

17. Тихонов В. И. Дисперсия числа выбросов в реализациях нормального шума конечной длительности. «Радиотехника и электроника», 1964, № 1.
18. Тихонов В. И., Горяинов В. Т. и др. Исследование выбросов случайных процессов. Отчет № 9161. ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1961.
19. Кузнецов П. И., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И. О длительности выбросов случайной функции. ЖТФ, 1954, № 1.
20. Cartwright D. E., Longuet-Higgins M. S. The statistical distribution of the maxima of random function. Proc. Roy. Soc., A, 1956, № 1209.
21. Тихонов В. И. Флуктуационные процессы. ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1961.
22. Тихонов В. И. Распределение максимумов огибающей квазигармонического шума. «Известия вузов», Радиотехника, 1963, № 5.
23. Тихонов В. И. О распределении наибольших значений в реализациях флуктуаций конечной длительности. «Известия вузов», Радиотехника, 1961, № 5.
24. Тихонов В. И., Куликов Е. И. Распределение выбросов и максимумов флуктуаций. «Радиотехника», 1962, № 2.

Раздел III

ОПТИМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РАДИОПРИЕМА

Глава 10

АПОСТЕРИОРНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ

В радиосвязи, радиолокации и других системах передачи информации сигнал, предназначенный для передачи сообщений, в процессе передачи маскируется помехами и подвергается искажениям. Поэтому даже при самом тщательном конструктивном выполнении радиотехнических устройств с целью свести к минимуму влияние помех, на выходе радиоприемного устройства не удается точно воспроизвести переданное сообщение.

Предположим, что в отсутствие помех и искажений сигнала на выходе приемника точно воспроизводится переданное сообщение. Тогда при наличии помех и искажений сигнала сообщение на выходе того же приемника будет воспроизводиться неточно, а с искажениями. Приемник, обеспечивающий минимальные искажения сообщения, называется оптимальным или идеальным (наилучшим). В зависимости от назначения приемника критерии или количественные характеристики искажений могут быть разными (см. ниже). При выбранном критерии и заданных условиях приема оптимальный приемник определяет минимальные искажения сообщения. Этот минимальный уровень искажений часто называют потенциальной помехоустойчивостью.

При заданных условиях радиоприема потенциальная помехоустойчивость не может быть превзойдена реальным радиоприемником и можно лишь стремиться к ее достижению. Сравнивая помехоустойчивость реальных приемников с потенциальной помехоустойчивостью, можно выяснить степень технического совершенства реальных приемников и возможные резервы повышения их помехоустойчивости.

Теория оптимального радиоприема позволяет также определить наилучшие виды передаваемых сигналов. Для этого следует сравнить значения потенциальной помехоустойчивости при различных

видах сигналов. Сигнал, для которого при заданных условиях радиоприема получается наибольшая потенциальная помехоустойчивость, является наилучшим.

Следует заметить, что теория оптимальных методов радиоприема, давая руководящие принципы при конструировании радиоаппаратуры и количественные характеристики оптимальных устройств, не исключает творческую инициативу конструктора. Достаточно указать, что иногда оптимальные устройства оказываются практически трудно реализуемыми. Конструктор также должен стремиться свести к минимуму аппаратурные ошибки и учесть ряд факторов, не принимавшихся во внимание при теоретическом рассмотрении.

Решение основных задач теории оптимального радиоприема базируется на хорошо разработанных методах математической статистики. Непосредственное применение математической статистики к решению прикладных задач радиотехники и автоматики было начато А. Н. Колмогоровым, В. А. Котельниковым, Н. Винером и др. в 50-х годах. В последующие годы и, особенно, в последнее десятилетие как у нас, так и за границей было выполнено много важных исследований в этой области. Научно-прикладное содержание этих исследований состоит в решении новых сложных задач, направленных на совершенствование радиотехнической аппаратуры.

В зависимости от целевого назначения разные системы передачи информации работают в различных условиях и к ним предъявляются разные требования. Исходя из этих требований, а также из методических соображений, для типовых систем условно можно сформулировать пять частных задач, рассматриваемых в теории. Ниже приведен простой пример, позволяющий составить представление о характере этих задач и, тем самым, о содержании настоящего раздела. Конкретные условия, при которых в дальнейшем рассматриваются аналогичные задачи, указаны в § 2.

Пусть на конечном временном интервале T принимается колебание $\xi(t)$, представляющее собой сумму полезного сигнала $s(t)$ и шума $n(t)$:

$$\xi(t) = s(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (10.1.1)$$

Будем, например, считать, что сигналом является прямоугольный радиоимпульс длительностью τ_i , который полностью укладывается на интервале T :

$$s(t) = \begin{cases} A \cos(\omega t + \varphi), & \tau \leq t \leq \tau + \tau_i < T, \\ 0 & t < \tau, t > T, \end{cases} \quad (10.1.2)$$

где τ — момент появления импульса.

В данном случае сигнал зависит от пяти параметров: амплитуды A , частоты ω , начальной фазы φ , момента появления τ и длительности τ_i . В значениях этих параметров может содержаться по-

лезная информация, которая должна быть извлечена из принятого колебания в результате приема.

Заметим, что если бы мы не располагали никакими предварительными сведениями о сигнале (т. е. о его параметрах), то его нельзя было бы принять, так как было бы невозможно отличить сигнал от любой помехи. Наоборот, прием сигнала с заранее известными параметрами не дает никакой информации. Действительно, если заранее известны все параметры сигнала, то его можно точно воспроизвести на приемной стороне. Поэтому носителями полезной информации могут являться только неизвестные параметры сигнала.

В дальнейшем интересующий нас параметр сигнала предполагается всегда неизвестным, а остальные параметры, все или частично — известными. При решении конкретных задач наибольшие трудности возникают тогда, когда имеется мало предварительных (априорных) сведений о принятом сигнале.

После этих общих замечаний сформулируем основные задачи теории помехоустойчивости для принимаемого колебания

$$\xi(t) = A \cos(\omega t + \varphi) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (10.1.3)$$

1. Обнаружение сигнала. Различение двух сигналов. Предположим пока, что все параметры сигнала (10.1.2) не зависят от времени, причем частота, фаза и длительность импульса известны, а амплитуда может принимать два значения: $A = 0$ (сигнал отсутствует) с вероятностью p_1 и $A = A_0 \neq 0$ (сигнал присутствует) с вероятностью $p_2 = 1 - p_1$. Требуется по принятой конкретной реализации $\xi(t)$ на интервале T оптимальным образом определить, отсутствует или присутствует сигнал. (Основные критерии оптимальности указаны в § 1 гл. 11). Это — типичная формулировка задачи обнаружения сигнала на фоне шума, которая весьма характерна для радиолокации.

Задача обнаружения сигнала является частным случаем задачи различия двух сигналов. Пусть в колебании (10.1.3) амплитуда сигнала A может принимать два значения: $A = A_1$ с вероятностью p_1 и $A = A_2$ с вероятностью $p_2 = 1 - p_1$. Нужно по принятой реализации колебания $\xi(t)$ установить оптимальным образом, присутствует ли сигнал с амплитудой A_1 или с амплитудой A_2 . При $A_1 = 0$ задача различия двух сигналов переходит в задачу обнаружения сигнала.

Задачу различия двух сигналов можно сформулировать не только относительно амплитуды, но и для любого другого параметра сигнала, принимающего два значения (например, частоты, фазы и т. д.). Эта задача характерна для различных систем передачи бинарных символов и, в частности, для телеграфии.

2. Различение нескольких сигналов. Пусть амплитуда сигнала (10.1.2) может принимать только одно из n возможных значений A_1, A_2, \dots, A_n , $n > 2$, разделенных, например, интервалами квантова-

ния $\Delta A_k = A_{k+1} - A_k$, причём известны априорные вероятности отдельных значений p_1, p_2, \dots, p_n . Требуется по принятой реализации $\xi(t)$ решить оптимальным образом (т.е. с минимальной вероятностью ошибки), какое именно из n возможных значений имеет амплитуда. Результаты решения этой задачи могут быть использованы, например, для целесообразного выбора интервалов квантования ΔA_k . Аналогично формулируется данная задача для других параметров сигнала, принимающих несколько дискретных значений.

Задача различения нескольких сигналов является более общей и сложной, чем задача обнаружения и различения двух сигналов. С подобными задачами приходится сталкиваться в радиосвязи и телевидении.

3. Оценка параметров сигнала. Пусть амплитуда A является случайной величиной с плотностью вероятности $W(A)$. По принятой реализации $\xi(t)$ необходимо с минимальной погрешностью определить значение амплитуды. Это простейшая, но типичная задача одного из важных разделов теории помехоустойчивости — теории оценки параметров.

Если полезный сигнал зависит от нескольких случайных параметров, то может быть поставлена задача о совместной оценке двух и большего числа параметров. Например, применительно к сигналу (10.1.2) можно говорить о совместной оценке времени появления сигнала t и частоты ω .

Задача оценки параметров характерна для измерительной техники, радиолокации и радионавигации. Результаты решения этой задачи характеризуют предельную точность измерения параметров сигнала и позволяют составить структурные схемы соответствующих оптимальных измерительных устройств.

4. Фильтрация сигналов. Пусть «амплитуда» A зависит от времени и представляет собой случайный процесс $A(t)$ с известными статистическими характеристиками. Зная характер шума $n(t)$, нужно по конкретной реализации $\xi(t)$, содержащей случайный процесс $A(t)$, решить оптимальным образом, какая именно реализация случайного процесса $A(t)$ присутствует в принятом колебании $\xi(t)$. Задачи подобного типа рассматриваются в общей теории фильтрации.

Задача фильтрации переходит в задачу оценки параметра сигнала, если оцениваемый параметр за время наблюдения T не успевает существенно измениться. Задача фильтрации является более общей и сложной, чем задача оценки параметров.

Задачи фильтрации возникают в радиосвязи (выделение речевого сообщения из шума), в телевидении (выделение телевизионного сообщения из шума), в радиолокации (непрерывное определение дальности и допплеровского смещения частоты) и т. д.

5. Разрешение сигналов. Пусть принятное колебание $\xi(t)$ представляет сумму шума $n(t)$ и двух сигналов $s_1(t, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ и $s_2(t, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, зависящих от трех параметров $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$\xi(t) = s_1(t, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + s_2(t, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + n(t), \\ t_0 \leq t \leq t_0 + T. \quad (10.1.4)$$

Априорные вероятности появления каждого из сигналов считаются известными. Предположим, что параметр λ_1 является случайным и статистические характеристики остальных параметров λ_2, λ_3 известны.

Задачу разрешения двух сигналов можно сформулировать следующим образом. При возможности одновременного наличия двух сигналов необходимо по принятой реализации $\xi(t)$ разрешить оптимальным образом два сигнала по параметру λ_1 . В понятие «разрешить» можно вкладывать различный смысл. Можно, например, иметь в виду только раздельное обнаружение сигналов или же как раздельное обнаружение, так и определение значений параметров λ_1 в двух сигналах.

Задача разрешения может быть обобщена на случай нескольких параметров и многих, а не двух сигналов. Необходима разрешающая способность, как правило, обеспечивается подбором наилучших видов сигналов и оптимальной обработкой принятого колебания.

Выше условно указаны пять основных задач, тесно связанных между собой. В дальнейшем не все эти задачи будут рассмотрены одинаково подробно. Однако будут приведены соображения, касающиеся всех перечисленных задач.

§ 2. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СИГНАЛОВ И ПОМЕХ

Пусть сигнал, излучаемый передающей антенной, является квазигармоническим:

$$s_i(t) = f(t) \cos [\omega t + \varphi(t)]. \quad (10.2.1)$$

Это означает, что функции $f(t)$ и $\varphi(t)$, отображающие законы амплитудной и частотной модуляции, медленно изменяются по сравнению с колебанием несущей частоты $\cos \omega t$. Поэтому сигнал $s_i(t)$ будет узкополосным: ширина $\Delta\omega$ его спектра много меньше несущей частоты ω , т. е. $|\Delta\omega| \ll \omega$.

При выбранной форме передаваемого сигнала (10.2.1) вид полезного сигнала в месте приема существенно зависит от параметров линии, по которой он передается. Например, при одном и том же передаваемом сигнале $s_i(t)$ принимаемый сигнал в радиолокации и в различных системах радиосвязи (наземной, ионосферной, тропосферной, метеорной, космической и др.) будет несколько разным.

Не касаясь детального рассмотрения различных линий связи [1], укажем, что при распространении электромагнитных колебаний через турбулентную среду и вследствие изрезанности диаграмм направленности антенн, полезный сигнал в месте приема $s(t)$ во много-

гих случаях можно представить в виде суммы двух составляющих: детерминированной и случайной, т. е.

$$s(t) = \alpha f(t - \tau) \cos [\omega t + \varphi(t - \tau) - \delta] + \\ + \beta(t) \cos [\omega t + \varphi(t - \tau) - \varepsilon(t)]. \quad (10.2.2)$$

Здесь α и δ представляют собой амплитудный коэффициент и фазовый сдвиг детерминированной составляющей сигнала (α и δ — постоянные величины), а β и ε — амплитудный множитель и фазовый сдвиг случайной составляющей. Величина τ характеризует время запаздывания принимаемого сигнала.

Сигнал (10.2.2) можно записать иначе в виде квазигармонического колебания:

$$s(t) = a(t) f(t - \tau) \cos [\omega t + \\ + \varphi(t - \tau) - \theta(t)], \quad (10.2.3)$$

где

$$\begin{aligned} a \cos \theta &= \alpha \cos \delta + \beta \cos \varepsilon, \\ a \sin \theta &= \alpha \sin \delta + \beta \sin \varepsilon. \end{aligned}$$

Рис. 10.1. Соотношение между a , θ , α , β , δ и ε .

Соотношение между a , θ , α , β , δ и ε показано на рис. 10.1. Множитель $a(t)$ характеризует замирания (фединги) радиосигнала и θ — фазовый сдвиг по несущей частоте.

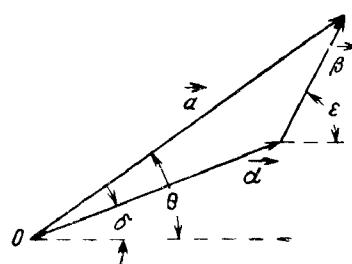
Будем считать, что β и ε представляют собой независимые случайные величины, причем β распределена по закону Релея, а ε — равномерно на интервале $(-\pi, \pi)$:

$$W_2(\beta, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{\beta}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\beta^2}{2\sigma^2}\right), & \beta \geq 0, -\pi \leq \varepsilon \leq \pi, \\ 0 & \text{при других } \beta, \varepsilon. \end{cases} \quad (10.2.4)$$

В § 4 гл. 7 было показано, что при сделанных предположениях совместная плотность вероятности случайных величин a и θ определяется формулой вида (7.4.7):

$$W_2(a, \theta) = \begin{cases} \frac{a}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{a^2 + \alpha^2 - 2aa \cos(\theta - \delta)}{2\sigma^2}\right), & a \geq 0, |\theta - \delta| \leq \pi, \\ 0 & \text{при других } a, \theta. \end{cases} \quad (10.2.5)$$

Интегрируя (10.2.5) по θ и a , получим одномерные плотности вероятности для случайных величин a и θ :



$$W(a) = \frac{a}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{a^2 + \alpha^2}{2\sigma^2}\right\} I_0\left(\frac{a\alpha}{\sigma^2}\right), \quad a \geq 0, \quad (10.2.6)$$

$$W(\theta) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2} \theta^2} + \frac{\gamma \cos(\theta - \delta)}{\sqrt{2\pi}} \Phi[\gamma \cos(\theta - \delta)] e^{-\frac{1}{2} \theta^2 \sin^2(\theta - \delta)}, \quad (10.2.7)$$

$$|\theta - \delta| \leq \pi, \quad \gamma = \frac{\alpha}{\sigma}.$$

Так как формулы (10.2.6) и (10.2.7) совпадают соответственно с формулами (7.5.1) и (7.6.1), то для $W(a)$ и $W(\theta)$ будут справедливы графики, приведенные на рис. 7.9 и 7.11.

Оказывается, выбранная модель принимаемого сигнала (10.2.5) удовлетворительно описывает флуктуации отраженного сигнала в радиолокации и фединги во многих системах радиосвязи. В радиолокации часто полагают $\alpha = 0$ и ограничиваются рассмотрением случая, когда амплитуда отраженного сигнала флуктуирует по релевскому закону. Результаты экспериментальных исследований медленных замираний сигналов в радиолиниях, использующих ионосферное или тропосферное рассеяние, показывают, что фединги в таких системах описываются также законом Релея и имеют квазистационарный характер на временных интервалах порядка нескольких минут. Для систем радиосвязи, использующих отражение от ионосферы, в (10.2.5) величины α и σ должны определяться экспериментально и, как правило, имеют конечные значения, так как в таких системах принимаемый сигнал содержит как регулярную (зеркальную), так и случайную (рассеянную) составляющие.

В выбранной модели принимаемого сигнала (10.2.3) некоторые параметры могут быть заранее (до приема) известными или неизвестными. Предварительно известные статистические характеристики части параметров сигнала составляют априорные сведения относительно сигнала. Априорные сведения о сигнале могут быть полными (полностью известна статистика сигнала), неполными (известна статистика лишь части параметров сигнала) или отсутствовать совсем (полностью неизвестна статистика сигнала). Чем большими априорными сведениями мы располагаем, тем проще и точнее решаются задачи. Поэтому всегда следует стремиться к тому, чтобы разумно и в полной мере использовать всю априорную информацию о сигнале и шуме.

Априорное знание статистики сигнала может быть получено на основе предварительного статистического анализа как самих сообщений, так и радиосигналов, если, конечно, в прошлом существовал ансамбль ситуаций, аналогичных условиям данного приема.

В радиосвязи, телевидении и телев управлении, как правило, априорная статистика сигнала известна в большей мере, чем в радиолокации, радионавигации и измерительной технике.

