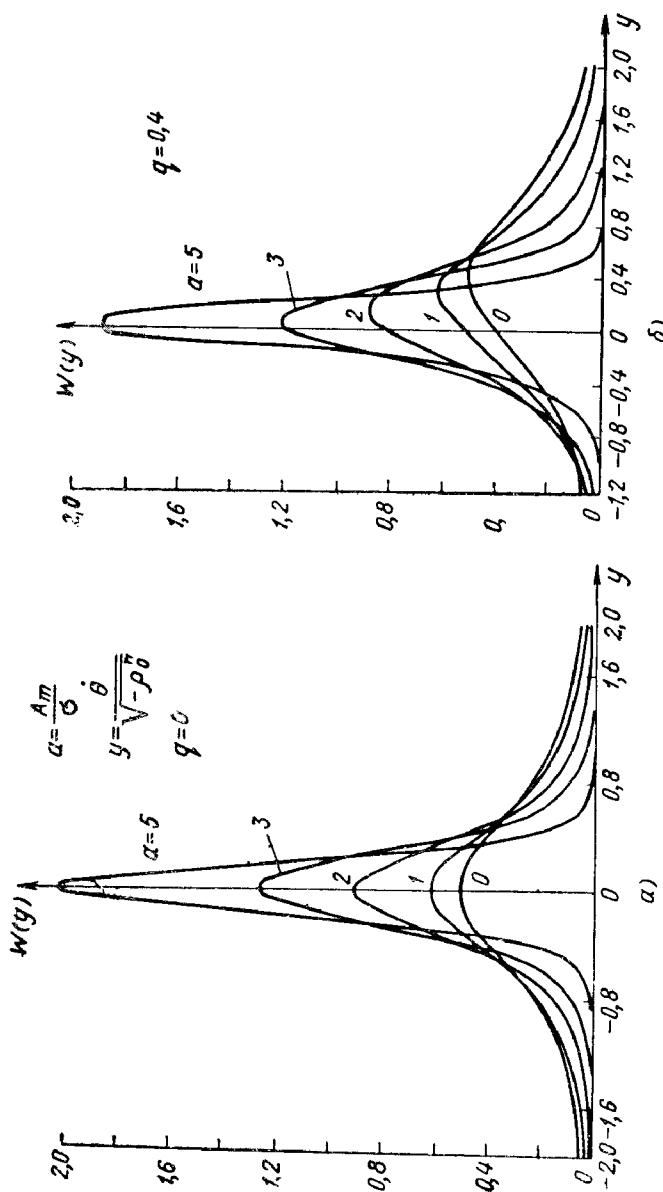


Рис. 7.15. Плотности вероятности для производной от фазы (а) и при различиях расстройки (б).

В данном случае формула (7.7.2) принимает вид

$$W(y) = \frac{1}{2h^{3/2}} \exp\left[-\frac{a^2}{2}\left(1-\frac{1}{2h}\right)\right] \times \\ \times \left\{\left(1+\frac{a^2}{2h}\right)I_0\left(\frac{a^2}{4h}\right) + \frac{a^2}{2h} I_1\left(\frac{a^2}{4h}\right)\right\}, \quad h = 1 + y^2. \quad (7.7.9)$$

Воспользовавшись связью функций Бесселя с вырожденной гипергеометрической функцией, формулу (7.7.9) можно преобразовать:

$$W(r) = \frac{1}{2} h^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{a^2}{2}} {}_1F_1\left(\frac{3}{2}; 1; \frac{a^2}{2h}\right), \quad h = 1 + y^2. \quad (7.7.10)$$

В отсутствие сигнала ( $a = 0$ ,  ${}_1F_1(\alpha; \gamma; 0) = 1$ ) формулы (7.7.9) и (7.7.10) естественно переходят в (7.7.5).

Из формул (7.7.9) и (7.7.10) видно, что в рассматриваемом случае ( $\Delta\omega = 0$ ) плотность вероятности  $W(\theta)$  является четной и симметричной функцией относительно оси ординат. На рис. 7.15, а приведены графики  $W(y)$  для нескольких значений отношения сигнала/шум. С увеличением отношения сигнала/шум они сужаются и все более концентрируются около нуля.

Это также видно из осциллограмм, представленных на рис. 7.16. Осциллограммы воспроизводят напряжение, пропорциональное случайной частоте  $\theta(t)$ , которое получается на выходе безынерционного пинейного частотного детектора, следующего за идеальным ограничителем.

Из симметрии плотности вероятности (7.7.10) относительно оси ординат следует, что среднее значение  $\theta$  равно нулю. Можно убедиться, что дисперсия для  $\theta$  не существует\*. Однако можно вычислить среднее значение  $|\theta|$ , равное

\* Тот несколько необычный факт, что не существует конечной дисперсии для частоты здесь не обсуждается. Он объясняется наличием так называемых пересечений фазы (см. § 3 гл. 8).

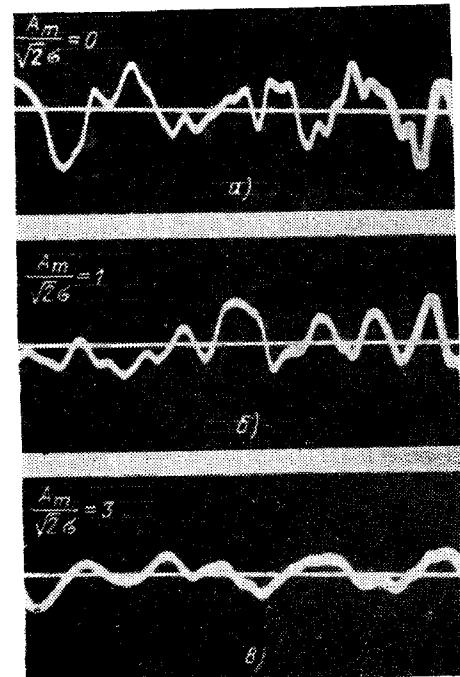


Рис. 7.16. Осциллограммы напряжения на выходе частотного детектора для трех значений отношения сигнала/шум.

$$\langle |\theta| \rangle = 2 \int_0^\infty \theta W(\theta) d\theta = \sqrt{-\rho''_0} e^{-\frac{1}{4}a^2} I_0\left(\frac{a^2}{4}\right). \quad (7.7.11)$$

Это значение никогда не превышает (7.7.7), т. е.  $\langle |\theta| \rangle \leq \langle |\varphi| \rangle = \sqrt{-\rho''_0}$ .

Зависимость среднего значения модуля производной фазы от отношения сигнал/шум приведена на рис. 7.17. Эта величина уменьшается при увеличении отношения сигнал/шум.

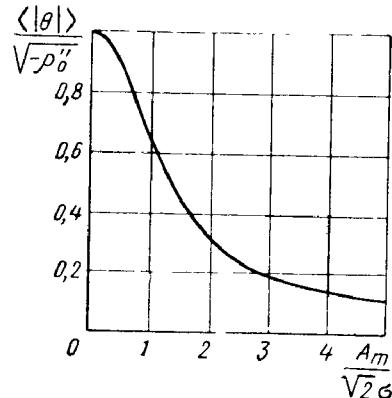


Рис. 7.17. Зависимость среднего значения модуля производной фазы от отношения сигнал/шум.

3) В общем случае ( $a \neq 0, q \neq 0$ ) плотности вероятности (7.7.2) оказываются асимметричными. Это наглядно видно из рис. 7.15, б, на котором изображены плотности вероятности (7.7.2) при  $q = 0,4$  и разных значениях отношения сигнал/шум. При  $q \neq 0$  среднее значение производной от фазы отлично от нуля и может быть определено по формуле

$$\langle y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} y W(y) dy = q e^{-\frac{1}{2}a^2}. \quad (7.7.12)$$

Воспользовавшись соотношением (7.5.5), можно показать, что при больших отношениях сигнал/шум ( $a \gg 1$ ) плотность вероятности (7.7.2) в центральной части приближается к нормальной с дисперсией

$$\sigma_y^2 = (1 + q^2)/a^2. \quad (7.7.13)$$

## § 8. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОГИБАЮЩЕЙ И ЕЕ КВАДРАТА

Приведем без подробных выводов [18] основные статистические характеристики (среднее значение, дисперсию, функцию корреляции) огибающей и квадрата огибающей суммы гармонического сигнала и квазигармонического шума. При этом будем предполагать, что частота гармонического сигнала совпадает с центральной частотой спектра шума.

В данном частном случае сумму сигнала и шума (7.4.1) с учетом соотношения (7.1.20) можно представить в виде

$$s(t) + \xi(t) = [A_m + A_c(t)] \cos \omega_0 t + A_s(t) \sin \omega_0 t = V(t) \cos [\omega_0 t - \theta(t)], \quad (7.8.1)$$

где

$$V(t) = \{[A_m + A_c(t)]^2 + A_s^2(t)\}^{1/2}, \quad (7.8.2)$$

$$\tan \theta(t) = \frac{A_s(t)}{A_m + A_c(t)}. \quad (7.8.3)$$

Геометрически сумма (7.8.1) представляется вектором (рис. 7.18), имеющим случайную длину  $V$  и случайную fazу  $\theta$ .

Применив тот же прием, что и в начале § 4, можно найти совместную плотность вероятности  $W_V(V, V_t, \theta, \theta_t)$  для  $V = V(t)$ ,  $V_t = V(t + \tau)$ ,  $\theta = \theta(t)$  и  $\theta_t = \theta(t + \tau)$ . Поскольку в дальнейшем мы не будем пользоваться ею, то она здесь не приводится [19, 20, 21].

Вычисления показывают [18, 19], что одномерные моменты огибающей равны:

$$\begin{aligned} \langle V^n(t) \rangle &= \int_0^\infty V^n W(V) dV = (2\sigma^2)^{\frac{n}{2}} \times \\ &\times \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) {}_1F_1\left(-\frac{n}{2}; 1; -\frac{1}{2}a^2\right), \end{aligned} \quad (7.8.4)$$

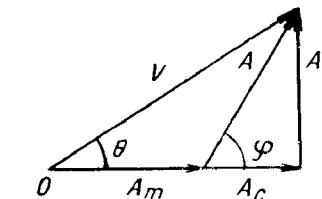


Рис. 7.18. Геометрическое представление суммы сигнала и шума.

где  $\Gamma$  — гамма-функция;

${}_1F_1$  — вырожденная гипергеометрическая функция [9].

Из этой формулы получаются следующие выражения для среднего значения и дисперсии:

$$\begin{aligned} m_V &= \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} {}_1F_1\left(-\frac{1}{2}; 1; -\frac{1}{2}a^2\right) = \\ &= \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[ \left(1 - \frac{1}{2}a^2\right) I_0\left(\frac{1}{4}a^2\right) + \frac{1}{2}a^2 I_1\left(\frac{1}{4}a^2\right) \right] e^{-\frac{a^2}{4}}. \end{aligned} \quad (7.8.5)$$

$$\sigma_V^2 = 2\sigma^2 \left(1 + \frac{1}{2}a^2\right) - m_V^2. \quad (7.8.6)$$

Зависимости величин  $m_V/\sigma$  и  $\sigma_V/\sigma$  от отношения сигнал/шум представлены на рис. 7.19, а.

Если воспользоваться асимптотическими представлениями функций Бесселя (7.5.4) и (7.5.5), то формулы (7.8.5) и (7.8.6) могут быть упрощены:

$$m_V = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{4}a^2\right), \quad \sigma_V = \sigma \sqrt{\frac{4-\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{4}a^2\right), \quad a < 1, \quad (7.8.7)$$

$$m_V = A_m \sqrt{1 + \frac{1}{2a^2}} = A_m, \quad \sigma_V = \sigma, \quad a > 3. \quad (7.8.8)$$

Из (7.8.7) и (7.8.8) видно, что при слабых сигналах ( $a < 1$ ) среднее и среднеквадратичное значения огибающей увеличиваются пропорционально квадрату отношения сигнал/шум (рис. 7.19, а), а при больших сигналах ( $a > 3$ ) и  $\sigma = \text{const}$  среднее значение растет пропорционально амплитуде сигнала, а дисперсия остается почти постоянной.

Огибающая  $V(t)$  практически выделяется на выходе амплитудного линейного детектора огибающей. Разный характер зависи-

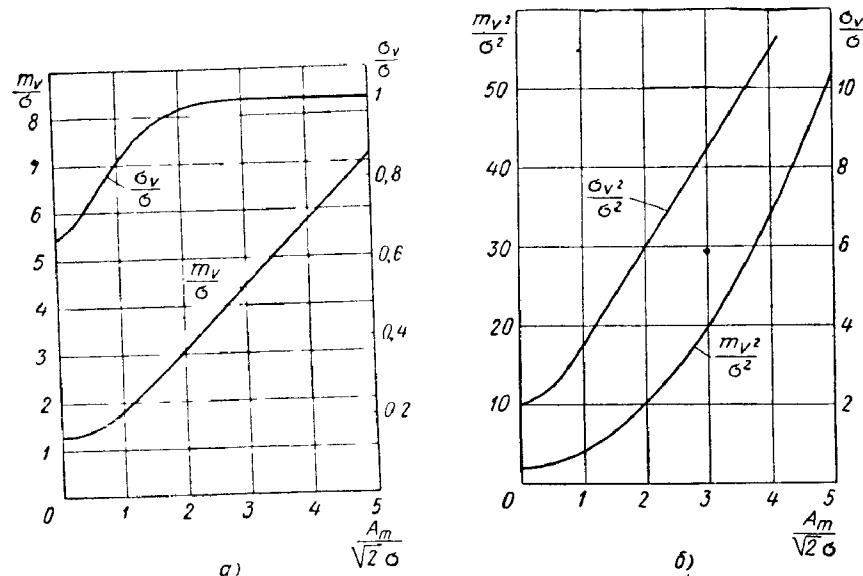


Рис. 7.19. Зависимость среднего и среднеквадратичного значений огибающей (а) и ее квадрата (б) от отношения сигнал/шум.

смостей (7.8.7) и (7.8.8) проявляется в том, что поведение характеристик обнаружения импульсного сигнала на фоне шума оказывается качественно различным при малых и больших отношениях сигнал/шум (см. рис. 11.7). При малом отношении сигнал/шум вероятность правильного обнаружения растет медленно с увеличением отношения сигнал/шум, а при больших отношениях сигнал/шум она растет быстрее. Это качественное различие в поведении характеристики обнаружения явилось основанием для введения термина «подавление слабого гармонического сигнала шумом в детекторе».

Однако следует иметь в виду, что этот термин, во-первых, имеет ограниченное применение и, во-вторых, его физическое содержание состоит лишь в том, что при слабых гармонических сигналах среднее и среднеквадратичное значения напряжения на выходе детектора растут пропорционально квадрату отношения сигнал/шум на входе детектора, в то время как при сильных сигналах среднее значение

выходного напряжения пропорционально амплитуде сигнала, а дисперсия оказывается практически постоянной.

Выражение для корреляционной функции огибающей  $k_V(\tau)$  в общем случае является весьма сложным [22]. Однако для малых и больших отношений сигнал/шум можно получить простые формулы [18].

Если отношение сигнал/шум мало ( $a \ll 1$ ), то выражение (7.8.2) для огибающей можно несколько упростить:

$$\begin{aligned} V(t) &= \sqrt{A^2(t) + 2A_m A_c(t)} \approx \\ &\approx A(t) \left[ 1 + \frac{A_m A_c(t)}{A^2(t)} \right] = A(t) + A_m \cos \varphi(t). \end{aligned} \quad (7.8.9)$$

Отсюда получаем следующее выражение для функции корреляции:

$$\begin{aligned} k_V(\tau) &= \langle A(t) A(t+\tau) \rangle + A_m [\langle A(t) \cos \varphi(t+\tau) \rangle + \langle A(t+\tau) \cos \varphi(t) \rangle] + \\ &+ A_m^2 \langle \cos \varphi(t) \cos \varphi(t+\tau) \rangle - m_V^2. \end{aligned} \quad (7.8.10)$$

Если энергетический спектр шума симметричен, то случайные процессы  $A(t_1)$  и  $\cos \varphi(t_2)$  независимы [см. формулу (7.2.5)]. Поэтому

$$\langle A_c(t) A_c(t+\tau) \rangle = \langle A(t) A(t+\tau) \rangle \langle \cos \varphi(t) \cos \varphi(t+\tau) \rangle,$$

т. е.

$$\langle \cos \varphi(t) \cos \varphi(t+\tau) \rangle = \frac{\langle A_c(t) A_c(t+\tau) \rangle}{\langle A(t) A(t+\tau) \rangle}.$$

Подставив в (7.8.10) выражения (7.1.18) и (7.2.14), получим

$$k_V(\tau) = \frac{\pi}{8} \sigma^2 \left[ \rho^2(\tau) + \left( \frac{4}{\pi} \right)^2 a^2 \rho(\tau) \right], \quad a \ll 1. \quad (7.8.11)$$

При больших отношениях сигнал/шум ( $a \gg 1$ ) выражение (7.8.2) приводится к виду

$$V(t) = A_m + A_c(t) + \frac{A_s^2(t)}{2A_m}. \quad (7.8.12)$$

Отсюда с использованием формул (7.1.17) и (7.1.18) получим

$$k_V(\tau) = \sigma^2 \rho(\tau) \left[ 1 + \frac{1}{2a^2} \rho(\tau) \right], \quad a \gg 1. \quad (7.8.13)$$

Для квадрата огибающей

$$V^2(t) = [A_m + A_c(t)]^2 + A_s^2(t) \quad (7.8.14)$$

на основании формул (7.1.17), (7.1.18) и (3.15.23) получим

$$m_{V^2} = 2\sigma^2 \left(1 + \frac{1}{2}a^2\right), \quad \sigma_{V^2}^2 = 4\sigma^4 (1 + a^2), \quad (7.8.15)$$

$$k_{V^2}(\tau) = 4\sigma^4 [\rho^2(\tau) + a^2 \rho(\tau)]. \quad (7.8.16)$$

Графики зависимости среднего значения и дисперсии от отношения сигнал/шум приведены на рис. 7.19, б.

Формула (7.8.16) по характеру зависимости от  $\rho(\tau)$  почти совпадает с (7.8.11). В этом смысле иногда говорят, что линейный и квадратичный детекторы огибающей при слабых отношениях сигнал/шум дают одинаковый результат.

Укажем, что кривыми рис. 7.19 можно воспользоваться для косвенного определения отношения сигнала/шум на входе детектора радиоприемника. Непосредственное экспериментальное определение этого отношения при больших значениях промежуточной частоты затруднено из-за того, что присоединение измерительных приборов может существенно изменить характеристики усилителя промежуточной частоты. Сравнительно просто измеряется постоянное (среднее) напряжение на нагрузке детектора. Измерив его в отсутствие и при наличии сигнала, по графикам рис. 7.19 можно определить отношение сигнал/шум на входе детектора. При этом, конечно, должна быть уверенность в применимости этих графиков.

## § 9. ХАРАКТЕРИСТИКИ ФАЗЫ И КОСИНУСА ФАЗЫ

Так как плотность вероятности для фазы (7.6.1) симметрична относительно оси ординат, то все одномерные моменты нечетного порядка равны нулю, а для моментов четного порядка справедлива формула [19, 23]

$$\langle \theta^{2n} \rangle = \frac{\pi^{2n}}{2n+1} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \int_{-\infty}^{\infty} \theta^{2n} \cos k\theta d\theta, \quad (7.9.1)$$

где

$$C_k = \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right) a^k}{\pi k! 2^{k/2}} {}_1F_1\left(\frac{k}{2}; k+1; -\frac{1}{2}a^2\right). \quad (7.9.2)$$

Из (7.9.1) получаем следующую формулу для дисперсии фазы:

$$\sigma_\theta^2 = \frac{\pi}{3} + 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{C_k}{k^2}. \quad (7.9.3)$$

Зависимость  $\sigma_\theta$  от отношения сигнал/шум представлена на рис. 7.20.

Среднеквадратичное значение случайной фазы уменьшается при увеличении отношения сигнал/шум  $a$ , что соответствует сужению плотностей вероятностей (7.6.1) с ростом  $a$  (см. рис. 7.11).

Компактное выражение функции корреляции случайной фазы  $\theta(t)$  удается получить лишь при больших отношениях сигнал/шум ( $a \gg 1$ ). В данном случае  $A_m \gg \sigma$  и поэтому в знаменателе правой части (7.8.3) можно пренебречь составляющей  $A_c(t)$ , имеющей дисперсию  $\sigma^2$ , по сравнению с  $A_m$ . При этом вероятные значения  $\theta(t)$  будут структурированы в небольшой окрестности нуля. Учитывая малость значений  $\theta(t)$ , из (7.8.3) имеем

$$\theta(t) = \frac{A_s(t)}{A_m}. \quad (7.9.4)$$

Из (7.9.4) и (7.1.18) получаем выражение для функции корреляции

$$k_\theta(\tau) = a^{-2} \rho(\tau). \quad (7.9.5)$$

Среднее значение и дисперсия косинуса фазы (7.6.4) определяются формулами

$$m_z = \langle \cos \theta \rangle = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}; 2; -\frac{1}{2}a^2\right), \quad (7.9.6)$$

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} a^2 {}_1F_1\left(1; 3; -\frac{1}{2}a^2\right) - m_z^2 \quad (7.9.7)$$

Зависимости величин  $m_z$  и  $\sigma_z$  от отношения сигнал/шум представлены на рис. 7.21. С увеличением отношения сигнал/шум среднее

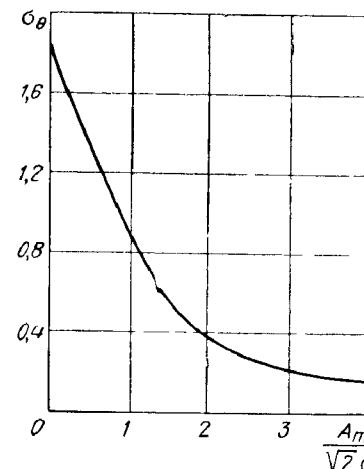


Рис. 7.20. Зависимость среднеквадратичного значения случайной фазы от отношения сигнал/шум

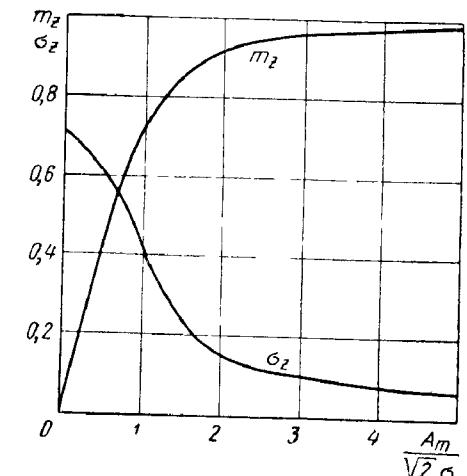


Рис. 7.21. Среднее и среднеквадратичное значения косинуса фазы.

значение возрастает, асимптотически приближаясь к единице, а среднеквадратичное значение уменьшается и стремится к нулю.

В отсутствие сигнала ( $a = 0$ ) функция корреляции косинуса фазы равна [23]

$$k_z(\tau) = \frac{1}{2\rho(\tau)} (\mathbf{E}[\rho(\tau)] - [1 - \rho^2(\tau)] \mathbf{K}[\rho(\tau)]), \quad (7.9.8)$$

где  $\mathbf{K}(z)$  и  $\mathbf{E}(z)$  — полные эллиптические интегралы первого и второго родов.

При наличии сигнала простая формула для корреляционной функции косинуса фазы получается лишь для больших отношений сигнал/шум ( $a \gg 1$ ). Учитывая малость вероятных значений фазы  $\theta$  и разлагая  $\cos\theta$  в ряд, с учетом (7.9.4) можно написать приближенное равенство

$$z = \cos \theta = 1 - \frac{1}{2} \theta^2 = 1 - \frac{A_s^2(t)}{2A_m^2}. \quad (7.9.9)$$

Воспользовавшись последним выражением (3.15.23), получим

$$k_z(\tau) = \frac{1}{2a^4} \rho^2(\tau). \quad (7.9.10)$$

## § 10. ФУНКЦИЯ КОРРЕЛЯЦИИ И СПЕКТР СЛУЧАЙНОЙ ЧАСТОТЫ

При рассмотрении помехоустойчивости радиосистем с частотной модуляцией необходимо знать функцию корреляции или спектральную плотность случайной частоты  $\theta(t)$  [16, 24, 25]. Выражение для случайной частоты получаем из (7.8.3):

$$\dot{\theta}(t) = \frac{d}{dt} \arctan \frac{A_s(t)}{A_m + A_c(t)} \frac{[A_m + A_c(t)] A_s(t) - A_s(t) A_c(t)}{[A_m + A_c(t)]^2 + A_s^2(t)}. \quad (7.10.1)$$

Так как среднее значение частоты в рассматриваемом случае ( $\Delta\omega = 0$ ) равно нулю, то для функции корреляции можем написать

$$k_{\theta}(\tau) = \langle \theta(t) \theta(t + \tau) \rangle = \langle \theta \theta_{\tau} \rangle. \quad (7.10.2)$$

Операция статистического усреднения сводится здесь к вычислению 8-кратного интеграла с использованием 8-мерной плотности вероятности нормальных стационарных случайных функций  $A_s$ ,  $A_c$ ,  $A_{st}$ ,  $A_{ct}$ ,  $A_s$ ,  $A_c$ ,  $A_{st}$ ,  $A_{ct}$ . Эти вычисления в общем случае оказываются весьма сложными из-за нелинейной зависимости частоты от случайных функций  $A_s(t)$  и  $A_c(t)$ . Поэтому нет компактного выражения для корреляционной функции за исключением случая больших отношений сигнал/шум. При больших отношениях сигнал/шум непосредственно из выражения (7.9.4) получим простую формулу

$$k_{\theta}(\tau) = -a^{-2} \rho''(\tau), \quad a \gg 1. \quad (7.10.3)$$

Приведем некоторые конкретные результаты, полученные С. О. Райсом [16]. При спектре шума, симметричном относительно частоты сигнала, функция корреляции оказывается равной

$$\begin{aligned} k_{\theta}(\tau) = & \frac{\rho'^2}{2\rho^2} \left( 1 - \frac{2}{1-\rho} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} + \frac{1+\rho}{1-\rho} e^{-\frac{1}{1+\rho}\rho^2} \right) + \\ & + \left( \frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{2\rho^2} - \frac{\rho^2}{4} \frac{\rho'^2}{\rho^3} \right) \left[ \mathbf{E}_1\left(\frac{\rho^2}{2\rho}\right) - 2\mathbf{E}_1\left(\frac{\rho^2}{2} \frac{1-\rho}{1+\rho}\right) \right. \\ & \left. + \mathbf{E}_1\left(\frac{\rho^2}{2\rho} \frac{1-\rho}{1+\rho}\right) \right] e^{-\frac{1}{2}\rho^2}, \quad \rho = \rho(\tau), \end{aligned} \quad (7.10.4)$$

где через

$$\mathbf{E}_1(z) = \int_{-\infty}^z \frac{e^x}{x} dx = C + \frac{1}{2} \ln z^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n! n} \quad (7.10.5)$$

обозначено главное значение интегральной показательной функции,  $C = 0,577 \dots$  — постоянная Эйлера.

Из общей формулы (7.10.4) можно получить ряд частных результатов. Так, полагая  $a = 0$  и воспользовавшись приведенным представлением интегральной показательной функции в виде ряда (7.10.5), найдем функцию корреляции случайной частоты квазигармонического шума

$$k_{\theta}(\tau) = -\frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{2\rho^2} \ln(1 - \rho^2), \quad a = 0. \quad (7.10.6)$$

Простые формулы (7.10.3) и (7.10.6) относятся лишь к двум предельным случаям: больших и очень малых отношений сигнал/шум. Для промежуточных отношений сигнал/шум, которые представляют наибольший практический интерес, функцию корреляции следует вычислять по основной формуле (7.10.4).

Ввиду сложности формулы (7.10.4) аналитически трудно вычислить энергетический спектр случайной частоты. Его обычно получают численным интегрированием выражения

$$S_{\theta}(f) = 4 \int_0^{\infty} k_{\theta}(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau. \quad (7.10.7)$$

На рис. 7.22 представлены результаты таких вычислений [16] для квазигармонического шума с гауссовым спектром

$$S(f) = S_0 \exp \left[ -\pi \left( \frac{f - f_0}{\Delta f_0} \right)^2 \right], \quad (7.10.8)$$

где  $\Delta f_0$  — энергетическая ширина спектра.

Такому спектру соответствует коэффициент корреляции

$$\rho(\tau) = \exp[-\pi(\Delta f_0 \tau)^2]. \quad (7.10.9)$$

В данном случае формула (7.10.6) принимает вид

$$k_0(\tau) = -\pi \Delta f_s^2 \ln [1 - \exp(-2\pi \Delta f_s^2 \tau^2)]. \quad (7.10.10)$$

Если разложить в ряд логарифмическую функцию, подставить его в (7.10.7) и выполнить почлененное интегрирование, то получим выражение энергетического спектра случайной частоты шума в виде следующего ряда:

$$S_0(f) = 2\pi \Delta f_s \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\pi}{2n} \left( \frac{f}{\Delta f_s} \right)^2}, \quad a = 0. \quad (7.10.11)$$

Кривая этого спектра изображена на рис. 7.22.