В радиосвязи сообщения передаются при помощи русского текста (радиотелефония) или заранее известного кода (радиотеле-

графия). На основании анализа русского текста можно подсчитать вероятность появления отдельных букв или соответствующих символов кода, а также вероятности появления различных двубуквенных, трехбуквенных и т. д. сочетаний. В настоящее время такие данные уже известны (см. § 6 гл. 15).

Аналогичное положение имеет место в телеуправлении, где в качестве сообщений обычно используется набор конечного числа типовых символов, а также при передаче изображений в телевидении (например, при помощи квантованных сигналов).

В радиолокации, радионавигации и измерительной технике мы часто располагаем меньшими априорными сведениями как о вероятности появления сигналов, так и о статистике отдельных параметров сигнала. Так, например, применительно к измерению задержки τ (дальности до цели) в отраженном радиолокационном сигнале затруднительно заранее указать соответствующую плотность вероятности.

С учетом априорных сведений о сигнале в дальнейшем при решении отдельных задач теории оптимального радиоприема будут рассмотрены следующие частные виды радиосигналов.

1. Сигнал с полностью известными параметрами*

$$s(t) = f(t - \tau_0) \cos [\omega_0 t + \varphi(t - \tau_0) - \theta_0], \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \tau_n. \quad (10.2.8)$$

В данном случае все параметры сигнала считаются известными. В задаче обнаружения остается неизвестным лишь факт наличия сигнала.

2. Сигнал со случайной начальной фазой

$$s(t) = f(t - \tau_0) \cos [\omega_0 t + \varphi(t - \tau_0) - \theta], \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \tau_n. \quad (10.2.9)$$

Все параметры сигнала предполагаются известными, за исключением начальной фазы θ , которая считается случайной величиной, равномерно распределенной на интервале $(-\pi, \pi)$.

3. Сигнал со случайными амплитудой и начальной фазой

$$s(t) = a f(t - \tau) \cos [\omega t + \varphi(t - \tau) - \theta], \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \tau_n. \quad (10.2.10)$$

Будем предполагать, что a и θ являются независимыми случайными величинами, причем a распределена по закону Релея, а θ — равномерно на интервале $(-\pi, \pi)$.

4. Если сигнал $s(t)$ представляет собой последовательность (пачку) из нескольких радиоимпульсов, то следует различать когерентную и некогерентную пачки импульсов. Пачка, в которой начальная фаза первого импульса случайная, а изменение фазы от импульса к импульсу является закономерным (детерминированным), называется когерентной. Если же фазы отдельных импульсов случайны и независимы, то пачка называется некогерентной. Амплиту-

* В дальнейшем известные параметры сигнала, как правило, отмечены нулемым индексом.

ды импульсов в пачке могут изменяться по детерминированному или случайному законам.

Определив основные виды сигналов, укажем некоторые характеристики рассматриваемых помех. В различных радиотехнических устройствах приходится сталкиваться с различными видами помех. Однако во всех случаях является общим и характерным наличие нормального флуктуационного шума, обусловленного естественными причинами, которые не могут быть устранены (тепловые и другие шумы окружающего пространства и собственные шумы радиоприемных устройств). Тепловые шумы пространства, окружающего приемную антенну, принимаются антенной вместе с полезным сигналом и складываются с собственным шумом радиоприемного устройства.

Напомним, что без учета потерь между антенной и приемником величина мощности шумов на входе радиоприемного устройства P_n выражается через коэффициент шума k_n формулой [2]:

$$P_n = k T_0 \Delta f_s (k_n + t_A - 1), \quad (10.2.11)$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ дж/град — постоянная Больцмана;

$T_0 = 290^\circ$ К — стандартная (комнатная) температура в градусах Кельвина ($kT_0 = 4 \cdot 10^{-21}$ вт/град);

Δf_s — энергетическая полоса пропускания линейной части приемника до детектора (см. табл. 3.14.1).

$t_A = T_A / T_0$ — относительная шумовая температура приемной антенны, имеющей абсолютную шумовую температуру излучения T_A .

Собственный шум радиоприемника и тепловые шумы окружающего пространства складываются линейно с полезным сигналом на входе приемника. Помехи, которые складываются (суммируются) с сигналом линейно, называются аддитивными помехами.

Так как часто только аддитивный нормальный шум является случайной помехой, то значительное внимание было уделено решению задач теории помехоустойчивости для случая, когда принятым колебанием является сумма (аддитивная смесь) полезного сигнала и нормального шума. Наличие других случайных помех, отличных от нормального шума, существенно усложняет задачу.

К настоящему времени многие конкретные задачи получили заключенное решение для случая приема сигналов на фоне нормального шума. В дальнейшем будут рассмотрены некоторые из этих задач, причем для простоты будем считать нормальный шум белым. Это предположение упрощает математические вычисления.

Итак, в дальнейшем будем предполагать, что полезный сигнал $s(t)$ принимается на фоне аддитивного нормального белого шума $n(t)$ с нулевым средним значением, т. е. колебание $\xi(t)$, принятое на конечном интервале времени T , представляет собой случайный процесс

$$\xi(t) = s(t) + n(t), \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T. \quad (10.2.12)$$

Здесь белый шум $n(t)$ имеет следующие основные характеристики:

$$\langle n(t) \rangle = 0, \quad k(t_1, t_2) = \langle n(t_1) n(t_2) \rangle = \frac{N_0}{2} \delta(t_2 - t_1), \quad (10.2.13)$$

где N_0 — физически измеряемая спектральная плотность шума; $\delta(z)$ — дельта-функция.

§ 3. АПОСТЕРИОРНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

При решении задач теории помехоустойчивости ответ должен быть получен на основе предварительных (априорных) сведений и анализа принятых данных.

По сравнению лишь с некоторыми априорными сведениями о принятом колебании, знания наблюдателя об исследуемой ситуации в результате анализа принятого колебания увеличиваются. Вновь сформированное знание называется апостериорным.

Анализ и обработка принятого колебания $\xi(t)$ с целью принятия определенного решения могут осуществляться двумя методами: дискретным и непрерывным.

Если наблюдение производится в отдельные моменты времени (дискретное наблюдение), то информация о принятых данных будет заключена в случайных величинах $\xi_1 = \xi(t_1), \dots, \xi_m = \xi(t_m)$, представляющих выборочные значения принятого колебания $\xi(t)$ в моменты времени t_1, \dots, t_m из интервала наблюдения T : $t_0 \leq t_i \leq t_0 + T$, $i = 1, 2, \dots, m$. Чаще всего дискретные значения ξ_i берутся через равнотстоящие моменты времени, т. е. $t_i - t_{i-1} = \Delta = \text{const}$.

Выборочные значения принятого колебания $\xi(t)$ описываются совместной плотностью вероятности $W_m(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$, а соответствующие выборочные значения шума $n(t)$ — плотностью вероятности $w_m(n_1, n_2, \dots, n_m)$.

Предположим, что производится дискретное наблюдение, и сигнал

$$s(t) = s(t, \lambda) \quad (10.3.1)$$

зависит от одного неизвестного параметра λ , имеющего априорную плотность вероятности $W_{pr}(\lambda)$.

Все то, что можно узнать о параметре λ после приема колебания $\xi(t)$ заключено в условной вероятности

$$W_{ps}(\lambda) = W(\lambda | \xi_1, \dots, \xi_m), \quad (10.3.2)$$

называемой апостериорной вероятностью.

Согласно известной теореме об умножении вероятностей (1.5.1) имеем

$$\begin{aligned} W(\lambda; \xi_1, \dots, \xi_m) &= W_m(\xi_1, \dots, \xi_m) W(\lambda | \xi_1, \dots, \xi_m) = \\ &= W_{pr}(\lambda) W(\xi_1, \dots, \xi_m | \lambda). \end{aligned} \quad (10.3.3)$$

Отбрасывая левую часть равенства и учитывая, что $W_m(\xi_1, \dots, \xi_m)$ не зависит от интересующего нас параметра λ , на основании формул (10.3.2) и (10.3.3) можем написать

$$W_{ps}(\lambda) = k W_{pr}(\lambda) W(\xi_1, \dots, \xi_m | \lambda), \quad (10.3.4)$$

где коэффициент k определяется из условия нормировки.

Рассматриваемая как функция от λ , условная вероятность $W(\xi_1, \dots, \xi_m | \lambda)$ называется функцией правдоподобия. (Иногда функцию правдоподобия определяют как $\ln W$). При фиксированных значениях ξ_1, \dots, ξ_m она показывает, насколько одно возможное значение параметра λ «более правдоподобно», чем другое. Обозначим функцию правдоподобия через $L(\lambda)$:

$$L(\lambda) = W(\xi_1, \dots, \xi_m | \lambda). \quad (10.3.5)$$

Тогда формулу (10.3.4) можно записать в окончательном виде

$$W_{ps}(\lambda) = k W_{pr}(\lambda) L(\lambda), \quad (10.3.6)$$

где

$$k = \left[\int W_{pr}(\lambda) L(\lambda) d\lambda \right]^{-1}. \quad (10.3.7)$$

Формула (10.3.6), по существу, аналогична формуле (1.7.1) и представляет математическую запись теоремы Байеса. Напомним, что теорема Байеса показывает, каким образом из априорных данных и результатов анализа принятого колебания формируется апостериорное знание.

Формула (10.3.6) может быть обобщена. Если параметр λ может принимать только одно из нескольких дискретных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_v$, то можем написать

$$W_{ps}(\lambda_i) = k W_{pr}(\lambda_i) L(\lambda_i), \quad i = 1, 2, \dots, v, \quad (10.3.8)$$

где

$$k = \left[\sum_{i=1}^v W_{pr}(\lambda_i) L(\lambda_i) \right]^{-1}. \quad (10.3.9)$$

Если сигнал зависит от μ параметров $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu$, т. е.

$$s(t) = s(t, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu), \quad (10.3.10)$$

то формула принимает вид:

$$W_{ps}(\lambda_1, \dots, \lambda_\mu) = k W_{pr}(\lambda_1, \dots, \lambda_\mu) L(\lambda_1, \dots, \lambda_\mu), \quad (10.3.11)$$

где

$$k = \left[\int \dots \int W_{pr}(\lambda_1, \dots, \lambda_\mu) L(\lambda_1, \dots, \lambda_\mu) d\lambda_1 \dots d\lambda_\mu \right]^{-1} \quad (10.3.12)$$

Из формул (10.3.6), (10.3.8) и (10.3.11) видно, что при известных априорных плотностях вероятностей нахождение апостериорных вероятностей сводится к вычислению функций правдоподобия.

В том случае, когда принятное колебание представляет аддитивную смесь сигнала и шума, т. е.

$$\xi(t) = s(t) + n(t), \quad (10.3.13)$$

и многомерные плотности вероятности шума $w_m(n_1, \dots, n_m)$ известны, функции правдоподобия вычисляются сравнительно просто. В других же случаях их вычисление представляет весьма сложную задачу.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением того важного, но частного случая, когда принятное колебание $\xi(t)$ представляет собой аддитивную смесь (10.2.12) полезного сигнала $s(t)$ и нормального белого шума $n(t)$. При этом значение спектральной плотности шума N_0 будем предполагать известным.

Рассмотрим простейший метод дискретного наблюдения, когда отсчеты берутся через равноотстоящие моменты времени. Разобьем интервал времени $(t_0, t_0 + T)$ равноотстоящими точками t_1, \dots, t_m , где $t_i - t_{i-1} = \Delta = \text{const}$, $i = 1, 2, \dots, m$. Обозначим средние за элементарный интервал времени значения колебания $\xi(t)$, сигнала $s(t, \lambda)$ и шума $n(t)$ соответственно через

$$\begin{aligned} \xi_i &= \frac{1}{\Delta} \int_{t_i-\Delta}^{t_i} \xi(t) dt, \quad s_i(\lambda) = \frac{1}{\Delta} \int_{t_i-\Delta}^{t_i} s(t, \lambda) dt, \\ n_i &= \frac{1}{\Delta} \int_{t_i-\Delta}^{t_i} n(t) dt. \end{aligned} \quad (10.3.14)$$

Очевидно, что

$$n_i = \xi_i - s_i(\lambda). \quad (10.3.15)$$

Будем считать, что в выражении для функции правдоподобия (10.3.5) фигурируют указанные средние значения ξ_i . При этом имеется ввиду, что в дальнейшем нас будет интересовать предельный случай $\Delta \rightarrow 0$.

Вычислим сначала совместную плотность вероятности для случайных величин n_i , $i = 1, 2, \dots, m$. Случайные величины n_i являются нормально распределенными и согласно (10.2.13) имеют следующие характеристики:

$$\langle n_i \rangle = 0, \quad \sigma_i^2 = \langle n_i^2 \rangle = \frac{N_0}{2\Delta}, \quad \langle n_i n_j \rangle = 0 \quad \text{при } i \neq j.$$

Поэтому совместная плотность вероятности имеет вид

$$w_m(n_1, \dots, n_m) = w_1(n_1) \dots w_m(n_m) = \left(\pi \frac{N_0}{\Delta} \right)^{-\frac{m}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^m n_i^2 \Delta \right\}. \quad (10.3.16)$$

Подставляя значения n_i из (10.3.15) в формулу (10.3.5) и учитывая, что якобиан преобразования от переменных n_i к переменным ξ_i равен единице, получаем формулу для функции правдоподобия параметра λ :

$$L(\lambda) = W(\xi_1, \dots, \xi_m | \lambda) = w_m(\xi_1 - s_1(\lambda), \dots, \xi_m - s_m(\lambda)). \quad (10.3.17)$$

Таким образом, при дискретном наблюдении формула (10.3.6) принимает следующий окончательный вид:

$$W_{ps}(\lambda) = k W_{pr}(\lambda) L(\lambda), \quad (10.3.18)$$

где

$$L(\lambda) = \left(\pi \frac{N_0}{\Delta} \right)^{-\frac{m}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^m [\xi_i - s_i(\lambda)]^2 \Delta \right\}. \quad (10.3.19)$$

Если параметр λ может принимать несколько значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, то в формулу (10.3.8) нужно подставлять функцию правдоподобия при соответствующем значении параметра λ .

Путем аналогичных рассуждений нетрудно убедиться, что для сигнала (10.3.10), зависящего от нескольких параметров, функция правдоподобия, входящая в формулу (10.3.11), имеет вид:

$$L(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = \left(\pi \frac{N_0}{\Delta} \right)^{-\frac{m}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^m [\xi_i - s_i(\lambda_1, \dots, \lambda_p)]^2 \Delta \right\}. \quad (10.3.20)$$

Рассмотрим теперь случай непрерывного наблюдения. Чтобы перейти к случаю непрерывного наблюдения, нужно в формулах (10.3.16), (10.3.19) и (10.3.20) перейти к пределу при $\Delta \rightarrow 0$. При этом информация о случайному процессе $\xi(t)$ будет заключена в форме реализации, т. е. в том, какой конкретный вид имеет функция $\xi(t)$ на интервале $(t_0, t_0 + T)$. Разумеется, что при непрерывном наблюдении получаются более точные результаты, чем при дискретном, так как в случае непрерывного наблюдения используется информация, содержащаяся во всей реализации $\xi(t)$, а не только в отдельных выборочных значениях ξ_1, \dots, ξ_m . При $\Delta \rightarrow 0$ плотности вероятности W_m и w_m перейдут в соответствующие функционалы вероятности, а функция правдоподобия — в функционал правдоподобия [3]. Введем для них следующие обозначения:

$$W[n(t)] = \lim_{\substack{\Delta \rightarrow 0 \\ m \rightarrow \infty}} k_\Delta w_m(n_1, \dots, n_m), \quad (10.3.21)$$

$$F(\lambda) = \lim_{\substack{\Delta \rightarrow 0 \\ m \rightarrow \infty}} L(\lambda), \quad (10.3.22)$$

где множитель k_Δ , зависящий только от Δ , подбирается так, чтобы предел имел смысл.

Осуществляя предельный переход при соответствующем подборе k_Δ , получим

$$W[n(t)] = \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_{t_0}^{t_0+T} n^2(t) dt \right\}, \quad (10.3.23)$$

$$F(\lambda) = \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_{t_0}^{t_0+T} [\xi(t) - s(t, \lambda)]^2 dt \right\}. \quad (10.3.24)$$

Таким образом, при непрерывном наблюдении формула (10.3.6) принимает следующий окончательный вид:

$$W_{ps}(\lambda) = k W_{pr}(\lambda) F(\lambda), \quad (10.3.25)$$

где $F(\lambda)$ — функционал правдоподобия (10.3.24).

В аналогичном виде можно записать формулу (10.3.11)

$$W_{ps}(\lambda_1, \dots, \lambda_u) = k W_{pr}(\lambda_1, \dots, \lambda_u) F(\lambda_1, \dots, \lambda_u), \quad (10.3.26)$$

где

$$F(\lambda_1, \dots, \lambda_u) = \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_{t_0}^{t_0+T} [\xi(t) - s(t, \lambda_1, \dots, \lambda_u)]^2 dt \right\}. \quad (10.3.27)$$

При решении некоторых задач приходится оперировать не с самими функционалами, а с их отношением, в частности, с отношением правдоподобия. Отношение правдоподобия представляет собой отношение функционалов (функций) правдоподобия при наличии и отсутствии сигнала и определяется формулой вида

$$l(\lambda) = \frac{F(\lambda)}{W[\xi(t)]} = \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_{t_0}^{t_0+T} [\xi(t) - s(t, \lambda)]^2 dt \right\}}{\exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_{t_0}^{t_0+T} \xi^2(t) dt \right\}}. \quad (10.3.28)$$

Если в формулы (10.3.25) и (10.3.26) вместо функций правдоподобия подставить отношение правдоподобия, то получим

$$W_{ps}(\lambda) = k_0 W_{pr}(\lambda) l(\lambda), \quad (10.3.29)$$

$$W_{ps}(\lambda_1, \dots, \lambda_u) = k_0 W_{pr}(\lambda_1, \dots, \lambda_u) l(\lambda_1, \dots, \lambda_u), \quad (10.3.30)$$

где k_0 — некоторый постоянный коэффициент.

Имея в виду, что в дальнейшем окончательное решение задачится на основании отношения правдоподобия, для сокращения математических записей мы будем пользоваться на промежуточных шагах функционалами. Конечно, можно поступить иначе: сначала оперировать с многомерными плотностями вероятностей и функциями правдоподобия, а затем в конечных результатах (где входит их отношение) переходить к пределу при $\Delta \rightarrow 0$.

Продуктивность использования функционалов в теории оптимального радиоприема была убедительно показана в монографии Н. Н. Ампантова [3], являющейся одной из первых

§ 4. СТРУКТУРА АПОСТЕРИОРНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ В ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ

Рассмотрим на простейшем примере использование апостериорной вероятности и методику формирования ее, а также выясним качественное влияние на апостериорную вероятность отдельных факторов.

Пусть осуществляется радиолокационное измерение расстояния до одной неподвижной цели по запаздыванию отраженного импульсного сигнала. Обозначим излученный радиоимпульс через $s_i(t)$, отраженный от цели сигнал, принимаемый приемником, — через $s(t-\tau)$. Длительность сигнала $s(t-\tau)$ равна $\tau_i \ll T$, где T — интервал наблюдения. В случае импульсной радиолокации под T можно понимать интервал времени между соседними излученными импульсами периодической последовательности. Будем считать, что все параметры сигнала, за исключением временного запаздывания τ , известны. Возможные значения параметра τ заключены внутри интервала $(0, T)$ с известной априорной плотностью вероятности $W_{pr}(\tau)$.

В данном случае назначение приемника-измерителя состоит в том, чтобы на основе анализа принятого колебания

$$\xi(t) = s(t-\tau) + n(t), \quad 0 \leq t < T,$$

определить с минимальной погрешностью величину τ .

Согласно § 3 вся доступная информация о параметре τ дается формулой Байеса (10.3.25), которая применительно к рассматриваемому случаю принимает вид:

$$W_{ps}(\tau) = k W_{pr}(\tau) \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [\xi(t) - s(t-\tau)]^2 dt \right\}. \quad (10.4.1)$$

Упростим это выражение. Для этого распишем показатель экспоненты:

$$-\frac{1}{N_0} \int_0^T [\xi(t) - s(t - \tau)]^2 dt = -\frac{1}{N_0} \int_0^T \xi^2(t) dt + \\ + \frac{2}{N_0} \int_0^T \xi(t) s(t - \tau) dt - \frac{E}{N_0}, \quad (10.4.2)$$

где через E обозначена энергия (интеграл от квадрата) принятого сигнала

$$E = \int_0^T s^2(t - \tau) dt. \quad (10.4.3)$$

Если сигнал представляет напряжение, то величина E равна энергии, выделяемой на сопротивлении потерь 1 ом в течение времени T .

В правой части равенства (10.4.2) первое слагаемое, равное отношению энергии принятого колебания к спектральной плотности шума, не содержит информации об интересующем нас параметре τ , так как оно не зависит от τ . Поэтому в формуле (10.4.1) множитель $\exp\left(-\frac{1}{N_0} \int_0^T \xi^2(t) dt\right)$ можно включить в постоянную k . Таким образом, можем написать

$$W_{ps}(\tau) = kW_{pr}(\tau) \exp\left(-\frac{E}{N_0}\right) \exp[q(\tau)], \quad (10.4.4)$$

где

$$q(\tau) = \frac{2}{N_0} \int_0^T \xi(t) s(t - \tau) dt. \quad (10.4.5)$$

Во многих случаях множитель $\exp(-E/N_0)$ можно также включить в постоянную k . В данном случае это оправдано тем, что энергия сигнала предполагается независящей от его запаздывания τ ; в других случаях обычно ограничиваются рассмотрением (сравнением характеристик) сигналов, обладающих одинаковой энергией.

Следовательно, формулу (10.4.4) можно записать так:

$$W_{ps}(\tau) = k W_{pr}(\tau) \exp[q(\tau)]. \quad (10.4.6)$$

Экспоненциальная функция изменяется монотонно в зависимости от значений своего показателя. Поэтому функция $q(\tau)$ с определенной деформацией воспроизводит характер изменения апостериорной вероятности. Отсюда следует, что при известной априорной ве-

роятности определение апостериорной вероятности эквивалентно вычислению функции $q(\tau)$.

Таким образом, первый и главный этап при обработке принятого колебания с целью получения апостериорной вероятности параметра τ состоит в вычислении функции $q(\tau)$ согласно формуле (10.4.5). Эта функция определяет ту существенную операцию, которую нужно выполнить над принятым колебанием, чтобы извлечь всю доступную информацию о параметре τ , содержащуюся в реализации $\xi(t)$.

Как следует из формулы (10.4.5), для получения $q(\tau)$ необходимо располагать копией сигнала $s(t)$ на приемной стороне. На рис. 10.2 приведена функциональная схема устройства, позволяющего получить функцию $q(\tau)$.

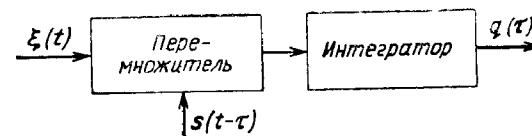


Рис. 10.2. Упрощенная схема корреляционного приемника.

Правая часть формулы (10.4.5) с точностью до постоянного множителя напоминает выражение для функции взаимной корреляции между $\xi(t)$ и $s(t - \tau)$. Поэтому можно сказать, что функция $q(\tau)$ характеризует меру «взаимной корреляции» между принятым колебанием $\xi(t)$ и полезным сигналом $s(t - \tau)$. Соответственно этому устройство, изображенное на рис. 10.2, можно условно назвать корреляционным приемником.

Функцию взаимной корреляции $q(\tau)$ можно получить не только при помощи корреляционного приемника, но также и при помощи соответствующим образом подобранных фильтров, которые называются согласованными (см. § 6).

Пусть истинное значение параметра τ в принятой реализации $\xi(t)$ равно τ_0 , т. е.

$$\xi(t) = s(t - \tau_0) + n(t). \quad (10.4.7)$$

Подставив это выражение $\xi(t)$ в (10.4.5), функцию $q(\tau)$ можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$q(\tau) = q_s(\tau) + q_n(\tau), \quad (10.4.8)$$

где

$$q_s(\tau) = \frac{2}{N_0} \int_0^T s(t - \tau_0) s(t - \tau) dt, \quad (10.4.9)$$

$$q_n(\tau) = \frac{2}{N_0} \int_0^T n(t) s(t - \tau) dt. \quad (10.4.10)$$

Функция $q_s(\tau)$, получаемая на выходе корреляционного приемника, представляет собой «автокорреляционную функцию» входного полезного сигнала, и ее можно назвать сигнальной функцией. Функция $q_n(\tau)$, воспроизводимая на выходе приемника и обусловленная шумом, есть «функция взаимной корреляции» между шумом и входным полезным сигналом; ее можно назвать шумовой функцией.

Существенное различие между сигнальной и шумовой функциями состоит в том, что первая при каждом фиксированном значении τ является детерминированной, а вторая — случайной. Говоря о случайном характере шумовой функции $q_n(\tau)$, имеют ввиду, что даже при детерминированном сигнале $s(t - \tau_0)$ конкретный вид этой функции из-за шума $n(t)$ будет различным для разных реализаций (10.4.7).

Рассмотрим характер сигнальной и шумовой функций. Покажем, что сигнальная функция имеет максимум при $\tau = \tau_0$, равный

$$q_{s\max}(\tau_0) = \frac{2E}{N_0} = Q. \quad (10.4.11)$$

Действительно, из очевидного неравенства $[s(t - \tau_0) - s(t - \tau)]^2 \geq 0$ имеем $s^2(t - \tau_0) + s^2(t - \tau) \geq 2s(t - \tau_0)s(t - \tau)$.

Правая часть этого соотношения при любых τ и τ_0 не может превышать значение левой части. Однако при $\tau = \tau_0$ имеет место знак равенства. Следовательно, произведение $2s(t - \tau_0)s(t - \tau)$ максимально при $\tau = \tau_0$ и равно $2s^2(t - \tau_0)$. Полагая в формуле (10.4.9) $\tau = \tau_0$, получим (10.4.11).

В качестве примера вычислим сигнальную функцию для прямоугольного видеоимпульса длительностью τ_i :

$$s(t - \tau_0) = \begin{cases} A & \text{при } |\tau - \tau_0| \leq \tau_i/2, \\ 0 & \text{при } |\tau - \tau_0| > \tau_i/2. \end{cases}$$

Под τ_0 понимается момент времени, соответствующий средине импульса. Рассматривая раздельно случай $\tau < \tau_0$ (рис. 10.3, а) и случай $\tau > \tau_0$ (рис. 10.3, б), интегрируя в обоих случаях по заштрихованным участкам, где подынтегральное выражение в (10.4.9) отлично от нуля, получим

$$q_s(\tau) = \frac{2E}{N_0} \left(1 - \frac{|\tau - \tau_0|}{\tau_i} \right) \quad \text{при } |\tau - \tau_0| \leq \tau_i. \quad (10.4.12)$$

Сигнальная функция изображена на рис. 10.3, в. Она представляет собой равнобедренный треугольник с основанием $2\tau_i$ и высотой

$$q_{s\max}(\tau_0) = 2E/N_0, \text{ где } E = A^2\tau_i.$$

Выясним теперь структуру шумовой функции $q_n(\tau)$. Формула (10.4.10) показывает, что функция $q_n(\tau)$ получается из нормального

шума путем линейного преобразования. Поэтому шумовая функция при каждом фиксированном значении τ имеет нормальную плотность вероятности. Согласно (10.2.13) среднее значение шумовой функции равно нулю

$$\langle q_n(\tau) \rangle = \frac{2}{N_0} \int_0^\tau \langle n(t) \rangle s(t - \tau) dt = 0, \quad (10.4.13)$$

а для дисперсии получим формулу

$$\langle q_n^2(\tau) \rangle = \frac{4}{N_0^2} \int_0^\tau \int_0^\tau \langle n(t_1) n(t_2) \rangle s(t_1 - \tau) s(t_2 - \tau) dt_1 dt_2 = \frac{2E}{N_0}. \quad (10.4.14)$$

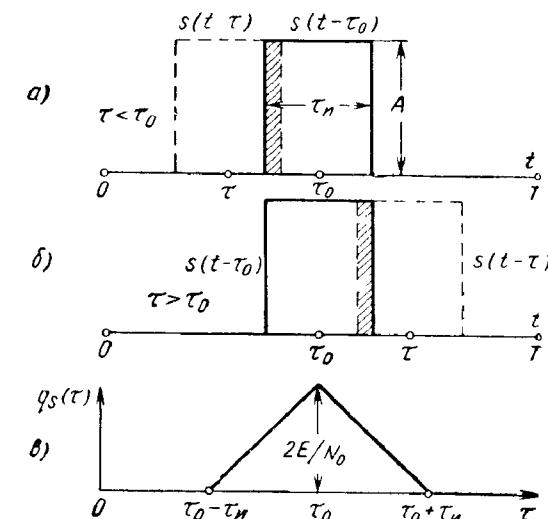


Рис. 10.3. Сигнальная функция для прямоугольного импульса.

Обращает на себя внимание тот факт, что как максимальное значение сигнальной функции, так и дисперсия шумовой функции равны одной и той же величине

$$Q = \frac{2E}{N_0}. \quad (10.4.15)$$

Назовем величину Q , равную отношению удвоенной энергии сигнала к спектральной плотности шума, отношением сигнал/шум по мощности на входе приемника. В дальнейшем мы убедимся, что величина Q входит во многие соотношения и играет фундаментальную роль.

Если учитывать мощность шумов радиоприемника по формуле (10.2.11) и вместо энергии E ввести импульсную мощность сигнала на входе приемника $\dot{P}_s = E/\tau_i$, то для Q получим следующую формулу:

$$Q = \frac{2E}{N_0} = \frac{2\dot{P}_s \tau_i}{kT_0 (k_n + t_A - 1)}. \quad (10.4.16)$$

Это отношение сигнал/шум практически получается на выходе согласованного УПЧ (см. § 6).

Для выяснения характера изменения шумовой функции в зависимости от τ найдем «функцию корреляции» для $q_n(\tau)$. Воспользовавшись формулами (10.4.10) и (10.2.13), получим

$$\begin{aligned} \langle q_n(\tau_1) q_n(\tau_2) \rangle &= \frac{4}{N_0^2} \int_0^T \int_0^T \langle n(t_1) n(t_2) \rangle s(t_1 - \tau_1) s(t_2 - \tau_2) dt_1 dt_2 = \\ &= \frac{2}{N_0} \int_0^T s(t - \tau_1) s(t - \tau_2) dt. \end{aligned} \quad (10.4.17)$$

Сравнивая подынтегральные выражения в формулах (10.4.9) и (10.4.17), замечаем, что они по характеру одинаковы. Следовательно, корреляционная функция для $q_n(\tau)$ по форме подобна сигнальной функции $q_s(\tau)$, т. е. автокорреляционной функции сигнала на входе. Но функция корреляции случайного процесса дает некоторое представление о характере изменения его во времени. Поэтому можно сказать, что операция образования функции взаимной корреляции (10.4.5) сопровождается «выравниванием» временных структур сигнальной и шумовой функций.

В то время как в принятом колебании $\xi(t)$ сигнал $s(t)$ и белый шум $n(t)$ существенно различаются по характеру изменения во времени, «сигнал» q_s и «шум» q_n на выходе корреляционного приемника или согласованного фильтра становятся подобными друг другу. Иначе говоря, корреляционный приемник или согласованный фильтр устраняют существенное различие во временном поведении сигнала и шума.

Не следует думать, что «выравнивание» временных структур сигнальной и шумовой функций затрудняет определение истинного значения интересующего нас параметра τ . Наоборот, операция образования функции взаимной корреляции (10.4.5) обеспечивает наилучшую фильтрацию сигнала из шума, давая по сравнению с другими возможными операциями максимальное отношение сигнал/шум.

Таким образом, «выравнивание» временных структур сопровождается улучшением амплитудных различий сигнала и шума или, иначе, существенным понижением шумового фона q_n , на котором наблюдается сигнал q_s . В этом и состоит сущность образования функции взаимной корреляции (10.4.5).

Приведем интерпретацию полученных результатов, считая априорную плотность вероятности параметра τ на интервале наблюдения равномерной:

$$W_{pr}(\tau) = \begin{cases} 1/T & \text{при } 0 \leq \tau \leq T, \\ 0 & \text{при } \tau < 0, \tau > T. \end{cases} \quad (10.4.18)$$

На рис. 10.4, *a* изображена реализация нормального шума $n(t)$, на рис. 10.4, *б* — частный вид сигнала $s(t - \tau)$ и на рис. 10.4, *в* — реализация принятого колебания $\xi(t)$. Располагая реализацией

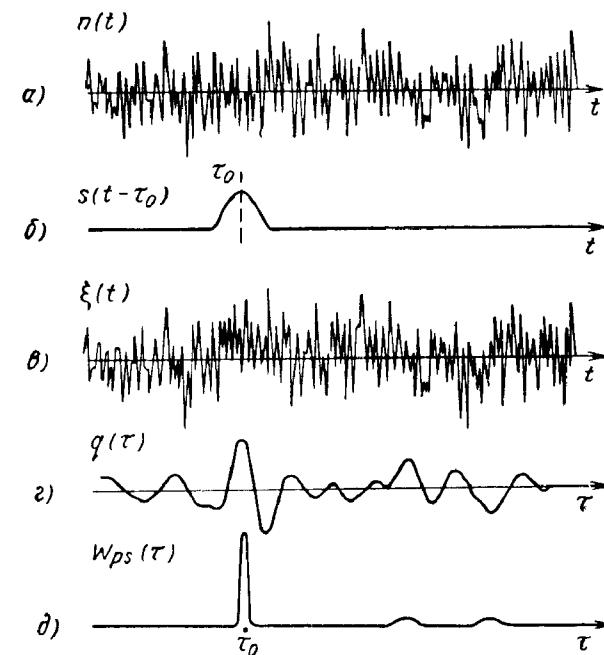


Рис. 10.4. Формирование функции взаимной корреляции и апостериорной вероятности (*а* — нормальный шум; *б* — полезный сигнал; *в* — принятое колебание; *г* — функция взаимной корреляции; *д* — апостериорная вероятность).

(*t*) и зная форму сигнала $s(t)$, наблюдатель должен определить неизвестное ему положение τ_0 сигнала в шуме. Как указывалось выше, для этого нужно построить функцию $q(\tau)$ путем интегрирования результата перемножения $\xi(t)$ с сигналом $s(t - \tau)$ при различных значениях τ из интервала $(0, T)$. На рис. 10.4, *г* показана функция $q(\tau)$, а на рис. 10.4, *д* — апостериорная вероятность. Из последних двух рисунков видно, что функции $q(\tau)$ и $W_{ps}(\tau)$ имеют наибольшие значения в окрестности τ_0 , где сигнальная функция $q_s(\tau)$ имеет

максимум. Поэтому в качестве оценки истинного значения τ_0 параметра τ можно принять то значение $\tau = \tau^*$, при котором апостериорная вероятность имеет максимум максиморум. Погрешность измерения можно характеризовать шириной (на определенном уровне) апостериорной вероятности в окрестности максимума максиморума. Подробное рассмотрение вопросов, связанных с выбором критериев оценки параметров, будет приведено в § 1 гл. 12.

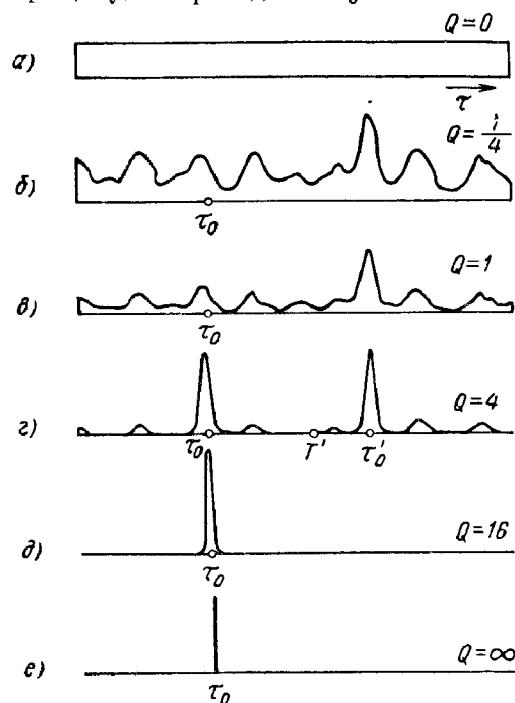


Рис. 10.5. Изменение вида апостериорной вероятности от отношения сигнал/шум.