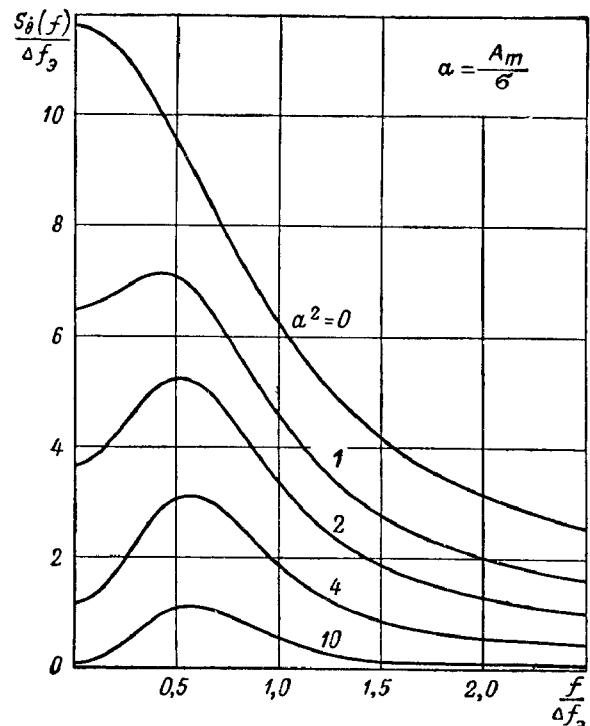


Рис. 7.22. Спектральная плотность случайной частоты.

## § 11. ОБ УСЛОВИЯХ ПРИМЕНЯЕМОСТИ ЗАКОНОВ РЕЛЕЯ И РАЙСА

Имея ввиду радиотехнические применения, рассмотрим некоторые условия, когда можно пользоваться законом Релея (7.2.9) и законом Райса (7.5.3).

**1. Закон Релея.** Пусть суммируются  $n$  независимых гармонических колебаний одинаковой частоты  $\omega_0$ , причем  $i$ -е колебание описывается вектором

$$\vec{a}_i = a_i \exp j(\omega_0 t - \varphi_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (7.11.1)$$

где  $a_i = a_i(t)$  и  $\varphi_i = \varphi_i(t)$  — также независимые случайные переменные.

Предположим, что все случайные фазы  $\varphi_i$  равномерно распределены на интервалах шириной  $2\pi$  и все «амплитуды»  $a_i$  одинаково распределены с плотностью вероятности  $w(a)$ .

Запишем результирующий вектор в виде

$$\begin{aligned} \vec{A} &= A \exp j(\omega_0 t - \varphi) = \sum_{i=1}^n a_i \exp j(\omega_0 t - \varphi_i) = \\ &= \cos \omega_0 t \sum_{i=1}^n x_i + j \sin \omega_0 t \sum_{i=1}^n y_i, \end{aligned} \quad (7.11.2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A(t) \cos \varphi(t) &= X = \sum_{i=1}^n x_i, & A(t) \sin \varphi(t) &= Y = \sum_{i=1}^n y_i, \\ x_i(t) &= a_i(t) \cos \varphi_i(t), & y_i(t) &= a_i(t) \sin \varphi_i(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.11.3)$$

Выясним условия, при которых длина  $A$  результирующего вектора имеет релеевскую плотность вероятности [26].

Сформулированная задача представляет интерес при рассмотрении структуры радиолокационных сигналов, отраженных от земной или морской поверхности, от облаков и других объектов, а также при многолучевом распространении радиоволн в радиосвязи.

Формула (5.2.26) показывает, что если компоненты  $X$  и  $Y$  вектора  $\vec{Z}$  независимы, нормально распределены, имеют средние значения, равные нулю, и одинаковые дисперсии, то длина вектора  $\vec{Z}$  имеет релеевскую плотность вероятности.

Учитывая взаимную независимость всех переменных  $a_i$  и  $\varphi_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , и равномерное распределение всех  $\varphi_i$ , имеем:

$$\langle x_i \rangle = \langle y_i \rangle = 0, \quad \langle X \rangle = \langle Y \rangle = 0,$$

$$\langle XY \rangle = \sum_{i,k=1}^n \langle a_i a_k \rangle \langle \cos \varphi_i \sin \varphi_k \rangle = \sum_{i=1}^n \langle a_i^2 \rangle \langle \cos \varphi_i \sin \varphi_i \rangle = 0, \quad (7.11.4)$$

$$\sigma_i^2 = \langle x_i^2 \rangle = \langle y_i^2 \rangle = \frac{1}{2} m_2, \quad \sigma^2 = \langle X^2 \rangle = \langle Y^2 \rangle = \frac{n}{2} m_2,$$

где  $m_k$  — одномерный момент  $k$ -го порядка «амплитуды» элементарного колебания

$$m_k = \int_0^\infty a^k w(a) da. \quad (7.11.5)$$

Таким образом, для случайных величин  $X$  и  $Y$  выполнены все указанные выше условия, за исключением одного, а именно, нормального распределения. Степень близости плотностей вероятностей для  $X$  и  $Y$  к нормальному в данном случае зависит лишь от числа суммируемых векторов  $n$  и вида  $w(a)$  и может быть оценена на основании формулы (3.17.7).

В рассматриваемом случае третий центральный момент (3.17.9) для  $X$  и  $Y$  равен нулю  $\mu_3 = 0$ . Поэтому оценку быстроты сходимости к нормальному распределению дает коэффициент эксцесса (3.17.8), равный

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{m_4}{nm_2^2} - \frac{2}{n}. \quad (7.11.6)$$

Считая, что хорошее приближение к нормальному закону гарантируется выполнением неравенства  $\gamma_2 \ll 1$ , получаем следующее окончательное условие того, что плотность вероятности «амплитуды»  $A$  суммарного колебания будет близка к релеевской:

$$n \gg \left( \frac{m_4}{m_2^2} - 2 \right). \quad (7.11.7)$$

Для конкретных плотностей вероятностей  $w(a)$  можно оценить значение  $n$ , при котором выполняется условие (7.11.7). В частности, для релеевской плотности вероятности  $w(a)$  на основании (7.2.11) получим  $n \gg 0$ , а для нормальной плотности вероятности с нулевым средним значением из (3.15.21) найдем  $n \gg 1$ .

2. Закон Райса. В § 4 было показано, что плотностью вероятности Райса (7.5.1) описывается огибающая суммы гармонического сигнала с фиксированной начальной фазой и узкополосного нормального шума. Можно показать, что этот результат остается в силе и в том случае, когда гармонический сигнал имеет случайную равномерно распределенную начальную фазу.

Рассмотрим здесь другой случай. Пусть имеется сумма двух гармонических колебаний  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  с известными начальными фазами и узкополосного нормального шума  $\xi(t)$ :

$$\begin{aligned} s_1(t) &= A_1 \cos \omega_0 t, \quad s_2(t) = A_2 \cos(\omega_0 t - \varphi_0), \\ \xi(t) &= A_c(t) \cos \omega_0 t + A_s(t) \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (7.11.8)$$

Представим сумму этих колебаний в следующем виде:

$$s_1(t) + s_2(t) + \xi(t) = X \cos \omega_0 t + Y \sin \omega_0 t = Z \cos(\omega_0 t - \theta), \quad (7.11.9)$$

где

$$Z = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{Y}{X}, \quad (7.11.10)$$

$$X(t) = A_1 + A_2 \cos \varphi_0 + A_c(t), \quad Y(t) = A_2 \sin \varphi_0 + A_s(t). \quad (7.11.11)$$

Графически такое представление иллюстрируется рис. 7.23.

Покажем, что одномерная плотность вероятности огибающей  $Z$  дается законом Райса [27]. Так как  $A_c(t)$  и  $A_s(t)$  независимые нормальные функции, то  $X$  и  $Y$  являются также независимыми нормально распределенными случайными переменными. Они имеют средние значения

$$\langle X \rangle = m_x = A_1 + A_2 \cos \varphi_0,$$

$$\langle Y \rangle = m_y = A_2 \sin \varphi_0$$

и одинаковые дисперсии

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2.$$

Поэтому для огибающей  $Z$  справедлива формула (5.2.21):

$$W(Z) = \frac{Z}{\sigma^2} e^{-\frac{z^2 + m^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{mz}{\sigma^2}\right), \quad (7.11.12)$$

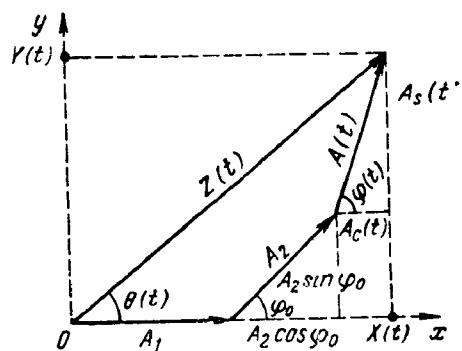


Рис. 7.23. Геометрическое представление суммы двух сигналов и шума.

где

$$m = \sqrt{m_x^2 + m_y^2} = (A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \varphi_0)^{\frac{1}{2}}. \quad (7.11.13)$$

Из способа получения формулы (7.11.12) непосредственно следует, что плотность вероятности огибающей суммы узкополосного нормального шума и любого числа гармонических колебаний с одинаковыми частотами и постоянными амплитудами и начальными фазами имеет вид закона Райса, который является частным случаем распределения Накагами (2.9.13).

## ЛИТЕРАТУРА

- Dugundji J. Envelopes and preenvelopes of real waveforms. Trans IRE, 1958, IT-4, № 1.
- Бунимович В. И. Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах. Изд-во «Советское радио», 1951.
- Тихонов В. И. Один способ определения огибающей квазигармонических флуктуаций. «Радиотехника и электроника», 1957, № 4.
- Бункин Ф. В., Гудзенко Л. И. Об одномерных распределениях амплитуды и фазы стационарного процесса. «Радиотехника и электроника», 1958, № 7.

5. Garrett J. F., Lampard D. G. An expansion for some second order probability distributions and its application to noise problems Trans IRE, 1955, IT-1, № 1.
6. Амиантов И. Н. Безынерционные преобразования огибающей квазигармонических флюктуаций «Радиотехника и электроника», 1959, № 3
7. Морозов В. А. Преобразование ограничителем флюктуаций, подчиняющихся релеевскому закону распределения «Радиотехника и электроника», 1960, № 3
8. Деч Р. Нелинейные преобразования случайных процессов. Пер с англ. Изд-во «Советское радио», 1965.
9. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, рядов и производственных Физматгиз, 1962
10. Macdonald D. K. C. Some statistical properties of random noise. Proc Camb Phil Soc, 1949, v. 45
11. Price R. A note on the envelope and phase-modulated components of narrow-band gaussian noise. Trans IRE, 1955, IT-1, № 2
12. Черняк Ю. Б. Взаимная корреляция напряжений шумов на выходе усилителей с перекрывающимися частотными характеристиками. «Радиотехника и электроника», 1960, № 4
13. Sierpinski D. Noise output of balanced frequency discriminator. Proc IRE, 1958, № 3
14. Тихонов В. И. Среднее число выбросов частоты и фазы. «Радиотехника и электроника», 1962, № 6
15. Теория передачи электрических сигналов при наличии помех. Пер. с англ. Сборник статей под редакцией Н. А. Железнова. Изд-во иностранной литературы, 1953.
16. Price S. O. Statistical properties of a sine wave plus random noise. BSTJ, 1948, № 1
17. Жуков В. П. Плотность вероятности производной фазы суммы синусоидального сигнала и гауссова шума «Радиотехника и электроника», 1962, № 7
18. Тихонов В. И., Горяинов В. Т. Детектирование случайных сигналов. «Радиотехника», 1966, № 1
19. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи, т. 1. Пер. с англ. Изд-во «Советское радио», 1961
20. Leipnik R. First and second order distributions of a sine wave of random phase plus gaussian noise Zeitschrift für angew math und physik, 1960, v. 11, f. 2
21. Moshe Z. Second-order properties of the pre-envelope and envelope processes. Trans. IRE, 1960, IT-6, № 5
22. Пороговые сигналы. Пер. с англ., под редакцией А. П. Сиверса. Изд-во «Советское радио», 1952.
23. Левин Б. Р. Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике Изд-во «Советское радио», 1960
24. Бениет У. Р. Основные понятия и методы теории шумов в радиотехнике. Пер. с англ. Изд-во «Советское радио», 1957.
25. Salz J., Stein S. Distribution of instantaneous frequency for signal plus noise Trans IEEE, 1964, IT-10, № 4
26. Beckmann P. Deviations from the rayleigh distribution for a small and a random number of interfering waves «Práge ústavu radiotechn. a elektron», 1962, № 25
27. Вранко L. Probability density function of the envelope of a sine wave superimposed on a narrow-band gaussian noise for the coherent detection «Glasnik mat — fiz i astron», 1962, № 3—4

## Глава 8

### ВОЗДЕЙСТВИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ НА НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНЕРЦИОННЫЕ УСТРОЙСТВА

#### § 1. О МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

На примерах, которые будут рассмотрены в следующих параграфах, мы убедимся, что поведение ряда радиотехнических устройств при наличии случайного воздействия  $\xi(t)$  описывается нелинейным дифференциальным уравнением вида (3.20.18):

$$\eta = f(\eta) + g(\eta, t, \xi(t)). \quad (8.1.1)$$

где  $f$  и  $g$  — некоторые известные детерминированные функции;  $\eta(t)$  — интересующий нас процесс, протекающий в системе.

Вид функций  $f$  и  $g$  определяется параметрами системы, которые считаются заданными.

Дифференциальное уравнение, содержащее случайные функции времени, часто называют стохастическим. Если функции  $f$  и  $g$  нелинейны относительно  $\eta$ , то (8.1.1) есть стохастическое нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Очевидно, что при случайном воздействии  $\xi(t)$  интересующий нас процесс  $\eta(t)$  будет иметь также случайный характер. Предполагая известными характеристики случайного воздействия  $\xi(t)$  и заданными функциями  $f$  и  $g$ , нужно найти статистические характеристики процесса  $\eta(t)$ . Решение этой задачи связано с решением дифференциального уравнения (8.1.1).

Метод решения уравнения (8.1.1) зависит от интенсивности (величины) случайного воздействия  $\xi(t)$  и отношения его времени корреляции  $\tau_k$  к характерной постоянной времени системы  $\tau_c$ . При этом, говоря о величине случайного воздействия, следует иметь в виду не фактическую величину самой случайной функции  $\xi(t)$  (например, величину ее дисперсии), а вызываемый ею в системе эффект (флюктуационный разброс).

В зависимости от этих двух факторов можно указать следующие частные случаи и соответствующие методы их рассмотрения.

**1. Случайное воздействие малой интенсивности.** В данном случае, независимо от соотношения  $\tau_k$  и  $\tau_c$ , применим метод линеаризации. Он заключается в том, что основное уравнение (8.1.1) линеаризуется относительно малых флюктуационных отклонений от невозмущенных значений и делается пренебрежение нелинейными членами, содержащими эти флюктуационные отклонения. Процедура применения этого метода будет проиллюстрирована на конкретном примере автогенератора в § 2.

Метод линеаризации позволяет сравнительно просто вычислить корреляционную функцию процесса  $\eta(t)$ . Однако при ненормальных возмущениях  $\xi(t)$  весьма трудно найти даже одномерную плотность вероятности для  $\eta(t)$  [см. § 6 гл. 6].

**2. Случайное воздействие большой интенсивности.** Здесь нельзя указать единого и универсального метода решения; выбор метода зависит от соотношения  $\tau_k$  и  $\tau_c$ .

а) Если  $\tau_c \gg \tau_k$ , то применим аппарат марковских процессов и, в частности, уравнение Фоккера — Планка [см. (3.20.11)]. Рассматриваемый случай характерен для многих устройств автоматики и измерительной техники.

При решении практических задач методом уравнения Фоккера — Планка встречаются трудности в двух случаях: 1) когда в правую часть дифференциального уравнения (8.1.1) аддитивно и линейно входит производная от случайной функции  $\xi(t)$ ; 2) когда функция  $g$  на интересующем нас интервале изменения  $\xi(t)$  является разрывной.

В § 3 этим методом рассмотрен один пример. Там же указан возможный путь решения, когда в правую часть (8.1.1) входит не сама случайная функция  $\xi(t)$ , а ее производная  $\dot{\xi}(t)$ .

Наиболее характерным для данного метода является то, что даже в существенно нелинейных задачах он позволяет находить одномерные стационарные плотности вероятности, а также решать задачи, связанные с достижением границ. Однако отыскание корреляционной функции оказывается очень сложным делом.

б) При  $\tau_k \gg \tau_c$  можно ограничиться рассмотрением в квазистатическом приближении. Оно характеризуется тем, что в первом приближении делается пренебрежение временной производной в уравнении (8.1.1), после чего задача сводится к нелинейному безынерционному преобразованию  $f(\eta) = g(\eta, t, \dot{\xi}(t))$ . Примеры на применение этого метода рассматриваются в § 5, 6.

в) Случай промежуточных времен корреляции ( $\tau_k \approx \tau_c$ ) является наиболее сложным и в дальнейшем не рассматривается [1—4].

Укажем, что в теории автоматического регулирования при анализе действия случайных возмущений на нелинейные системы применяют метод статистической линеаризации [5, 6, 7, 8], который здесь не приводится. Недостатки этого метода и его сравнение с прямым методом (см. § 6 гл. 5) даны в работе [9], а результаты неполного сравнения с методом марковских процессов приведены в [10].

## § 2. МЕТОД ЛИНЕАРИЗАЦИИ. ФЛУКТУАЦИИ КОЛЕБАНИЙ АВТОГЕНЕРАТОРА

Для многих радиофизических задач представляет практический интерес вопрос о поведении автогенератора с учетом собственных флюктуаций (шумы ламп и сопротивлений потерь) и внешних случайных воздействий (колебания температуры окружающей среды, случайные колебания напряжения источников питания, вибрации и т. д.).

Флюктуации амплитуды и частоты, обусловленные только собственными шумами автогенератора, принято называть естественными флюктуациями. Эти флюктуации принципиально неустранимы и определяют тот предел повышения стабильности частоты и амплитуды автогенератора, который не может быть превзойден.

Флюктуации амплитуды и частоты, обусловленные внешними случайными воздействиями, называются техническими флюктуациями. Эти флюктуации в принципе можно устранить мерами параметрической стабилизации (термостатирование, гашение вибраций и т. д.) и стабилизации питающих напряжений.

Влияние собственных флюктуаций на процессы в автогенераторе подробно рассмотрено в ряде работ [11—20]. Исследование действия внешних помех на автогенератор и его модуляции шумом посвящены работы [21—24].

Несмотря на то, что в реальных условиях технические нестабильности значительно превышают естественные, ограничимся здесь рассмотрением влияния собственных флюктуаций на работу автогенератора, поскольку они представляют принципиальный интерес.

В дальнейшем будет дано обоснование применимости метода линеаризации, вычислены статистические характеристики амплитуды и фазы, найден энергетический спектр колебания и приведены некоторые количественные оценки.

**1. Уравнение генератора.** Рассмотрим ламповый генератор гармонических колебаний с контуром в цепи анода лампы (рис. 8.1). Нетрудно убедиться, что дифференциальное уравнение генератора для тока  $I$ , протекающего через индуктивную ветвь, имеет вид

$$I + \omega_0^2 RCI + \omega_0^2 I = \omega_0^2 J_a, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad (8.2.1)$$

где точками сверху обозначены производные по времени.

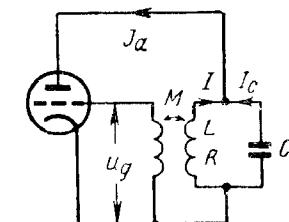


Рис. 8.1. Упрощенная схема автогенератора.

Представим анодный ток лампы  $J_a$  в виде двух составляющих регулярно изменяющейся  $I_a(t)$  и флуктуационной  $i(t)$ , учитывающей дробовый шум анодного тока:

$$J_a = \langle J_a \rangle + i(t) = I_a(t) + i(t). \quad (8.2.2)$$

Для упрощения формул будем считать, что сеточные токи отсутствуют и можно пренебречь анодной реакцией. Тогда

$$I_a = f(u_g). \quad (8.2.3)$$

Без учета постоянной составляющей сеточного напряжения и постоянной составляющей анодного тока (которая протекает через индуктивность), характеристику лампы на некотором участке можно аппроксимировать кубической параболой

$$I_a = Su_g - \frac{\gamma}{3} u_g^3. \quad (8.2.4)$$

Учитывая, что

$$u_g = M\dot{I},$$

где  $M$  — коэффициент взаимоиндукции анодной и сеточной катушек, вместо (8.2.4) можем написать

$$I_a = SMI - \frac{\gamma}{3} M^3 I^3. \quad (8.2.5)$$

Уравнение (8.2.1) с учетом (8.2.2) и (8.2.5) принимает вид

$$I + \omega_0^2 RCI + \omega_0^2 I = \omega_0^2 \left[ SMI - \frac{\gamma}{3} M^3 I^3 \right] + \omega_0^2 i(t)$$

или

$$I + \omega_0^2 I = \omega_0^2 I \left[ (SM - RC) - \frac{\gamma}{3} M^3 I^2 \right] + \omega_0^2 i(t). \quad (8.2.6)$$

Введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= 2 \sqrt{\frac{SM - RC}{M^3 \omega_0^2 \gamma}} = 2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{M^3 \omega_0^3 \gamma}}, \quad \varepsilon = \omega_0 (SM - RC), \\ \frac{I}{A_0} &= x, \quad \xi(t) = \frac{\omega_0^2}{A_0} i(t). \end{aligned} \right\} (8.2.7)$$

Безразмерный параметр  $\varepsilon$  есть инкремент контура. Величина  $A_0$ , как выяснится в дальнейшем, представляет собой стационарную амплитуду автоколебаний тока в контуре.

Уравнение (8.2.6) в новых обозначениях принимает вид

$$\dot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon \omega_0 x \left( 1 - \frac{1}{3\varepsilon^2} x^2 \right) + \xi(t). \quad (8.2.8)$$

Произведем ориентировочную оценку величины  $\varepsilon$ . Пусть  $S = 5 \text{ ма/в}$ ,  $M = 0,2 \text{ мкГн}$ ,  $f_0 = 10 \text{ Мгц}$ ,  $R = 1 \text{ ом}$ ,  $C = 100 \text{ пФ}$ . Тогда  $\varepsilon \approx 6 \cdot 10^{-2}$ .

Нелинейное дифференциальное уравнение (8.2.8) без случайной функции  $\xi(t)$  хорошо изучено в радиотехнике и теории колебаний. В стационарном состоянии  $x(t)$  является гармонической функцией.

Перейдем к решению стохастического нелинейного дифференциального уравнения (8.2.8).

**2. Решение уравнения генератора.** Запишем уравнение (8.2.8) так:

$$x + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, x, t). \quad (8.2.9)$$

К такой форме приводится не только уравнение лампового генератора, но и уравнения многих других автоколебательных систем (магнетрон, молекулярный генератор и др.).

Для изучения решения этого уравнения целесообразно перейти от одного уравнения второго порядка к двум уравнениям первого порядка, описывающим поведение амплитуды и фазы. При определении понятий амплитуды и фазы колебаний, хотя и близких, но не являющихся строго гармоническими, имеется некоторый произвол. Здесь уместно напомнить о неоднозначности определения огибающей и фазы квазигармонических флуктуаций (см. § 1 гл. 7).

Определим амплитуду и фазу колебаний соотношениями

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad \dot{x} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (8.2.10)$$

Отсюда получаем

$$A^2 = \left( x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega_0^2} \right), \quad (8.2.11)$$

$$\varphi = -\arctg \frac{\dot{x}}{\omega_0 x} - \omega_0 t. \quad (8.2.12)$$

Дифференцируя по времени (8.2.11), получим

$$2AA = 2x\dot{x} + 2\frac{\dot{x}\ddot{x}}{\omega_0^2}$$

или

$$A = \frac{x}{\omega_0^2 A} (\omega_0^2 x + \dot{x}).$$

Согласно соотношению (8.2.9) последнее уравнение можно записать

$$A = \frac{x}{\omega_0^2 A} \varepsilon f(x, x, t). \quad (8.2.13)$$

Аналогично, путем дифференцирования обеих частей уравнения (8.2.12) с учетом (8.2.9) получим

$$\Phi = -\frac{x}{\omega_0 A^2} \varepsilon f(x, \dot{x}, t). \quad (8.2.14)$$

Подставив в уравнения (8.2.13) и (8.2.14)

$$\varepsilon f(x, \dot{x}, t) = \varepsilon \omega_0 x \left( 1 - \frac{4}{3\omega_0^2} x^2 \right) + \xi(t),$$

можем написать

$$A = \frac{\varepsilon}{\omega_0 A} \left( x^2 - \frac{4}{3\omega_0^2} x^4 \right) + \frac{x}{\omega_0^2 A} \xi(t),$$

$$\Phi = -\frac{\varepsilon}{A^2} \left( 1 - \frac{4}{3\omega_0^2} x^2 \right) x \dot{x} - \frac{x}{\omega_0 A^2} \xi(t).$$

В правых частях этих уравнений нужно выразить  $x$  и  $\dot{x}$  через  $A$  и  $\Phi$ . Напомним, что

$$x = A \cos \psi, \quad \dot{x} = -\omega_0 A \sin \psi, \quad \psi = \omega_0 t + \Phi.$$

Подставив эти выражения в уравнения для  $A$  и  $\Phi$  и принимая во внимание соотношения:

$$x^2 = \omega_0^2 A^2 \sin^2 \psi = \frac{1}{2} \omega_0^2 A^2 (1 - \cos 2\psi),$$

$$x \dot{x} = -\omega_0 A^2 \sin \psi \cos \psi = -\frac{1}{2} \omega_0 A^2 \sin 2\psi,$$

$$x \dot{x}^3 = -\frac{1}{4} \omega_0^3 A^4 \left( \sin 2\psi - \frac{1}{2} \sin 4\psi \right),$$

$$x^4 = \omega_0^4 A^4 \sin^4 \psi = \frac{1}{8} \omega_0^4 A^4 (\cos 4\psi - 4\cos 2\psi + 3),$$

получим

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\varepsilon}{\omega_0 A} \left[ \frac{\omega_0^2 A^2}{2} (1 - \cos 2\psi) - \frac{1}{6} \omega_0^2 A^4 (\cos 4\psi - 4\cos 2\psi + 3) \right] - \frac{\omega_0}{A_0} i(t) \sin \psi, \\ \Phi &= -\frac{\varepsilon}{\omega_0 A} \left[ -\frac{\omega_0 A^2}{2} \sin 2\psi + \frac{1}{3} \omega_0^2 A^4 \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( \sin 2\psi - \frac{1}{2} \sin 4\psi \right) \right] - \frac{\omega_0}{AA_0} i(t) \cos \psi. \end{aligned} \right\} \quad (8.2.15)$$

Для дальнейших упрощений примем во внимание следующее обстоятельство. В контуре, настроенном на частоту  $\omega_0$  и имеющем

малое затухание, происходит эффективная фильтрация высших гармоник, и они не могут оказывать существенного влияния на процессы в генераторе. Поэтому в уравнениях (8.2.15) члены, имеющие при себе множителями  $\sin 2\psi$ ,  $\cos 2\psi$ ,  $\sin 4\psi$ ,  $\cos 4\psi$ , можно в первом приближении опустить. Тогда получим

$$A = \frac{\varepsilon \omega_0 A}{2} (1 - A^2) - \frac{\omega_0}{A_0} i(t) \sin \psi, \quad (8.2.16)$$

$$\Phi = -\frac{\omega_0}{AA_0} i(t) \cos \psi. \quad (8.2.17)$$

Из курса радиотехники известно, что влияние неучтенных нами высших гармоник сводится к некоторой поправке на частоту, однако эта поправка является регулярной. Поэтому несмотря на то, что поправка на частоту, обусловленная высшими гармониками, превышает флуктуации частоты, следует считать, что сделанное упрощение оправдано.

Уравнения (8.2.16) и (8.2.17) принято называть укороченными уравнениями лампового генератора. Следует отметить, что они могут быть получены из уравнений (8.2.15) не только путем «отбрасывания» членов с высшими частотами, но и путем усреднения правых частей по времени за период  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ . При этом усреднению должны подвергаться лишь регулярные члены.

Из уравнений (8.2.16) и (8.2.17) легко находим стационарный режим работы генератора в отсутствие флуктуаций. Так, полагая в уравнении (8.2.16)  $A = 0$ ,  $i(t) = 0$ , находим  $A_c = 1$ .

Аналогично, полагая в уравнении (8.2.17)  $i(t) = 0$ , получим  $\dot{\Phi} = 0$ ,  $\Phi_c = \Phi_0 = \text{const}$ . При этом никакому значению начальной фазы нельзя отдать предпочтение. Поэтому ее нужно считать случайной величиной, равномерно распределенной на интервале  $(-\pi, \pi)$ .