Оценка τ^* , как правило, не совпадает с истинным значением параметра τ_0 ($\tau^* \neq \tau_0$). Это объясняется тем, что при наличии шума шумовая функция q_n , складываясь с сигнальной q_s , вызывает смещение максимума максиморума апостериорной вероятности от τ_0 и изменяет его «ширину». Чем меньше отношение сигнал/шум Q (чем больше шум), тем возможно большее смещение и расширение апостериорного распределения. При этом увеличивается погрешность результата измерения.

Кроме этого, увеличение шума связано с появлением ложных максимумов, сравнимых по величине с полезным максимумом, обусловленным сигналом. Это наглядно иллюстрируется рис. 10.5, на котором показан характер изменения апостериорной вероятности в зависимости от отношения сигнал/шум Q на входе приемника [4].

Из формул (10.4.11) и (10.4.14) видно, что отношение максимального значения сигнальной функции к среднеквадратичному значению шумовой функции равно

$$\frac{q_{s \max}}{\sigma_n} = \sqrt{Q} = \sqrt{\frac{2E}{N_0}}. \quad (10.4.19)$$

Если N_0 очень велико, то это отношение мало, и сигнал полностью скрываются шумом. При этом сами функции q_s и q_n будут также очень малыми. Полагая в формуле (10.4.6) $\exp[q(\tau)] \approx 1$, получим

$$W_{ps}(\tau) \approx kW_{pr}(\tau). \quad (10.4.20)$$

Убеждаемся, что при очень малом отношении сигнал/шум априорная вероятность совпадает с априорной, которая была принята равномерной (10.4.18). Соответствующий график приведен на рис. 10.5, a. В данном случае прием колебания $\xi(t)$ не дает дополнительной информации о параметре τ .

При увеличении отношения сигнал/шум растет дисперсия шумовой функции σ_n^2 и в апостериорной вероятности появляются неравномерности (рис. 10.5, б), которые затем начинают переходить в явно выраженные пики, разделенные участками малой вероятности (рис. 10.5, в).

Когда $Q > 1$, отношение (10.4.19) будет также больше единицы, и становится заметной вероятность появления одного из пики $W_{ps}(\tau)$ в окрестности истинного значения τ_0 . При дальнейшем увеличении Q растет степень достоверности того, что пик $q(\tau)$, обусловленный сигналом, будет выше шумовых пики. При этом экспоненциальный множитель в формуле (10.4.6) начинает существенно усиливать неравномерность $q(\tau)$ и апостериорное распределение «просится» на отдельные ясно выраженные пики, разделенные участками почти нулевой вероятности (рис. 10.5, г, д). Преобладающим становится пик в окрестности τ_0 и уменьшается число «конкурирующих» по величине шумовых пики. При $N_0 \rightarrow 0$ остается один узкий пик, расположенный в точке $\tau = \tau_0$ (рис. 10.5, е).

Из приведенных графиков видно, что даже при $Q = 4$ имеется два почти одинаковых пика, один из которых (шумовой) расположен в окрестности τ'_0 . При этом неясно, какой из пиков является ложным, и за истинное значение параметра можно принять как τ_0 , так и τ'_0 . В данном случае имеется неоднозначность в определении τ . Эта неоднозначность устраняется при дальнейшем увеличении Q .

Неоднозначность определения параметра зависит также от априорной вероятности. Если бы в рассмотренном примере возможными значениями задержки τ являлся подынтервал $(0, T')$, а не весь интервал $(0, T)$, где $T' < T$, то в конкретной ситуации рис. 10.5, г предсказуемость не имела бы места. Иначе говоря, сужение априорного интервала значений τ уменьшает вероятность появления на

этом интервале больших шумовых выбросов. Тем самым обеспечивается возможность более надежного определения параметра при меньших значениях Q .

На частном примере оценки задержки сигнала мы рассмотрели операции, позволяющие получить апостериорную вероятность, и выяснили влияние на апостериорную вероятность отдельных факторов (в частности, отношения сигнал/шум и априорной вероятности).

§ 5. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ ПРИЕМ

В § 4 указывалось, что наиболее существенная операция, которую необходимо выполнить над принятым колебанием $\xi(t)$ для получения апостериорной вероятности, состоит в вычислении функции взаимной корреляции (10.4.5)

$$q(\tau) = \frac{2}{N_0} \int_0^T \xi(t) s(t - \tau) dt. \quad (10.5.1)$$

По функции взаимной корреляции можно однозначно найти апостериорные вероятности без дополнительного обращения к принятому колебанию. Но апостериорные вероятности содержат все сведения, которые можно извлечь из принятой реализации сигнала. В этом смысле можно сказать, что взаимокорреляционный приемник является оптимальным.

Заметим, что если бы в формуле (10.5.1) перед интегралом стоял множитель $1/T$, то она была бы подобна формуле (3.9.3), и функция $q(\tau)$ представляла бы выражение кратковременной функции взаимной корреляции (т. е. функции взаимной корреляции, когда время усреднения конечно). Однако наличие постоянного множителя $1/T$ оказывается лишь на характере работы интеграторов. Отвлекаясь от этих подробностей, можно говорить, что $q(\tau)$ есть функция взаимной корреляции между принятым колебанием и полезным сигналом, а устройство рис. 10.2, осуществляющее операции (10.5.1), можно назвать взаимокорреляционным приемником.

Рассмотрим подробнее работу взаимокорреляционного приемника. Практически функцию взаимной корреляции $q(\tau)$ для нескольких фиксированных значений τ можно получить при помощи устройства, функциональная схема которого изображена на рис. 10.6. Линия задержки имеет общую задержку, равную априорному интервалу T ожидаемых значений τ . От линии задержки сделаны равномерно отводы; разность в задержках между соседними отводами равна постоянной величине Δ . При этом схема рис. 10.6 позволяет получить на выходе интеграторов, следующих за перемножителями, значения функции взаимной корреляции, соответствующие задержкам $\tau_i = i\Delta$, $i = 0, 1, 2, \dots, v$; $v\Delta = T$.

Если дополнить корреляционный приемник схемой сравнения, которая выдавала бы на выходе номер m того подинтервала Δ , в котором функция $q(\tau_m)$ имеет наибольший максимум, то это устройство можно использовать для определения неизвестного момента появления τ_0 импульсного сигнала. При этом точность измерения будет характеризоваться величиной Δ . Для импульсных радиолокационных станций величину Δ берут приближенно равной длительности импульса.

Применительно к конкретному случаю измерения времени запаздывания сигнала схема сравнения может состоять из обычного

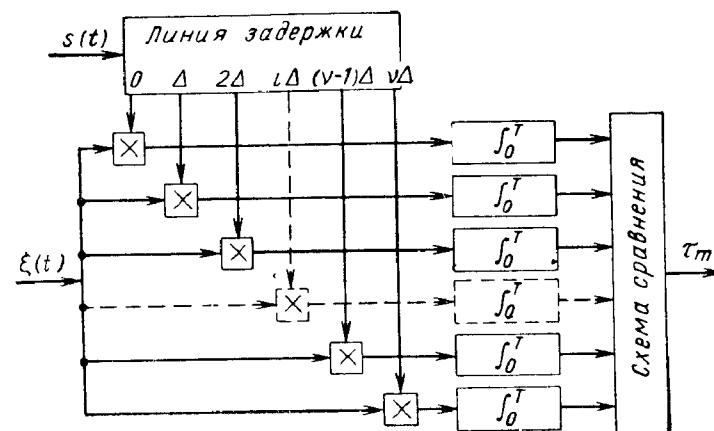


Рис. 10.6. Функциональная схема взаимокорреляционного приемника для определения временного положения импульсного сигнала

спиллографа с линейной разверткой вдоль оси t и устройства, фиксирующего номер m задержки, при которой появляется наибольший выброс.

Корреляционные методы приема оказались особенно полезными при приеме повторяющихся (радиолокационных) сигналов на фоне шума [5]. Пусть полезный сигнал $s(t - \tau)$ представляет пачку из n коротких прямоугольных видеоимпульсов с амплитудой A , длительностью τ_0 и известным периодом следования T_0 (рис. 10.7, a). В каждом периоде время запаздывания τ_0 одинаково и может принимать значения в интервале T_0 , т. е. в i -м периоде время запаздывания равно $i\tau_0$, причем $(i-1)T_0 \leq i\tau_0 \leq iT_0$, где $i = 1, 2, \dots, n$.

Нетрудно показать, что сигнальная функция

$$q_s(\tau) = \frac{2}{N_0} \int_0^{nT_0} s(t - \tau_0) s(t - \tau) dt \quad (10.5.2)$$

имеет вид равнобедренных треугольников (рис. 10.7, б), отстоящих друг от друга на расстоянии T_0 с основанием $2\tau_n$ и высотой

$$q_s(\tau_p) = (n - \mu) \frac{2E}{N_0}, \quad \tau_p = \tau_0 \pm \mu T_0, \quad \mu = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Здесь E — энергия одного импульса.

Наибольший пик при $\tau = \tau_0$ имеет высоту

$$q_{s \max}(\tau_0) = n \frac{2E}{N_0}. \quad (10.5.3)$$

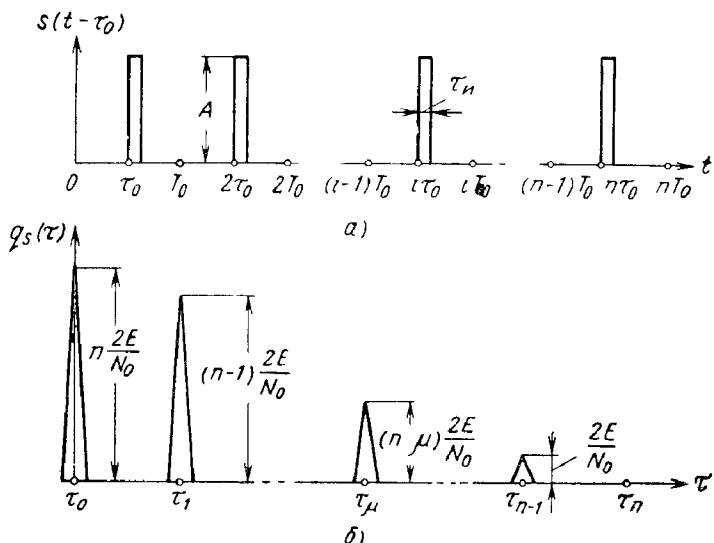


Рис. 10.7. Пачка прямоугольных импульсов и ее функция автокорреляции.

Высота пиков, расположенных симметрично относительно этого главного пика, постепенно уменьшается, причем разность высот двух соседних пиков одинакова и равна $\Delta q = 2E/N_0$.

Шумовая функция

$$q_n(\tau) = \frac{2}{N_0} \int_0^{nT_0} n(t) s(t - \tau) dt \quad (10.5.4)$$

имеет нулевое среднее значение. Дисперсия ее равна

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= \langle q_n^2(\tau) \rangle = \frac{4}{N_0^2} \int_0^{nT_0} \int_0^{nT_0} \langle n(t_1) n(t_2) \rangle s(t_1 - \tau) s(t_2 - \tau) dt_1 dt_2 = \\ &= \frac{2}{N_0} \int_0^{nT_0} s^2(t - \tau) dt = \frac{2}{N_0} \sum_{\mu=1}^n \int_{(n-\mu)T_0}^{nT_0} s^2(t - \tau) d\tau = n \frac{2E}{N_0}. \quad (10.5.5) \end{aligned}$$

Из формул (10.5.3) и (10.5.5) получаем отношение максимального пика сигнальной функции к среднеквадратичному значению шумовой функции

$$\frac{q_{s \max}(\tau_0)}{\sigma_n} = \sqrt{n \frac{2E}{N_0}}. \quad (10.5.6)$$

Таким образом, если отношение сигнал/шум по напряжению на выходе взаимокорреляционного приемника для одного импульса равно $\sqrt{2E/N_0}$, то при приеме n таких же периодически следующих импульсов это отношение увеличивается в \sqrt{n} раз. Поэтому в случае пачки импульсов полезный пик в окрестности τ_0 как у функции $q(\tau)$, так и у апостериорной вероятности будет более отчетливо выделяться на фоне шумовых выбросов, чем для одного импульса.

За счет увеличения числа импульсов можно добиться требуемого отношения сигнал/шум (10.5.6) на выходе взаимокорреляционного приемника. Можно сказать, что увеличение времени наблюдения (интегрирования) в n раз сопровождается улучшением отношения сигнал/шум в \sqrt{n} раз. Этот результат можно практически использовать как для обнаружения периодических импульсных сигналов на фоне сильных помех, так и при оценке неизвестных параметров. При этом в отличие от одиночного импульса здесь решение принимается с запаздыванием во времени в n раз большим.

Именно в подобных случаях, когда требуется большое время интегрирования, практически применяются взаимокорреляционные приемники, а не согласованные фильтры. Как правило, оптимальные фильтры имеют весьма ограниченное время интегрирования (накопления).

Укажем, что результат (10.5.6) справедлив не только для видеоимпульсов, но и для пачки из n когерентных радиоимпульсов. Если же пачка составлена из некогерентных радиоимпульсов, то отношение сигнал/шум будет меньше [6]. При этом радиоимпульсы, после фильтрации соответствующим оптимальным фильтром, должны предварительно детектироваться и лишь затем суммироваться. Когда отношение сигнал/шум в каждом импульсе мало (энергия импульса того же порядка или меньше, чем спектральная плотность шума), то оптимальная характеристика детектора близка к квадратичной. При больших отношениях сигнал/шум оптимальная характеристика детектора близка к линейной. В случае флюктуирующих импульсов оптимальной всегда является квадратичная характеристика детектора.

Как следует из формулы (10.5.1), для получения функции взаимной корреляции необходимо на приемной стороне знать форму полезного сигнала $s(t)$. Однако это не всегда просто достигается, что ограничивает возможность практического применения взаимокорреляционного приема.

В том случае, когда приемное и передающее устройства расположены в одном месте (радиолокация), в качестве местного (опорного) сигнала $s(t)$ на приемной стороне можно взять колебания местного гетеродина или импульсы передатчика, задержанные соответствующей линией задержки (рис. 10.8). Интенсивность колебаний гетеродина или импульсов передатчика настолько велика, что мешающими напряжениями на входе приемника, сопровождающими эти импульсы, всегда можно преибречь. Без учета искажений принятого сигнала опорное напряжение будет совпадать по форме с принимаемым сигналом. В данном случае является важным требование

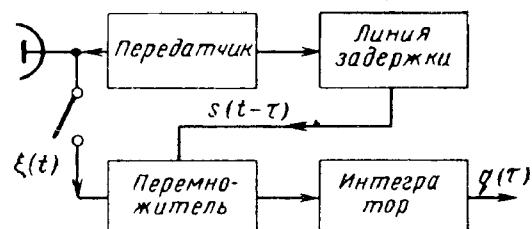


Рис. 10.8. Взаимокорреляционный прием.

вание высокой стабильности частоты колебаний гетеродина (за время обработки интересующей нас пачки импульсов фаза колебаний гетеродина не должна существенно изменяться).

Сложнее обстоит дело с формированием опорного сигнала $s(t)$ в радиосвязи, когда передающее и приемное устройства пространственно разнесены. Считая фазовые флуктуации радиосигнала из-за распространения радиоволн через турбулентную атмосферу или ионосферу медленными, здесь для формирования опорного сигнала обычно применяют несколько видов устройств.

Если колебания передатчика имеют высокую стабильность по частоте, то на приемной стороне можно использовать высокостабильный гетеродин, работа которого предварительно и периодически синхронизируется колебаниями передатчика. Иногда применяют автокорреляционный прием. При автокорреляционном приеме опорным напряжением служит принятое колебание. Работа автокорреляционного приемника описывается формулой

$$q(\tau) = \frac{2}{N_0} \int_{t_0}^{t_0+T} \xi(t) \xi(t - \tau) dt. \quad (10.5.7)$$

Автокорреляционный прием является менее помехоустойчивым, чем взаимокорреляционный прием, так как при одинаковых условиях приема отношение сигнал/шум на выходе автокорреляционного приемника будет меньше, чем на выходе взаимокорреляционного приемника. Это объясняется тем, что при взаимокорреляционном

приеме опорное напряжение по форме точно совпадает с полезным сигналом, а при автокорреляционном приеме опорное напряжение, кроме полезного сигнала, содержит также шум.

В тех случаях, когда фаза колебаний передатчика сравнительно медленно и не очень сильно изменяется за время наблюдения сигнала T , опорное напряжение можно формировать из принятого колебания $\xi(t)$ при помощи специальных устройств синхронизации (рис. 10.9), предложенных А. А. Пистолькорсом, В. И. Сифоровым, Е. П. Костасом и др. [7, 8]. Назовем условно такой метод приема синхронным или квазикогерентным. Из-за наличия шума в канале

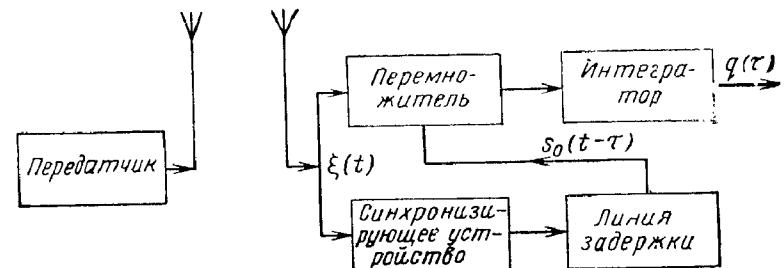


Рис. 10.9. Синхронный (квазикогерентный) прием.

синхронизации параметры опорного сигнала $s_0(t)$ будут случайными, что обуславливает меньшую помехоустойчивость такого метода приема по сравнению с взаимокорреляционным. Степень понижения помехоустойчивости определяется отношением сигнал/шум в канале синхронизации (см. § 5 гл. 11).

Если не предъявлять особых требований к стабильности частоты передатчика, то для получения опорного сигнала следует применять самостоятельный канал синхронизации с использованием различных вариантов фазовой автоподстройки частоты (см. § 4 гл. 13).

§ 6. СОГЛАСОВАННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ФИЛЬТРЫ

В § 4 отмечалось, что функцию взаимной корреляции $q(\tau)$ между колебанием $\xi(t)$, принятым на интервале $(0, T)$, и полезным сигналом $s(t)$ можно получить на выходе согласованного фильтра. Рассмотрим этот вопрос подробнее с привлечением спектрального анализа. Приведем сначала определение согласованного фильтра, а затем рассмотрим свойства этих фильтров и некоторые практические рекомендации по их реализации.

Если $s(t)$ есть некоторое физическое колебание, принимаемое на фоне белого шума, то согласованным фильтром для этого колебания является фильтр, имеющий импульсную характеристику:

$$G(t) = ks(t_0 - t), \quad (10.6.1)$$

где k — постоянная, равная максимальному усилинию фильтра; t_0 — фиксированное время, при котором наблюдается выходной сигнал (см. ниже).

Чтобы представить себе функцию $G(t)$, обратимся к рис. 10.10. На рисунке изображен импульсный сигнал $s(t)$. Очевидно, что функция $s(t_0 + t)$, изображенная пунктиром, появляется на время t_0 раньше, чем сигнал $s(t)$. Функция же $s(t_0 - t)$ является зеркальным отображением функции $s(t_0 + t)$ относительно оси ординат. Умножив функцию $s(t_0 - t)$ на коэффициент k , получаем импульсную характеристику согласованного фильтра (10.6.1).

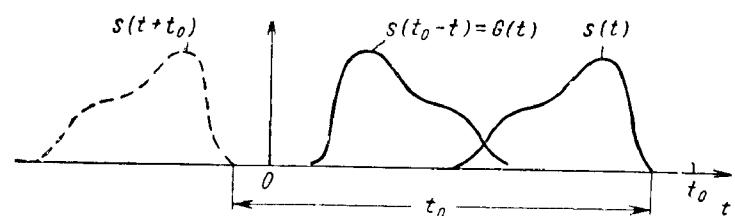


Рис. 10.10. Сигнал $s(t)$ и импульсная характеристика $G(t)$ согласованного фильтра ($k=1$).

Передаточная функция согласованного фильтра по формуле (6.1.3) равна

$$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t) e^{-j\omega t} dt = k e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} s(t') e^{j\omega t'} dt'.$$

Учитывая выражение для спектра сигнала

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt,$$

получим

$$K(j\omega) = k e^{-j\omega t_0} S(-j\omega) = k S^*(j\omega) e^{-j\omega t_0}, \quad (10.6.2)$$

где $S^*(j\omega)$ — функция, комплексно-сопряженная спектру сигнала $S(j\omega)$.

Таким образом, если прием сигнала осуществляется на фоне белого шума, то с точностью до амплитудного множителя и постоянной задержки (определенной множителем $k e^{-j\omega t_0}$) передаточная функция согласованного фильтра представляет собой функцию, комплексно-сопряженную со спектром полезного сигнала. Следовательно, частотная характеристика согласованного фильтра целиком определяется спектром сигнала, а импульсная характеристика фильтра — формой сигнала («согласована» с сигналом).

Согласованные фильтры обладают следующими свойствами:

1. Среди всех линейных фильтров согласованный фильтр дает на выходе максимальное отношение пикового значения сигнала к среднеквадратичному значению шума, равное $\sqrt{2E/N_0}$. Это замечательное свойство часто принимается за определение согласованных фильтров.

2. Сигнал на выходе согласованного фильтра по форме совпадает с «функцией автокорреляции» входного полезного сигнала, и функция корреляции выходного шума имеет вид функции автокорреляции входного полезного сигнала.

Докажем эти свойства, начав со второго. Обозначим полезный сигнал на выходе согласованного фильтра через $s_B(t)$ и шум на выходе через $n_B(t)$. Используя формулу интеграла Диамеля, можем написать

$$s_B(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) s(t - \tau) d\tau = k \int_{-\infty}^{\infty} s(t_0 - \tau) s(t - \tau) d\tau, \quad (10.6.3)$$

$$n_B(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) n(t - \tau) d\tau = k \int_{-\infty}^{\infty} s(t_0 - \tau) n(t - \tau) d\tau. \quad (10.6.4)$$

Из формулы (10.6.3) видно, что сигнал на выходе согласованного фильтра с точностью до постоянного множителя представляет собой функцию автокорреляции входного полезного сигнала, причем максимальное значение выходного сигнала имеет место при $t = t_0$ и равно

$$s_{B\max}(t_0) = kE, \quad (10.6.5)$$

где E — энергия входного сигнала.

Функция корреляции выходного шума легко вычисляется:

$$\begin{aligned} I_B(t_1, t_2) &= \langle n_B(t_1) n_B(t_2) \rangle = k^2 \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} s(t_0 - \tau) s(t_0 - \tau + t_1 - t_2) d\tau = \\ &= k^2 \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s(t + t_1 - t_2) dt. \end{aligned} \quad (10.6.6)$$

Эта формула подтверждает, что функция корреляции выходного шума имеет вид автокорреляционной функции входного сигнала. Полагая в формуле (10.6.6) $t_1 = t_2$, получаем дисперсию выходного шума

$$\sigma_B^2 = k^2 \frac{N_0 E}{2}. \quad (10.6.7)$$

Из формул (10.6.5) и (10.6.7) находим отношение максимального значения выходного полезного сигнала к среднеквадратичному значению выходного шума:

$$\frac{s_{\text{в max}}(t_0)}{\sigma_{\text{в}}} = \sqrt{\frac{2E}{N_0}}, \quad (10.6.8)$$

что, как и следовало ожидать, совпадает с результатом (10.4.19).

Характерно, что отношение сигнал/шум на выходе согласованного фильтра определяется только отношением энергии сигнала к спектральной плотности шума и не зависит от формы сигнала.

Отношение сигнал/шум на выходе согласованного фильтра можно пересчитать к его входу. Пусть Δf_s — энергетическая (шумовая) полоса сигнала или согласованного фильтра (3.10.4). Тогда мощность шумов на входе в энергетической полосе согласованного фильтра равна $P_n = N_0 \Delta f_s$, а мощность сигнала на входе фильтра равна $P_s = E/\tau_i$, где τ_i — эффективная длительность сигнала. Подставив отдельные величины в формулу (10.6.8), получим

$$\frac{s_{\text{в max}}(t_0)}{\sigma_{\text{в}}} = \sqrt{2\Delta f_s \tau_i \frac{P_s}{P_n}}. \quad (10.6.9)$$

Произведение $\Delta f_s \tau_i$ часто называют базой сигнала. При заданной энергии сигнала E и равномерной спектральной плотности шума N_0 увеличение τ_i или Δf_s порознь не оказывает непосредственного влияния на отношение сигнал/шум на выходе согласованного фильтра; это отношение можно увеличить за счет увеличения базы сигнала.

Убедимся теперь в выполнимости первого свойства. Пусть $K(j\omega)$ есть передаточная функция некоторого линейного фильтра. При воздействии на такой фильтр сигнала $s(t)$ спектр сигнала на выходе будет определяться произведением $S(j\omega)K(j\omega)$, а сам выходной сигнал — равенством

$$s_{\text{в}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (10.6.10)$$

При воздействии белого шума со спектральной плотностью $N_0/2$ (имеется ввиду двусторонняя спектральная плотность), дисперсия шума на выходе фильтра равна

$$\sigma_{\text{в}}^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K(j\omega)|^2 d\omega. \quad (10.6.11)$$

Из (10.6.10) и (10.6.11) получаем формулу для отношения мгновенного значения сигнала на выходе фильтра в некоторый момент времени t_0 к среднеквадратичному значению выходного шума

$$\frac{|s_{\text{в}}(t_0)|}{\sigma_{\text{в}}} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t_0} d\omega \right|}{\left(\pi N_0 \int_{-\infty}^{\infty} |K(j\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (10.6.12)$$

Найдем такую передаточную функцию $K(j\omega)$, при которой отношение (10.6.12) в момент времени t_0 достигает максимума. Для этого воспользуемся неравенством Шварца — Буняковского. Неравенство Шварца — Буняковского гласит, что если имеются две комплексные функции $F(x)$ и $\Gamma(x)$, то выполняется соотношение

$$\left| \int F^*(x) \Gamma(x) dx \right| \leq \left(\int |F(x)|^2 dx \int |\Gamma(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (10.6.13)$$

причем знак равенства имеет место в том и только в том случае, когда

$$\Gamma(x) = kF(x), \quad (10.6.14)$$

где k — постоянная.

Положив $\Gamma(\omega) = K(j\omega)$, $F^*(\omega) = S(j\omega) e^{-j\omega t_0}$ и применив неравенство (10.6.13) к числителю выражения (10.6.12), получим

$$\frac{|s_{\text{в}}(t_0)|}{\sigma_{\text{в}}} \leq \frac{\left(\int |S(j\omega)|^2 d\omega \int |K(j\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\pi N_0 \int_{-\infty}^{\infty} |K(j\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}} \leq \sqrt{\frac{2E}{N_0}}, \quad (10.6.15)$$

так как энергия входного полезного сигнала равна

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega. \quad (10.6.16)$$

Таким образом, отношение максимального значения сигнала на выходе любого линейного фильтра к среднеквадратичному значению выходного шума не может превышать величину $\sqrt{2E/N_0}$. Это максимально возможное значение, как показывает равенство (10.6.14), достигается при выполнении условия

$$K(j\omega) = kS^*(j\omega) e^{-j\omega t_0}. \quad (10.6.17)$$

То фильтр, имеющий такую передаточную функцию, является согласованным фильтром. Следовательно, согласованный фильтр является единственным линейным фильтром, дающим максимально

возможное отношение сигнал/шум на выходе. Никакой другой фильтр не может дать отношение сигнал/шум больше, чем согласованный.

Запишем спектр входного сигнала и передаточную функцию фильтра в виде

$$S(j\omega) = |S(j\omega)| e^{j\varphi_s(\omega)}, \quad K(j\omega) = |K(j\omega)| e^{j\varphi_f(\omega)}. \quad (10.6.18)$$

Для согласованного фильтра из (10.6.17) получим

$$|K(j\omega)| = k |S(j\omega)|, \quad \varphi(\omega) = -[\varphi_s(\omega) + \omega t_0]. \quad (10.6.19)$$

Видно, что амплитудно-частотная характеристика согласованного фильтра пропорциональна амплитудно-частотному спектру ожидаемого сигнала, а фазовая характеристика равна сумме фазового спектра сигнала, взятого с обратным знаком, и задержки $(-\omega t_0)$.

Совпадение формы амплитудно-частотной характеристики фильтра с амплитудным спектром сигнала обеспечивает наилучшее выделение наиболее интенсивных участков спектра сигнала. Слабые участки спектра сигнала фильтр ослабляет; в противном случае, наряду с ними проходили бы интенсивные шумы. При этом форма сигнала на выходе фильтра искажается. Однако это не имеет значения, так как задача фильтра в данном случае состоит не в точном воспроизведении входного сигнала, а в наилучшем выделении пика сигнала на фоне шума. Существенную роль в этом отношении играет фазовая характеристика фильтра $\varphi(\omega)$.

Подставив в (10.6.10) функцию передачи (10.6.17), получаем выражение сигнала на выходе согласованного фильтра

$$\begin{aligned} s_v(t) &= \frac{k}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 e^{j\varphi_f(t-t_0)} d\omega \\ &= \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 \cos \omega(t-t_0) d\omega. \end{aligned} \quad (10.6.20)$$

Отсюда видно, что сигнал на выходе фильтра определяется только амплитудно-частотным спектром входного сигнала и не зависит от его фазового спектра. Последнее объясняется тем, что взаимные фазовые сдвиги спектральных составляющих входного сигнала $\varphi_s(\omega)$ компенсируются фазо-частотной характеристикой фильтра. Поэтому все гармонические составляющие одновременно достигают амплитудных значений в момент времени $t = t_0$, и, складываясь, дают пик выходного сигнала:

$$s_{v \max}(t_0) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega = kE.$$

Если бы фазо-частотная характеристика фильтра не компенсировала фазовых сдвигов спектральных составляющих входного сигнала, максимумы гармонических составляющих не совпадали бы по времени, что привело бы к уменьшению или раздроблению пика выходного сигнала.

При практическом конструировании согласованных фильтров, кроме основных формул (10.6.1) и (10.6.2), следует также иметь в виду условия физической осуществимости линейных фильтров

$$G(t) = 0 \quad \text{при } t < 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log |K(j\omega)|^2}{1 + \omega^2} d\omega < \infty \quad (10.6.21)$$

Условия практической реализуемости фильтров. Условия физической осуществимости определяют принципиальные возможности создания фильтров, а условия практической реализуемости — практические возможности создания фильтров.

Когда импульсная характеристика (10.6.1) или функция передачи (10.6.2) предполагают физически осуществимый линейный фильтр, задачу отыскания согласованного фильтра в принципе можно считать решенной.

Если сигнал, с которым должен быть согласован фильтр, начинается в момент времени $t = 0$ и полностью прекращается при $t \geq \tau_i$ (рис. 10.11), первое из условий (10.6.21) выполняется при $t_0 \geq \tau_i$. Только при этом будет использована вся энергия входного сигнала для формирования сигнального пика на выходе фильтра в момент t_0 . величина t_0 сверх τ_i , не влияя на величину пика, сдвигает его в сторону большего запаздывания, что нежелательно. Поэтому следует брать $t_0 = \tau_i$.

Иногда для аппроксимации реальных импульсных сигналов используют бесконечно длинные импульсы (гауссов, экспоненциальный и др.). В подобных случаях приходится искусственно брать конечное значение длительности аппроксимирующего импульса, содержащей новую долю энергии сигнала.

Если даже согласованный фильтр является физически осуществимым, то это не означает, что данный фильтр можно реализовать практически. Может оказаться, что для построения такого фильтра требуется слишком много элементов, или же эти элементы должны обладать практически трудновыполнимыми характеристиками и т. д.

В тех случаях, когда для сигнала получаются практически нереализуемые фильтры, можно предложить два пути.

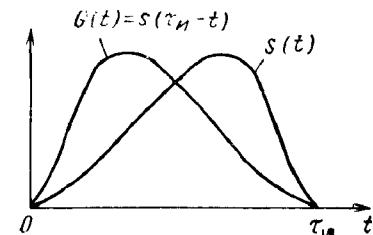


Рис. 10.11. Сигнал $s(t)$ конечной длительности и импульсная характеристика согласованного фильтра

Для многих применений целесообразно заранее подбирать такие сигналы, для которых получаются сравнительно легко реализуемые фильтры. Иначе говоря, чтобы обеспечить наилучший общий результат, нужно одновременно заниматься как построением согласованных фильтров, так и подбором желательных форм сигналов [9].

Если желательная форма сигнала выбрана и для него согласованный фильтр все же не реализуем, то следует использовать тот из практически осуществимых фильтров, который обеспечивает максимальное отношение сигнал/шум на выходе. (Во избежание недоразумений отметим, что здесь имеются в виду импульсные сигналы без внутриимпульсной модуляции. При использовании сигналов с внутриимпульсной модуляцией часто специально применяют несогласованные фильтры для подавления боковых «лепестков», допуская некоторое уменьшение отношения сигнал/шум.)

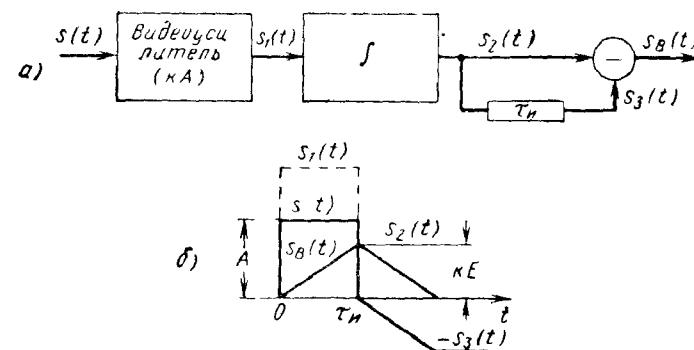


Рис. 10.12. Согласованный фильтр для прямоугольного видеоимпульса (а) и напряжения на выходе отдельных каскадов согласованного фильтра (б)

Оказывается, отклонение характеристик фильтров от формул (10.6.1) и (10.6.2) во многих случаях не сопровождается значительным уменьшением отношения сигнал/шум. Поэтому без существенного ухудшения характеристик систем можно применять вместо строго согласованных фильтров практически легче реализуемые фильтры, дающие примерно те же результаты (см. § 7).

В качестве примера рассмотрим согласованный фильтр для прямоугольного видеоимпульса [10]. Пусть импульс появляется в момент времени $t = 0$, имеет амплитуду A и длительность τ_n (рис. 10.12, б), т. е.

$$s(t) = \begin{cases} A & \text{при } 0 < t \leq \tau_n, \\ 0 & \text{при } t < 0, t > \tau_n. \end{cases}$$

амплитуда такого сигнала равен

$$S(j\omega) = A \int_0^{\tau_n} e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{j\omega} (1 - e^{-j\omega \tau_n}).$$

При $t_0 = \tau_n$, по формуле (10.6.2) находим передаточную функцию согласованного фильтра

$$K(j\omega) = \frac{kA}{j\omega} \left(1 - e^{-j\omega \tau_n} \right).$$

В соответствии с формулой (10.6.1) импульсная характеристика согласованного фильтра равна

$$G(t) = \begin{cases} kA & \text{при } 0 \leq t \leq \tau_n, \\ 0 & \text{при } t > \tau_n. \end{cases}$$

В этом частном случае импульсная характеристика фильтра по форме совпадает с сигналом.