Таким образом, в стационарном режиме без учета флуктуаций ток в контуре определяется формулой

$$I = A_0 x = A_0 A_c \cos(\omega_0 t + \Phi_0) = A_0 \cos(\omega_0 t + \Phi_0). \quad (8.2.18)$$

Видно, что введенная ранее в рассмотрение величина  $A_0$  действительно представляет собой установившееся значение амплитуды тока в контуре.

**3. Вычисление флуктуаций фазы и амплитуды.** Переядем теперь к рассмотрению процессов в генераторе при наличии флуктуаций анодного тока лампы. Оценку получающихся при этом флуктуаций частоты и амплитуды можно получить, применив метод линеаризации уравнений (8.2.16) и (8.2.17) в окрестности стационарного состояния. Применение метода линеаризации оправдано тем, что флуктуации анодного тока предполагаются малыми. Поэтому они вызывают небольшие отклонения амплитуды  $A$  и частоты  $\Phi$  (а не фазы!) от их стационарных значений.

Разумеется, что линеаризация уравнений относительно флуктуационных поправок не исключает необходимости предшествующего нелинейного анализа процессов в автогенераторе, так как без него нельзя получить никаких сведений о стационарном режиме генератора, в окрестности которого и осуществляется линеаризация.

Обозначим флуктуации амплитуды и фазы, обусловленные шумом, через

$$a = A - A_c, \quad \theta = \varphi - \varphi_0. \quad (8.2.19)$$

По предположению  $a$  и  $\theta$  представляют малые флуктуационные отклонения.

Подставим эти выражения в исходные уравнения (8.2.16) и (8.2.17) и удержим в них лишь те члены, малость которых относительно  $a$  не превосходит первого порядка. При этом флуктуационный ток  $i(t)$  следует считать величиной первого порядка малости, а величины  $A$  и  $\varphi$ , оставшиеся в уравнениях в виде коэффициентов, следует заменить их стационарными значениями ( $A_c = 1$ ,  $\varphi_c = \varphi_0$ ). В результате выполнения указанных преобразований получим

$$a + \varepsilon\omega_0 a = -\frac{\omega_0}{A_0} i(t) \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (8.2.20)$$

$$\theta = -\frac{\omega_0}{A} i(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (8.2.21)$$

Так как описанная процедура линеаризации совпадает с задачей отыскания дифференциалов для  $A$  и  $\varphi$ , то эти уравнения можно получить из уравнений (8.2.16) и (8.2.17) путем дифференцирования в окрестности стационарного состояния.

Стационарное решение линейного стохастического уравнения (8.2.20) имеет вид

$$a(t) = -\frac{\omega_0}{A_0} \int_{-\infty}^t e^{-\varepsilon\omega_0(t-x)} i(x) \sin(\omega_0 x + \varphi_0) dx. \quad (8.2.22)$$

Из уравнения (8.2.21) находим выражение для случайного приращения фазы за некоторое время  $T$ :

$$\Delta\varphi(T) = \varphi(t_0 + T) - \varphi(t_0) = -\frac{\omega_0}{A_0} \int_0^T i(t_0 + y) \cos[\omega_0(t_0 + y) + \varphi_0] dy. \quad (8.2.23)$$

Флуктуационные поправки к амплитуде и фазе получаются из нормальных флуктуаций  $i(t)$  путем линейного преобразования. Поэтому  $a(t)$  и  $\Delta\varphi(T)$  представляют нормальные процессы, причем эти процессы статистически независимы.

Чтобы убедиться в этом, найдем функцию взаимной корреляции между ними. Из выражений (8.2.22) и (8.2.23) получаем

$$\langle a(t) \rangle = 0, \quad \langle \Delta\varphi(T) \rangle = 0, \quad (8.2.24)$$

т. е. средние значения приращения фазы и флуктуационной поправки к амплитуде равны нулю. Поэтому для функции взаимной корреляции можем написать

$$k_{A\varphi} = \langle a(t) \Delta\varphi(T) \rangle = \left( \frac{\omega_0}{A_0} \right)^2 \int_{-\infty}^t \int_0^T e^{-\varepsilon\omega_0(t-x)} \langle i(x) i(t_0 + y) \times \sin(\omega_0 x + \varphi_0) \cos(\omega_0 t_0 + \omega_0 y + \varphi_0) \rangle dxdy.$$

Но

$$\begin{aligned} & \langle i(x) i(t_0 + y) \sin(\omega_0 x + \varphi_0) \cos(\omega_0 t_0 + \omega_0 y + \varphi_0) \rangle = \\ & = \frac{1}{2} \langle i(x) i(t_0 + y) \rangle \sin \omega_0(x - t_0 - y) + \\ & + \frac{1}{2} \langle i(x) i(t_0 + y) \sin[\omega_0(t_0 + x + y) + 2\varphi_0] \rangle. \end{aligned}$$

Считая шум  $i(t)$  стационарным и статистически независимым от начальной фазы колебаний  $\varphi_0$ , во втором слагаемом усреднение нужно производить раздельно по шуму и случайной начальной фазе  $\varphi_0$ . В результате усреднения по  $\varphi_0$  получим, что второе слагаемое равно нулю<sup>\*</sup>.

Будем рассматривать флуктуации анодного тока лампы как белый шум с функцией корреляции [см. формулу (3.16.8)]

$$\langle i(t_1) i(t_2) \rangle = eI_s \delta(t_2 - t_1), \quad (8.2.25)$$

где  $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$  к — заряд электрона;

$I_s$  — эквивалентный ток диода в режиме насыщения.

В результате интегрирования с дельта-функцией согласно формуле (П.4) получим

$$k_{A\varphi} = \left( \frac{\omega_0}{A_0} \right)^2 eI_s \int_{-\infty}^t \int_0^t e^{-\varepsilon\omega_0(t-x)} \sin \omega_0(x - t_0 - y) \delta(x - t_0 - y) dxdy = 0. \quad (8.2.26)$$

Таким образом, флуктуации амплитуды и фазы колебаний генератора являются нормальными и статистически независимыми.

\* Вообще говоря, флуктуационный ток лампы автогенератора периодически нестационарен с периодом  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  [24].

Вычислим дисперсию приращения фазы за некоторое время  $T$ . Так как среднее значение приращения фазы равно нулю, то для дисперсии из формулы (8.2.23) имеем

$$\sigma_{\Delta\varphi}^2 = \left(\frac{\omega_0}{A_0}\right)^2 \int_0^T \int_0^T \langle i(t_0 + x)i(t_0 + y) \rangle \langle \cos[\omega_0(t_0 + x) + \varphi_0] \times \cos[\omega_0(t_0 + y) + \varphi_0] \rangle dx dy.$$

Подставив сюда выражения для функций корреляции из (8.2.25) и (3.13.3), получим окончательную формулу, аналогичную по характеру зависимости от  $T$  формуле (6.3.5):

$$\sigma_{\Delta\varphi}^2 = DT, \quad D = \frac{eI_s\omega_0^2}{2A_0^2}. \quad (8.2.27)$$

Видно, что дисперсия приращения фазы растет пропорционально времени наблюдения. Следовательно, длительная «привязка» текущей фазы к начальной из-за наличия флюктуаций невозможна.

Флюктуации фазы вызывают случайный разброс частоты относительно ее номинального значения, причем практически нельзя предложить какие-либо меры для устранения этого эффекта без существенного изменения принципа работы самого генератора (например, переход от ламповых генераторов к молекулярным). Позже будет указана количественная мера естественной нестабильности частоты генератора.

Оценим среднеквадратичное значение приращения фазы за время одного периода  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ . Из формулы (8.2.27) имеем

$$\sigma_{\Delta\varphi} = \pi \frac{\sqrt{2eI_s t_0}}{A_0}. \quad (8.2.28)$$

Пусть  $I_s = 1 \text{ ма}$ ,  $A_0 = 100 \text{ ма}$ ,  $f_0 = 10 \text{ МГц}$ . Тогда  $\sigma_{\Delta\varphi} \approx 10^{-6} \pi$ .

Выполнив вычисления, получим следующее выражение для функции корреляции амплитудных флюктуаций:

$$k_A(\tau) = \langle a(t)a(t+\tau) \rangle = \sigma_A^2 e^{-\varepsilon\omega_0|\tau|}, \quad \sigma_A^2 = \frac{eI_s\omega_0}{4\varepsilon A_0}. \quad (8.2.29)$$

При  $I_s = 1 \text{ ма}$ ,  $A_0 = 100 \text{ ма}$ ,  $\varepsilon = 0,06$ ,  $f = 10 \text{ МГц}$  получим  $\sigma_A \approx 2 \cdot 10^{-6}$ .

Убеждаемся, что условие применимости метода линеаризации

$$\sigma_A \ll A_c \quad (8.2.30)$$

в данном случае выполняется.

**4. Спектр колебания. Нестабильность частоты.** Найдем сначала функцию корреляции колебания генератора. С учетом фазовых и

амплитудных флюктуаций (8.2.19) колебание генератора (8.2.10) будет квазигармоническим и его можно записать в следующем виде:

$$x(t) = [1 + a(t)] \cos(\omega_0 t + \theta(t) + \varphi_0), \quad (8.2.31)$$

так как

$$A(t) = A_c + a(t) = 1 + a(t), \quad \varphi(t) = \theta(t) + \varphi_0.$$

Поэтому для функции корреляции имеем выражение

$$k_x(\tau) = \langle [1 + a(t)][1 + a(t+\tau)] \cos(\omega_0 t + \theta(t) + \varphi_0) \times \cos(\omega_0 t + \omega_0\tau + \theta(t+\tau) + \varphi_0) \rangle.$$

Учитывая, что флюктуации амплитуды и фазы являются независимыми, получим

$$k_x(\tau) = \frac{1}{2} [1 + k_A(\tau)] \langle \cos(\omega_0\tau + \Delta\varphi(\tau)) \rangle, \\ \Delta\varphi(\tau) = \theta(t+\tau) - \theta(t). \quad (8.2.32)$$

Формулу (8.2.32) можно записать иначе:

$$k_x(\tau) = \frac{1}{2} [1 + k_A(\tau)] \operatorname{Re} \langle e^{j[\omega_0\tau + \Delta\varphi(\tau)]} \rangle = \\ = \frac{1}{2} [1 + k_A(\tau)] \operatorname{Re} [e^{j\omega_0\tau} \langle e^{j\Delta\varphi(\tau)} \rangle]. \quad (8.2.33)$$

Но  $\langle \exp[j\Delta\varphi(\tau)] \rangle$  есть значение характеристической функции  $\langle \exp[ju\Delta\varphi(\tau)] \rangle$  случайной величины  $\Delta\varphi(\tau)$  в точке  $u = 1$ . Для нормальной случайной величины  $\Delta\varphi(\tau)$  с нулевым средним значением и известной дисперсией (8.2.27) по формуле (3.15.18) имеем

$$\langle \exp[j\Delta\varphi(\tau)] \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} D |\tau|\right).$$

При этом из выражения (8.2.33) получаем окончательную формулу

$$k_x(\tau) = \frac{1}{2} [1 + k_A(\tau)] e^{-\frac{1}{2} D |\tau|} \cos \omega_0 \tau = \\ = \frac{1}{2} (1 + \sigma_A^2 e^{-\varepsilon\omega_0|\tau|}) e^{-\frac{1}{2} D |\tau|} \cos \omega_0 \tau. \quad (8.2.34)$$

Функция корреляции для тока в индуктивной ветви контура, очевидно, равна

$$k_I(\tau) = \frac{1}{2} A_0^2 \left( e^{-\frac{1}{2} D |\tau|} + \sigma_A^2 e^{-\left(\varepsilon\omega_0 + \frac{1}{2} D\right) |\tau|} \right) \cos \omega_0 \tau. \quad (8.2.35)$$

Зная функцию корреляции, находим односторонний энергетический спектр сигнала:

$$S(\omega) = 4 \int_0^\infty k_I(\tau) \cos \omega \tau d\tau = A_0^2 \int_0^\infty \left( e^{-\frac{1}{2}D|\tau|} + \sigma_A^2 e^{-(\varepsilon\omega_0 + \frac{1}{2}D)|\tau|} \right) \times \\ \times \cos(\omega - \omega_0)\tau d\tau = A_0^2 \left\{ \frac{\frac{1}{2}D}{\frac{1}{4}D^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \right. \\ \left. + \sigma_A^2 \frac{\varepsilon\omega_0 + \frac{1}{2}D}{(\varepsilon\omega_0 + \frac{1}{2}D)^2 + (\omega - \omega_0)^2} \right\}, \quad \omega \geq 0. \quad (8.2.36)$$

Произведем оценку отдельных величин. Для приведенных выше данных найдем:  $\varepsilon\omega_0 \approx 4 \cdot 10^6$ ,  $D \approx 6 \cdot 10^{-5}$ ,  $\sigma_A^2 \approx 4 \cdot 10^{-12}$ . Если в формуле (8.2.36) пренебречь величиной  $D$  по сравнению с  $\varepsilon\omega_0$ , то получим

$$S(\omega) = A_0^2 \left\{ \frac{\frac{1}{2}D}{\frac{1}{4}D^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \sigma_A^2 \frac{\varepsilon\omega_0}{(\varepsilon\omega_0)^2 + (\omega - \omega_0)^2} \right\}, \quad \omega \geq 0. \quad (8.2.37)$$

Рассмотрим более подробно характер спектра. Если флюктуации отсутствуют ( $i(t) \equiv 0$ ), то  $\sigma_A = 0$  и  $D = 0$ . Полагая в подынтегральном выражении формулы (8.2.36)  $\sigma_A = 0$ ,  $D = 0$  и воспользовавшись затем формулами (П. 9) и (П. 11), получим  $S(f) = \frac{1}{2}A_0^2\delta(f - f_0)$ . В данном случае генератор генерирует гармоническое колебание (8.2.18), энергетический спектр которого представляется в виде дискретной линии высотой  $A_0^2/2$ , расположенной при частоте  $f_0$ .

Энергетический спектр квазигармонического колебания, получающегося при наличии флюктуаций, симметричен относительно частоты  $\omega_0$ , где он имеет максимум. Спектр состоит из двух слагаемых, первое из которых обусловлено флюктуациями фазы, а второе — флюктуациями амплитуды.

Из формулы (8.2.35) видно, что дисперсия или полная мощность, содержащаяся в первом слагаемом, равна по-прежнему  $A_0^2/2$  и значительно превосходит мощность  $(A_0\sigma_A)^2/2$ , заключенную во втором слагаемом. Максимальная высота первого слагаемого равна  $S_1(\omega) = 2A_0^2/D$  и значительно превышает высоту второго слагаемого, равную  $S_2(\omega) = (A_0\sigma_A)^2/\varepsilon\omega_0$ . Полная ширина спектра первого слагаемого (на уровне 0,5 от максимального значения) равна  $\Delta\omega_1 = D$ . Она значительно меньше ширины спектра второго слагаемого  $\Delta\omega_2 = 2\varepsilon\omega_0$ .

При рассмотрении характера энергетического спектра квазигармонического колебания второе слагаемое в формуле (8.2.37), как содержащее незначительную мощность и более «широкополосное», можно не учитывать. При этом для спектра получим простую формулу

$$S(\omega) = \frac{2DA_0^2}{D^2 + 4(\omega - \omega_0)^2}, \quad \omega > 0. \quad (8.2.38)$$

Итак, энергетический спектр колебания вследствие флюктуаций фазы превращается из дискретной линии в сплошной спектр, имеющий очень малую ширину  $\Delta\omega = \Delta\omega_1 = D$ .

Естественную нестабильность частоты генератора можно количественно характеризовать относительной шириной энергетического спектра

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{D}{\omega_0} = \frac{eI_s \omega_0}{2A_0^2}. \quad (8.2.39)$$

Для указанных ранее величин естественная нестабильность частоты равна  $\Delta\omega/\omega_0 \approx 10^{-12}$ .

### § 3. МЕТОД МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФАЗЫ АВТОКОЛЕБАНИЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫМ КОНТУРОМ

Для иллюстрации методики применения аппарата марковских процессов рассмотрим следующий практически важный пример.

При анализе работы синхронизируемого генератора или схемы фазовой автоподстройки частоты, когда синхронизирующий сигнал (с флюктуирующей фазой) сопровождается аддитивным флюктуационным шумом, часто интересуются статистическими характеристиками фазы синхронизируемого колебания [25]. При некоторых ограничениях, указанных ниже, ответ можно получить из рассмотрения следующей задачи [26].

Пусть на колебательный контур  $LCR$  (рис. 8.2) воздействует сигнал от автогенератора вида (8.2.31)

$$s(t) = A(t) \cos [\omega t + \theta(t)]$$

и аддитивный нормальный белый шум  $n(t)$  с нулевым средним значением и функцией корреляции (3.16.1).

Если ограничиться учетом лишь малых собственных флюктуаций автогенератора, то ввиду малости амплитудных флюктуаций амплитуду сигнала  $s(t)$  можно считать постоянной  $A(t) = A_0$  и рассматривать сигнал

$$s(t) = A_0 \cos [\omega t + \theta(t)], \quad (8.3.1)$$

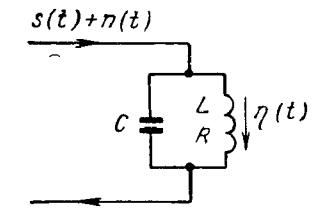


Рис. 8.2. Колебательный контур.

случайная фаза которого определяется уравнением (8.2.21):

$$\theta(t) = -\frac{\omega}{A_0} i(t) \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (8.3.2)$$

Дифференциальное уравнение для тока в индуктивной ветви колебательного контура имеет вид

$$\eta + 2\alpha\eta + \omega_0^2\eta = \omega_0^2[s(t) + n(t)], \quad \left(\alpha = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}\right). \quad (8.3.3)$$

Предположим, что контур обладает большой добротностью и расстройка между частотой сигнала  $\omega$  и резонансной частотой контура  $\omega_0$  мала, т. е.  $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ .

При выполнении этих условий решение уравнения (8.3.3) можно искать в виде квазигармонического колебания

$$\begin{aligned} \eta(t) &= V(t) \cos[\omega t + \psi(t)], \\ \dot{\eta}(t) &= -\omega V(t) \sin[\omega t + \psi(t)]. \end{aligned} \quad (8.3.4)$$

Применяя обычный прием (см. § 2), получим следующие укороченные уравнения для амплитуды и фазы:

$$\left. \begin{aligned} V &= -\alpha V - \frac{\omega A_0}{2} \sin(\psi - \theta) - \omega n(t) \sin(\omega t + \psi), \\ \psi &= \Delta_0 - \frac{\omega A_0}{2V} \cos(\psi - \theta) - \frac{\omega}{V} n(t) \cos(\omega t + \psi), \end{aligned} \right\} \quad (8.3.5)$$

где  $\Delta_0 = \omega - \omega_0$  — начальная расстройка.

Из второго уравнения в отсутствие шума ( $n(t) \equiv 0$ ) легко находим стационарное значение разности фаз, полагая  $\psi = 0$ . Получаем

$$\psi - \theta = \arccos\left(\Delta_0 \frac{2V}{\omega_0 A}\right). \quad (8.3.6)$$

В том частном случае, когда начальная расстройка отсутствует ( $\Delta_0 = 0$ ), имеем  $\psi = \theta - \pi/2$ . Следовательно, в отсутствие внешнего шума при нулевой начальной расстройке среднее значение фазы квазигармонического тока в контуре отличается от среднего значения фазы автоколебаний на  $\pi/2$ . При  $\Delta_0 \neq 0$  из-за реактивных свойств колебательного контура между фазами имеет место расхождение, не равное  $\pi/2$ .

Для отыскания статистических характеристик фазы  $\psi$  перейдем во втором уравнении (8.3.5) от  $\psi$  к новой переменной

$$\varphi = \psi - \theta + \frac{\pi}{2}. \quad (8.3.7)$$

Получим

$$\varphi = \Delta_0 - \frac{\omega A_0}{2V} \sin \varphi - \theta - \frac{\omega}{V} n(t) \cos(\omega t + \psi). \quad (8.3.8)$$

Хотя «амплитуда»  $V(t)$  в этом уравнении является случайной функцией времени, мы заменим ее постоянной величиной  $V_0$  — стационарной амплитудой колебаний, обусловленных только сигналом  $s(t)$ . Полагая в первом из уравнений (8.3.5)  $n(t) \equiv 0$ ,  $\psi - \theta = -\pi/2$ , находим

$$V_0 = \frac{\omega A_0}{2}, \quad \frac{\omega_0 A_0}{2} \ll A_0^2. \quad (8.3.9)$$

Очевидно, что замена  $V(t)$  на  $V_0$  справедлива при условии, что дисперсия шумового тока  $\sigma_\eta^2$ , обусловленного шумом  $n(t)$ , много меньше  $V_0^2$ . Воспользовавшись формулой (6.7.2), получаем условие малости шума  $n(t)$ :

$$\sigma_\eta^2 \ll V_0^2, \quad \frac{\alpha N_0}{2} \ll A_0^2. \quad (8.3.10)$$

Подставив в уравнение (8.3.8) значение  $V$  из (8.3.9), можем окончательно написать

$$\dot{\varphi} = \Delta_0 - \alpha \sin \varphi - \zeta(t). \quad (8.3.11)$$

Здесь

$$\zeta(t) = \frac{\omega_0}{A_0} i(t) \cos(\omega t + \varphi_0) + \frac{2\alpha}{A_0} n(t) \cos(\omega t + \psi) \quad (8.3.12)$$

— случайный процесс с нулевым средним значением; функция корреляции его согласно (3.16.1) и (8.2.25) равна:

$$k(\tau) = \langle \zeta(t) \zeta(t + \tau) \rangle = \frac{1}{A_0^2} \left[ \frac{1}{4} \omega^2 N + \alpha^2 N_0 \right] \delta(\tau), \quad N = 2eI_s. \quad (8.3.13)$$

Уравнение (8.3.11) описывает процессы синхронизации в ламповом генераторе и простейшей схеме фазовой автоподстройки частоты при наличии флюктуационного шума [25]. Разница состоит лишь в том, что в этих двух случаях в правой части уравнения нужно заменить  $\alpha$  на полосу синхронизации  $\Delta$ .

Если интенсивность внешнего шума  $n(t)$  мала, то разность фаз  $\varphi$  будет испытывать малые флюктуации и можно ограничиться рассмотрением линеаризованного уравнения [27]

$$\dot{\varphi} + \alpha \varphi = \Delta_0 - \zeta(t). \quad (8.3.14)$$

Из него нетрудно найти среднее значение разности фаз  $\langle \varphi \rangle = \Delta_0/\alpha$ , а также дисперсию приращения  $\Delta\varphi$  за некоторое время  $T > 0$ :

$$\sigma_{\Delta\varphi}^2 = \frac{1}{A_0^2} \left( N_0 \alpha + \frac{\omega^2 N}{4\alpha} \right) (1 - e^{-\alpha T}). \quad (8.3.15)$$

Если интенсивность шума  $n(t)$  нельзя считать малой, то метод линеаризации неприменим. Однако при сделанных ранее предположениях выполняется условие (3.20.11), т. е. постоянная времени системы  $\tau_c \approx 1/\alpha \gg \tau_k$ , где  $\tau_k$  — время корреляции случайной функции  $\zeta(t)$ . Поэтому статистические характеристики разности фаз  $\varphi$  найдем в результате решения соответствующего уравнения Фоккера — Планка.

Для уравнения (8.3.11) по формулам (3.20.13) найдем

$$\begin{aligned} K_1(\varphi) &= \Delta_0 - \alpha \sin \varphi, \\ K_2(\varphi) = K_2 &= \frac{1}{A_0^2} \left( \alpha^2 N_0 + \frac{\omega^2 N}{4} \right), \quad K'(\varphi) = 0. \end{aligned} \quad (8.3.16)$$

Поэтому уравнение (3.20.12) для стационарного состояния ( $W = 0$ ) принимает вид

$$\frac{d^2 W}{d\varphi^2} - \frac{d}{d\varphi} [(D_0 - D \sin \varphi) W] = 0, \quad (8.3.17)$$

где

$$D_0 = \frac{2\Delta_0}{K_2}, \quad D = \frac{2\alpha}{K_2}. \quad (8.3.18)$$

Общее решение уравнения (8.3.17) можно записать в виде

$$W(\varphi) = C_1 e^{D_0 \varphi + D \cos \varphi} \int_{C_2}^{\varphi} e^{-D_0 \psi - D \cos \psi} d\psi. \quad (8.3.19)$$

Оно содержит две постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$ , которые определяются из двух условий:

- 1) периодичности  $W(\varphi \pm 2\pi) = W(\varphi)$ ;
- 2) нормировки плотности вероятности на каждом периоде  $\int_0^{2\pi} W(\varphi) d\varphi = 1$ .

Если выполнить необходимые вычисления, то получим

$$W(\varphi) = \frac{1}{C} e^{D_0 \varphi + D \cos \varphi} \int_{\varphi}^{\varphi + 2\pi} e^{-D_0 \psi - D \cos \psi} d\psi, \quad C = 4\pi^2 e^{-\tau D_0} |I_{\nu D_0}(D)|^2, \quad (8.3.20)$$

где  $I_{\nu}(z)$  — функция Бесселя мнимого индекса и мнимого аргумента.

При нулевой начальной расстройке ( $\Delta_0 = 0$ ) плотность вероятности для разности фаз определяется выражением

$$W(\varphi) = \frac{1}{2\pi I_0(D)} e^{D \cos \varphi}, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi \quad (8.3.21)$$

и имеет симметричную форму относительно оси ординат (сплошные линии на рис. 8.3).

При больших шумах (малое  $D$ ) плотность вероятности (8.3.21) близка к равномерной

$$W(\varphi) = \frac{1}{2\pi}, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi, \quad (D \rightarrow 0).$$

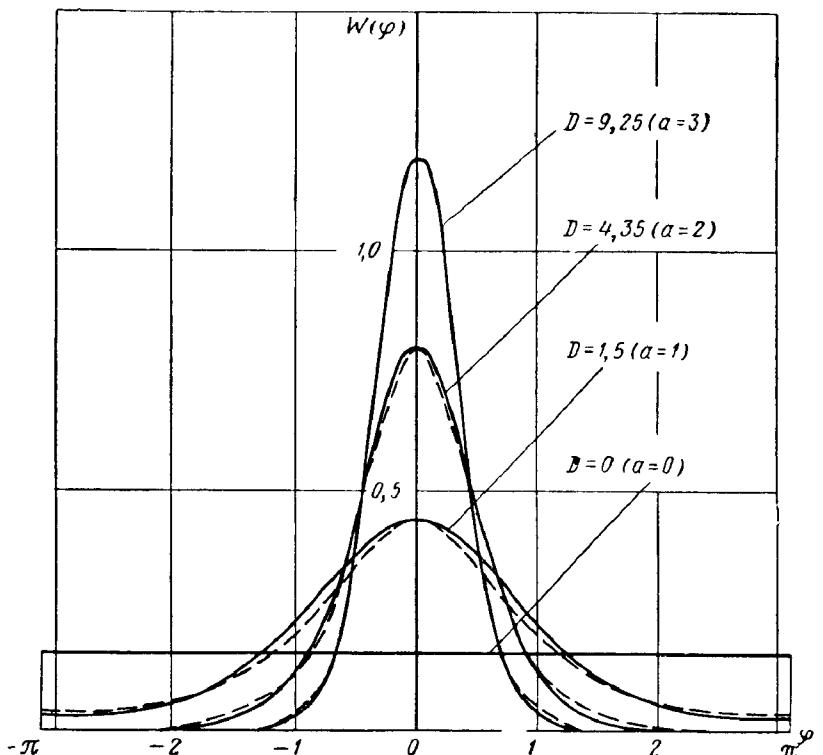


Рис. 8.3. Плотность вероятности разности фаз при нулевой начальной расстройке ( $D_0 = 0$ ).

В другом крайнем случае, когда шум пренебрежимо мал ( $D$  велико), получается дельтообразное распределение

$$W(\varphi) = \delta(\varphi), \quad (D \rightarrow \infty).$$

Разлагая экспоненту в ряд

$$\exp(D \cos \varphi) = I_0(D) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(D) \cos n\varphi$$

и учитывая равномерную сходимость этого ряда относительно  $\varphi$ , получим формулу для дисперсии

$$\sigma^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^2 W(\varphi) d\varphi = \frac{\pi^2}{3} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \frac{I_n(D)}{I_0(D)}.$$

Отметим, кстати, что при надлежащем подборе параметров плотность вероятности (8.3.21) почти совпадает с плотностью вероятности (7.6.1). Это наглядно видно из рис. 8.3, на котором пунктирными

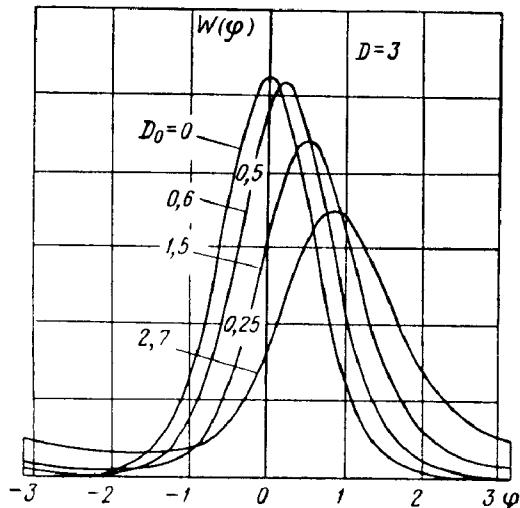


Рис. 8.4. Плотности вероятности разности фаз при  $D=3$  и различных начальных расстройках.