Одна из возможных функциональных схем этого согласованного фильтра представлена на рис. 10.12, а. Он состоит из идеального видеоусилителя с коэффициентом усиления kA , интегратора, линии задержки на τ_n и вычитающего устройства. Напряжение выхода интегратора подается на вычитающее устройство по двум каналам: непосредственно и через линию задержки. Характер сигналов на выходе отдельных элементов схемы показан на рис. 10.12, б. На выходе вычитающего устройства получается трехфазный импульс с высотой $kE = kA^2 \tau_n$ и длительностью $2\tau_n$:

$$s_B(t) = \begin{cases} kA^2 t & \text{при } 0 \leq t \leq \tau_n, \\ kA^2 (2\tau_n - t) & \text{при } \tau_n \leq t \leq 2\tau_n, \\ 0 & \text{при } t > 2\tau_n. \end{cases}$$

17. ОПТИМАЛЬНЫЕ И КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ФИЛЬТРЫ

Характерным свойством согласованных фильтров является то, что их характеристики (10.6.1) и (10.6.2) полностью определяются полезным сигналом. Этот результат является следствием принятого ранее предположения, что шум $n(t)$ является нормальным белым шумом.

Рассмотрим более общий случай нормального стационарного шума $n(t)$. Назовем оптимальным фильтром линейный фильтр, дающий на выходе максимальное отношение сигнал/помеха, когда помеха $n(t)$ является произвольной. В том частном случае, когда

помехой $n(t)$ является нормальный стационарный, но не белый шум, передаточная функция оптимального фильтра определяется формулой

$$K(j\omega) = \frac{kS^*(j\omega)}{N(\omega)} e^{-j\omega t_0}, \quad (10.7.1)$$

где $S^*(j\omega)$ — функция, комплексно-сопряженная спектру сигнала $S(j\omega)$;

$N(\omega)$ — спектральная плотность шума $n(t)$.

В справедливости этой формулы можно убедиться путем следующих формальных рассуждений [11]. Пусть принятое колебание представляет сумму полезного сигнала $s(t)$ и нормального стационарного шума $n(t)$ со спектральной плотностью $N(\omega)$.

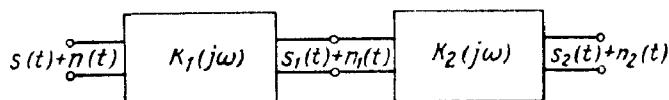


Рис. 10.13. Оптимальный линейный фильтр для приема на фоне нормального коррелированного шума.

Представим оптимальный линейный фильтр в виде двух последовательно соединенных линейных четырехполюсников, как показано на рис. 10.13. Предположим, что первый четырехполюсник имеет передаточную функцию $K_1(j\omega) = \sqrt{N_0/N(\omega)}$, где N_0 — постоянный коэффициент.

Спектральная плотность нормального шума $n_1(t)$ на выходе первого четырехполюсника будет равна $N(\omega)N_0/N(\omega) = N'_0$, т. е. шум на выходе становится белым.

Сигнал на выходе первого четырехполюсника искажается и будет иметь спектр

$$S_1(j\omega) = S(j\omega) \sqrt{\frac{N'_0}{N(\omega)}}.$$

Согласованный фильтр (второй четырехполюсник) для приема такого сигнала на фоне нормального белого шума $n_1(t)$ согласно формуле (10.6.2) должен иметь передаточную функцию

$$K_2(j\omega) = k_2 S^*(j\omega) \sqrt{\frac{N'_0}{N(\omega)}} e^{-j\omega t_0}.$$

Следовательно, передаточная функция оптимального фильтра, состоящего из двух четырехполюсников, равна

$$K(j\omega) = K_1(j\omega) K_2(j\omega) = k \frac{S^*(j\omega)}{N(\omega)} e^{-j\omega t_0}, \quad k = k_2 N'_0,$$

что совпадает с приведенной формулой (10.7.1).

Отношение пика сигнала на выходе оптимального фильтра к среднеквадратичному значению выходного шума равно:

$$\frac{s_{\max}}{\sigma_b} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(j\omega)|^2}{N(\omega)} d\omega. \quad (10.7.2)$$

Эта формула является обобщением формулы (10.6.8) на случай произвольного нормального стационарного шума.

Заметим, что для белого шума $n(t)$ со спектральной плотностью $N(\omega) = N_0/2 = \text{const}$ формула (10.7.1) дает передаточную функцию согласованного фильтра (10.6.2). Когда же амплитудно-частотный спектр сигнала совпадает по форме со спектральной интенсивностью шума, т. е. $S^*(j\omega) = N(\omega)e^{-j\varphi_s(\omega)}$, то из формулы (10.7.1) получаем, что амплитудно-частотная характеристика оптимального фильтра должна быть равномерной: $|K(j\omega)| = k = \text{const}$.

Из этих двух частных случаев следует, что максимизация отношения сигнал/шум на выходе оптимального и согласованного фильтров достигается только за счет спектральных различий сигнала и шума. Такой результат можно было ожидать заранее. Все статистические характеристики шума (который предполагается нормальным, стационарным с нулевым средним значением) определяются функцией корреляции или спектральной плотностью. Поэтому при известном спектре сигнала вся информация, которую можно использовать для выделения сигнала на фоне шума, сосредоточена в спектрах сигнала и шума. Для ненормального входного шума нельзя утверждать, что операция образования функции взаимной корреляции (10.4.5) является оптимальной. Здесь можно использовать различия в других характеристиках сигнала и шума. Как правило, в этом случае должны применяться более сложные нелинейные устройства.

В ряде случаев оптимальные и согласованные фильтры оказываются практически трудно реализуемыми. Убедимся на конкретных примерах, что вместо оптимальных (согласованных) фильтров можно применять другие надлежащим образом подобранные фильтры, на выходе которых получается незначительное уменьшение отношения сигнал/шум по сравнению с оптимальными (согласованными) фильтрами. Назовем такие фильтры квазиоптимальными [12].

Обозначим через ρ отношение максимального значения сигнала по напряжению на выходе произвольного линейного фильтра к отношению сигнал/шум на выходе согласованного фильтра. Воспользовавшись формулами (10.6.8) и (10.6.12) и учитывая соотношение (10.6.16), получим

$$\rho = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t_0} d\omega \right|}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega \int_{-\infty}^{\infty} |K(j\omega)|^2 d\omega \right]^{\frac{1}{2}}}. \quad (10.7.3)$$

Здесь под t_0 понимается момент времени, когда сигнал на выходе фильтра с передаточной функцией $K(j\omega)$ достигает наибольшего значения.

Пользуясь формулой (10.7.3), можно вычислить, насколько ухудшается отношение сигнал/шум, если для прямоугольного радиоимпульса

$$s(t) = \begin{cases} Ae^{j\omega_0 t} & \text{при } |t| \leq \tau_n/2, \\ 0 & \text{при } |t| > \tau_n/2 \end{cases} \quad (10.7.4)$$

вместо согласованного фильтра используются более простые и практически легко реализуемые фильтры. Рассмотрим три таких фильтра: идеальный прямоугольный фильтр, колебательный контур и гауссов фильтр.

1) Идеальный прямоугольный фильтр. Передаточная функция такого фильтра имеет вид прямоугольника:

$$K(j\omega) = \begin{cases} K_0 & \text{при } -\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} < \omega \leq -\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}, \\ & \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \leq \omega \leq \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}, \\ 0 & \text{при других } \omega. \end{cases} \quad (10.7.5)$$

В данном случае

$$\rho = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1}{\Delta f \tau_n}} \operatorname{Si}\left(\frac{\pi}{2} \Delta f \tau_n\right), \quad (10.7.6)$$

где

$$\operatorname{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin x}{x} dx — \text{интегральный синус.}$$

Результаты вычислений по формуле (10.7.6) представлены на рис. 10.14 (кривая 1). Величина ρ имеет максимум

$$\rho_{max} = 0,91, \quad \rho_{max}^2 = 0,82 \quad \text{при } \Delta f = \frac{1,37}{\tau_n}. \quad (10.7.7)$$

Следовательно, если идеальный фильтр имеет полосу пропускания

$$\Delta f = \frac{1,37}{\tau_n}, \quad (10.7.8)$$

то ухудшение отношения сигнал/шум по сравнению с согласованным фильтром по напряжению равно примерно 10%, а по мощности — примерно 7%. В окрестности максимума кривая изменяется очень медленно. Так, например, при изменении $\Delta f \tau_n/2$ от 0,4 до 1,0 величина ρ изменяется от 0,82 до 0,84.

Условится в дальнейшем называть реальный фильтр с полосой пропускания Δf (на уровне 0,5 по мощности), при которой величина ρ имеет максимум, фильтром, согласованным с сигналом по полосе. Применительно к рассмотренному примеру можно сказать, что идеальный фильтр с полосой пропускания (10.7.8) согласован с прямоугольным радиоимпульсом по полосе.

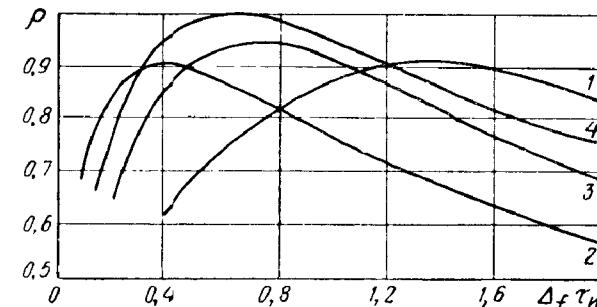


Рис. 10.14. Уменьшение отношения сигнал/шум на выходе квазиоптимальных фильтров.

Такая терминология оправдана тем, что, если согласованный фильтр «согласуется» со всем спектром сигнала, то в фильтре, согласованном по полосе, подбирается только оптимальная ширина полосы пропускания, при которой получается максимальное отношение сигнал/шум. Рассмотрением таких фильтров занимались Ц. О. Нор, В. И. Сифоров и др. [10, 13, 14, 15].

2) Одиночный резонансный колебательный контур

$$K(j\omega) = K_0 \frac{2\alpha\omega}{2\alpha\omega + j(\omega^2 - \omega_0^2)}. \quad (10.7.9)$$

Вычисления по формуле (10.7.3) дают следующий результат:

$$\rho = \sqrt{\frac{2}{\alpha\tau_n}} (1 - e^{-\alpha\tau_n}), \quad \alpha = \pi\Delta f. \quad (10.7.10)$$

Результат расчетов по этой формуле приведены на рис. 10.14 (кривая 2). При $\Delta f \tau_n = 0,4$ величина ρ имеет максимум $\rho_{max} = 0,9$, причем максимум является пологим.

3) Фильтр с гауссовой резонансной кривой

$$K(j\omega) = K_0 \exp \left[-1,4 \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega} \right)^2 - j\omega t_0' \right]. \quad (10.7.11)$$

В данном случае на основании формулы (10.7.3) получим

$$\rho = 2 \sqrt[4]{\pi} \left(\frac{\pi \Delta f \tau_n}{\sqrt{2,8}} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[\Phi \left(\frac{\pi \Delta f \tau_n}{\sqrt{2,8}} \right) - \frac{1}{2} \right]. \quad (10.7.12)$$

Результаты вычислений по формуле (10.7.12) показаны на рис. 10.14 (кривая 3). При $\Delta f \tau_n = 0,72$ величина ρ имеет максимальное значение $\rho_{max} = 0,94$.

Фильтр с гауссовой передаточной функцией (10.7.11) является согласованным для радиоимпульса гауссовой формы

$$s(t) = A \exp \left[-2,8 \left(\frac{t}{\tau_n} \right)^2 + j\omega_0 t \right]. \quad (10.7.13)$$

Величина ρ равна

$$\rho = \sqrt[4]{3,92} \sqrt{\frac{2\pi \Delta f \tau_n}{3,92 + (\pi \Delta f \tau_n)^2}}. \quad (10.7.14)$$

Характер изменения ρ в зависимости от $\Delta f \tau_n$ показан на рис. 10.14 (кривая 4). Максимальное значение $\rho_{max} = 1$ при $\Delta f \tau_n = 0,63$.

Из рассмотренных частных примеров, относящихся к прямоугольному радиоимпульсу, вытекает следующий общий вывод. Вместо согласованных фильтров можно применять квазиоптимальные фильтры. При этом получается несущественное уменьшение отношения сигнал/шум, если фильтры будут согласованы с сигналом по полосе, хотя само такое согласование оказывается не очень критичным.

В табл. 10.7.1 для нескольких пар радиоимпульс—фильтр указаны значения ρ_{max} и приведены оптимальные значения $\Delta f \tau_n$, при которых достигается ρ_{max} .

Таблица 10.7.1

Основные характеристики квазиоптимальных фильтров

Радиоимпульс	Фильтр	$\Delta f \tau_n$	ρ_{max}
Прямоугольный	Идеально прямоугольный	1,37	0,91
Прямоугольный	Гауссов	0,72	0,94
Гауссов	Идеально прямоугольный	0,72	0,94
Гауссов	Гауссов	0,63	1,0
Прямоугольный	Одиночный резонансный контур	0,40	0,90
Прямоугольный	Двухкаскадный резонансный усилитель	0,61	0,93
Прямоугольный	Пятикаскадный резонансный усилитель	0,67	0,94

В радиоприемных устройствах супергетеродинного типа передаточная функция усилителя промежуточной частоты в принципе должна совпадать с передаточной функцией соответствующего оптималь-

ного или квазиоптимального фильтра. Однако на практике полосу пропускания усилителя промежуточной частоты выбирают в 1,5—2 раза больше оптимальной. Главная причина этого — нестабильность частоты гетеродина.

Принципиальную целесообразность расширения полосы пропускания фильтра (практически УПЧ) при наличии расстройки $\Delta_f = f_0 - f_p$ между частотой радиоимпульса f_0 и центральной частотой фильтра f_p можно уяснить на следующем примере.

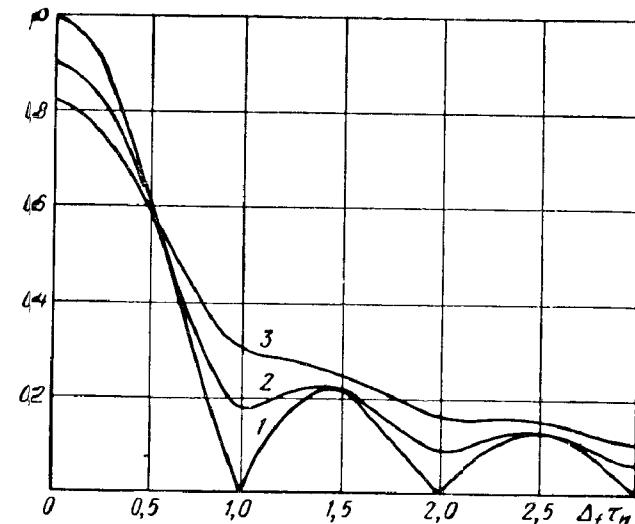


Рис. 10.15. Уменьшение отношения сигнал/шум в зависимости от постоянной расстройки.

Пусть прямоугольный радиоимпульс (10.7.4) воздействует на согласованный фильтр, расстроенный относительно частоты радиоимпульса на величину Δ_f . В данном случае отношение (10.7.3) равно

$$\rho = \frac{\sin \pi \Delta_f \tau_n}{\pi \Delta_f \tau_n}. \quad (10.7.15)$$

На рис. 10.15 приведена зависимость величины ρ от $\Delta_f \tau_n$ (кривая 1).

Можно показать, что при воздействии прямоугольного радиоимпульса на расстроенный колебательный контур справедлива формула

$$\rho = \left[2\alpha \tau_n \frac{1 - 2e^{-\alpha \tau_n} \cos 2\pi \Delta_f \tau_n + e^{-2\alpha \tau_n}}{(\alpha \tau_n)^2 + (2\pi \Delta_f \tau_n)^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha = \pi \Delta_f. \quad (10.7.16)$$

В отсутствие расстройки ($\Delta_f = 0$) эта формула переходит в (10.7.10).

Результаты расчетов по формуле (10.7.16) для двух полос пропускания контура: $\Delta f = \Delta f_{\text{опт}} = 0,4/\tau_n$ (кривая 2) и $\Delta f = 2\Delta f_{\text{опт}}$ (кривая 3), представлены на рис. 10.15.

Из графиков видно, что при значениях $\Delta_f \tau_n \geq 0,6$ отношение сигнал/шум на выходе фильтра с полосой пропускания $\Delta f = 2\Delta f_{\text{опт}}$ больше, чем в двух других случаях, имеющих оптимальные полосы пропускания.

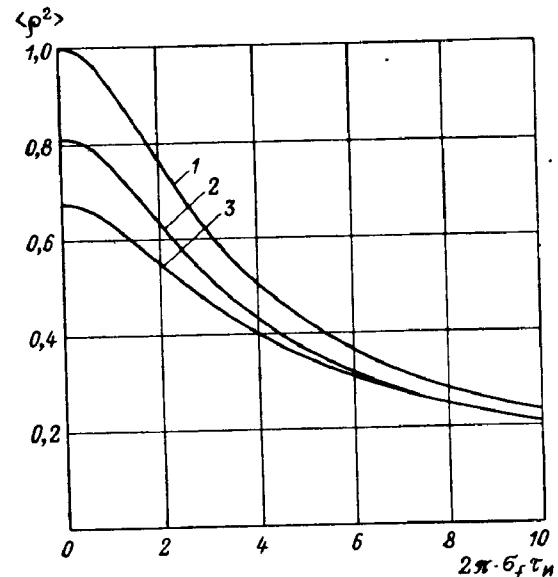


Рис. 10.16. Уменьшение отношения сигнал/шум при случайных нормальных вариациях расстройки Δ_f .