линиями изображены плотности вероятности (7.6.1) для нескольких значений  $a$ . При больших отношениях сигнал/шум ( $a \geq 3$ ) приближенно можно полагать  $D \approx a^2$ . Во многих случаях предпочтительнее оперировать не с плотностью вероятности (7.6.1), а с плотностью вероятности (8.3.21) ввиду простоты ее аналитического выражения.

Наличие начальной расстройки ( $D_0 \neq 0$ ) приводит к асимметрии плотности вероятности. Это видно из рис. 8.4, на котором изображены плотности вероятности  $W(\varphi)$ , соответствующие  $D=3$  и некоторым значениям параметра  $D_0$ . Не касаясь здесь подробного анализа этих кривых [28], укажем, что среднее значение и дисперсия разности фаз  $\varphi$  растут с увеличением начальной расстройки, причем с приближением относительной расстройки  $D_0/D$  к единице рост среднего значения замедляется, а дисперсии, наоборот, убыстряется.

Можно показать [3, 29], что среднее значение производной от разности фаз равно:

$$\langle \varphi \rangle - \langle \Delta_0 - a \sin \varphi \rangle = \int_0^{2\pi} (\Delta_0 - a \sin \varphi) W(\varphi) d\varphi = \frac{\Delta_0 \sin \pi D_0}{\pi D_0 |I_{\pi D_0}(D)|^2}. \quad (8.3.22)$$

Графики этой зависимости для пяти значений  $D$  представлены на рис. 8.5 [29].

Следовательно, среднее значение разности между частотой сигнала и колебаниями в контуре отлично от нуля. Этот результат объясняется тем, что в рассматриваемой схеме происходит так назы-

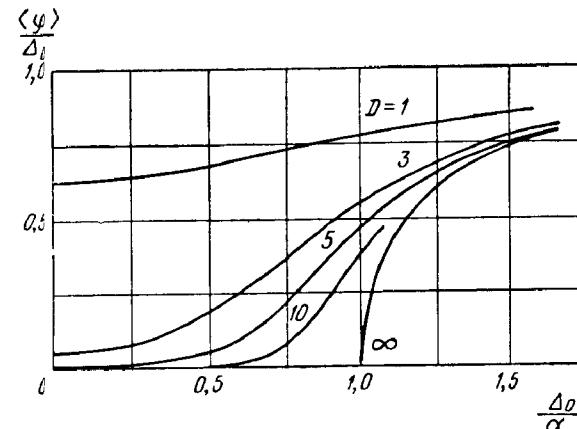


Рис. 8.5. Зависимость разности средних частот от  $a$  и характеристик сигнала и шума

ваемые перескоки фазы на  $\pm 2\pi m$ , где  $m$  — целое число. Разность этих перескоков в различных направлениях и обуславливает расходжение средних частот [29, 30]. Возможность таких перескоков следует из того, что уравнение (8.3.11) напоминает уравнение маятника, на который действует случайная внешняя сила. Под воздействием этой силы маятник может совершить один или несколько полных оборотов.

Среднее число  $N_{\pm 2\pi}$  перескоков фазы в единицу времени на  $\pm 2\pi$  при небольшом шуме ( $D > 1$ ) определяется следующей формулой [3, 31]:

$$N_{\pm 2\pi} = \frac{\Delta}{4\pi^2 D} e^{\pm \pi D_0} |I_{\pi D_0}(D)|^{-2}, \quad D > 1. \quad (8.3.23)$$

Если в понятие перескоков включить также случаи, когда разность фаз достигает значений  $\pm \pi$ , то среднее значение таких перескоков в единицу времени равно:

$$N_{\pm \pi} = 2N_{\pm 2\pi} = \frac{\Delta}{2\pi^2 D} e^{\pm \pi D_0} |I_{\pi D_0}(D)|^{-2}, \quad D > 1. \quad (8.3.24)$$

В отсутствие начальной расстройки ( $\Delta_0 = 0$ ) из формулы (8.3.23) получаем частный результат [32]

$$N_{+2\pi} = N_{-2\pi} = \frac{\Delta}{4\pi^2 D I_0^2(D)}, D > 1. \quad (8.3.25)$$

На рис. 8.6 представлены результаты вычислений по формуле (8.3.24) с использованием таблиц функций Бесселя от мнимого индекса и мнимого аргумента [33]. Применительно к системам фазо-

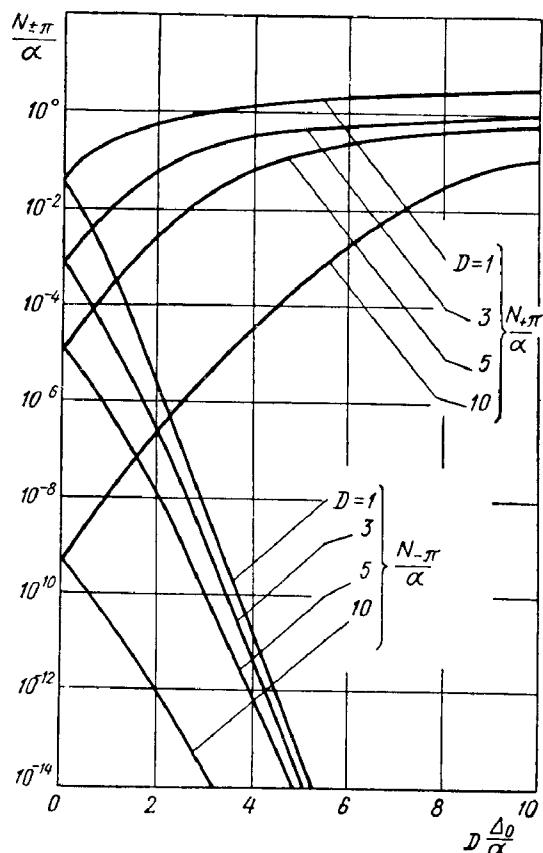


Рис. 8.6. Среднее число перескоков разности фаз на  $\pm\pi$ .

вой телеграфии эти результаты поясняют физический смысл термина «обратная работа» и при известных параметрах схемы фазовой автоподстройки частоты или колебательного контура позволяют оценить частоту, с которой будут наблюдаться случаи обратной работы. Следует иметь в виду, что наличие перескоков разности фаз характерно для всех систем синхронизации [31, 34].

Поскольку основная цель данного параграфа состоит в рассмотрении методов решения стохастического нелинейного уравнения (8.1.1) при больших шумах и выполнении условия  $\tau_c \gg \tau_k$ , то уместно указать на одну особенность. Если в правую часть уравнения (8.1.1) аддитивно входит производная от случайной функции  $\xi(t)$ , то описанная методика нахождения статистических характеристик при помощи решения уравнения Фоккера — Планка оказывается негравомерной [35].

В данном случае иногда можно продуктивно использовать явление нормализации случайного процесса инерционными системами (см. § 11 гл. 6). При  $\tau_c \gg \tau_k$  случайное возмущение подвергается сильному интегрированию в системе, и поэтому на основании физических соображений в некоторых случаях можно рассчитывать на то, что среднеквадратичное значение выходного процесса будет мало по сравнению с его средним значением. Кроме этого, если инерционное звено стоит на выходе системы, то будет иметь место нормализация выходного процесса, т. е. с некоторым приближением можно считать, что плотность вероятности интересующего нас процесса близка к нормальной.

Следовательно, один из возможных вариантов использования явления нормализации может состоять в том, что дисперсия выходного процесса вычисляется из линеаризованного уравнения, а среднее значение находится из нелинейного уравнения в предположении, что плотность вероятности выходного процесса является нормальной [36]. Аналогичные физические соображения в какой-то мере используются и в методе статистической линеаризации [37].

#### § 4. ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ И СРЫВЕ СЛЕЖЕНИЯ

Аппарат марковских процессов позволяет исследовать устойчивость и срыв слежения для ряда нелинейных систем, часто используемых в радиотехнических устройствах и устройствах автоматики. Рассмотрим два простых примера.

1. Время установления стационарной амплитуды колебаний в автогенераторе. В § 5 гл. 6 был подробно рассмотрен механизм самовозбуждения автогенератора и в линейном приближении оценено время, по истечении которого амплитуда колебаний достигает некоторого фиксированного значения. Хотя линейное приближение даёт правильное описание на большей части переходного процесса, оно принципиально не позволяет найти значение стационарной амплитуды автоколебаний и среднее время ее достижения. Для решения последней задачи рассмотрим нелинейное уравнение для амплитуды (8.2.16):

$$A = \frac{\varepsilon\omega A}{2} (1 - A^2) - \frac{\omega}{A_0} i(t) \sin(\omega t + \varphi). \quad (8.4.1)$$

Из этого уравнения видно, что в отсутствие шума ( $i(t) \equiv 0$ ) имеется два состояния равновесия:  $A = 0$  и  $A = A_c = 1$ , из которых устойчивым является лишь второе. Действительно, пусть  $A(t) > 1$ ; тогда  $\dot{A} < 0$  и, следовательно, «амплитуда» убывает с течением времени, стремясь к значению  $A_c = 1$ . Если  $A(t) < 1$ , то  $\dot{A} > 0$ , и «амплитуда» возрастает, приближаясь к  $A_c = 1$ . Поэтому от любого начального толчка, в том числе и обусловленного шумом  $i(t)$ , «амплитуда» колебаний  $A(t)$  стремится к стационарному значению  $A_c = 1$ .

Пусть флюктуационный ток  $i(t)$  вызывает в некоторый начальный момент времени  $t = 0$  малую начальную амплитуду  $A = a \ll A_c$ . Вычислим среднее время  $T$ , по истечении которого «амплитуда»  $A(t)$  в первый раз достигнет значения  $A_c = 1$ .

Так как флюктуационный ток  $i(t)$  можно рассматривать как белый шум, то процесс  $A(t)$  является марковским, и для него применимо уравнение (3.21.10), а также формула (3.21.12).

Применимально к уравнению (8.4.1) найдем, что

$$K_1(a) = \frac{\epsilon \omega a}{2} (1 - a^2), \quad K_2(a) = K_2 = \frac{\omega^2 N}{4A_0^2}, \quad (N = 2eI_s). \quad (8.4.2)$$

Поэтому

$$\Phi(z) = 2 \int_0^z \frac{K_1(a)}{K_2} da = \frac{\epsilon \omega a^2}{2K_2} \left(1 - \frac{a^2}{2}\right).$$

На основании формулы (3.21.12) находим интересующее нас среднее время

$$T_1(a) = \frac{2}{K_2} \int_a^1 e^{-\Phi(z)} dz \int_0^z e^{-(y)} dy. \quad (8.4.3)$$

Этот двукратный интеграл можно найти численным интегрированием.

Если малые начальные отклонения  $a$  случайны и имеют плотность вероятности  $W_0(a)$ , то по формуле (3.21.16) можно вычислить среднее время первого достижения стационарной амплитуды без указания конкретного значения  $a$ .

**2. Срыв сложения в следящей системе.** В радиотехнических устройствах широко применяются следящие системы (автодальномер, фазовая автоподстройка, частотная автоподстройка и др.). Их назначение состоит в том, чтобы осуществлять сложение за интересующим нас параметром полезного сигнала с приемлемой ошибкой. Так, применительно к дальномеру речь идет о сложении за временем запаздывания принимаемого сигнала, отраженного от цели, относительно излученного сигнала [38, 39].

При наличии шума ошибка сложения будет случайной и временами может достигать настолько больших значений, что полезный сигнал не будет служить возвращающей «силой» и система будет управ-

ляться только шумом. Шум может действовать так, что ошибка уменьшается и система вернется к сложению, но может также привести и к увеличению ошибки, в результате чего дальнейшее сложение практически прекратится. В этом смысле и понимается термин «срыв сложения».

Величина предельной ошибки, при которой происходит срыв сложения, обычно определяется апертурой дискриминатора, т. е. шириной линейного участка характеристики детектора сигнала ошибки.

Найдем вероятность срыва сложения для частного примера [40]. Предположим, что характеристика дискриминатора линейна в интервале ошибок  $(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2})$ , причем в этом интервале ошибка сложения  $x(t)$  определяется линейным дифференциальным уравнением вида (3.18.10):

$$\frac{dx}{dt} + ax = n(t), \quad (8.4.4)$$

где  $n(t)$  — белый шум.

Согласно § 21 гл. 3 уравнение (8.4.4) следует дополнить начальными и граничными условиями. Будем считать, что в начальный момент времени  $t_0 = 0$  ошибка отсутствует и, следовательно,

$$W(x, x_0, t_0, t_0) = \delta(x). \quad (8.4.5)$$

Явление срыва учтем введением «поглощающих» границ на краях диапазона линейности дискриминатора (при  $x(t) = \pm l/2$  процесс прекращается). Это эквивалентно нулевым граничным условиям

$$W\left(\pm \frac{l}{2}, 0, t, t_0\right) = 0. \quad (8.4.6)$$

Для решения уравнения (8.4.4) с условиями (8.4.5) и (8.4.6) применим хорошо известный в математической физике метод отражения с переменой знака от границ  $x = \pm l/2$  [41].

Пусть  $W_\infty(x, t)$  есть фундаментальное решение уравнения Фоккера — Планка для системы (8.4.4) с начальным условием (8.4.5) и бесконечно удаленными границами. Тогда решение уравнения Фоккера — Планка с граничными условиями (8.4.6) определяется равенством

$$W(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n W_\infty(x - nl, t). \quad (8.4.7)$$

Плотность вероятности  $W_\infty(x, t)$  была найдена в § 19 гл. 3 и дается выражением (3.19.26), в котором согласно условию (8.4.5) нужно

положить  $x(0) = 0$  и, следовательно,  $m(t) = 0$ . Таким образом, имеем

$$W_\infty(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2(t)}\right], \quad \sigma^2(t) = \frac{N_0}{4x}(1 - e^{-2\alpha t}). \quad (8.4.8)$$

На основании формулы (3.21.5) определяем вероятность срыва слежения за время  $t$

$$\begin{aligned} Q(t, 0) &= \int_{-t/2}^{t/2} W(x, t) dx = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \int_{-t/2}^{t/2} \exp\left\{-\frac{(x-nl)^2}{2\sigma^2(t)}\right\} dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \epsilon_n \left[ \Phi\left(\frac{2n+1}{2} \frac{l}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{2n-1}{2} \frac{l}{\sigma}\right) \right], \end{aligned}$$

где  $\Phi(z)$  — табулированный интеграл вероятности (2.8.8), а  $\epsilon_0 = 1$  и  $\epsilon_n = 2$  при  $n \neq 0$ .

Вероятность срыва слежения определяется формулой (3.21.7) и равна

$$P(t, 0) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \epsilon_n \left[ \Phi\left(\frac{2n+1}{2} \frac{l}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{2n-1}{2} \frac{l}{\sigma}\right) \right]. \quad (8.4.9)$$

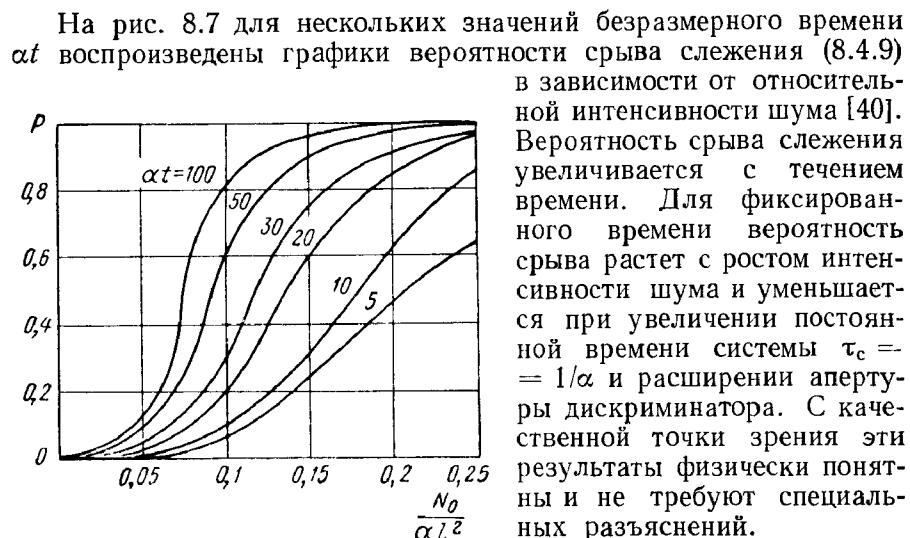


Рис. 8.7. Зависимость вероятности срыва слежения от относительной интенсивности шума.

Рассмотренный пример показывает, что исследование срыва слежения относится к

числу довольно сложных математических задач. Однако в некоторых случаях возможны упрощения. Они базируются на том, что для обеспечения надежного слежения интенсивность шума должна быть малой. А при малых шумах имеются приближенные, асимптотические методы решения уравнения Фоккера — Планка [42].

## § 5. КВАЗИСТАТИЧЕСКИЙ МЕТОД. ДЕТЕКТОР ОГИБАЮЩЕЙ

Основными элементами типового радиоприемника являются усилитель промежуточной частоты (УПЧ) и детектор (рис. 8.8). Обычно УПЧ представляет собой линейный узкополосный четырех-

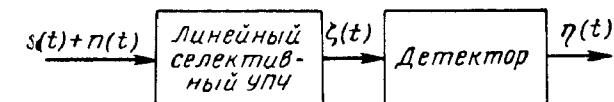


Рис. 8.8. Упрощенная блок-схема типового радиоприемника.

полюсник. При воздействии на него широкополосного нормального шума и гармонического сигнала выходное напряжение можно представить в виде (7.8.1) :

$$\zeta(t) = V(t) \cos[\omega_0 t - \theta(t)]. \quad (8.5.1)$$

Для простоты предполагается, что частота сигнала совпадает с центральной частотой полосы пропускания УПЧ.

Случайное напряжение  $\zeta(t)$  воздействует на детектор. Найдем статистические характеристики напряжения  $\eta(t)$  на выходе детектора, схема которого изображена на рис. 8.9.

Пусть нелинейный элемент (диод)  $D$  имеет вольтамперную характеристику  $i = g(v)$ ,  $v = \zeta - \eta$ . Считая равным нулю внутреннее сопротивление генератора входного напряжения, из очевидных соотношений

$$i_1 + i_2 = i, \quad \eta = \frac{1}{C} \int i_1 dt = i_2 R$$

получим дифференциальное уравнение

$$\dot{\eta} + \frac{1}{RC} \eta = \frac{1}{C} g(\zeta - \eta). \quad (8.5.2)$$

Поскольку назначение детектора в радиоприемнике состоит в возможно лучшем выделении модулирующего напряжения, то он, во-первых, должен сильно сглаживать радиочастотные колебания и,

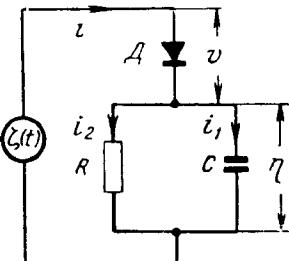


Рис. 8.9. Схема детектора.

во-вторых, напряжение на цепочке  $RC$  должно успевать «следить» за изменениями огибающей. Выполнение этих двух условий достигается тем, что параметры детектора должны удовлетворять двум неравенствам:

$$RC \gg T_0 = 2\pi/\omega_0, \quad \tau_k \gg RC, \quad (8.5.3)$$

где  $\tau_k$  — время корреляции огибающей.

Детектор, для которого выполняются эти два неравенства, принято называть детектором огибающей. Те случаи использования детектора, когда эти условия не выполняются, описаны в работе [43] и здесь не рассматриваются.

Выполнение условий (8.5.3) существенно упрощает задачу исследования процесса детектирования случайных сигналов, так как при этом выходное напряжение  $\eta(t)$  почти безынерционно (квазистатически) зависит от огибающей  $V(t)$ . Покажем это [44].

Подставив (8.5.1) в (8.5.2), имеем

$$\dot{\eta} + \frac{1}{RC} \eta = \frac{1}{C} g [V \cos(\omega_0 t - \theta) - \eta].$$

Проинтегрируем это уравнение за период  $T_0$ , т. е. от  $t$  до  $t + T_0$ :

$$\begin{aligned} \eta(t + T_0) - \eta(t) &= \frac{1}{RC} \int_t^{t+T_0} \{-\eta(t') + \\ &+ Rg[V(t') \cos(\omega_0 t' - \theta(t')) - \eta(t')]\} dt'. \end{aligned} \quad (8.5.4)$$

При выполнении первого условия (8.5.3) функция  $\eta(t)$  мало изменяется за период  $T_0$ . Поэтому разность  $\eta(t + T_0) - \eta(t)$  почти не отличается от  $\eta T_0$ . Медленно изменяющиеся величины под знаком интеграла можно считать приближенно постоянными, т. е. можно принять

$$\eta(t') = \eta(t), \quad V(t') = V(t), \quad \theta(t') = \theta(t)$$

и учитывать изменение только  $\cos(\omega_0 t' - \theta)$ . Поэтому (8.5.4) можно записать

$$\dot{\eta} + \frac{1}{RC} \eta = \frac{1}{CT_0} \int_t^{t+T_0} g [V \cos(\omega_0 t' - \theta) - \eta] dt'$$

или

$$\dot{\eta} + \frac{1}{RC} \eta = \frac{1}{2\pi C} \int_0^{2\pi} g [V(t) \cos \chi - \eta(t)] d\chi. \quad (8.5.5)$$

Уравнение (8.5.5) затруднительно решить в общем виде. Хотя оно описывает и переходный процесс, рассмотрим в дальнейшем лишь стационарное состояние. Для стационарного состояния при выпол-

нении второго неравенства (8.5.3) можно ограничиться квазистатическим приближением, т. е. в левой части уравнения (8.5.5) можно пренебречь производной.

Действительно, в процессах  $\eta(t)$  и  $V(t)$  существенны лишь гармонические составляющие  $\eta \omega e^{j\omega t}$ , которые лежат в пределах полосы пропускания УПЧ  $\Delta\omega$ :

$$|\omega| \approx \Delta\omega \approx 1/\tau_k.$$

Для этих частот производная  $\dot{\eta}_\omega = j\omega \eta_\omega \approx j\eta_\omega/\tau_k$  значительно меньше  $\eta_\omega/RC$  вследствие второго неравенства (8.5.3). Поэтому в уравнении (8.5.5) производная  $\dot{\eta}$  значительно меньше второго члена  $\eta/RC$ . Пренебрегая ею, получаем окончательное уравнение

$$\eta = \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} g (V \cos \chi - \eta) d\chi, \quad (8.5.6)$$

дающее безынерционную зависимость выходного напряжения  $\eta(t)$  от огибающей  $V(t)$ . Здесь в процессе интегрирования по  $\chi$  величины  $V$  и  $\eta$  принимаются постоянными.

Таким образом, при исследовании воздействия узкополосного случайного процесса на детектор огибающей в стационарном состоянии можно ограничиться квазистатическим приближением, т. е. вместо точного дифференциального уравнения (8.5.2) можно ограничиться рассмотрением приближенного функционального соотношения (8.5.6).

Для линейного детектора огибающей, имеющего характеристику

$$i = g(v) = \begin{cases} v/R_i & \text{при } v > 0, \\ 0 & \text{при } v < 0, \end{cases} \quad (8.5.7)$$

где  $R_i$  — внутреннее сопротивление диода в открытом состоянии, из (8.5.6) получим

$$\frac{R}{R_i} = \frac{\pi k}{\sqrt{1 - k^2 - k \arccos k}}, \quad k = \frac{\eta}{V}. \quad (8.5.8)$$

Безразмерную величину  $k$  можно назвать коэффициентом воспроизведения огибающей.

На рис. 8.10 приведен график зависимости  $k$  от отношения  $R/R_i$ . Из него видно, что коэффициент воспроизведения огибающей монотонно возрастает с увеличением  $R/R_i$ , асимптотически приближаясь снизу к единице.

Характерным свойством линейного детектора огибающей, в отличие от других типов, является то, что коэффициент воспроизведения огибающей  $k$  не зависит от значения самой огибающей  $V(t)$  и определяется только отношением сопротивлений  $R/R_i$ . После вычисления коэффициента  $k$  статистические характеристики выходного

напряжения  $\eta(t) = kV(t)$  просто находятся по соответствующим характеристикам огибающей (см. § 5, 8 гл. 7).

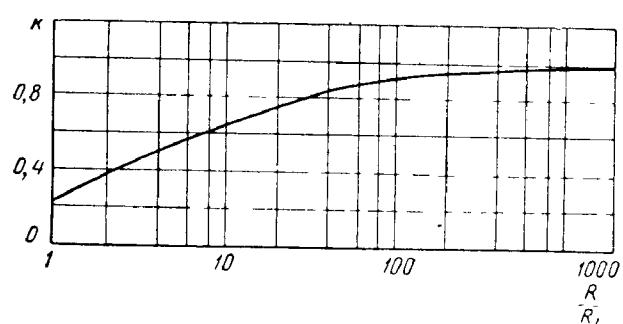


Рис. 8.10. Зависимость коэффициента воспроизведения огибающей от отношения сопротивлений при линейном детектировании.

При квадратичном детектировании нелинейная характеристикадается выражением

$$g(v) = \begin{cases} \beta v^2 & \text{при } v > 0, \\ 0 & \text{при } v < 0. \end{cases} \quad (8.5.9)$$

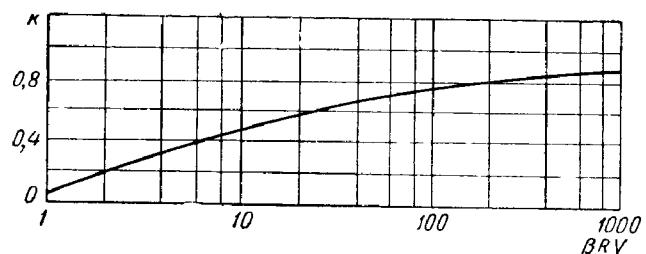


Рис. 8.11. Зависимость коэффициента  $k$  от параметра  $\beta RV$  при квадратичном детектировании.

В данном случае формула (8.5.6) приводит к следующему результату:

$$\beta RV = \frac{2\pi k}{(1 + 2k^2) \arccos k - 3k\sqrt{1-k^2}}, \quad k = \frac{\eta}{V}. \quad (8.5.10)$$

Теперь коэффициент  $k$  не имеет прежнего прямого смысла, поскольку он зависит от значения огибающей  $V(t)$ .

При  $\beta RV \ll 0,1$  выполняется неравенство  $k \ll 1$ . Полагая  $\arccos k \approx \pi/2$ , из (8.5.10) найдем

$$k = \frac{1}{4} \beta RV, \quad \eta(t) = \frac{1}{4} \beta RV^2(t), \quad (8.5.11)$$

т. е. выходное напряжение пропорционально квадрату огибающей. Для больших значений  $\beta RV$  коэффициент  $k$  можно найти путем численного решения уравнения (8.5.10). На рис. 8.11 представлена зависимость  $k = f(\beta RV)$ . С увеличением параметра  $\beta RV$  коэффициент  $k$  растет, асимптотически приближаясь к единице.

## § 6. ФУНКЦИЯ КОРРЕЛЯЦИИ СТОХАСТИЧЕСКИ МОДУЛИРОВАННОГО СИГНАЛА

Рассмотрим специфическое применение квазистатического метода для вычисления функции корреляции стохастического сигнала

$$\zeta(t) = A[\xi(t)] \cos \left( \omega_0 t + \int_0^t f[\xi(x)] dx + \theta \right), \quad (8.6.1)$$

где  $\xi(t)$  — случайный процесс;  
 $A[\xi(t)]$  и  $f[\xi(t)]$  — некоторые известные функции этого процесса;  
 $\theta$  — неизвестная начальная фаза.

Такой сигнал получается, например, при модуляции гармонического колебания флуктуационным шумом одновременно по амплитуде и частоте, причем в данном случае под  $A[\xi]$  и  $f[\xi]$  следует понимать модуляционные характеристики для амплитуды и частоты соответственно. Как правило, эти характеристики являются нелинейными. При нелинейных модуляционных характеристиках даже для нормального стационарного шума  $\xi(t)$  задача вычисления функции корреляции сигнала (8.6.1) представляется весьма сложной. Ниже предлагается приближенный способ, базирующийся на возможности аппроксимации случайной функции  $f[\xi]$  кусочно-линейной кривой [45].