Если расстройка Δ_f медленно и случайным образом изменяется во времени по нормальному закону

$$w(\Delta_f) = \frac{1}{\sigma_f \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\Delta_f^2}{2\sigma_f^2}\right), \quad (10.7.17)$$

то естественно интересоваться средним значением $\langle \rho \rangle$ или $\langle \rho^2 \rangle$, которые находятся на основании (10.7.15)–(10.7.17) по формулам

$$\langle \rho \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \rho w(\Delta_f) d\Delta_f, \quad \langle \rho^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \rho^2 w(\Delta_f) d\Delta_f. \quad (10.7.18)$$

Результаты численных расчетов величины $\langle \rho^2 \rangle$ для колебательного контура при нескольких значениях $\sigma_f \tau_n$ приведены на

рис. 10.16 и 10.17*. Из графиков рис. 10.17 видно, что при заданной величине $\sigma_f \tau_n$ существует свое оптимальное значение $\Delta f \tau_n$, при

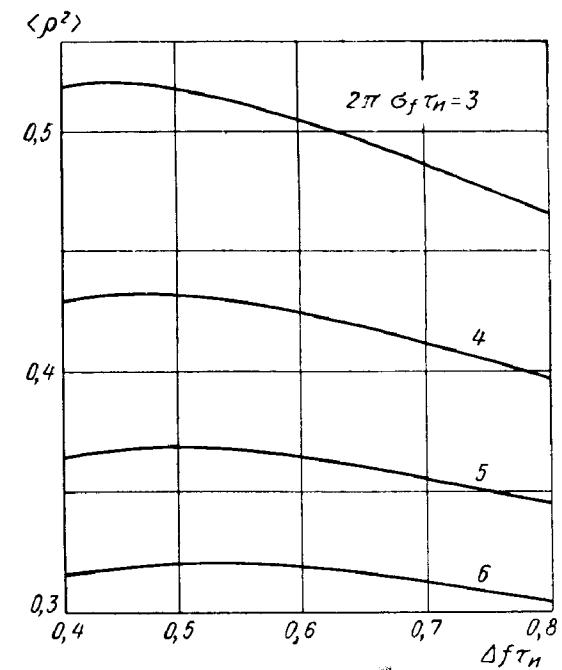


Рис. 10.17. Влияние полосы пропускания на отношение сигнал/шум при случайной расстройке.

котором $\langle \rho^2 \rangle$ имеет максимум. С увеличением $\sigma_f \tau_n$ оптимальное значение $\Delta f \tau_n$ медленно возрастает, а максимальное значение $\langle \rho^2 \rangle$ резко уменьшается.

§ 8. АПОСТЕРИОРНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ ПАРАМЕТРОВ РАДИОИМПУЛЬСА

Вычислим апостериорные вероятности некоторых параметров радиоимпульсов, указанных в § 2. Для этого применим формулу (10.3.26), например, к сигналу вида (10.2.10). Если вид функций $f(t)$ и $\phi(t)$ известен, то сигнал (10.2.10) зависит от четырех параметров a , τ , ω , θ . Будем считать эти параметры постоянными (неизменяющимися за время наблюдения T) и независимыми, имеющими известные априорные плотности вероятности. Тогда

$$W_{pr}(a, \tau, \omega, \theta) = W_{pr}(a) W_{pr}(\tau) W_{pr}(\omega) W_{pr}(\theta). \quad (10.8.1)$$

* Графики рис. 10.15–10.17 рассчитаны В. Т. Горяиновым

На основании формулы (10.3.26) для апостериорной вероятности можем написать

$$W_{ps}(a, \tau, \omega, \theta) = kW_{pr}(a)W_{pr}(\tau)W_{pr}(\omega)W_{pr}(\theta) \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_{t_0}^{t_0+T} [\xi(t) - af(t-\tau) \cos(\omega t + \varphi(t-\tau) - \theta)]^2 dt \right\}. \quad (10.8.2)$$

Среди параметров a, τ, ω, θ некоторые могут быть заранее известными, а остальные неизвестными (информационными). Рассмотрим здесь три случая:

- 1) все параметры, кроме одного, заранее точно известны;
 - 2) фаза θ является случайной величиной, равномерно распределенной на интервале $(-\pi, \pi)$, а все остальные параметры, кроме одного, точно известны;
 - 3) величины a и θ являются случайными и независимыми, причем величина a распределена по закону Релея, а θ — равномерно на интервале $(-\pi, \pi)$.
- В дальнейшем будем предполагать выполняющимися два условия:

$$T \gg \tau_i, \quad \omega T \gg 1. \quad (10.8.3)$$

Если интервал наблюдения много больше длительности импульса τ_i , то можно считать, что практически все принимаемые сигналы, независимо от конкретных значений отдельных параметров, полностью расположены в пределах интервала наблюдения. При этом интеграл $\int_{t_0}^{t_0+T} \xi^2(t) dt$ не зависит от интересующих нас параметров и в формуле (10.8.2) множитель $\exp \left(-\frac{1}{N_0} \int_{t_0}^{t_0+T} \xi^2(t) dt \right)$ всегда можно включить в постоянную k . При выполнении обоих условий (10.8.3) и медленно изменяющихся функциях $f(t)$ и $\varphi(t)$ справедливо приближенное равенство

$$\int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t) dt = \int_{t_0}^{t_0+T} a^2 f^2(t-\tau) \cos^2(\omega t + \varphi(t-\tau) - \theta) dt = \\ = \frac{\alpha^2}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t-\tau) dt = \frac{\alpha a^2}{2}, \quad (10.8.4)$$

где

$$\alpha = \int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t-\tau) dt. \quad (10.8.5)$$

1. Пусть неизвестным является лишь амплитудный множитель a , а остальные параметры точно известны: $\tau = \tau_0$, $\omega = \omega_0$, $\theta = \theta_0$. В данном случае нужно положить

$$W(\tau) = \delta(\tau - \tau_0), \quad W_{pr}(\omega) = \delta(\omega - \omega_0), \quad W_{pr}(\theta) = \delta(\theta - \theta_0). \quad (10.8.6)$$

Тогда в выражении (10.8.6) в (10.8.2) и проинтегрировать гравую часть по известным параметрам, для чего следует использовать соотношение (П.4), то получим окончательную формулу для апостериорной вероятности параметра a

$$W_{ps}(a) = kW_{pr}(a) \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_{t_0}^{t_0+T} [\xi(t) - af(t-\tau_0) \cos(\omega_0 t + \varphi(t-\tau_0) - \theta_0)]^2 dt \right\} = kW_{pr}(a) \exp \left\{ -\frac{\alpha a^2}{2N_0} + \right. \\ \left. + \frac{2\alpha}{N_0} \int_{t_0}^{t_0+T} \xi(t) f(t-\tau_0) \cos(\omega_0 t + \varphi(t-\tau_0) - \theta_0) dt \right\}. \quad (10.8.7)$$

Аналогичным путем находятся апостериорные вероятности для любого другого параметра при известных остальных. Например,

$$W_{ps}(\tau) = kW_{pr}(\tau) \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_{t_0}^{t_0+T} [\xi(t) - a_0 f(t-\tau) \cos(\omega_0 t + \varphi(t-\tau) - \theta_0)]^2 dt \right\} = kW_{pr}(\tau) \times \\ \times \exp \left\{ \frac{2a_0}{N_0} \int_{t_0}^{t_0+T} \xi(t) f(t-\tau) \cos(\omega_0 t + \varphi(t-\tau) - \theta_0) dt \right\}, \quad (10.8.8)$$

$$W_{ps}(\omega) = kW_{pr}(\omega) \times \\ \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_{t_0}^{t_0+T} [\xi(t) - a_0 f(t-\tau_0) \cos(\omega t + \varphi(t-\tau_0) - \theta_0)]^2 dt \right\} = \\ kW_{pr}(\omega) \exp \left\{ \frac{2a_0}{N_0} \int_{t_0}^{t_0+T} \xi(t) f(t-\tau_0) \cos(\omega t + \varphi(t-\tau_0) - \theta_0) dt \right\}. \quad (10.8.9)$$

2. Предположим, что фаза θ является случайной и нас интересует апостериорная вероятность какого-либо другого неизвестного параметра (например, τ). В данном случае имеется два неизвестных параметра τ и θ , причем интерес представляет лишь информация,

содержащаяся в τ , безотносительно к истинному значению θ . Чтобы подчеркнуть это различие, параметр τ можно назвать существенным (информационным), а параметр θ — несущественным. При нахождении апостериорной вероятности существенных параметров несущественные параметры исключаются путем статистического усреднения апостериорной вероятности по несущественным параметрам.

Подставим в формулу (10.8.2) априорную плотность вероятности для фазы

$$W_{pr}(\theta) = \frac{1}{2\pi}, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad (10.8.10)$$

и проинтегрируем правую часть по всем возможным значениям фазы:

$$W_{ps}(a, \tau, \omega) = \int k W_{pr}(a) W_{pr}(\tau) W_{pr}(\omega) \times \\ \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_{t_0}^{t_0+T} [\xi(t) - af(t-\tau) \cos(\omega t + \varphi(t-\tau) - \theta)]^2 dt \right\} d\theta.$$

В силу условий (10.8.3) это выражение приводится к виду:

$$W_{ps}(a, \tau, \omega) = \text{const } W_{pr}(a) W_{pr}(\tau) W_{pr}(\omega) \exp \left(-\frac{\alpha a^2}{2N_0} \right) \times \\ \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left\{ \frac{2a}{N_0} \int_{t_0}^{t_0+T} \xi(t) f(t-\tau) \cos(\omega t + \varphi(t-\tau) - \theta) dt \right\} d\theta.$$

Обозначим

$$\left. \begin{aligned} X(\tau, \omega) &= \int_{t_0}^{t_0+T} \xi(t) f(t-\tau) \cos(\omega t + \varphi(t-\tau)) dt, \\ Y(\tau, \omega) &= \int_{t_0}^{t_0+T} \xi(t) f(t-\tau) \sin(\omega t + \varphi(t-\tau)) dt. \end{aligned} \right\} \quad (10.8.11)$$

$$Z(\tau, \omega) = \sqrt{X^2 + Y^2} \geq 0. \quad (10.8.12)$$

Нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left\{ \frac{2a}{N_0} \int_{t_0}^{t_0+T} \xi(t) f(t-\tau) \cos(\omega t + \varphi(t-\tau) - \theta) dt \right\} d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left[\frac{2a}{N_0} Z(\tau, \omega) \cos(\theta + \chi) \right] d\theta = I_0 \left[\frac{2a}{N_0} Z(\tau, \omega) \right], \end{aligned} \quad (10.8.13)$$

где $I_0(z)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента.

Таким образом мы можем окончательно написать

$$W_{ps}(a, \tau, \omega) = \text{const } W_{pr}(a) W_{pr}(\tau) W_{pr}(\omega) \exp \left(-\frac{\alpha a^2}{2N_0} \right) I_0 \left[\frac{2a}{N_0} Z(\tau, \omega) \right] \quad (10.8.14)$$

Из этой общей формулы можно получить разные частные результаты. Например, если параметр a точно известен, т. е. $a = a_0$, $W_{ps}(a) = \delta(a - a_0)$, то

$$W_{ps}(\tau, \omega) = \text{const } W_{pr}(\tau) W_{pr}(\omega) I_0 \left[\frac{2a_0}{N_0} Z(\tau, \omega) \right]. \quad (10.8.15)$$

Если также известно запаздывание сигнала $\tau = \tau_0$, то из (10.8.15) получим апостериорную вероятность для частоты

$$W_{pr}(\omega) = \text{const } W_{pr}(\omega) I_0 \left[\frac{2a_0}{N_0} Z(\tau_0, \omega) \right]. \quad (10.8.16)$$

З. Пусть в апостериорной вероятности (10.8.2) величина θ распределена равномерно (10.8.10), а величина a имеет релеевскую плотность вероятности со средним квадратом $\langle a^2 \rangle = 2\sigma^2$:

$$W_{pr}(a) = \frac{a}{\sigma^2} \exp \left(-\frac{a^2}{2\sigma^2} \right), \quad a \geq 0. \quad (10.8.17)$$

Подставив (10.8.17) в (10.8.14) и интегрируя по всем значениям θ , можем написать

$$W_{ps}(\tau, \omega) = \text{const } W_{pr}(\tau) W_{pr}(\omega) \int_0^\infty W_{pr}(a) \exp \left(-\frac{\alpha a^2}{2N_0} \right) \times \\ \times I_0 \left[\frac{2a}{N_0} Z(\tau, \omega) \right] da.$$

Используя известный интегралом

$$\int_0^\infty x e^{-px^2} I_0(\beta x) dx = \frac{1}{2p} \exp \left(\frac{\beta^2}{4p} \right), \quad p > 0, \quad (10.8.18)$$

получим

$$W_{ps}(\tau, \omega) = \text{const } W_{pr}(\tau) W_{pr}(\omega) \exp \left[\frac{2\sigma^2 Z^2(\tau, \omega)}{N_0(\alpha \sigma^2 + N_0)} \right], \quad (10.8.19)$$

$$\begin{aligned} Z^2(\tau, \omega) &= X^2 + Y^2 = \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{t_0}^{t_0+T} \xi(t) \xi(t') f(t-\tau) \times \\ &\times f(t'-\tau) \cos[\omega t + \varphi(t-\tau) - \omega t' - \varphi(t'-\tau)] dt dt'. \end{aligned} \quad (10.8.20)$$

При известном параметре $\tau = \tau_0$ из (10.8.19) находим апостериорную вероятность для частоты

$$W_{ps}(\omega) = \text{const } W_{pr}(\omega) \exp \left[\frac{2\sigma^2 Z^2(\tau_0, \omega)}{N_0(\alpha\sigma^2 + N_0)} \right]. \quad (10.8.21)$$

Когда отношение сигнал/шум велико ($\alpha\sigma^2 \gg N_0$), формула (10.8.21) несколько упрощается:

$$W_{ps}(\omega) = \text{const } W_{pr}(\omega) \exp \left[\frac{2Z^2(\tau_0, \omega)}{\alpha N_0} \right]. \quad (10.8.22)$$

Предположим, что сигналом $s(t)$ является отрезок квазигармонического шума вида (7.1.4):

$$s(t) = A(t) \cos[\omega t - \varphi(t)], \quad 0 \leq t \leq T, \quad (10.8.23)$$

с функцией корреляции

$$k_s(\tau) = \langle s(t) s(t + \tau) \rangle = \sigma^2 e^{-\gamma_1 |\tau|} \cos \omega \tau. \quad (10.8.24)$$

Можно показать [16], что в данном случае при $T \gg 1/\gamma$ апостериорная вероятность для частоты определяется формулой

$$W_{ps}(\omega) = \text{const } W_{pr}(\omega) \exp \left[\frac{2\gamma\sigma^2}{\gamma_1 N_0^2} Z_T^2(\omega) \right], \quad (10.8.25)$$

где

$$Z_T^2(\omega) = \int_0^T \int_0^T e^{-\gamma_1 |t-t'|} \cos \omega(t-t') \xi(t) \xi(t') dt dt', \quad (10.8.26)$$

$$\gamma_1 = \gamma \left(1 + \frac{2\sigma^2}{\gamma N_0^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Полученные выше формулы будут использованы в гл. 12 для определения предельной точности измерения параметров радиоимпульса, принимаемого на фоне белого шума.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Вопросы дальней связи на ультракоротких волнах. Сборник переводов под ред. В. И. Сифорова. Изд-во «Советское радио», 1957.
- 2 Сифоров В. И. Радиоприемные устройства. Воениздат, 1951.
- 3 Аминантов И. Н. Применение теории решений к задачам обнаружения сигналов и выделения сигналов из шумов. ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1958.
4. Вудворд Ф. М. Теория вероятностей и теория информации с применением в радиолокации. Пер. с англ. Изд-во «Советское радио», 1955.
- 5 Вайнштейн Л. А., Зубаков В. Д. Выделение сигналов на фоне случайных помех. Изд-во «Советское радио», 1960.

- 6 Магситт J. I. A statistical theory of target detection by pulsed signals. Trans IRE, 1960, IT-6, № 2.
- 7 Петрович Н. Т. Передача дискретной информации в каналах гауссовой манипуляцией. Изд-во «Советское радио», 1965.
- 8 Тихонов В. И. Основные статистические характеристики канала синхронизации. «Электросвязь», 1966, № 4.
- 9 Турин Г. Л. Согласованные фильтры. Пер. с англ. «Зарубежная радиоэлектроника», 1961, № 3.
- 10 Лезин Ю. С. Оптимальные фильтры и накопители импульсных сигналов. Изд-во «Советское радио», 1963.
- 11 Фалькович С. Е. Прием радиолокационных сигналов на фоне ситуационных помех. Изд-во «Советское радио», 1961.
- 12 Тихонов В. И., Левиков А. А. О квазиоптимальных линейных фильтрах для импульсных сигналов. «Радиотехника», 1965, № 1.
- 13 Норе Д. О. Анализ факторов, определяющих обнаружение сигнала на фоне шумов в системах с импульсной модуляцией несущей. Пер. с англ. «Труды института инженеров по электронике и радиотехнике», 1963, № 7.
- 14 Сифоров В. И. О влиянии помех на прием импульсных радиосигналов. «Радиотехника», 1946, № 1.
- 15 Белоусов А. П. О наивысшей реальной чувствительности приемника. «Радиотехника», 1946, № 5.
- 16 Стратонович Р. Л. Оптимальный прием узкополосного сигнала с неизвестной частотой на фоне шумов. «Радиотехника и электроника», 1960, № 7.

Глава 11

ОПТИМАЛЬНЫЕ УСТРОЙСТВА ДЛЯ ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ И РАЗЛИЧЕНИЯ ДВУХ СИГНАЛОВ

§ 1. КРИТЕРИИ ОПТИМАЛЬНОГО ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ

Пусть принятое колебание $\xi(t)$ представляет сумму

$$\xi(t) = \lambda s(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (11.1.1)$$

где $n(t)$ — белый нормальный шум, $s(t)$ — полезный сигнал известной формы (детерминированный сигнал), полностью расположенный на интервале наблюдения $(0, T)$. Параметр λ является неизвестным и может принимать только одно из двух значений: $\lambda = 1$ (в принятом колебании присутствует сигнал) и $\lambda = 0$ (в принятом колебании сигнал отсутствует).