Функция корреляции сигнала (8.6.1) по определению равна

$$\begin{aligned} k(t_1, t_2) &= \langle \zeta(t_1) \zeta(t_2) \rangle = \\ &= \langle A[\xi(t_1)] A[\xi(t_2)] \cos \left( \omega_0 t_1 + \int_0^{t_1} f[\xi(x)] dx + \theta \right) \times \\ &\quad \times \cos \left( \omega_0 t_2 + \int_0^{t_2} f[\xi(x)] dx + \theta \right) \rangle = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \langle A[\xi(t_1)] A[\xi(t_2)] \left\{ \cos \left( \omega_0 \tau + \int_{t_1}^{t_2} f[\xi(x)] dx \right) + \right. \\ \left. + \cos \left( \omega_0 t_1 + \omega_0 t_2 + \int_0^{t_1} f[\xi(x)] dx + \int_0^{t_2} f[\xi(x)] dx + 2\theta \right) \right\} \rangle, \quad \tau = t_2 - t_1.$$

В данном случае необходимо выполнить двойное усреднение: по ансамблю реализаций  $\xi(t)$  и случайной начальной фазе  $\theta$ , которую будем считать распределенной равномерно на интервале  $(-\pi, \pi)$ . В результате усреднения по случайной фазе второе слагаемое в фигурных скобках обращается в нуль. Поэтому

$$k(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \langle A[\xi(t_1)] A[\xi(t_2)] \cos \left( \omega_0 \tau + \int_{t_1}^{t_2} f[\xi(x)] dx \right) \rangle. \quad (8.6.2)$$

Выполнение здесь статистического усреднения по ансамблю реализаций  $\xi(t)$  представляет весьма трудную математическую задачу. Чтобы избежать эту трудность, используем следующие соображения. Флуктуации  $\xi(t)$  из-за наличия в схеме интегрирующих емкостей

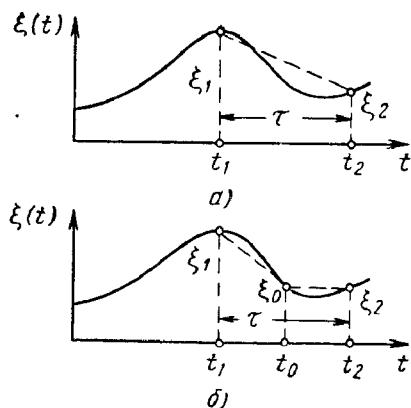


Рис. 8.12. Кусочно-линейная аппроксимация случайной функции.

(рис. 8.12, а). Ясно, что чем меньше  $\tau$  по сравнению с временем корреляции  $\tau_k$ , тем точнее выполняется равенство (8.6.3). Поэтому должно выполняться условие  $\tau_k \gg \tau$ . Кроме этого, набег фазы за время  $\tau$  не должен превышать  $2\pi$ . Отсюда получаем второе условие  $\sigma_f^2 \tau \leq 2\pi$ , где  $\sigma_f^2$  — дисперсия случайной функции  $f[\xi(t)]$ .

Если необходимо расширить пределы применимости указанного приближения по  $\tau$  или при заданном  $\tau$  увеличить точность, то можно

практически всегда представляют собой гладкую функцию. Модуляционную характеристику по частоте можно аппроксимировать некоторой непрерывной функцией.

Для непрерывной функции  $f[\xi(t)]$  с некоторым приближением можно положить

$$\int_{t_1}^{t_2} f[\xi(x)] dx \approx \frac{1}{2} \tau \{ f[\xi_1] + f[\xi_2] \}, \\ \xi_i = \xi(t_i). \quad (8.6.3)$$

Это приближенное равенство выражает тот факт, что площадь под кривой  $f[\xi(x)]$  на интервале  $\tau$  заменяется площадью трапеции

на интервале  $\tau$  взять несколько точек и воспользоваться более точными формулами (рис. 8.12, б)

$$\int_{t_1}^{t_2} f[\xi(x)] dx = \frac{1}{2} \tau \left\{ \frac{1}{2} f[\xi_1] + f[\xi_0] + \frac{1}{2} f[\xi_2] \right\} \quad (8.6.4)$$

и т. д.

Если ограничиться первым приближением (8.6.3), то статистическое усреднение в формуле (8.6.2) можно теперь выполнить с двумерной плотностью вероятности для  $\xi(t)$ . При втором приближении, даваемом формулой (8.6.4), статистическое усреднение в формуле (8.6.2) необходимо выполнять с использованием трехмерной плотности вероятности и т. д.

Поскольку в формуле (8.6.2) при указанных приближениях получается нелинейное безынерционное преобразование, то задачу можно считать в принципе решенной.

Применим описанный метод с использованием приближения (8.6.3) к сигналу

$$\xi(t) = A_0 \cos \left( \omega_0 t + \chi \int_0^t \xi(x) dx + \theta \right), \quad (8.6.5)$$

где  $\xi(t)$  — нормальный стационарный шум.

Для такого сигнала точная функция корреляции дается формулой (5.10.18). В данном случае вместо выражений (5.10.19) получим

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_1(s) &= \exp \left\{ -\frac{1}{16} \beta \left[ 3 + e^{-s} + 4e^{-\frac{1}{2}s} \right] \right\}, \\ \tilde{\rho}_2(s) &= \exp \left\{ -\frac{1}{16} \beta \left[ 3 + e^{-s^2} + 4e^{-\frac{1}{4}s^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (8.6.6)$$

Результаты вычислений по этим формулам приведены на рис. 5.23 (пунктирные линии). Сравнение этих кривых с точными результатами показывает вполне удовлетворительное согласие особенно при больших значениях  $\beta$  и малых  $s$ .

## § 7. О СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ НА ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ

В последнее время проявляется повышенный интерес к теории действия случайных возмущений на параметрические системы, поведение которых описывается дифференциальными уравнениями (линейными или нелинейными) с переменными параметрами. Это объясняется тем, что к решению таких задач сводится анализ работы параметрических усилителей, исследование распространения

радиоволн в турбулентных средах, некоторые вопросы радиосвязи при помощи искусственных спутников Земли, задача обнаружения флюктуирующих целей и др.

Изменения параметров системы и внешние воздействия могут быть случайными и регулярными. Возможны также комбинированные случаи, когда на регулярные (например, гармонические) колебания накладываются флюктуационные возмущения. Вариации параметров системы могут привести к возбуждению системы и нарушению ее устойчивой работы.

По характеру физических процессов и методам исследования параметрические системы тесно связаны с теорией нелинейных колебаний. При рассмотрении параметрических систем возникают разнообразные задачи с точки зрения физического содержания и математической сложности [3, 46, 47]. Для решения их применяются разные методы [3, 46, 48–51].

При исследовании параметрических колебаний (с учетом флюктуационных воздействий) в узкополосных радиотехнических системах можно продуктивно использовать представление случайных вынужденных колебаний в виде квазигармонического шума. Для определения статистических характеристик огибающей и фазы во многих случаях оказывается применимым аппарат марковских процессов [3, 54]. Когда флюктуационные воздействия в некотором смысле являются малыми, целесообразно применять метод линеаризации или же находить решение методом последовательных приближений по малому параметру [55–57].

Здесь мы ограничимся рассмотрением простейшего случая [58], для которого укажем возможные методы решения и введем понятие устойчивости системы, несколько отличное от приведенного в § 21 гл. 3.

Пусть требуется найти среднее значение и корреляционную функцию случайного процесса  $y(t)$ , заданного стохастическим линейным дифференциальным уравнением первого порядка

$$\dot{y} + \xi(t)y = \eta(t), \quad (8.7.1)$$

где  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  — нормальные стационарные и стационарно связанные случайные процессы с известными характеристиками:

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= \langle \xi(t) \rangle, & m_2 &= \langle \eta(t) \rangle, \\ \sigma_1^2 R_1(\tau) &= \langle \xi(t) \xi(t+\tau) \rangle, \\ \sigma_2^2 R_2(\tau) &= \langle \eta(t) \eta(t+\tau) \rangle, \\ \sigma_1 \sigma_2 R_{12}(\tau) &= \langle \xi(t) \eta(t+\tau) \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (8.7.2)$$

Здесь кружочком сверху обозначены центрированные случайные функции.

Отметим, что в том частном случае, когда выполняется неравенство  $\sigma_1/m_1 \ll 1$ , целесообразно уравнение (8.7.1) записать в другом виде:

$$y + m_1[1 + \varepsilon \xi(t)]y = \eta(t), \quad (8.7.3)$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр.

Решение этого уравнения можно получить методом последовательных приближений по малому параметру.

Полагая

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots, \quad (8.7.4)$$

после подстановки (8.7.4) в (8.7.3) и приравнивания членов с одинаковыми степенями параметра  $\varepsilon$ , получим простые уравнения для приближений:

$$\dot{y}_0 + m_1 y_0 = \eta(t), \quad \dot{y}_1 + m_1 y_1 + \xi(t) y_0 = 0, \dots \quad (8.7.5)$$

Эти линейные уравнения легко решаются, и из решений нетрудно найти требуемые характеристики для  $y(t)$ .

В общем случае решение уравнения (8.7.1) при начальном условии  $y = y_0, t = t_0$  можно представить в виде суммы общего решения  $z_1(t)$  однородного уравнения и частного решения  $z_2(t)$  неоднородного уравнения:

$$\begin{aligned} y(t) &= z_1(t) + z_2(t) = y_0 \exp \left( - \int_{t_0}^t \xi(x_1) dx_1 \right) + \\ &+ \int_{t_0}^t \eta(u) \exp \left( - \int_u^t \xi(x_2) dx_2 \right) du. \end{aligned} \quad (8.7.6)$$

Вычисление различных моментов процесса  $y(t)$  с использованием этого решения усложняется из-за того, что второй член в правой части содержит произведение  $\eta(u)$  и  $\exp(-\int_u^t \xi(x_2) dx_2)$ . Эти два процесса не являются независимыми и к тому же второй не является нормальным. Эта кажущаяся трудность устраняется, если записать (8.7.6) в следующем виде [58]:

$$\begin{aligned} y(t) &= z_1(t) + \frac{\partial}{\partial \gamma} [z_2(t, \gamma)]_{\gamma=0} = y_0 \exp \left( - \int_{t_0}^t \xi(x_1) dx_1 \right) - \\ &- \frac{\partial}{\partial \gamma} \left\{ \int_{t_0}^t \exp \left[ -\gamma \eta(u) - \int_u^t \xi(x_2) dx_2 \right] du \right\}_{\gamma=0}. \end{aligned} \quad (8.7.7)$$

Этот результат позволяет значительно упростить вычисления статистических характеристик  $y(t)$ . В частности, для вычисления различных моментов достаточно воспользоваться выражением для

$n$ -мерной характеристической функции нормального случайного процесса (3.15.3):

$$\Theta_n(u_1, u_2, \dots, u_n) = \exp \left[ j \sum_{\mu=1}^n m_\mu u_\mu - \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^n \sigma_\mu \sigma_\nu R_{\mu\nu}(\tau) u_\mu u_\nu \right]. \quad (8.7.8)$$

Вычислим среднее значение и функцию корреляции  $y(t)$ , считая начальное условие  $y_0$  детерминированным. Из равенства (8.7.7) имеем

$$m(t) = \langle y(t) \rangle = y_0 \left\langle \exp \left( - \int_{t_0}^t \xi(x_1) dx_1 \right) \right\rangle - \left[ \frac{\partial}{\partial \gamma} \langle z_2(t, \gamma) \rangle \right]_{\gamma=0}. \quad (8.7.9)$$

Поскольку в результате линейных преобразований нормального процесса получается также нормальный процесс, то первый член равенства (8.7.9) представляет собой значение одномерной характеристической функции нормального процесса

$$\left. \begin{aligned} \zeta(t) &= \int_{t_0}^t \xi(x) dx, \quad \langle \zeta(t) \rangle = m_1(t - t_0), \\ \sigma_\zeta^2(t, t_0) &= \sigma_1^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t R_1(x_2 - x_1) dx_1 dx_2 \end{aligned} \right\} \quad (8.7.10)$$

в точке  $u_1 = j$ , т. е.

$$\Theta_1(j) = \langle \exp[-\zeta(t)] \rangle = \exp \left[ -m_1(t - t_0) + \frac{1}{2} \sigma_\zeta^2(t, t_0) \right]. \quad (8.7.11)$$

Аналогично, воспользовавшись формулой (8.7.8), получим

$$\begin{aligned} \Theta_2(j\gamma, j) &= \left\langle \exp \left[ -\gamma\eta(u) - \int_u^t \xi(x_2) dx_2 \right] \right\rangle = \\ &= \exp \left\{ -[\gamma m_2 + m_1(t - u)] + \frac{1}{2} \left[ \gamma^2 \sigma_2^2 + 2\gamma\sigma_1\sigma_2 \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \int_u^t R_{12}(u - x_2) dx_2 + \sigma_\zeta^2(t, u) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial \gamma} \langle z_2(t, \gamma) \rangle \right]_{\gamma=0} &= \int_{t_0}^t \left[ \frac{\partial}{\partial \gamma} \Theta_2(j\gamma, j) \right]_{\gamma=0} du = \int_{t_0}^t \left[ -m_2 + \sigma_1\sigma_2 \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_u^t R_{12}(u - x_2) dx_2 \right] \exp \left[ -m_1(t - u) + \frac{1}{2} \sigma_\zeta^2(t, u) \right] du. \quad (8.7.12) \end{aligned}$$

Если подставить выражения (8.7.11) и (8.7.12) в (8.7.9), то получим окончательную формулу для среднего значения  $m(t)$ .

Функция корреляции  $y(t)$  равна

$$k(t_1, t_2) = m_{11}(t_1, t_2) - m(t_1)m(t_2) = \langle y(t_1)y(t_2) \rangle - m(t_1)m(t_2), \quad (8.7.13)$$

где согласно (8.7.7)

$$\begin{aligned} m_{11}(t_1, t_2) &= \langle z_1(t_1)z_1(t_2) \rangle - \left[ \frac{\partial}{\partial \gamma} \langle z_1(t_1)z_2(t_2, \gamma) \rangle \right]_{\gamma=0} - \\ &- \left[ \frac{\partial}{\partial \gamma} \langle z_1(t_2)z_2(t_1, \gamma) \rangle \right]_{\gamma=0} + \left[ \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \langle z_2(t_1, \gamma_1)z_2(t_2, \gamma_2) \rangle \right]_{\gamma_1=\gamma_2=0}. \quad (8.7.14) \end{aligned}$$

При вычислении отдельных слагаемых в правой части формулы (8.7.14) следует воспользоваться выражениями для трехмерной и четырехмерной характеристических функций нормального процесса, которые получаются из (8.7.8) при  $n = 3$  и  $n = 4$ . Ввиду громоздкости выражений они здесь не приводятся [58].

Рассмотрим пример. Предположим, что  $\eta(t) \equiv 0$  и  $m_1 > 0$ . В данном случае применение формулы (8.7.9) дает следующий результат:

$$m(t) = y_0 \exp \left[ -m_1(t - t_0) + \frac{1}{2} \sigma_1^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s R_1(x_2 - x_1) dx_1 dx_2 \right].$$

Сделав замену переменных  $s = x_2 - x_1$ ,  $x = x_1$  и выполнив интегрирование, получим

$$m(t) = y_0 \exp \left[ -m_1(t - t_0) + \sigma_1^2 \int_0^{t-t_0} (t - t_0 - s) R_1(s) ds \right]. \quad (8.7.15)$$

Если  $\lim_{s \rightarrow \infty} R_1(s) = 0$ , то при  $T = (t - t_0) \rightarrow \infty$  показатель экспоненты равен

$$-m_1 T + \sigma_1^2 T \int_0^T R_1(s) ds = -(m_1 - \sigma_1^2 \tau_k) T, \quad \tau_k = \int_0^\infty R_1(s) ds.$$

Отсюда видно, что при  $T \rightarrow \infty$  и ненулевом начальном условии среднее значение  $m(t)$  равно нулю лишь при выполнении неравенства

$$m_1 > \sigma_1^2 \tau_k. \quad (8.7.16)$$

В противоположном случае среднее значение стремится к бесконечности, и система в этом смысле оказывается неустойчивой (т. е. разрушается, или же исходное уравнение (8.7.1) нужно уточнить с учетом существующих нелинейностей в системе).

Вычисления по формуле (8.7.13) приводят к следующей формуле для дисперсии:

$$\sigma^2(t) = k(t, t) = m^2(t) \left\{ -1 + \exp \left[ 2\sigma_1^2 \int_0^{t-t_0} (t-t_0-s) R_1(s) ds \right] \right\}. \quad (8.7.17)$$

Подставив сюда выражение  $m(t)$  из (8.7.15), получим, что при  $T = (t - t_0) \rightarrow \infty$  дисперсия стремится к нулю при условии

$$m_1 > 2\sigma_1^2 \tau_k. \quad (8.7.18)$$

Если выполняется обратное неравенство, то дисперсия будет неограниченно возрастать с течением времени.

Сопоставляя условия (8.7.16) и (8.7.18), приходим к выводу, что при выполнении неравенства (8.7.18) рассматриваемая система статистически устойчива (т. е. устойчива в отношении среднего значения и дисперсии). При выполнении обратного неравенства система неустойчива.

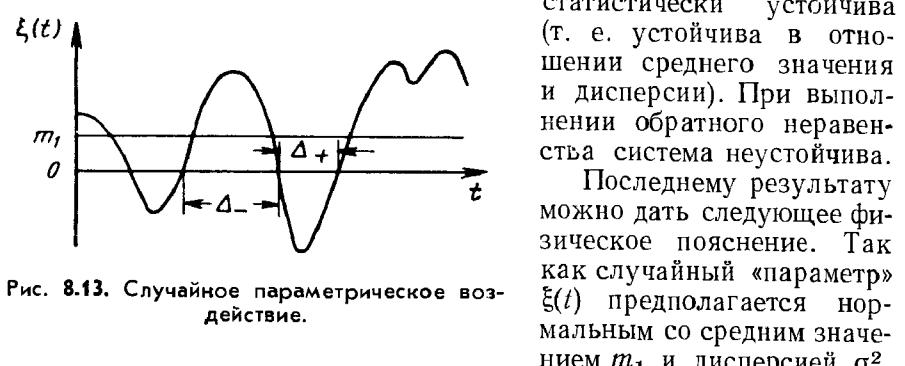


Рис. 8.13. Случайное параметрическое воздействие.

то имеются случайные интервалы времени  $\Delta_+$  (рис. 8.13), в течение которых  $\xi(t) > 0$ , и в течение их  $y(t)$ , обусловленное начальным отклонением  $y_0$ , затухает. Однако кроме интервалов  $\Delta_+$  имеются интервалы  $\Delta_-$ , в течение которых  $\xi(t) < 0$  и, следовательно, в течение их отклонение  $y(t)$  возрастает. Несмотря на то, что при  $m_1 > 0$  суммарное время  $\sum \Delta_+$ , в течение которого  $\xi(t) > 0$ , больше общего времени  $\sum \Delta_-$ , в течение которого  $\xi(t) < 0$ , среднее значение и дисперсия  $y(t)$  могут со временем возрастать вследствие

того, что при  $\xi(t) \approx 0$  имеет место весьма большая скорость возрастания  $y(t)$ .

При наличии случайных возмущений и воздействий система называется статистически устойчивой вообще, если моментные (корреляционные) функции в стационарном состоянии ограничены. Такие условия устойчивости систем со случайными параметрами исследованы в работах [59, 60], а различные критерии устойчивости по А. М. Ляпунову рассмотрены в работах [61, 62].

## ЛИТЕРАТУРА

- Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И. Прохождение случайных функций через нелинейные системы. «Автоматика и телемеханика», 1953, № 4.
- Deutsch R. On the method of Wiener for noise through nonlinear devices IRE Convention Record, 1955, pt. 4.
- Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике. Изд-во «Советское радио», 1961.
- Тихонов В. И. Воздействие флюктуаций на инерционный детектор. Научно-методический сборник № 19—20. ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1959.
- Воотоп R. L. The analysis of nonlinear control systems with random inputs Trans. IRE, 1954, CT-1, № 1.
- Казаков И. Е. Приближенный вероятностный анализ точности работы существенно нелинейных систем. «Автоматика и телемеханика», 1956, № 5.
- Казаков И. Е., Доступов Б. Г. Статистическая динамика нелинейных автоматических систем. Физматгиз, 1962.
- Попов Е. П., Пальтов И. П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. Физматгиз, 1960.
- Пятницкий Г. И. Воздействие стационарных случайных процессов на системы автоматического регулирования, содержащие существенно нелинейные элементы. «Автоматика и телемеханика», 1960, № 4.
- Крендель С. Случайные колебания систем с нелинейными восстанавливающими силами. Труды симпозиума по нелинейным колебаниям (г. Киев) Институт математики АН УССР, 1961.
- Берштейн И. Л. Флюктуации амплитуды и фазы лампового генератора. «Известия АН СССР», сер. физическая, 1950, № 2.
- Горелик Г. С. Нелинейные колебания, интерференция и флюктуации. «Известия АН СССР», сер. физическая, 1950, № 2.
- Рытов С. М. Флюктуации в автоколебательных системах томсонского типа. ЖЭТФ, 1955, № 3 (9).
- Троицкий В. С. К теории спектральной ширины линии радиочастотных генераторов и ее измерение по методу И. Л. Берштейна. «Радиотехника и электроника», 1956, № 6.
- Stewart J. L. The power spectrum of a carrier frequency modulated by gaussian noise. Proc. IRE, 1955, № 6; 1956, № 3.
- Малахов А. Н. О ширине спектральной линии генератора при флюктуациях его частоты. «Радиотехника и электроника», 1957, № 10.
- Гудзенко Л. И. О флюктуациях в ламповом генераторе при наличии сеточного тока. «Радиотехника и электроника», 1959, № 9.
- Ахманов С. А., Хохлов Р. В. О преобразовании случайных сигналов в нелинейных линиях. «Радиотехника и электроника», 1961, № 11.

19. Ахманов С. А., Ештокин В. Н., Марченко В. Ф. К методике измерения спектров флуктуаций частоты генераторов СВЧ «Радиотехника и электроника», 1962, № 12.
20. Moshe Z. On the first — order probability distribution of the Van der Pol type oscillator output. Journ Electron. and Control, 1963, № 4.
21. Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И. О воздействии электрических флуктуаций на ламповый генератор. ДАН СССР, 1954, т. 97, № 4.
22. Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И. Воздействие электрических флуктуаций на ламповый генератор ЖЭТФ, 1955, № 5.
23. Тихонов В. И., Амиантов И. Н. Воздействие медленных флуктуаций на ламповый генератор. «Радиотехника и электроника», 1956, № 4; 1958, № 4.
24. Тихонов В. И. Воздействие электрических флуктуаций на нелинейные радиотехнические устройства. Докторская диссертация. ВВИА им проф. Н. Е. Жуковского, 1956.
25. Kuznetsov P. I., Stratovich R. L., Tikhonov V. I. Non-linear transformations of stochastic processes. Pergamon Press, 1965.
26. Тихонов В. И., Челышев К. Б. Преобразование фазы автоколебаний резонансными системами. «Радиотехника и электроника», 1964, № 8.
27. Раевский С. Я., Хохлов Р. В. О синхронизации автогенератора синусоидальной силой при наличии флуктуационных помех. «Радиотехника и электроника», 1958, № 4.
28. Тихонов В. И., Шахтарин Б. И. Статистические характеристики фазовой автоподстройки частоты. «Автоматика и телемеханика», 1965, № 8.
29. Акопян И. Г. Исследование влияния флуктуационных помех на процессы синхронизации лампового генератора. Кандидатская диссертация, МГУ, 1959.
30. Тихонов В. И., Челышев К. Б. Статистическая динамика фазовой автоподстройки частоты. «Радиотехника и электроника», 1963, № 2.
31. Тихонов В. И. Основные статистические характеристики канала синхронизации. «Электросвязь», 1966, № 4.
32. Витерби. Исследование динамики систем фазовой автоподстройки частоты в присутствии шумов с помощью уравнения Фоккера — Планка. Пер. с англ. «Труды института инженеров по электронике и радиоэлектронике», 1963, № 12.
33. Morgan S. P. Tables of Bessel functions of imaginary order and imaginary argument. California, 1947.
34. Тихонов В. И. Влияние флуктуаций на точность работы устройств синхронизации. УФН, 1964, т. 83, № 4.
35. Тихонов В. И. Специальные случаи применения уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова. «Радиотехника и электроника», 1962, № 8.
36. Тихонов В. И. Работа частотной автоподстройки частоты при наличии шумов. «Электросвязь», 1962, № 9.
37. Deville J. A. Statistical design and performance of high-sensitivity frequency-feedback receivers. Trans. IEEE, 1963, MIE-7, № 4.
38. Амиантов И. Н., Тихонов В. И. Влияние флуктуаций на работу автодальномера. «Автоматика и телемеханика», 1958, № 4.
39. Митяшев Б. Н. Определение временного положения импульсов при наличии помех. Изд-во «Советское радио», 1962.
40. Руина Д. П., Ван-Валькенбург М. И. Статистический анализ систем автоматического сопровождения (дискуссия). Труды 1-го Международного конгресса ИФАК. Статистические методы исследования, 1961.
41. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики, т I. Изд-во иностранной литературы, 1960.
42. Лавда П. С., Стратонович Р. Л. К теории флуктуационных переходов различных систем из одного стационарного состояния в другое. «Вестник Московского университета», Физика, Астрономия, 1962, № 1.
43. Тихонов В. И., Горяинов В. Т. Детектирование случайных сигналов. «Радиотехника», 1966, № 1.
44. Тихонов В. И. Воздействие электрических флуктуаций на детектор (метод огибающей). «Известия АН СССР», ОТН, 1955, № 10.
45. Тихонов В. И. Приближенный способ вычисления функции корреляции стохастических сигналов. «Радиотехника и электроника», 1960, № 5.
46. Заде Л. А. Системы с переменными параметрами, ч. I. Пер. с англ. Труды института радиоинженеров, 1961, № 10.
47. Солодов А. В. Линейные системы автоматического управления с переменными параметрами. Физматгиз, 1962.
48. Rosenblom A., Heilfron J., Trautman D. Analysis of linear system with randomly varying inputs and parameters. IRE Convention record, 1955, pt. 4.
49. Caughey T. K., Diener J. K. The behavior of linear systems with random parametric excitation. Journ. Mathem. and Phys., 1962, № 4.
50. Leibowitz M. A. Statistical behavior of linear systems with randomly varying parameters. Journ. Math. Phys., 1963, № 6.
51. Adomian G. Stochastic Green's functions. Stochastic processes in mathematical physics and engineering. American Mathematical Society, 1964.
52. Ярлыков М. С. Динамические ошибки следящей системы первого порядка со случайным параметром при линейно изменяющемся входном сигнале. «Автоматика и телемеханика», 1964, № 12.
53. Хеглайн Г. Вопросы теории моноимпульсной радиолокации, ч. II. Пер. с англ. «Зарубежная радиоэлектроника», 1963, № 1.
54. Иванов С. А., Романовский Ю. М. О вынужденных колебаниях в контуре с флуктуирующей собственной частотой. «Радиотехника и электроника», 1963, № 8.
55. Samuels J. C., Eringen A. C. On stochastic linear systems. Journ. Mathem. and Physics, 1959, № 2.
56. Дьяков Ю. Е. Вынужденные колебания контура со случайно меняющейся емкостью. «Радиотехника и электроника», 1960, № 5.
57. Чепанов И. Б. Колебания системы второго порядка при случайных изменениях параметра. «Прикладная математика и механика», 1962, № 4.
58. Тихонов В. И. Воздействие флуктуаций на простейшие параметрические системы. «Автоматика и телемеханика», 1958, № 8; 1960, № 7.
59. Ворович И. И. Об устойчивости движения при случайных возмущениях. «Известия АН СССР» сер. математическая, 1956, № 1.
60. Samuels J. C. On the mean square stability of random linear systems. Trans. IRE, 1959, CT-6, May.
61. Beiträg J., Sagachik P. Stability of circuits with randomly time-varying parameters. Trans. IRE, 1959, CT-6, May.
62. Кац И. Я., Красовский Н. Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами. «Прикладная математика и механика», 1960, № 5.

## Глава 9

### ВЫБРОСЫ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

#### § 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

На рис. 9.1 приведена реализация (фотография) стационарного случайного процесса  $\xi(t)$  длительностью  $T$ . Все физически реальные случайные процессы представляют собой непрерывные функции времени. Такая функция на конечном интервале времени  $T$  имеет конечное число максимумов и минимумов с различными значениями  $H$ , причем в момент времени  $t_m$  реализация имеет максимум максимумом  $H_m$ .

Реализация  $\xi(t)$  несколько раз пересекает некоторый фиксированный уровень  $C$  снизу вверх (с положительной производной), причем в момент времени  $t_0$  впервые происходит такое пересечение.

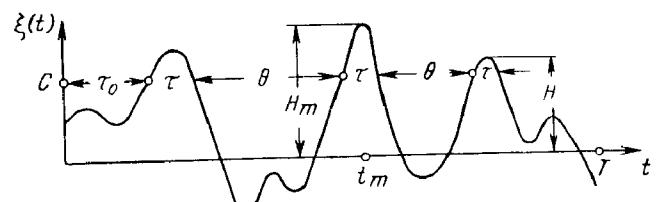


Рис. 9.1. Реализация стационарного случайного процесса

Событие, состоящее в том, что случайный процесс  $\xi(t)$  пересекает уровень  $C$  снизу вверх, принято называть положительным выбросом. Если же уровень  $C$  пересекается сверху вниз, то говорят о наличии отрицательного выброса. Тогда можно сказать, что реализация  $\xi(t)$  имеет  $N$  (на рис. 9.1 — три) положительных (отрицательных) выбросов на уровне  $C$ , причем указанные на рисунке величины  $\tau$  и  $\theta$  можно назвать соответственно длительностями положительных выбросов и интервалов между выбросами.

Величины  $\tau$ ,  $\theta$  и  $H$  в пределах одной реализации могут принимать несколько значений (в зависимости от уровня  $C$  и интервала  $T$ )

и вместе с величинами  $N$ ,  $\tau_0$  и  $H_m$  изменяются случайным образом от одной реализации к другой.

Помимо того, что величины  $N$ ,  $\tau$ ,  $\theta$ ,  $\tau_0$ ,  $H$ ,  $H_m$  сами по себе представляют интерес как детальные характеристики случайного процесса  $\xi(t)$ , знание их оказывается также необходимым при решении ряда практических задач. К таким задачам можно отнести следующие:

- 1) статистическое описание замираний радиосигналов при распространении электромагнитных колебаний через турбулентную атмосферу и ионосферу;
- 2) рассмотрение вопросов радиолокации морских целей;
- 3) анализ действия полезных сигналов и флуктуационных помех на электронные реле и триггеры, а также на другие устройства, обладающие пороговыми эффектами;
- 4) выяснение области применимости статистических методов оценки параметров;
- 5) расчет на прочность механических материалов, находящихся под действием случайных нагрузок;
- 6) оценка микрошероховатости обработанной поверхности и оценка погрешности измерительных устройств;
- 7) исследование вопросов надежности аппаратуры и др.

Из приведенного неполного перечня примеров можно составить представление о том широком научно-прикладном значении, которое имеют исследования по выбросам случайных процессов. Начало этим исследованиям было положено теоретической работой С. О. Райса в 1945 г. [1]. В этой работе для некоторых видов случайных процессов получены формулы для среднего числа выбросов и распределения максимумов, а также указан один приближенный путь решения задачи о плотности вероятности для длительностей выбросов.

В последующие годы выбросы случайных процессов рассматривались в ряде теоретических и экспериментальных работ [2, 3]. Однако к настоящему времени не все задачи имеют окончательное решение в форме, удобной для практического использования. В дальнейшем для случайных процессов  $\xi(t)$ , с которыми наиболее часто приходится иметь дело в радиофизике, будут рассмотрены следующие задачи:

- 1) оценена нестабильность момента срабатывания реле из-за шума;
- 2) приведены формулы и конкретные результаты для среднего числа выбросов  $N$  и для дисперсии числа выбросов;
- 3) указано распределение максимумов  $H$  и наибольших значений  $H_m$ .

## § 2. О ВОЗДЕЙСТВИИ ФЛУКТУАЦИОННЫХ ПОМЕХ НА ПОРОГОВЫЕ УСТРОЙСТВА. НЕСТАБИЛЬНОСТЬ МОМЕНТА СРАБАТЫВАНИЯ

В различных радиотехнических устройствах и электронных вычислительных машинах широко используются электронные реле и триггеры. Характерное свойство этих нелинейных устройств состоит в том, что при воздействии на них импульсных сигналов они срабатывают, когда напряжение импульса превышает некоторое «пороговое» значение. В результате срабатывания реле или триггер вырабатывают импульс определенной (часто прямоугольной) формы.

Из-за сложности точного количественного описания поведения таких нелинейных пороговых устройств по отношению к импульсным сигналам произвольной формы в настоящее время при расчете их пользуются приближенными инженерными формулами [4]. Аналогично можно поступить при анализе совместного воздействия на реле импульсного сигнала и флюктуационной помехи, задавшись приближенной моделью реле. Без обоснования примем простейшую модель порогового устройства: оно срабатывает каждый раз, когда действующее напряжение превышает порог  $C$ .

Влияние флюктуационных помех на работу реле зависит от отношения «порогового» напряжения  $C$  к уровню помех.

Если уровень помех мал по сравнению с напряжением  $C$ , то можно пренебречь маловероятными ложными срабатываниями реле. Помехи будут вызывать «дрожание» как момента срабатывания реле, так и момента окончания его работы. При этом длительность импульса напряжения, вырабатываемого реле, будет испытывать некоторые колебания.

Когда уровень помех сравним или превышает «пороговое» напряжение, наряду с указанными вариациями длительности импульса реле будут происходить ложные срабатывания от помех. Число их будет определяться числом выбросов флюктуационного напряжения, вызывающих срабатывание реле.

Поэтому при рассмотрении совместного воздействия полезных сигналов и флюктуационных помех на реле целесообразно различать и раздельно анализировать два случая: 1) малые помехи и 2) большие помехи.

Рассмотрим здесь первый случай и вычислим нестабильность момента срабатывания реле [5, 6], когда на него воздействуют импульсный сигнал  $u(t)$  и аддитивный флюктуационный шум  $\xi(t)$  с нулевым средним значением и малой дисперсией  $\sigma^2$  ( $\sigma \ll C$ ).

Пусть в отсутствие флюктуационного шума реле срабатывает в некоторый момент времени  $t_0'$  (рис. 9.2), определяемый равенством

$$u(t_0') = C. \quad (9.2.1)$$

При наличии флюктуаций  $\xi(t)$  срабатывание реле произойдет в другой момент времени  $t_1 = t_0' - \Delta$ , где  $\Delta$  — смещение момента срабатывания. Причем  $\Delta$  определяется соотношением

$$u(t_0' - \Delta) + \xi(t_0' - \Delta) = C. \quad (9.2.2)$$

Ясно, что смещение  $\Delta$  является случайной величиной. Поскольку воздействующие флюктуации  $\xi(t)$  предполагаются малыми, то смещение  $\Delta$  будет также малой величиной. Поэтому левую часть равенства (9.2.2) можно разложить в степенной ряд в окрестности точки  $t_0'$  и ограничиться линейными относительно  $\Delta$  членами (линейное приближение).

Таким образом, равенство (9.2.2) можно записать

$$u(t_0' - \Delta) - \xi(t_0' - \Delta) = u(t_0') + \xi(t_0') - [s + \xi(t_0')] \Delta = C, \quad (9.2.3)$$

где  $s = \dot{u}(t_0')$  — крутизна импульса на уровне  $C$ .

Из (9.2.1) и (9.2.3) получаем в линейном приближении явное выражение для  $\Delta$ :

$$\Delta = \frac{\xi(t_0')}{s + \xi(t_0')} = \frac{\xi}{s \left( 1 - \frac{\xi}{s} \right)} = \frac{\xi}{s} \left[ 1 - \frac{\xi}{s} + \left( \frac{\xi}{s} \right)^2 - \dots \right]. \quad (9.2.4)$$

Обозначим дисперсию производной  $\xi(t_0')$  флюктуационного шума через  $\sigma_1^2$ . Тогда при выполнении неравенства  $\sigma_1 \ll s$  из (9.2.4) получим простую формулу

$$\Delta = \frac{\xi}{s}, \quad \sigma_\Delta = \frac{\sigma}{s}. \quad (9.2.5)$$

Следовательно, при малом шуме среднеквадратичное значение смещения момента срабатывания реле прямо пропорционально среднеквадратичному значению шума и обратно пропорционально крутизне импульса в окрестности порогового уровня  $C$ .

Формулой (9.2.5) можно воспользоваться для оценки нестабильности длительности импульса, вырабатываемого электронным реле, мультивибратором и блокинг-генератором [6].

Применимально к радиоприему импульсных сигналов на фоне слабых флюктуационных помех формулу (9.2.5) целесообразно привести в другому виду. Пусть прямоугольный радиоимпульс

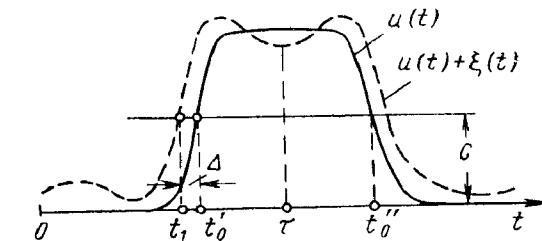


Рис. 9.2. Смещение момента срабатывания реле из-за флюктуационного шума.

$u(t) = A_m \cos \omega t$  длительностью  $\tau_u$  и белый шум  $n(t)$  сначала пропускаются через настроенный узкополосный усилитель (например, УПЧ) и линейный детектор огибающей, а затем огибающая суммы сигнала и шума воздействует на реле. Обозначим энергетическую полосу усилителя через  $\Delta f_s$  и коэффициент передачи огибающей с учетом детектора через  $K_0$ .

Время нарастания импульса на выходе усилителя определяется приближенным соотношением  $\tau_u \approx 1/\Delta f_s$ . Поэтому средняя крутизна импульса, действующего на реле, приближенно равна

$$s \approx K_0 A_m / \tau_u \approx K_0 A_m \Delta f_s. \quad (9.2.6)$$

При больших отношениях сигнал/шум на выходе усилителя в правой части формулы (7.8.12) можно пренебречь последним слагаемым. Тогда получим, что огибающая суммы сигнала и шума равна сумме огибающей сигнала и косинусной составляющей узкополосного шума на выходе усилителя. Последняя имеет дисперсию

$$\sigma^2 \approx K_0^2 N_0 \Delta f_s. \quad (9.2.7)$$

Подставив отдельные величины из (9.2.6) и (9.2.7) в (9.2.5), окончательно получим

$$\sigma_\Delta \approx \left( \frac{\tau_u}{2E \Delta f_s} \right)^{1/2}, \quad (9.2.8)$$

где  $E = \frac{1}{2} A_m^2 \tau_u$  — энергия (интеграл от квадрата) радиоимпульса.

Формулой (9.2.8) можно воспользоваться для оценки точности определения временного положения принимаемого прямоугольного радиоимпульса относительно некоторого фиксированного момента времени. Предположим, что импульс симметричен относительно средины. Будем относить момент появления импульса к его средине  $\tau$  и определять ее следующим образом: по переднему фронту определяется момент  $t'_0$  превышения импульсом порога  $C$  и по заднему фронту момент  $t''_0$ , когда напряжение импульса становится меньше  $C$ . Очевидно, что

$$\tau = \frac{1}{2} (t'_0 + t''_0). \quad (9.2.9)$$

Если оба указанных измерения считать независимыми, то для дисперсии можем написать

$$\sigma_\tau^2 = \frac{1}{4} (\sigma_{t'_0}^2 + \sigma_{t''_0}^2) = \frac{2}{4} \sigma_\Delta^2$$

или

$$\sigma_\tau \approx \left( \frac{\tau_u}{4\Delta f_s E / N_0} \right)^{1/2}. \quad (9.2.10)$$

Так как при фиксированной амплитуде  $A_m$  энергия прямоугольного импульса пропорциональна его длительности, то из (9.2.10) видно, что длительность импульса  $\tau_u$  непосредственно не влияет на точность определения временного положения импульса.

### § 3. ОБЩАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ СРЕДНЕГО ЧИСЛА ВЫБРОСОВ

Вычислим среднее число положительных выбросов случайного процесса  $\xi(t)$  на уровне  $C$  в единицу времени. Будем считать случайную функцию  $\xi(t)$  и ее производную  $\dot{\xi}(t)$  непрерывными. Предположим, что известна совместная плотность вероятности для случайной функции и ее производной в единицу времени  $W_2(\xi(t), \dot{\xi}(t))$  (см. ниже).

Из непрерывности следует, что на малом интервале  $\Delta t$ , т. е. внутри промежутка  $t < t' < t + \Delta t$ , функция  $\xi(t')$  близка к прямой:

$$\xi(t') = \xi(t) + \dot{\xi}(t)(t' - t).$$

Поэтому на достаточно малом  $\Delta t$  может быть не более одного пересечения уровня  $C$ .

Таким образом, имеется две возможности: на интервале  $\Delta t$  не будет выброса или будет один выброс. Обозначим через  $P_1$  вероятность того, что будет один выброс, а через  $P_0$  вероятность того, что не будет ни одного выброса. Тогда среднее число выбросов на интервале  $\Delta t$  равно:

$$N(C, \Delta t) = 1 \cdot P_1 + 0 \cdot P_0 = P_1, \quad (9.3.1)$$

т. е. совпадает с вероятностью  $P_1$ .

Для вычисления  $P_1$  заметим, что выражение

$$dp = W_2(\xi(t), \dot{\xi}(t)) \Delta \xi \Delta \dot{\xi}, \quad (\xi(t) = C), \quad (9.3.2)$$

определяет вероятность того, что функция  $\xi(t)$ , близкая к прямой, пересекает вертикальный отрезок  $AB = \Delta \xi$  (рис. 9.3) и при этом производная заключена в интервале от  $\dot{\xi}(t)$  до  $\dot{\xi}(t) + \Delta \dot{\xi}$ .

Рассмотрим вероятность пересечения не вертикального отрезка  $AB = \Delta \xi$ , а горизонтального отрезка  $AC = \Delta t$ , считая производную  $\dot{\xi}(t)$  фиксированной. Очевидно, что при фиксированной производной  $\dot{\xi}(t)$  пересечение горизонтального отрезка длиной  $\Delta t$  эквивалентно пересечению вертикального отрезка длиной  $\Delta \xi = \dot{\xi}(t) \Delta t$ .

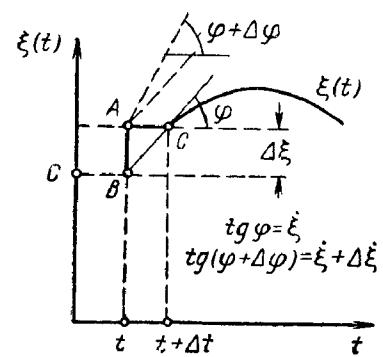


Рис. 9.3. К вычислению среднего числа выбросов.

Поэтому вероятность пересечения отрезка  $AC = \Delta t$  с производной в пределах от  $\xi(t)$  до  $\xi(t) + \Delta\xi$  равна

$$dp = W_2(\xi(t), \dot{\xi}(t)) \dot{\xi}(t) \Delta\xi \Delta t, \quad (\xi(t)=C). \quad (9.3.3)$$

Интересующие нас выбросы (пересечения уровня  $C$  снизу вверх) при  $\xi(t) = C$  будут происходить при всех положительных значениях производной, т. е. при  $0 \leq \dot{\xi}(t) < \infty$ . Поэтому полная вероятность  $P_1$  пересечения уровня  $C$  на интервале  $(t, t + \Delta t)$  равна

$$P_1 = \Delta t \int_0^\infty \xi W_2(C, \xi) d\xi. \quad (9.3.4)$$

Согласно формуле (9.3.1) вероятность  $P_1$  совпадает со средним числом выбросов на элементарном интервале  $(t, t + \Delta t)$ . Поэтому среднее число выбросов  $N(C, T)$  за время  $T$  находим интегрированием правой части выражения (9.3.4) от 0 до  $T$ :

$$N(C, T) = \int_0^T dt \int_0^\infty \xi W_2(C, \xi) d\xi. \quad (9.3.5)$$

Для стационарного процесса  $\xi(t)$  внутренний интеграл не зависит от времени и, разделив правую часть (9.3.5) на  $T$ , получим простую формулу для определения среднего числа положительных выбросов в единицу времени на уровне  $C$

$$N_1(C) = \int_0^\infty \xi W_2(C, \xi) d\xi. \quad (9.3.6)$$

Среди стационарных процессов можно выделить узкий класс процессов, для которых случайная функция и ее производная в совпадающие моменты времени независимы, т. е.

$$W_2(\xi(t), \dot{\xi}(t)) = W(\xi(t)) w(\dot{\xi}(t)). \quad (9.3.7)$$

Процессы, удовлетворяющие этому условию, можно назвать стационарными процессами со статистически независимой производной (в совпадающие моменты времени).

Применимально к таким стационарным процессам формула (9.3.6) приобретает особенно простой вид

$$N_1(C) = W(C) \int_0^\infty \xi w(\dot{\xi}) d\xi. \quad (9.3.8)$$

Видно, что для стационарных процессов со статистически независимой производной в совпадающий момент времени среднее число выбросов на уровне  $C$  с точностью до некоторого постоянного множителя пропорционально значению плотности вероятности на этом уровне. Этот результат можно использовать для эксперименталь-

ного определения одномерных плотностей вероятностей указанных процессов при помощи счета числа выбросов на разных уровнях.

Следует подчеркнуть, что равенство (9.3.7) выражает факт статистической независимости процесса и его производной в совпадающие моменты времени, а не является условием некоррелированности процесса  $\xi(t)$  и его производной  $\dot{\xi}(t)$ , которое выполняется для всех стационарных процессов. Исключение здесь составляет нормальный стационарный процесс, для которого из условия некоррелированности  $\xi(t)$  и  $\dot{\xi}(t)$  следует их независимость.

При выводе основной формулы (9.3.5) предполагалась известной совместная плотность вероятности  $W_2(\xi(t), \dot{\xi}(t))$ . Можно указать следующий способ вычисления ее. Пусть случайный процесс  $\xi(t)$  задан двумерной плотностью вероятности  $W_2(\xi_1, \xi_2)$ , где  $\xi_1 = \xi(t_1)$ ,  $\xi_2 = \xi(t_2)$ . Выберем два близко отстоящих момента времени  $t_1$  и  $t_2$  так, чтобы интересующий нас момент времени  $t$  находился посередине между ними, т. е.  $t = t_1 + \frac{1}{2}\Delta = t_2 - \frac{1}{2}\Delta$ , где  $\Delta > 0$  — достаточно малая величина. Для дифференцируемого процесса при малом  $\Delta$  можем написать очевидные равенства

$$\xi_1 = \xi - \frac{1}{2}\Delta\xi, \quad \xi_2 = \xi + \frac{1}{2}\Delta\xi.$$

Если теперь в плотности вероятности  $W_2(\xi_1, \xi_2)$  перейти по известным правилам от переменных  $\xi_1, \xi_2$  к новым переменным  $\xi, \dot{\xi}$  и затем стремить  $\Delta \rightarrow 0$ , то получим

$$W_2(\xi, \dot{\xi}) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta W_2\left(\xi - \frac{1}{2}\Delta\xi, \xi + \frac{1}{2}\Delta\xi\right). \quad (9.3.9)$$

Применим формулу (9.3.6) к трем стационарным процессам: гармоническому колебанию со случайной начальной фазой, нормальному процессу и огибающей суммы гармонического сигнала и нормального узкополосного шума.

Плотность вероятности гармонического колебания  $s(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$  со случайной начальной фазой дается формулой (5.3.5). В данном случае условие (9.3.7) не выполняется, так как производная  $s'(t)$  оказывается жестко связанный с самим процессом  $s(t)$  соотношением

$$\dot{s}(t) = \omega_0 A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) = \pm \omega_0 \sqrt{A_0^2 - s^2}(t).$$

Поэтому совместная плотность вероятности равна

$$W_2(s, \dot{s}) = \frac{1}{2\pi \sqrt{A_0^2 - s^2}} \times \\ \times \left[ \delta\left(\dot{s} - \omega_0 \sqrt{A_0^2 - s^2}\right) + \delta\left(\dot{s} + \omega_0 \sqrt{A_0^2 - s^2}\right) \right], \quad |s| \leq A_0. \quad (9.3.10)$$

Подставив это выражение в формулу (9.3.6) и выполнив интегрирование согласно (П. 4), получим очевидный результат

$$N_1(C) = \int_0^\infty s W_2(C, s) ds = \frac{\omega_0}{2\pi} = f_0, \quad C < A_0. \quad (9.3.11)$$

#### § 4. ЧИСЛО ВЫБРОСОВ НОРМАЛЬНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Для нормального случайного процесса  $\xi(t)$  со средним значением  $m(t)$ , дисперсией  $\sigma^2(t)$  и функцией корреляции  $k(t_1, t_2)$  совместная плотность вероятности  $W_2(\xi, \xi)$  имеет следующий вид:

$$W_2(\xi, \xi) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-r^2}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)} \left[ \frac{(\xi-m)^2}{\sigma^2} - 2r \frac{(\xi-m)(\xi-m_1)}{\sigma_1} + \frac{(\xi-m_1)^2}{\sigma_1^2} \right] \right\}, \quad (9.4.1)$$

где

$$m_1 = m_1(t) = \frac{dm(t)}{dt},$$

$$\sigma_1^2 = \sigma_1^2(t) = \frac{\partial^2 k(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \Big|_{t_1=t_2=t}, \quad r(t) = \frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial k(t_1, t_2)}{\partial t_2} \Big|_{t_1=t_2=t}. \quad (9.4.2)$$

Среднее число выбросов находим подстановкой плотности вероятности (9.4.1) в основную формулу (9.3.5). Вычисления показывают, что в данном случае внутренний интеграл в формуле (9.3.5) будет равен

$$J(t) = \int_0^\infty \xi W_2(C, \xi) d\xi = \frac{\sigma_1 \sqrt{1-r^2(t)}}{2\pi} \times \\ \times \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{C-m}{\sigma} \right)^2 \right] \left\{ \exp \left( -\frac{1}{2} M^2 \right) + \sqrt{2\pi} \Phi(M) \right\}, \quad (9.4.3)$$

где  $\Phi(z)$  — интеграл вероятности,

$$M = M(t) = \frac{1}{\sqrt{1-r^2(t)}} \left[ \frac{m_1}{\sigma_1} + \left( \frac{C-m}{\sigma} \right) r(t) \right]. \quad (9.4.4)$$

Применимельно к разным частным случаям выражение (9.4.3) упрощается. Пусть нормальный процесс  $\xi(t)$  является стационарным с нулевым средним значением и функцией корреляции

$$k(\tau) = \sigma^2 R(\tau). \quad (9.4.5)$$

Формула (6.2.15) показывает, что в данном случае выполняется условие (9.3.7) и, следовательно, можно пользоваться формулой (9.3.8). Подставив в нее выражение (6.2.16) и выполнив интегрирование, получим

$$N_1(C) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{-R''_0} e^{-C^2/2\sigma^2}, \quad R''_0 = \frac{d^2 R(\tau)}{d\tau^2} \Big|_{\tau=0}. \quad (9.4.6)$$

Если во пользоваться формулой (3.10.11), то  $R''_0$  можно выразить через спектральную плотность:

$$-R''_0 = \frac{4\pi^2}{\sigma^2} \int_0^\infty f^2 S(f) df > 0.$$

Поэтому можем написать

$$N_1(C) = \frac{1}{\sigma} e^{-C^2/2\sigma^2} \left( \int_0^\infty f^2 S(f) df \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (9.4.7)$$

Приведем конечные формулы для среднего числа выбросов в единицу времени нормальных стационарных процессов с характерными спектральными плотностями (корреляционными функциями).

1) Пусть нормальный процесс имеет постоянную спектральную плотность  $S_0$  внутри полосы  $\Delta f$  с центральной частотой  $f_0$ , т. е.

$$S(f) = \begin{cases} S_0 & \text{при } |f - f_0| \leq \frac{1}{2} \Delta f, \\ 0 & \text{при } |f - f_0| > \frac{1}{2} \Delta f. \end{cases}$$

В данном случае

$$\int_0^\infty f^2 S(f) df = S_0 \int_{f_0 - \frac{1}{2} \Delta f}^{f_0 + \frac{1}{2} \Delta f} f^2 df = \sigma^2 f_0^2 \left[ 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{\Delta f}{f_0} \right)^2 \right], \quad \sigma^2 = S_0 \Delta f.$$

Следовательно,

$$N_1(C) = f_0 \sqrt{1 + \frac{1}{12} \left( \frac{\Delta f}{f_0} \right)^2} e^{-C^2/2\sigma^2}. \quad (9.4.8)$$

Для узкоголосого спектра ( $\Delta f \ll f_0$ ) справедливо приближенное равенство

$$\sqrt{1 + \frac{1}{12} \left( \frac{\Delta f}{f_0} \right)^2} = 1 + \frac{1}{24} \left( \frac{\Delta f}{f_0} \right)^2.$$

Поэтому можем написать

$$N_1(C) = f_0 \left[ 1 + \frac{1}{24} \left( \frac{\Delta f}{f_0} \right)^2 \right] e^{-C^2/2\sigma^2}, \quad \Delta f \ll f_0. \quad (9.4.9)$$

2) Если спектральная плотность шума равномерна в интервале частот от нуля до  $\Delta f$ , т. е.

$$S(f) = \begin{cases} S_0 & \text{при } 0 \leq f \leq \Delta f, \\ 0 & \text{при } f < 0, f > \Delta f, \end{cases}$$

то, полагая в (9.4.8)  $f_0 = \Delta f/2$ , получим

$$N_1(C) = \frac{\Delta f}{\sqrt{3}} e^{-C^2/2\sigma^2}. \quad (9.4.10)$$

3) Для нормального шума с гауссовой спектральной плотностью и функцией корреляции (6.9.5) формула (9.4.6) принимает вид:

$$N_1(C) = f_0 \sqrt{1 + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\Delta f_s}{f_0} \right)^2} e^{-C^2/2\sigma^2}. \quad (9.4.11)$$

4) Для низкочастотной спектральной плотности гауссовой формы

$$S(f) = S_0 \exp \left[ -\frac{\pi}{4} \left( \frac{f}{\Delta f_s} \right)^2 \right], \quad f \geq 0,$$

найдем

$$N_1(C) = \Delta f_s \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-C^2/2\sigma^2}. \quad (9.4.12)$$

5) Когда спектральная плотность определяется резонансной кривой одиночного колебательного контура с резонансной частотой  $f_0$  и энергетической полосой пропускания  $\Delta f_s$ , функция корреляции дается выражением (6.7.2). В данном случае из формулы (9.4.6) получим

$$N_1(C) = f_0 \sqrt{1 + \frac{1}{\pi^2} \left( \frac{\Delta f_s}{f_0} \right)^2} e^{-C^2/2\sigma^2}. \quad (9.4.13)$$

На основании анализа полученных формул можно сделать следующие общие выводы. 1) Среднее число выбросов нормального стационарного процесса с нулевым средним значением максимально на нулевом уровне ( $C = 0$ ) и всегда уменьшается с увеличением уровня  $C$ . 2) Среднее число выбросов на нулевом уровне всегда превышает значение центральной (средней) частоты  $f_0$  спектра шума [7]. 3) При одинаковых других параметрах ( $C/\sigma$ ,  $f_0$  и  $\Delta f_s$ ) среднее число выбросов больше для того процесса, спектральная плотность которого имеет более пологие «крылья».

Первый вывод очевиден и не требует пояснений. Второй и третий результаты объясняются тем, что случайный процесс, содержащий

более высокочастотные составляющие спектра, обладает «большей колебательностью» и, следовательно, имеет большее среднее число выбросов.

Если нормальный случайный процесс подвергается какому-либо линейному преобразованию, то в результате получается также нормальный процесс. Поэтому для определения среднего числа выбросов преобразованного процесса можно пользоваться формулами (9.3.5), (9.4.3) и (9.4.6), найдя по известным правилам необходимые статистические характеристики.

В качестве простейшего примера рассмотрим сумму (разность) двух нормальных стационарных процессов:

$$\xi(t) = \xi_1(t) \pm \xi_2(t).$$

Пусть процессы  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$  имеют нулевое среднее значение, автокорреляционные функции  $k_1(\tau)$  и  $k_2(\tau)$  и взаимокорреляционную функцию  $k_{12}(\tau) = k_{21}(\tau)$ .

Среднее число выбросов процесса  $\xi(t)$  находим по формуле (9.4.6), в которую нужно подставить

$$R(\tau) = \sigma^2 [k_1(\tau) + k_2(\tau) \pm 2k_{12}(\tau)], \quad \sigma^2 = k_1(0) + k_2(0) \pm 2k_{12}(0).$$

Положив здесь  $k_{12}(\tau) = 0$ , получим среднее число выбросов для суммы (разности) двух независимых нормальных стационарных процессов.

Предположим, что имеется сумма  $\zeta(t)$  гармонического колебания  $s(t)$  и нормального стационарного шума  $\xi(t)$ :

$$\zeta(t) = s(t) + \xi(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \xi(t). \quad (9.4.14)$$

Пусть шум  $\xi(t)$  имеет нулевое среднее значение и дважды дифференцируемую функцию корреляции (9.4.5).

Если воспользоваться известным выражением для совместной нормальной плотности вероятности величин  $\xi(t)$  и  $\zeta(t)$ , перейти в нем от переменных  $\xi$  и  $\zeta$  к переменным  $\zeta$  и  $\dot{\zeta}$  и затем полученное соотношение подставить в формулу

$$N_1(C) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_0^\infty \zeta W_2(C, \zeta) d\zeta, \quad (9.4.15)$$

обобщающую (9.3.6) на нестационарные процессы, то после некоторых преобразований можно получить следующие выражения для среднего числа выбросов случайного процесса  $\zeta(t)$  в единицу времени [8]:

$$N_{1\zeta}(C) = 2N_{1\xi}(0) \int_0^\pi \varphi \left( \frac{C}{\sigma} - a \cos \theta \right) \times \\ \times \left[ \varphi(b \sin \theta) + b \sin \theta \int_0^{b \sin \theta} \varphi(x) dx \right] d\theta, \quad (9.4.16)$$

$$N_{1\xi}(C) = N_{1\xi}(0) \sqrt{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(2n)}\left(\frac{C}{\sigma}\right)}{(n!)^2} \times \\ \times \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} {}_1F_1\left(-\frac{1}{2}; n+1; -\frac{1}{2}b^2\right). \quad (9.4.17)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{A_m}{\sigma}, \quad b = a \frac{\omega_0}{\sqrt{-R''_0}}, \quad N_{1\xi}(0) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{-R''_0}, \\ \varphi(z) &= \Phi'(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}, \quad \varphi^{(2n)}(z) = \frac{d^{2n}}{dz^{2n}} \varphi(z). \end{aligned} \right\} \quad (9.4.18)$$

Величина  $N_{1\xi}(0)$ , как следует из формулы (9.4.6), дает среднее число положительных выбросов нормального стационарного шума  $\xi(t)$  в единицу времени на нулевом уровне, а величина  $a$  характеризует отношение сигнал/шум.

Для среднего числа выбросов процесса  $\zeta(t)$  на нулевом уровне ( $C = 0$ ) формула (9.4.16) может быть несколько упрощена и приведена к виду [8]:

$$N_{1\xi}(0) = N_{1\xi}(0) \left[ e^{-a} I_0(\beta) + \frac{b^2}{2a} Ie\left(\frac{\beta}{a}, \alpha\right) \right], \quad (9.4.19)$$

где  $I_0(z)$  — функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента;

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{4} a^2 \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{R''_0} \right), \quad \beta = \frac{1}{4} a^2 \left( 1 + \frac{\omega_0^2}{R''_0} \right), \\ Ie(k, x) &= \int_0^x e^{-u} I_0(ku) du. \end{aligned} \right\} \quad (9.4.20)$$

Из формулы (9.4.16) получаются известные частные результаты. Если сигнал отсутствует ( $a = 0$ ), то она переходит в (9.4.6). Чтобы получить среднее число выбросов в единицу времени гармонического колебания, нужно предположить, что интенсивность шума стремится к нулю ( $\sigma \rightarrow 0$ ). Тогда получим очевидный результат

$$N_1(C) = \begin{cases} \frac{\omega_0}{2\pi}, & C < A_m, \\ 0, & C > A_m. \end{cases}$$

При выполнении практических расчетов формулой (9.4.19) следует пользоваться при  $C = 0$  и учитывать наличие таблиц интеграла  $Ie(k, x)$  [8], а формулами (9.4.16) и (9.4.17) — при  $C \neq 0$  и использовать имеющиеся таблицы интеграла вероятности и его

первых двадцати производных [9], а также таблицы вырожденной гипергеометрической функции [10]. Число членов, которое необходимо учитывать в формуле (9.4.17), существенно зависит от значения отношения сигнал/шум  $a$ . Чем больше  $a$ , тем медленнее сходится ряд. Однако при больших  $a$  и  $b$  формулы (9.4.16), (9.4.17) можно упростить [11].

## § 5. ЧИСЛО ВЫБРОСОВ ОГИБАЮЩЕЙ, ФАЗЫ И ЧАСТОТЫ

Применим формулу (9.3.6) к огибающей  $V(t)$  суммы гармонического сигнала и узкополосного шума. Для этого воспользуемся формулой (7.5.9):

$$\left. \begin{aligned} W_2(V, V) &= W(V) w(V) = \frac{V}{\sigma^3 \sqrt{-2\pi\rho_0}} \times \\ &\times \exp\left(-\frac{V^2 + A_m^2}{2\sigma^2} + \frac{V^2}{2\sigma^2 \rho_0''}\right) I_0\left(\frac{VA_m}{\sigma^2}\right), \quad V \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.5.1)$$

Подставив это выражение в формулу (9.3.6) и выполнив интегрирование, получим

$$\left. \begin{aligned} N_1(C) &= \sqrt{-\frac{\rho_0''}{2\pi}} \left( \frac{C}{\sigma} \right) \exp\left(-\frac{C^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}a^2\right) I_0\left(a \frac{C}{\sigma}\right), \\ a &= \frac{A_m}{\sigma}, \quad C \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.5.2)$$

Полагая здесь  $a = 0$ , находим среднее число положительных выбросов в единицу времени огибающей  $A(t)$  квазигармонического шума:

$$N_1(C) = \sqrt{-\frac{\rho_0''}{2\pi}} \left( \frac{C}{\sigma} \right) \exp\left(-\frac{C^2}{2\sigma^2}\right), \quad C \geq 0. \quad (9.5.3)$$

Решая уравнение

$$T \sqrt{-\frac{\rho_0''}{2\pi}} \left( \frac{C}{\sigma} \right) \exp\left(-\frac{C^2}{2\sigma^2}\right) = n_0$$

относительно  $T$  или  $C/\sigma$ , можно найти время  $T$ , при котором огибающая  $A(t)$  пересекает с положительным наклоном фиксированный уровень  $C/\sigma$  в среднем  $n_0$  раз, или же при заданном времени  $T$  определить соответствующий пороговый уровень  $C/\sigma$ .

Если спектральная плотность квазигармонического шума постоянна в интервале частот  $|f - f_0| \ll \Delta f/2$  и равна нулю вне этого интервала, то, как следует из (6.9.2),

$$\rho(\tau) = \sin\left(\frac{1}{2} \Delta\omega\tau\right) / \left(\frac{1}{2} \Delta\omega\tau\right), \quad \rho_0'' = \left. \frac{d^2\rho(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=0} = -\frac{1}{3} \left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2$$

и, следовательно, формула (9.5.3) принимает вид

$$N_1(C) = n_1(C) = \Delta f \sqrt{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{C}{\sigma}\right) \exp\left(-\frac{C^2}{2\sigma^2}\right). \quad (9.5.4)$$

Для гауссовой формы спектральной плотности на основании (6.9.5) имеем

$$\rho(\tau) = \exp(-\pi \Delta f_s^2 \tau^2), \quad \rho''_0 = -2\pi \Delta f_s^2.$$

Поэтому

$$N_1(C) = n_2(C) = \Delta f_s \frac{C}{\sigma} \exp\left(-\frac{C^2}{2\sigma^2}\right). \quad (9.5.5)$$

Для огибающей  $V(t)$  суммы гармонического сигнала и квазигармонического шума формулы (9.5.4) и (9.5.5) принимают соответственно вид

$$N_1(C) = n_1(C) e^{-a^2/2} I_0\left(\frac{aC}{\sigma}\right), \quad (9.5.6)$$

$$N_1(C) = n_2(C) e^{-a^2/2} I_0\left(\frac{aC}{\sigma}\right). \quad (9.5.7)$$

Среднее число выбросов случайной фазы  $\phi(t)$  квазигармонического шума равно

$$N_1(C) = \frac{1}{4\pi} \sqrt{-\rho''_0}. \quad (9.5.8)$$

Видно, что среднее число выбросов фазы квазигармонического шума не зависит от уровня и определяется только «шириной» спектральной плотности. Этот результат согласуется с тем фактом (7.2.7), что плотность вероятности для случайной фазы  $\phi(t)$  является равномерной на интервале  $(-\pi, \pi)$ .

Компактную формулу для числа выбросов случайной фазы  $\theta(t)$  суммы гармонического сигнала и узкополосного шума удается получить лишь при больших отношениях сигнал/шум ( $a \gg 1$ ). Практически при  $a \geq 3$  с некоторым приближением можно пользоваться формулой (7.9.4):

$$\theta(t) = A_s(t)/A_m, \quad a \gg 3. \quad (9.5.9)$$

В данном случае фаза  $\theta(t)$  представляет нормальный стационарный процесс и число выбросов можно подсчитать по формуле (9.4.6).

Среднее число выбросов случайной частоты  $\phi(t)$  определяется формулой

$$N_1(C) = \frac{1}{2\pi(C^2 - \rho''_0)} \sqrt{\rho''_0(4\rho''_0 C^2 + \rho''_0^2 - \rho''_0^{(4)})}, \quad \rho''_0^{(4)} = \frac{d^4 \rho(\tau)}{d\tau^4} \Big|_{\tau=0}. \quad (9.5.10)$$

Как следует из (9.5.9), при больших отношениях сигнал/шум случайная частота  $\dot{\theta}(t)$  является приближенно нормальным стационарным процессом. Воспользовавшись для этого случая формулой (9.4.6), получим

$$N_1(C) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{-\rho''_0^{(4)}}{\rho''_0}} \exp\left(\frac{a^2 C^2}{2\rho''_0}\right). \quad (9.5.11)$$

Естественным обобщением случайной огибающей  $A(t)$  квазигармонического шума является  $\chi$ -процесс, определяемый формулой

$$\chi(t) = \left( \sum_{k=1}^n \xi_k^2(t) \right)^{1/2}. \quad (9.5.12)$$

Можно показать [12], что если  $\xi_k(t)$  — нормальные стационарные процессы с нулевым средним значением и одинаковыми функциями автокорреляции  $\sigma^2 \rho(\tau)$ , взаимно независимые хотя бы в совпадающие моменты времени, то совместная плотность вероятности для  $\chi = \chi(t)$  и  $\dot{\chi} = \dot{\chi}(t)$  имеет вид

$$W_2(\chi, \dot{\chi}) = W(\chi) w(\chi), \quad (9.5.13)$$

где

$$w(\chi) = \frac{1}{\sigma} \sqrt{-2\pi \rho''_0} \exp\left(-\frac{\chi^2}{2\sigma^2 \rho''_0}\right), \quad (9.5.14)$$

$$W(\chi) = \begin{cases} \left[ 2^{\frac{n}{2}-1} \sigma^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \right]^{-1} \chi^{n-1} \exp\left(-\frac{\chi^2}{2\sigma^2}\right), & \chi \geq 0, \\ 0, & \chi < 0. \end{cases}$$

Подстановка выражений (9.5.14) в формулу (9.3.8) дает

$$N_1(C) = \sigma \sqrt{-\frac{\rho''_0}{2\pi}} W(C), \quad C \geq 0. \quad (9.5.15)$$

Нетрудно убедиться, что при  $n=2$  формула (9.5.15) совпадает с (9.5.3).

## § 6. ЧИСЛО ВЫБРОСОВ ПОСЛЕ НЕЛИНЕЙНОГО БЕЗЫНЕРЦИОННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Пусть исходный случайный процесс  $\xi(t)$  с известными статистическими характеристиками подвергается некоторому детерминированному преобразованию какой-либо системой, в результате чего получается случайный процесс  $\eta(t)$ , и требуется найти среднее число выбросов процесса  $\eta(t)$ .

Как указывалось в § 3, для вычисления среднего числа выбросов случайного процесса  $\eta(t)$  необходимо знать совместную плотность

вероятности  $W_2(\eta, \eta)$  для самого процесса  $\eta(t)$  и его производной  $\dot{\eta}(t)$  в совпадающие моменты времени. Эта совместная плотность вероятности может быть найдена по двумерной плотности вероятности процесса  $W_2(\eta(t_1), \eta(t_2))$ . Поэтому для решения сформулированной задачи необходимо предварительно найти плотность вероятности  $W_2(\eta(t_1), \eta(t_2))$  по известным статистическим характеристикам исходного процесса  $\xi(t)$  и известным параметрам системы, осуществляющей указанное преобразование. При этом для процесса  $\xi(t)$  в общем случае должны быть известны все нужные статистические характеристики, а не только двумерная плотность вероятности  $W_2(\xi(t_1), \xi(t_2))$ .

Принципиально эта задача имеет решение всегда: для этого следует воспользоваться аппаратом корреляционных, моментных или квазимоментных функций [13]. Однако практическое решение задачи связано с выполнением весьма трудоемких вычислений. Исключение здесь составляют линейное преобразование нормального случайногопроцесса  $\xi(t)$  и функциональное (нелинейное безынерционное) преобразование любого случайного процесса  $\xi(t)$ .

В первом случае необходимо вычислить лишь среднее значение и функцию корреляции для  $\eta(t)$ , которые полностью определяют нормальную плотность вероятности процесса  $\eta(t)$ . При функциональных преобразованиях случайных процессов в § 1 гл. 5 были установлены сравнительно простые правила «пересчета» непосредственно самих плотностей вероятностей. Применим их к задаче вычисления среднего числа выбросов.

Предположим, что функциональное преобразование  $y = f(x)$  является взаимно однозначным и  $x = \varphi(y)$  есть обратная функция. Пусть

$$\eta(t) = f(\xi(t)) \quad (9.6.1)$$

и для случайного процесса  $\xi(t)$  известна совместная плотность вероятности  $W_2(\xi, \xi)$ .

Среднее число выбросов процесса  $\xi(t)$  на уровне  $C_\xi$  определяется формулой вида (9.3.5):

$$N_\xi(C_\xi, T) = \int_0^T dt \int_0^\infty \xi W_2(C_\xi, \xi) d\xi.$$

Перейдем в этой формуле к новой переменной  $\eta$  согласно соотношению  $\xi = \varphi'(C)\eta$ , где  $C = f(C_\xi)$ . Учитывая свойство четности совместной плотности вероятности  $W_2(\xi, \xi)$  относительно производной  $\xi$ , независимо от знака функции  $\varphi'(C)$  можем написать

$$N_\xi(C_\xi, T) = \int_0^T dt \int_0^\infty \dot{\eta} W_2(C_\xi, \varphi'(C)\eta) \varphi'^2(C) d\eta, \quad C_\xi = \varphi(C). \quad (9.6.2)$$

Воспользовавшись формулой (5.1.10), находим совместную плотность вероятности для  $\eta(t)$  и  $\dot{\eta}(t)$ :

$$W_2(\eta, \dot{\eta}) = W_2(\varphi(\eta), \varphi'(\eta)\dot{\eta}) \varphi'^2(\eta). \quad (9.6.3)$$

Поэтому среднее число выбросов процесса  $\eta(t)$  на уровне  $C = f(C_\xi)$  равно:

$$N_\eta(C, T) = \int_0^T dt \int_0^\infty \eta W_2(\varphi(C), \varphi'(C)\eta) \varphi'^2(C) d\eta. \quad (9.6.4)$$

Из сравнения формул (9.6.2) и (9.6.4) получаем

$$N_\eta(C, T) = N_\xi(\varphi(C), T). \quad (9.6.5)$$

Формула (9.6.5), по существу, выражает очевидный физический результат, что при взаимно однозначном функциональном преобразовании (9.6.1) всегда существует однозначное соответствие между каждым пересечением процессом  $\eta(t)$  уровня  $C$  и каждым пересечением процессом  $\xi(t)$  уровня  $C_\xi$ . Следует, однако, заметить, что если характеристика функционального преобразования является монотонно возрастающей функцией, то каждый положительный выброс  $\xi(t)$  преобразуется также в положительный выброс  $\eta(t)$ . Наоборот, при монотонно убывающей функции  $f(\xi)$  каждый положительный выброс  $\xi(t)$  преобразуется в отрицательный выброс  $\eta(t)$ . Но при фиксированном уровне число положительных выбросов равно числу отрицательных выбросов. Поэтому знак производной  $\varphi'(C)$  не входит в явном виде в формулы (9.6.2) и (9.6.4), определяющие среднее число выбросов.

Характерное свойство функциональных преобразований состоит в следующем. Пусть исходный процесс  $\xi(t)$  и его производная  $\dot{\xi}(t)$  были независимыми в совпадающие моменты времени. Тогда для преобразованного процесса  $\eta(t)$  и его производной  $\dot{\eta}(t)$  свойство независимости, как правило, не сохраняется. Это следует из того, что при преобразовании переменных в правую часть соотношения (9.6.3) вместо  $\xi$  вошло произведение  $\dot{\xi} = \varphi'(\eta)\eta$ , зависящее как от  $\eta$ , так и от  $\dot{\eta}$ .

В подтверждение сказанного рассмотрим пример. Вычислим среднее число выбросов квадрата огибающей квазигармонического шума  $A(t)$  [14]:

$$\eta(t) = A^2(t), \quad A > 0. \quad (9.6.6)$$

Полагая в формуле (9.5.1)  $a=0$ ,  $V(t)=A(t)$  и переходя от переменных  $A$  и  $A$  к новым переменным  $\eta$  и  $\dot{\eta}$  согласно равенствам  $A = \sqrt{\eta}$ ,  $A = \eta/2\sqrt{\eta}$ , получим

$$W_2(\eta, \dot{\eta}) = \frac{1}{4\sigma^3 \sqrt{-2\pi\rho_0''\eta}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \left( \eta - \frac{\dot{\eta}}{4\rho_0''\eta} \right) \right] \neq W(\eta)w(\eta).$$

По формуле (9.3.6) находим среднее число выбросов в единицу времени:

$$N_1(C) = \sqrt{-\frac{\rho_0 C}{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{C^2}{2\sigma^2}\right). \quad (9.6.7)$$

## § 7. ДИСПЕРСИЯ ЧИСЛА ВЫБРОСОВ

Предположим, что имеется  $m$  реализаций (осцилограмм) некоторого случайного процесса  $\xi(t)$ , каждая из которых получена при одинаковых условиях и имеет фиксированную длительность  $T$ . Обозначим эти реализации через  $\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_m(t)$ , а число положительных выбросов в первой, второй и т. д. реализациях на уровне  $C$  — соответственно через  $N_1(C, T), N_2(C, T), \dots, N_m(C, T)$ .

Среднее статистическое число выбросов определяется формулой

$$N(C, T) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m N_i(C, T), \quad (9.7.1)$$

а дисперсия числа выбросов равна

$$\sigma_N^2(C, T) = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m \{N_i(C, T) - N(C, T)\}^2. \quad (9.7.2)$$

Располагая достаточно большим числом  $m$  реализаций случайного процесса, по этим формулам можно экспериментально определить величины  $N(C, T)$  и  $\sigma_N(C, T)$ , подвергая реализации соответствующей статистической обработке.

Ранее мы убедились, что среднее число выбросов  $N(C, T)$  легко вычисляется по формуле (9.3.5). При определении аналитическим путем дисперсии числа выбросов возникают некоторые вычислительные трудности. Поэтому ее обычно находят при помощи численного интегрирования [15, 16] или же экспериментально [3, 17, 18].

Получим аналитическое выражение для дисперсии числа выбросов [16, 19]. Разобьем интервал времени  $(0, T)$  на  $n$  одинаковых неперекрывающихся малых подинтервалов  $\Delta t_j = \Delta t = \text{const}$ , причем  $n\Delta t = T$ . Возьмем длину элементарного подинтервала  $\Delta t$  настолько малой, чтобы можно было пренебречь вероятностью более чем одного пересечения уровня  $C$ .

Поставим каждой реализации  $\xi_i(t)$  в соответствие  $n$  случайных величин  $\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta_{ij}, \dots, \delta_{in}$ , определенных следующим образом. Случайная величина  $\delta_{ij}$  может принимать лишь два значения 0 и 1, причем  $\delta_{ij}=1$ , если в  $j$ -м подинтервале реализация  $\xi_i(t)$  пересекает уровень  $C$  снизу вверх и  $\delta_{ij}=0$  в противном случае.

Очевидно, что число положительных выбросов реализации  $\xi_i(t)$  в интервале  $(0, T)$  определяется выражением

$$N_i(C, T) = \sum_{j=1}^n \delta_{ij},$$

а среднее число выбросов равно:

$$N(C, T) = \langle N_i(C, T) \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \delta_{ij} \rangle. \quad (9.7.3)$$

В соответствии с определением случайной величины  $\delta_{ij}$  ее среднее значение на фиксированном подинтервале  $j$  равно:

$$\langle \delta_{ij} \rangle = 0 \cdot P(\delta_{ij}=0) + 1 \cdot P(\delta_{ij}=1) = P(\delta_{ij}=1) = N(C, \Delta t_j), \quad (9.7.4)$$

где через  $P$  обозначена вероятность соответствующего события.

Подставив (9.7.4) в (9.7.3), приходим к результату:

$$N(C, T) = \sum_{i=1}^n N(C, \Delta t_j), \quad (9.7.5)$$

который согласуется с (9.3.5).

Для среднего квадрата числа выбросов в интервале  $(0, T)$  по определению можем написать

$$\{N^2(C, T)\} = \langle N_i^2(C, T) \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \delta_{ij}^2 \rangle + \sum_{j, k=1}^n \langle \delta_{ij} \delta_{ik} \rangle. \quad (9.7.6)$$

При фиксированном подинтервале  $j$  средний квадрат величины  $\delta_{ij}$  определяется выражением, аналогичным (9.7.4):

$$\langle \delta_{ij}^2 \rangle = (0 \cdot 0) P(\delta_{ij}=0) + (1 \cdot 1) P(\delta_{ij}=1) = P(\delta_{ij}=1) = N(C, \Delta t_j). \quad (9.7.7)$$

Средние значения слагаемых  $\delta_{ij}, \delta_{ik}$  с различными, но фиксированными индексами  $j$  и  $k$  при  $j \neq k$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \delta_{ij} \delta_{ik} \rangle &= (0 \cdot 0) P(\delta_{ij}=0, \delta_{ik}=0) + (0 \cdot 1) P(\delta_{ij}=0, \delta_{ik}=1) + \\ &+ (1 \cdot 0) P(\delta_{ij}=1, \delta_{ik}=0) + (1 \cdot 1) P(\delta_{ij}=1, \delta_{ik}=1) = \\ &= P(\delta_{ij}=1, \delta_{ik}=1) = F(t_j, t_k) \Delta t_j \Delta t_k, \end{aligned} \quad (9.7.8)$$

где  $t_j = j\Delta t, t_k = k\Delta t$ .

Функция  $F(t_j, t_k) \Delta t_j \Delta t_k$  представляет собой вероятность следующего сложного события: реализация  $\xi_i(t)$  пересекает уровень  $C$  с положительной производной и в интервале  $(t_j - \frac{1}{2} \Delta t_j, t_j + \frac{1}{2} \Delta t_j)$ , и в интервале  $(t_k - \frac{1}{2} \Delta t_k, t_k + \frac{1}{2} \Delta t_k)$ . При помощи рассуждений,

аналогичных тем, которые привели к формуле (9.3.5), можно убедиться, что

$$F(t_j, t_k) = \int_0^\infty \int_0^\infty \xi_j \xi_k W_4(C, \xi_j, C, \xi_k) d\xi_j d\xi_k, \quad (9.7.9)$$

где  $W_4(\xi(t_j), \xi(t_k), \xi(t_k), \xi(t_k))$  — совместная плотность вероятности для значений процесса и его производных в два разных момента времени.

Подставив выражения (9.7.7.) и (9.7.8) в (9.7.6) и переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ , находим средний квадрат числа выбросов

$$\{N^2(C, T)\} = N(C, T) + \int_0^T \int_0^T F(t_j, t_k) dt_j dt_k. \quad (9.7.10)$$

Дисперсия числа выбросов по определению равна

$$\sigma_N^2(C, T) = \{N^2(C, T)\} - N^2(C, T). \quad (9.7.11)$$

Отсюда с учетом (9.7.10) получаем окончательную формулу

$$\sigma_N^2(C, T) = N(C, T) - N^2(C, T) + \int_0^T \int_0^T F(t_j, t_k) dt_j dt_k, \quad (9.7.12)$$

где функция  $F(t_j, t_k)$  определена выражением (9.7.9).

Для большинства процессов аналитически не удается до конца выполнить интегрирование в формуле (9.7.12) и обычно вычисления выполняют при помощи численного интегрирования.

Формула (9.7.12) несколько упрощается, если ограничиться рассмотрением стационарных процессов, считать уровень нулевым ( $C = 0$ ) и интересоваться полным числом нулей (т. е. пересечениями нулевого уровня снизу вверх и сверху вниз). На основании формулы (9.3.5) среднее число нулей стационарной случайной функции  $\xi(t)$  на интервале  $T$  равно

$$\begin{aligned} N_0(T) &= T \left[ \int_0^\infty \xi W_2(0, \xi) d\xi - \int_{-\infty}^0 \xi W_2(0, \xi) d\xi \right] = \\ &= T \int_{-\infty}^\infty |\xi| W_2(0, \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (9.7.13)$$

Дисперсия числа нулей на интервале  $T$  определяется формулой

$$\sigma_0^2(T) = N_0(T) - N_0^2(T) + \int_0^T \int_0^T F(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad (9.7.14)$$

где

$$F(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty |\xi_1| |\xi_2| W_4(0, \xi_1, 0, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2. \quad (9.7.15)$$

Применение этих формул к нормальному стационарному процессу с нулевым средним значением и функцией корреляции

$$k(\tau) = \sigma^2 R(\tau) \quad (9.7.16)$$

приводит к следующим результатам [7, 15, 18]:

$$\sigma_0^2(T) = N_0(T) - N_0^2(T) + \frac{2}{\pi^2} \int_0^T (T - \tau) \frac{1 + g(\tau) \operatorname{arc tg} g(\tau)}{1 - R^2(\tau)} \sqrt{h(\tau)} d\tau, \quad (9.7.17)$$

где

$$N_0(T) = \frac{T}{\pi} \sqrt{-R''_0} \quad (9.7.18)$$

$$\left. \begin{aligned} g(\tau) &= \frac{[1 - R^2(\tau)] R''(\tau) + R'^2(\tau) R(\tau)}{\sqrt{1 - R^2(\tau)} \sqrt{h(\tau)}}, \\ h(\tau) &= [1 - R^2(\tau)] [R''_0 - R''^2(\tau)] + \\ &\quad + 2 [R''_0 - R''(\tau) R(\tau)] R'^2(\tau) + R'^4(\tau), \\ &\quad - \frac{1}{2} \pi \leq \operatorname{arc tg} g(\tau) \leq \frac{1}{2} \pi. \end{aligned} \right\} \quad (9.7.19)$$

Численные расчеты по формуле (9.7.17) для коэффициента корреляции вида (6.9.5)

$$R(\tau) = \exp[-\pi (\Delta f_0 \tau)^2] \cos 2\pi f_0 \tau, \quad \Delta f_0 = 0,376 f_0 \quad (9.7.20)$$

приводят к следующему результату [15]:

$$\sigma_0^2(T) = 0,268 f_0 T, \quad N_0(T) = 2,022 f_0 T. \quad (9.7.21)$$

В том случае, когда нормальный шум является узкополосным, и, следовательно, коэффициент корреляции  $R(\tau)$  быстро осциллирует, расчеты по формуле (9.7.17) затруднены. Можно показать [16], что когда спектральная плотность квазигармонического шума симметрична относительно частоты  $f_0$  и коэффициент корреляции имеет вид

$$R(\tau) = \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau, \quad (9.7.22)$$

дисперсия числа нулей в интервале  $(0, T)$ , где  $2f_0 T$  — целое число, определяется формулой

$$\sigma_0^2(T) = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \arcsin^2 \rho(T) + \frac{2}{\pi^2} \int_0^T (T - \tau) \frac{\rho'^2(\tau)}{1 - \rho^2(\tau)} d\tau, \quad (9.7.23)$$

где  $-\frac{1}{2}\pi \leq \arcsin \rho(T) \leq \frac{1}{2}\pi$ .

Когда произведение  $2f_0 T$  есть не целое число, дисперсия числа нулей может отличаться от значения, даваемого формулой (9.7.23), не более чем на  $1/4$ .

Для малых и больших  $T$  из формулы (9.7.23) можно получить простые предельные соотношения. При малых  $T$  ( $T \ll \tau_k$ , где  $\tau_k$  — время корреляции шума) справедливы приближенные равенства

$$\rho'(T) \approx 0, \quad \rho(T) = 1 + \frac{1}{2} \rho_0'' T^2.$$

Поэтому определяющую роль играют первые два члена в правой части формулы (9.7.23). Разлагая далее арксинус в ряд Тейлора в окрестности точки  $\rho = 1$  и ограничиваясь первыми двумя членами разложения, получим

$$\sigma_0^2(T) = \frac{1}{\pi} T \sqrt{-\rho_0''}, \quad T \ll \tau_k. \quad (9.7.24)$$

Если  $T \rightarrow \infty$ , то из (9.7.23) имеем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sigma_0^2(T)}{T} = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\rho'^2(\tau)}{1 - \rho^2(\tau)} d\tau.$$

На основании этого можем написать приближенное соотношение

$$\sigma_0^2(T) \approx T \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\rho'^2(\tau)}{1 - \rho^2(\tau)} d\tau, \quad T \gg \tau_k. \quad (9.7.25)$$

Без вывода приведем две окончательные формулы для дисперсии числа выбросов [16]. Дисперсия числа нулей квазигармонического шума на интервале  $(0, T)$  с положительной производной, когда величина  $f_0 T$  есть целое число, равна

$$\sigma_{0+}^2(T) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4\pi} \arcsin \rho(T) + \frac{1}{4} \sigma_0^2(T), \quad (9.7.26)$$

где  $\sigma_0^2(T)$  определяется по формуле (9.7.23).

Количественные результаты, полученные численными расчетами по формуле (9.7.26) для четырех коэффициентов корреляции  $\rho(\tau)$  вида, указанного в 3—6 строках табл. 3.14.1, обозначены соответственно через  $\sigma_3^2$  —  $\sigma_6^2$  и приведены в табл. 9.7.1

Таблица 9.7.1

$\sigma_{0+}^2(T)$	$\Delta f_0 T$	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$\sigma_3^2$	0,226853	0,271681	0,311056	0,347360	0,381962	0,415658	0,448879	0,481853	
$\sigma_4^2$	0,215766	0,262136	0,299951	0,334202	0,366686	0,398323	0,429549	0,460584	
$\sigma_5^2$	0,206665	0,252545	0,289370	0,321346	0,351461	0,381004	0,410426	0,439829	
$\sigma_6^2$	0,166111	0,218072	0,259523	0,310940	0,328961	0,353126	0,373822	0,393303	
$\sigma_{0+}^2(T)$	$\Delta f_0 T$	3,0	5,0	8,0	10	15	20	30	40
$\sigma_3^2$	0,645723	0,973003	1,463913	1,791189	2,609375	3,427565	5,063964	6,700363	
$\sigma_4^2$	0,615311	0,924543	1,388310	1,697622	2,470576	3,243782	4,789940	6,336100	
$\sigma_5^2$	0,586826	0,880821	1,321814	1,615809	2,350799	3,085785	4,555751	6,025736	
$\sigma_6^2$	0,534299	0,823795	1,265721	1,562572	2,308558	3,057528	4,557520	6,064996	

Дисперсия полного числа нулей на интервале  $(0, T)$  суммы гармонического колебания  $s(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$  и квазигармонического шума  $\xi(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$ , имеющего коэффициент корреляции (9.7.22), если  $2f_0 T$  — целое число, определяется формулой

$$\sigma_0^2(T) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^T (T - \tau) \frac{\rho'^2(\tau)}{1 - \rho^2(\tau)} \exp \left\{ -\frac{A_m^2}{\sigma^2 [1 + \rho(\tau)]} \right\} d\tau + \\ + \frac{1}{2} \int_{\rho(T)}^1 \Psi \left( \frac{A_m}{\sigma} \sin \varphi_0, \gamma \right) \frac{d\rho}{d\rho} \Psi \left( \frac{A_m}{\sigma} \cos \varphi_0, \gamma \right) d\rho. \quad (9.7.27)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \Psi(z, \gamma) &= 1 - \frac{4}{\pi} \int_0^\pi \exp \left( -\frac{1}{2} z^2 \sec^2 \theta \right) d\theta, \\ \gamma(\tau) &= \frac{1}{2} \arg \cos \rho(\tau). \end{aligned} \right\} \quad (9.7.28)$$

Из формулы (9.7.27) видно, что в данном случае дисперсия числа нулей зависит от начальной фазы  $\varphi_0$  гармонического колебания: она имеет наибольшее значение при  $\varphi_0 = \pm\pi/2$  и наименьшее значение при  $\varphi_0 = 0$  или  $\varphi_0 = \pi$ .

Анализ экспериментальных и некоторых аналитических результатов позволяет сделать следующие выводы [18].

1. При фиксированных других параметрах среднеквадратичное значение числа выбросов  $\sigma_N(C, T)$  растет с увеличением длительности интервала  $T$ , а отношение  $\sigma_N(C, T)/N(C, T)$  при этом уменьшается.

2. Величина  $\sigma_N(C, T)$  с повышением уровня  $C$  растет, а отношение  $\sigma_N(C, T)/N(C, T)$  достигает максимума при некотором уровне, зависящем от отношения сигнал/шум  $a = A_m/\sigma$ . С увеличением  $a$  отношение  $\sigma_N(C, T)/N(C, T)$  уменьшается.

3. Для квазигармонического шума величина  $\sigma_{0+}(T)$  и отношение  $\sigma_{0+}(T)/N(0, T)$  растут с увеличением ширины энергетического спектра шума.

4. Расстройка частоты сигнала относительно центральной частоты спектра шума увеличивает значения  $\sigma_N(C, T)$  и  $\sigma_N(C, T)/N(C, T)$  по сравнению с минимальными, имеющими место при совпадении центральных частот.

## § 8. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМУМОВ

Найдем распределение максимумов стационарной случайной функции  $\xi(t)$  (рис. 9.4), которую в дальнейшем будем считать непрерывной вместе с первой производной  $\dot{\xi}(t)$ . В некоторые моменты

времени  $t_i$  реализация имеет максимумы. Как известно, в точках  $t_i$  выполняются условия

$$\dot{\xi}(t_i) = 0, \quad \ddot{\xi}(t_i) < 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (9.8.1)$$

Найдем плотность вероятности для максимумов случайной функции  $\xi(t)$ , т. е. найдем закон распределения максимумов в зависимости от их высоты [2, 20]. При этом предполагается известной трехмерная плотность вероятности  $W_3(\xi(t), \dot{\xi}(t), \ddot{\xi}(t))$ .

Такие данные представляют интерес при статистическом описании волнующейся поверхности моря, при количественной оценке микрошерошковатости обработанной (шлифованной) поверхности и т. п.

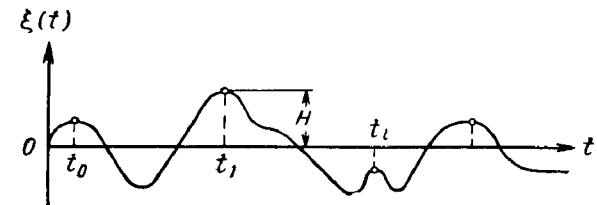


Рис. 9.4 Реализация случайной функции и ее максимумы.

Из непрерывности функции  $\xi(t)$  следует, что на достаточно малом интервале  $\Delta t$ , т. е. внутри промежутка  $t < t' \leq t + \Delta t$ , может быть не более одного максимума (или минимума). Таким образом, на интервале  $\Delta t$  может быть один максимум или же ни одного максимума. Обозначим через  $P_1(H, t)$  вероятность того, что на интервале  $\Delta t$  будет один максимум, величина которого заключена между  $(H - \Delta H, H)$ , а через  $P_0(H, t)$  — вероятность того, что не будет такого максимума. Очевидно, что среднее число максимумов на интервале  $\Delta t$ , величина которых заключена между  $H - \Delta H$  и  $H$ , равно

$$n_m(H, t) = 1 \cdot P_1(H, t) + 0 \cdot P_0(H, t) = P_1(H, t), \quad (9.8.2)$$

т. е. совпадает с  $P_1$ .

Пусть момент времени  $t_0$  соответствует максимуму случайной функции  $\xi(t)$ . Тогда выражение

$$dp = W_3(H(t_0), \dot{\xi}(t_0), \ddot{\xi}(t_0)) \Delta H (-\Delta \xi) \Delta \ddot{\xi} \quad (9.8.3)$$

при  $\dot{\xi}(t_0) = 0, \ddot{\xi}(t_0) < 0$  определяет вероятность того, что на интервале  $t_0 < t' < t_0 + \Delta t$  будет максимум, величина которого заключена между  $(H - \Delta H, H)$ , при этом первая производная находится между нулем и  $(-\Delta \xi)$ , а вторая производная заключена в интервале  $(\xi - \Delta \ddot{\xi}, \xi)$  (рис. 9.5).

Из непрерывности первой производной  $\dot{\xi}(t)$  следует, что на малом интервале  $\Delta t$ , т. е. внутри промежутка  $t_0 < t' < t_0 + \Delta t$ , она близка к прямой:

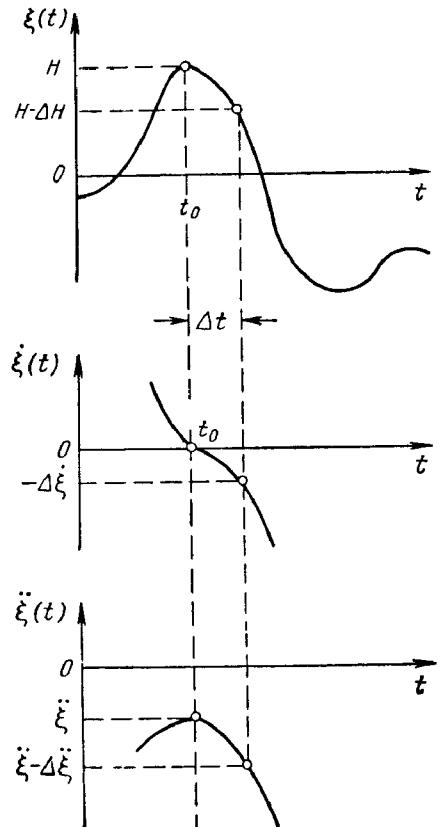


Рис. 9.5. Характер изменения первой и второй производных в окрестности максимума.

$$\dot{\xi}(t') = \dot{\xi}(t_0) + \xi(t_0)(t' - t_0)$$

или

$$\Delta \xi = \xi(t_0 + \Delta t) - \xi(t_0) = \dot{\xi}(t_0) \Delta t. \quad (9.8.4)$$

Подставив это выражение в (9.8.3), получим

$$dp = -\Delta t W_3(H, 0, \xi) \Delta H \Delta \xi. \quad (9.8.5)$$

Проинтегрировав правую часть последнего выражения по всем отрицательным значениям второй производной (от  $-\infty$  до 0), находим вероятность  $P_1(H, t)$  того, что максимум будет находиться в элементарном прямоугольнике  $\Delta H \Delta t$ :

$$P_1(H, t) = -\Delta t \Delta H \int_{-\infty}^0 W_3(H, 0, \xi) \xi d\xi. \quad (9.8.6)$$

Как показывает формула (9.8.2), вероятность  $P_1$  совпадает со средним числом соответствующих максимумов:

$$n_m(H, t) = -\Delta t \Delta H \int_{-\infty}^0 \xi W_3(H, 0, \xi) d\xi. \quad (9.8.7)$$

Поделив обе части этого равенства на  $\Delta t$ , находим среднее число максимумов в единицу времени, величина которых заключена в интервале  $(H - \Delta H, H)$ :

$$n_{1m}(H, t) = n_{1m}(H) = -\Delta H \int_{-\infty}^0 \xi W_3(H, 0, \xi) d\xi. \quad (9.8.8)$$

Для стационарного случайного процесса  $\xi(t)$  формула (9.8.8) не зависит от времени. Полное среднее число максимумов в единицу времени  $N_{1m}$ , независимо от их величины, получается путем интегрирования правой части (9.8.8) по всем возможным значениям  $H$ :

$$N_{1m} = - \int_{-\infty}^{\infty} dH \int_{-\infty}^0 \xi W_3(H, 0, \xi) d\xi. \quad (9.8.9)$$

Плотность вероятности для максимумов, очевидно, определяется из соотношения

$$P(H) \Delta H = \frac{n_{1m}(H)}{N_{1m}},$$

т. е.

$$P(H) = - \frac{1}{N_{1m}} \int_{-\infty}^0 \xi W_3(H, 0, \xi) d\xi. \quad (9.8.10)$$

Среднее число максимумов в единицу времени, величина которых превышает некоторое значение  $C$ , находим путем интегрирования правой части формулы (9.8.8) по всем значениям  $H \geq C$ , т. е. можем написать

$$n_{1m}(H \geq C) = - \int_C^{\infty} dH \int_{-\infty}^0 \xi W_3(H, 0, \xi) d\xi. \quad (9.8.11)$$

Воспользовавшись основной формулой (9.8.7), нетрудно обобщить соотношения (9.8.9)–(9.8.11) на случай нестационарных процессов. Однако в дальнейшем мы применим эти соотношения к нормальному стационарному процессу  $\xi(t)$  с нулевым средним значением и функцией корреляции (9.4.5).

Подставив плотность вероятности (6.2.23) в формулу (9.8.9) и выполнив интегрирование сначала по  $H$ , а затем по  $\xi$ , получим

$$N_{1m} = \frac{\sigma_2^2}{2\pi\sigma_1}. \quad (9.8.12)$$

Выполнив аналогичные вычисления по формулам (9.8.10) и (9.8.11), найдем

$$P(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ v e^{-\frac{h^2}{2v^2}} + \sqrt{2\pi(1-v^2)} h e^{-\frac{1}{2} \frac{h^2}{v^2}} \Phi\left(\frac{\sqrt{1-v^2}}{v} h\right) \right], \\ h = \frac{H}{\sigma}, \quad (9.8.13)$$

$$n_{1m}(h \geq c) = N_{1m} \left[ \Phi\left(-\frac{c}{v}\right) + \sqrt{1-v^2} e^{-\frac{1}{2} \frac{c^2}{v^2}} \Phi\left(\frac{\sqrt{1-v^2}}{v} c\right) \right], \\ c = \frac{C}{\sigma}, \quad (9.8.14)$$

где  $\Phi(z)$  — табулированный интеграл вероятности,

$$v = 1 - \frac{\sigma_1^4}{\sigma_1^2 \sigma_2^2}. \quad (9.8.15)$$

Из формулы (9.8.13) видно, что плотность вероятности максимумов нормальной стационарной функции однозначно определяется одним параметром  $v$ . Можно показать [21], что величина  $v$  изменяется от 0 до 1, причем малые значения  $v \ll 1$  соответствуют уз-

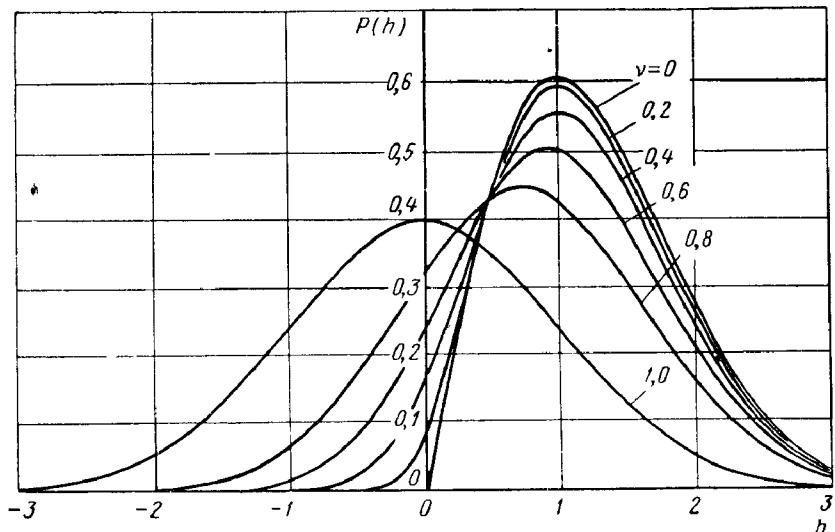


Рис. 9.6. Плотность вероятности максимумов нормального случайного процесса при разных значениях ширины энергетического спектра.

кополосному процессу, а значения  $v \approx 1$  соответствуют широкополосным процессам. Полагая в формуле (9.8.13)  $v = 0$ , получим релеевскую плотность вероятности

$$P(h) = h e^{-\frac{1}{2} h^2}, \quad h \geq 0.$$

При  $v = 1$  формула (9.8.13) переходит в нормальную плотность вероятности

$$P(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} h^2}.$$

Таким образом, плотность вероятности для максимальных значений нормального узкополосного процесса в пределе (при  $v = 0$ ) является релеевской, а плотность вероятности для максимальных значений нормального широкополосного процесса в пределе (при  $v = 1$ ) является нормальной. На рис. 9.6 показаны плотности ве-

роятности, подсчитанные по формуле (9.8.13), для нескольких значений  $v$  [20]. Из кривых виден переход от нормального распределения к релеевскому.

Для предельных значений параметра  $v$  из формулы (9.8.14) получим

$$\left. \begin{aligned} n_{1m}(h \geq c) &= N_{1m} e^{-\frac{1}{2} c^2}, & v = 0, \\ n_{1m}(h \geq c) &= N_{1m} \Phi(-c), & v = 1. \end{aligned} \right\} \quad (9.8.16)$$

Отметим, что при достаточно больших  $c$  в формуле (9.8.14) можно положить  $\Phi(z \geq 3) \approx 1$ ,  $\Phi(z \leq -3) \approx 0$ . При этом формула (9.8.14) переходит в формулу для среднего числа положительных выбросов случайной функции в единицу времени, превышающих уровень  $c$ :

$$n_{1m}(h \geq c) = \frac{\sigma_2}{2\pi\sigma_1} \sqrt{1 - v^2} e^{-\frac{1}{2} c^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_1}{\sigma} e^{-\frac{1}{2} c^2}. \quad (9.8.17)$$

Следовательно, при достаточно больших уровнях в окрестности выброса может находиться только один максимум.

Если применить формулы (9.8.13) и (9.8.14) к огибающей  $A(t)$  квазигармонического шума, то получим [22]:

$$P(h) = \frac{1}{4N_{1m}} \sqrt{-\frac{\rho''_0}{\pi}} (a^2 - 1)^{\frac{3}{2}} z^{\frac{3}{2}} e^{-a^2 z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n z^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{7}{4}\right)}. \quad (9.8.18)$$

$$N_{1m} = \sqrt{-\frac{\rho''_0}{\pi}} \frac{(a^2 - 1)^2}{(2a)^{5/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{5}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{7}{4}\right)} \frac{A_n}{a^n}, \quad (9.8.19)$$

где

$$h = \frac{H}{\sigma}, \quad a^2 = \frac{\rho_0^{(4)}}{\rho_0''^2}, \quad b = \frac{1}{2}(3 - a^2), \quad z = -\frac{\rho''_0 h}{\sqrt{2(\rho_0^{(4)} - \rho_0'')}};$$

$$A_0 = 1, \quad A_n = \sum_{m=0}^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right) \dots \left(m - \frac{1}{2}\right)}{m!} (n - m + 1) b^m, \quad n > 0;$$

$$A_n \approx (n + 1)(1 - b)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} b(1 - b)^{-\frac{3}{2}}, \quad n \text{ — велико.}$$

На рис. 9.7 представлены результаты расчетов по формуле (9.8.18) для квазигармонического шума с прямоугольной спектральной плотностью (кривая 1) и с гауссовой формой спектральной плотности (кривая 2). Расхождение между кривыми оказывается незначительным. Однако среднее число максимумов в единицу време-

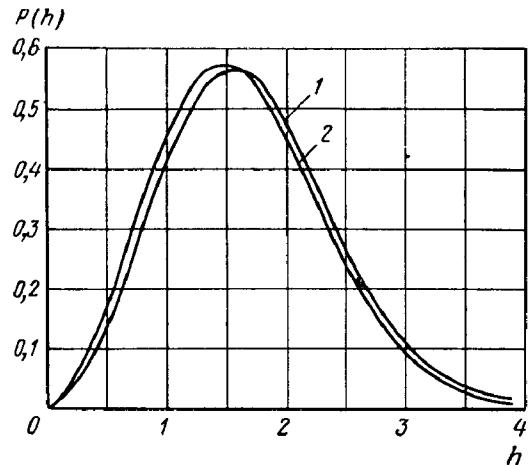


Рис. 9.7. Плотность вероятности максимумов огибающей квазигармонического шума.

мени в этих двух случаях оказывается существенно разным. Так, в случае прямоугольной спектральной плотности шириной  $\Delta f$  оно равно

$$N_{1m} = 0,6411 \Delta f,$$

а для гауссового спектра шириной  $\Delta f_s$ :

$$N_{1m} = 1,0023 \Delta f_s.$$

Формулы (9.8.18) и (9.8.19) можно обобщить на случай огибающей суммы гармонического сигнала и квазигармонического шума.

## § 9. О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НАИБОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ

Строгое математическое вычисление плотности вероятности для наибольших значений  $H_m$  (см. рис. 9.1) в реализациях случайного процесса  $\xi(t)$  конечной длительности  $T$  является весьма сложной задачей [23]. Для этого нужно вычислить максимумы, выявить максимум максимorum и сравнить его величину со значениями случайной функции, принимаемыми на концах интервала  $[0, T]$ .

Можно указать следующий путь решения данной задачи. Разобьем интервал времени  $T$  на  $m$  равных отрезков длительностью

$\Delta = T/m$  каждый. Обозначим значения случайной функции в  $(m+1)$  точках отсчета соответственно через

$$\xi_0 = \xi(0), \xi_1 = \xi(\Delta), \xi_2 = \xi(2\Delta), \dots, \xi_m = \xi(m\Delta) = \xi(T).$$

Плотность вероятности для значений случайной функции в этих точках отсчета  $W_{m+1}(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m)$  предполагается известной.

Вероятность  $P_i(H_m)$  того, что случайная функция  $\xi(t)$  при  $t = i\Delta$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, m$ , принимает значение  $\xi(i\Delta) = H_m$ , а во всех других точках отсчета принимает значения меньше  $H_m$ , равна

$$P_i(H_m) = \int_{-\infty}^{H_m} \dots \int_{-\infty}^{H_m} W_{m+1}(\xi_0, \dots, \xi_{i-1}, H_m, \xi_{i+1}, \dots, \xi_m) d\xi_0 \dots \\ \dots d\xi_{i-1} d\xi_{i+1} \dots d\xi_m. \quad (9.9.1)$$

Так как для стационарных флуктуаций все точки отсчета являются равноправными, то вероятность  $P(H_m)$ , что в какой-либо точке отсчета случайная функция принимает значение  $H_m$ , а в остальных меньше  $H_m$ , равна

$$P(H_m) = L \sum_{i=0}^m P_i(H_m), \quad (9.9.2)$$

где  $L$  — нормировочный множитель, определяемый из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(H_m) dH_m = 1.$$

К сожалению, многократный интеграл (9.9.1) вычисляется лишь в частных случаях, например, когда значения случайной функции  $\xi(t)$  в точках отсчета являются независимыми.

Если значения случайной функции в точках отсчета независимы и распределены по нормальному закону

$$w_\xi(\xi_i) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\xi_i^2}{2\sigma^2}\right)$$

или по реleeевскому закону

$$W_A(\xi_i) = \frac{\xi_i}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\xi_i^2}{2\sigma^2}\right),$$

то плотности вероятности (9.9.2) принимают соответственно вид

$$P_\xi(H_m) = (m+1) w_\xi(H_m) \Phi^m \left( \frac{H_m}{\sigma} \right), \quad (9.9.3)$$

$$P_A(H_m) = (m+1) W_A(H_m) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{H_m^2}{2\sigma^2}\right) \right]^m. \quad (9.9.4)$$

Эти плотности вероятности изображены на рис. 9.8.

Следует отметить, что для независимости значений случайной функции в точках отсчета необходимо выбирать  $\Delta \gg \tau_k$ , где  $\tau_k$  — время корреляции  $\xi(t)$ . Но при таких больших  $\Delta$  получаются

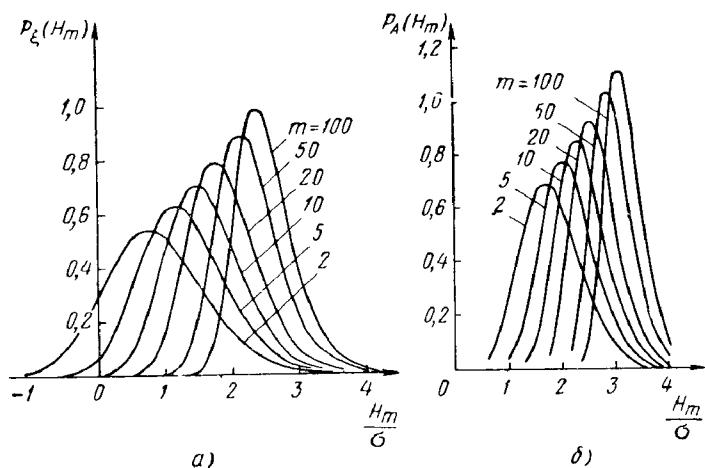


Рис. 9.8. Плотности вероятности для наибольших значений.

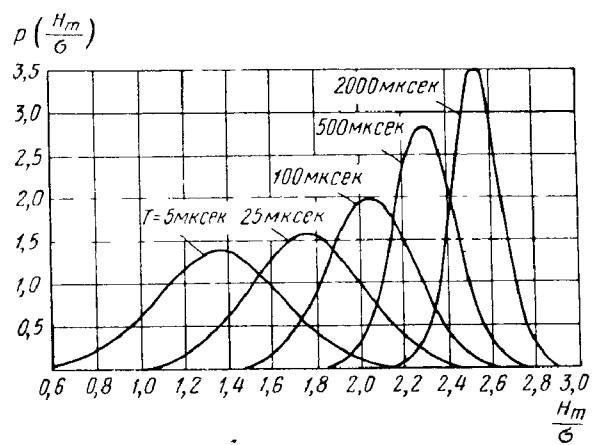


Рис. 9.9. Плотности вероятности для максимумов максиморумов реализаций огибающей квазигармонического шума различной длительности.

большие погрешности, так как положение максимума максиморума может не совпадать с точками отсчета  $t_i$ , и он будет «пропущен». Поэтому приведенные выше результаты дают лишь качественное представление.

На рис. 9.9 приведены плотности вероятности для наибольших значений в реализациях огибающей  $A(t)$ , когда спектральная плотность исходных квазигармонических флуктуаций  $\xi(t)$  имеет вид

$$S(f) = S_0 \exp \left[ -\pi \left( \frac{f - f_0}{\Delta f_0} \right)^2 \right],$$

причем  $f_0 = 30 \text{ Мгц}$ ,  $\Delta f_0 = 1 \text{ Мгц}$ . Подобные кривые для огибающей  $V(t)$  суммы сигнала и шума имеются в работе [24].

Из приведенных результатов следует, что с увеличением длительности реализаций плотности вероятности сужаются и смещаются в сторону больших значений  $H_m$ . Это объясняется тем, что при увеличении длительности  $T$ , во-первых, в каждой отдельной реализации увеличивается значение  $H_m$  и, во-вторых, уменьшается разброс значений  $H_m$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Rice S. O. Mathematical analysis of random noise. BSTJ, 1945, № 1.
2. Тихонов В. И. Выбросы случайных процессов. УФН, 1962, т. 77, № 3.
3. Тихонов В. И. Характеристики выбросов случайных процессов (обзор). «Радиотехника и электроника», 1964, № 3.
4. Ицхоки Я. С. Импульсные устройства. Изд-во «Советское радио», 1959.
5. Престон Ж., Гардинер Р. Работа триггерных генераторов в условиях шумов. «Вопросы радиолокационной техники», 1954, № 4.
6. Тихонов В. И. Воздействие малых флуктуаций на электронное реле. «Вестник Московского университета», 1956, № 5.
7. Бендер Дж. Основы теории случайных шумов и ее применение. Пер. с англ. Изд-во «Наука», 1965.
8. Rice S. O. Statistical properties of a sine wave plus random noise. BSTJ, 1948, № 1.
9. Tables of the error function and of its first twenty derivatives Harvard Univ. Press, Cambridge, Massachusetts, 1952.
10. Tabulation of selected confluent hypergeometric functions. Harvard Univ. Press, Cambridge, Massachusetts, 1952.
11. Соб С. М. The distribution of intervals between zero crossings of sine wave plus random noise and allied topics. Trans. IEEE, 1965, IT-11, № 2.
12. Silverman R. A. The fluctuation rate of the chi process. Trans. IRE, 1958, IT-4, № 1.
13. Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И. Non-linear transformations of stochastic processes. Pergamon Press, 1965.
14. Розов В. М. О выбросах после квадратичного детектирования. ЖТФ, 1952, № 7.
15. Steinberg H., Schultheiss P. M., Worgen G. A., Zweig F. Short-time frequency measurement of narrow-band random signals by means of a zero counting process. Journ. Appl. Phys., 1955, № 2.
16. Blachman N. M. FM reception and the zeros of narrow-band gaussian noise. Trans. IEEE, 1964, IT-10, № 3.

17. Тихонов В. И. Дисперсия числа выбросов в реализациях нормального шума конечной длительности. «Радиотехника и электроника», 1964, № 1.
18. Тихонов В. И., Горяинов В. Т. и др. Исследование выбросов случайных процессов. Отчет № 9161. ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1961.
19. Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И. О длительности выбросов случайной функции. ЖТФ, 1954, № 1.
20. Cartwright D. E., Longuet-Higgins M. S. The statistical distribution of the maxima of random function. Proc. Roy. Soc., A, 1956, № 1209.
21. Тихонов В. И. Флуктуационные процессы. ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1961.
22. Тихонов В. И. Распределение максимумов огибающей квазигармонического шума. «Известия вузов», Радиотехника, 1963, № 5.
23. Тихонов В. И. О распределении наибольших значений в реализациях флуктуаций конечной длительности. «Известия вузов», Радиотехника, 1961, № 5.
24. Тихонов В. И., Куликов Е. И. Распределение выбросов и максимумов флуктуаций. «Радиотехника», 1962, № 2.

## Раздел III

### ОПТИМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РАДИОПРИЕМА