Что касается априорных сведений о параметре λ , то возможны два случая: 1) априорные вероятности $W_{pr}(1)$ и $W_{pr}(0)$ наличия и отсутствия сигнала известны; 2) эти априорные вероятности неизвестны. Первый случай характерен для радиосвязи, второй — для радиолокации. (см. стр. 399).

По принятой конкретной реализации $\xi(t)$ необходимо решить оптимальным (в некотором смысле наилучшим) образом, какое именно значение имеет параметр λ , т. е. присутствует или отсутствует сигнал. Иначе говоря, нужно найти такой метод обработки принятого колебания $\xi(t)$, который бы позволял наилучшим образом обнаруживать наличие сигнала на фоне шума.

Практическая необходимость строгого решения подобных задач возникла в последнее десятилетие в связи с широким применением в радиотехнических системах электронных вычислительных машин, обладающих большим быстродействием и высокой надежностью. Раньше решение предоставлялось оператору. Например, наблюдая визуально картину на экране индикатора радиолокационной станции, оператор на основе своего опыта и интуиции принимал решение о наличии или отсутствии цели. Замена оператора автоматическими вычислительными устройствами позволяет исключить эле-

мент субъективности и составить оптимальный алгоритм (правило), ведя которому вычислительное устройство принимает в определенном смысле наилучшее решение о наличии или отсутствии цели.

Ниже будут кратко рассмотрены три метода (критерия) обнаружения сигнала на фоне шума: критерий идеального наблюдателя (критерий Котельникова — Зигерта), критерий Неймана — Пирсона и критерий последовательного анализа. Каждый из этих критериев имеет дело с оптимальностью в своем смысле (см. ниже). Правообразность применения того или иного критерия определяется характером задачи, а также зависит от того, известны или известны априорные вероятности $W_{pr}(1)$ и $W_{pr}(0) = 1 - W_{pr}(1)$.

1. **Идеальный наблюдатель** [1, 2]. Критерий идеального наблюдателя применяется в системах радиосвязи, когда априорные вероятности $W_{pr}(1)$ и $W_{pr}(0)$ известны.

Гак как апостериорные вероятности содержат всю доступную информацию о принятом колебании, то можно прийти к заключению, что решение о наличии или отсутствии сигнала в принятой реализации должно приниматься на основе апостериорных вероятностей.

При непрерывной обработке принятой реализации апостериорная вероятность наличия детерминированного сигнала ($\lambda = 1$) имеет формулу (10.3.25);

$$W_{ps}(1) = k W_{pr}(1) \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [\xi(t) - s(t)]^2 dt \right\}. \quad (11.1.2)$$

Апостериорная вероятность отсутствия сигнала ($\lambda = 0$), очевидно, равна

$$W_{ps}(0) = k W_{pr}(0) \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T \xi^2(t) dt \right\}, \quad (11.1.3)$$

причем

$$W_{pr}(0) + W_{pr}(1) = 1. \quad (11.1.4)$$

Хотя апостериорные вероятности содержат максимум сведений о положении наличия или отсутствия сигнала, однако практически приемника-обнаружителя требуется просто один из двух ответов: «есть сигнал или нет». Естественно считать, что решение о наличии или отсутствии сигнала должно приниматься путем сравнения апостериорных вероятностей по определенному правилу.

Для выяснения этого правила обратимся к рис. 11.1. На рисунке приведены четыре реализации случайного колебания: первые две обрашают шум на выходе согласованного фильтра q_n , а две другие — сумму сигнала и шума $q = q(1)$. Пусть установлен неко-
торый порог H . Для конкретных реализаций, приведенных на ри-

сунке, замечаем, что шум в первой реализации не превышает порога. Во второй реализации хотя сигнала и нет, однако выброс шума превышает порог. В третьей реализации сумма сигнала и шума превышает порог, а четвертая реализация, несмотря на наличие сигнала, не достигает порога.

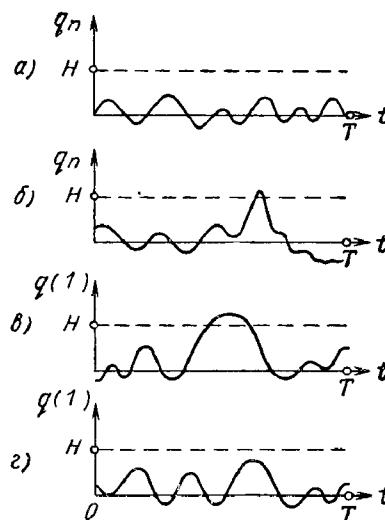


Рис. 11.1. Четыре возможных случая при обнаружении сигнала на фоне шума.

Из рассмотренных четырех случаев в двух случаях (первом и третьем) будет принято правильное решение, а в двух (втором и четвертом) — неправильное. Если взять другой порог H' , то описанная ситуация может измениться.

Из такого качественного рассмотрения приходим к выводу, что при конечном значении энергии сигнала и наличии случайного шума принятие решения о наличии или отсутствии сигнала всегда сопровождается ошибками двух видов:

1) несмотря на отсутствие сигнала, шум превосходит порог и принимается неправильное решение о наличии сигнала (ошибка первого рода),

2) хотя сигнал присутствует, но пороговый уровень не превышен и принимается ошибочное решение об отсутствии сигнала (ошибка второго рода).

Обозначим вероятность ошибки первого рода через $P_0 = P(1|0)$ и вероятность ошибки второго рода через $P_1 = P(0|1)$. Для этих вероятностей можем написать формулы:

$$P_0 = \int_H^{\infty} W_{ps}(q_n|0) dq_n, \quad P_1 = \int_0^H W_{ps}(q|1) dq. \quad (11.1.5)$$

Средняя вероятность общей (суммарной) ошибки равна

$$P_e = P_0 + P_1 = \int_H^{\infty} W_{ps}(q_n|0) dq_n + \int_0^H W_{ps}(q|1) dq, \quad (11.1.6)$$

а вероятность правильного обнаружения сигнала равна:

$$D = 1 - P_1. \quad (11.1.7)$$

Согласно критерию идеального наблюдателя пороговый уровень H устанавливается таким, чтобы вероятность общей ошибки P_e была минимальной и, соответственно, вероятность правильного

решения максимальной. Таким образом, оптимальный характер идеального наблюдателя состоит в том, что он минимизирует вероятность суммарной ошибки или, иначе, максимизирует общую вероятность правильного решения.

Чтобы правая часть равенства (11.1.6) имела минимум, нужно приравнять производную по H нулю. В результате получим, что если для принятой реализации окажется

$$W_{ps}(H|1)/W_{ps}(H|0) > 1, \quad (11.1.8)$$

то следует констатировать факт наличия сигнала, и наоборот.

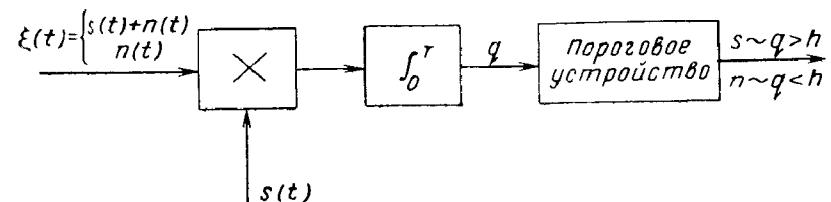


Рис. 11.2. Оптимальная схема для обнаружения детерминированного сигнала на фоне шума.

Подставив в (11.1.8) выражения апостериорных вероятностей из (11.1.2) и (11.1.3), получим, что решение о наличии сигнала принимается при выполнении неравенства

$$\exp \left[\frac{2}{N_0} \int_0^T \xi(t) s(t) dt \right] > \frac{W_{pr}(0)}{W_{pr}(1)} \exp \left(\frac{E}{N_0} \right).$$

Учитывая монотонный характер логарифмической функции и логарифмируя обе части этого неравенства, содержащего положительные величины, получим

$$q = \frac{2}{N_0} \int_0^T \xi(t) s(t) dt > \frac{E}{N_0} + \ln \frac{W_{pr}(0)}{W_{pr}(1)} = h. \quad (11.1.9)$$

Из этой формулы видно, что для вынесения решения о наличии или отсутствии детерминированного сигнала, принимаемого на фоне белого шума, нужно принятую реализацию $\xi(t)$ перемножить с сигналом $s(t)$, проинтегрировать произведение в течение интервала времени T , где известна реализация, и результат интегрирования сравнить с порогом h , определяемым правой частью формулы (11.1.9). Если этот пороговый уровень превышен, то принимается решение о наличии сигнала. Если же порог не превышен, то констатируется отсутствие сигнала. Функциональная схема приемного устройства, осуществляющего указанные операции, приведена на рис. 11.2.

Область применимости критерия идеального наблюдателя ограничивается следующими физическими и формальными соображениями.

В этом критерии не делается существенных различий между вероятностями ошибок P_0 и P_1 . Такое положение является оправданным для радиосвязи, где пропуск какого-либо символа из-за помех или ошибочная регистрация помехи в качестве переданного символа примерно равнозначны. Наоборот, в радиолокации вероятности ошибок P_0 и P_1 существенно не равнозначны и ведут к разным последствиям. Так, например, при ложном обнаружении цели, характеризуемом вероятностью P_0 , должен проводиться целый ряд мероприятий системы обороны, в то время как пропуск цели (вероятность P_1) не является сигналом к какому-либо действию.

Кроме этого, в § 2 гл. 10 указывалось, что иногда невозможно достаточно обоснованно задать априорные вероятности, и задача обнаружения должна решаться без использования их.

2. Наблюдатель Неймана — Пирсона [3, 4]. Этот критерий применяется в радиолокации, когда априорные вероятности $W_{pr}(1)$ и $W_{pr}(0)$ неизвестны.

Если априорные вероятности неизвестны, то задача обнаружения сигнала решается на основе отношения правдоподобия. Для рассматриваемого случая детерминированного сигнала отношение правдоподобия (10.3.28) можно записать так:

$$l(1) = \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [\xi(t) - s(t)]^2 dt \right\}}{\exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T \xi^2(t) dt \right\}}. \quad (11.1.10)$$

Решение о наличии или отсутствии сигнала принимается путем сравнения отношения правдоподобия с некоторым порогом h_0 . Если отношение правдоподобия превышает порог h_0 , т. е.

$$l(1) > h_0, \quad (11.1.11)$$

то принимается решение о наличии сигнала в обратном случае принимается решение об отсутствии сигнала.

Вероятность P_0 того, что хотя сигнала 'нет', но выполняется неравенство (11.1.11), и принимается решение о наличии сигнала, в радиолокации называется вероятностью ложной тревоги и обозначается через F . Такое название вполне оправдано, так как величина F характеризует вероятность такого события, когда сигнала (цели) нет, однако принимается ложное решение (делается ложная тревога) о наличии сигнала (цели).

Вероятность правильного обнаружения по-прежнему определяется формулой (11.1.7), причем теперь величину P_1 можно назвать вероятностью пропуска цели.

Согласно критерию Неймана — Пирсона пороговый уровень h_0 в формуле (11.1.11) определяется из условия, чтобы при заданной вероятности ложной тревоги F вероятность правильного обнаружения D была максимальной. Следовательно, оптимальный характер критерия Неймана — Пирсона состоит в том, что он максимизирует вероятность правильного обнаружения при фиксированной вероятности ложной тревоги.

Отметим, что если в формулу (11.1.11) подставить выражение (11.1.10) при $\lambda = 1$ и положить порог $h_0 = W_{pr}(0)/W_{pr}(1)$, то приходит к соотношению вида (11.1.9). Поэтому можно сказать, что как критерий Неймана — Пирсона, так и критерий идеального наблюдателя базируется на отношении правдоподобия и отличается только правилом выбора порога h .

3. Последовательный наблюдатель [5, 6]. В двух рассмотренных выше критериях предполагалось, что решение принимается за фиксированный интервал времени T . Однако может оказаться, что решение можно принять за интервал времени, меньший T . Этот метод учитывает последовательный наблюдатель.

При последовательном наблюдении производится непрерывный цикл из отношения правдоподобия и сравнение его с двумя порогами $h_1 = (1 - D)/(1 - F)$ и $h_2 = D/F$. Если отношение правдоподобия меньше h_1 , то принимается решение о наличии только шума. Если же отношение правдоподобия больше h_2 , то принимается решение о наличии сигнала. В том случае, когда отношение правдоподобия находится между нижним уровнем h_1 и верхним h_2 , имеющихся распоряжений данных недостаточно для принятия решения и испытание продолжается.* Такая процедура повторяется до тех пор, пока не будет принято определенное решение. Последовательный анализ был разработан А. Вальдом [5].

Преимущество последовательного наблюдателя состоит в том, что можно независимо задавать вероятности F и D , и он дает определенную экономию в энергии сигнала или во времени за счет сравнительно быстрого принятия решения об отсутствии цели. Поэтому последовательный наблюдатель или его модификации применяются в радиолокации, особенно когда предполагается наличие малого числа целей и радиолокатор имеет небольшое число каналов по дальности. Последовательные испытания часто применяются так же при исследовании надежности и при отбраковке деталей.

Однако применение последовательного анализа предполагает более сложную работу аппаратуры (например, переменную скорость обзора пространства в радиолокации) и его труднее осуществить практически.

* При использовании последовательных испытаний можно продуктивно использовать тот факт, что для детерминированных сигналов $q(\tau)$, рассматриваемая как функция интервала наблюдения T , является марковским процессом [16, 17].

В следующих параграфах будут рассмотрены конкретные применения наблюдателя Неймана — Пирсона и идеального наблюдателя. Ввиду того, что ряд расчетов требует громоздких выкладок, для иллюстрации методики анализа подробно рассматриваются лишь простейшие случаи, а для более сложных случаев приводятся окончательные результаты.

Отметим также, что хотя мы рассматриваем обнаружение сигнала и оценку его параметров раздельно, на практике эти две задачи часто решаются совместно.

§ 2. ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛА ПО КРИТЕРИЮ НЕЙМАНА — ПИРСОНА

Рассмотрим задачу обнаружения сигнала на фоне шума по критерию Неймана — Пирсона раздельно для трех видов сигналов: детерминированных, со случайной начальной фазой и со случайными амплитудой и фазой (см. § 2 гл. 10).

1. Обнаружение детерминированного сигнала. Как следует из формул (11.1.10) и (11.1.11), решение о наличии или отсутствии сигнала должно приниматься на основании сравнения с порогом отношения правдоподобия:

$$l = \exp \left\{ -\frac{E}{N_0} + \frac{2}{N_0} \int_0^T \xi(t) s(t) dt \right\} = k \exp \left[\frac{2}{V_0} \int_0^T \xi(t) s(t) dt \right] \geq h_0.$$

Учитывая монотонный характер показательной функции и логарифмируя обе части, получим, что решение о наличии или отсутствии сигнала можно принимать на основании сравнения с некоторым порогом h величины

$$q = \frac{2}{N_0} \int_0^T \xi(t) s(t) dt \geq h. \quad (11.2.1)$$

Структурные схемы оптимального обнаружителя с использованием согласованного фильтра и корреляционного приемника приведены на рис. 11.3.

Пусть присутствует детерминированный сигнал, т. е. $\xi(t) = s(t) + n(t)$. Тогда замечаем, что случайная величина

$$q = q_1 = \frac{2}{N_0} \int_0^T [s(t) + n(t)] s(t) dt$$

получается в результате линейного преобразования белого нормального шума. Поэтому она будет иметь нормальную плотность вероятности $w_1(q)$ со средним значением и дисперсией, равными:

$$m_1 = \langle q_1 \rangle = \frac{2E}{N_0}, \quad \sigma_1^2 = \langle (q_1 - m_1)^2 \rangle = \frac{2E}{N_0}.$$

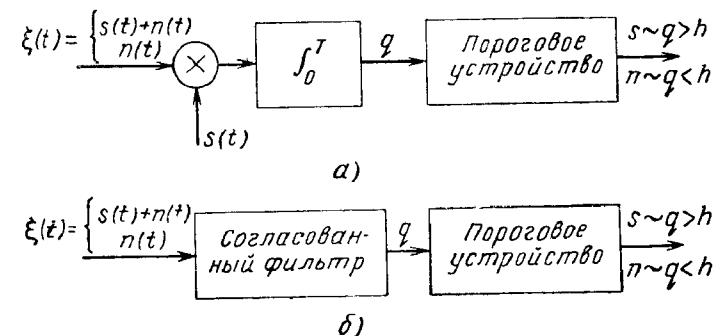


Рис. 11.3. Схемы оптимальных обнаружителей детерминированного сигнала с использованием корреляционного приемника (а) и согласованного фильтра (б).

В отсутствие сигнала $\xi(t) = n(t)$ и случайная величина

$$q = q_2 = \frac{2}{N_0} \int_0^T n(t) s(t) dt$$

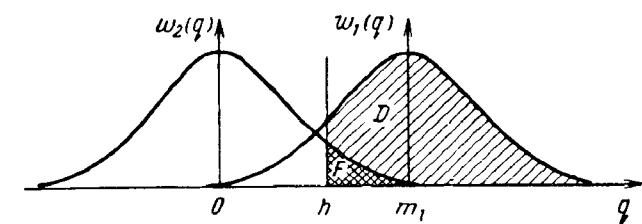


Рис. 11.4. Нормальные плотности вероятности $w_1(q)$ и $w_2(q)$ при наличии и отсутствии сигнала (F — вероятность ложной тревоги; D — вероятность правильного обнаружения)

имеет также нормальную плотность вероятности $w_2(q)$, причем

$$m_2 = \langle q_2 \rangle = 0, \quad \sigma_2^2 = \langle q_2^2 \rangle = \frac{2E}{N_0}.$$

Плотности вероятности $w_1(q)$ и $w_2(q)$ изображены на рис. 11.4.

Согласно критерию Неймана — Пирсона должна задаваться вероятность ложной тревоги F , т. е. вероятность превышения шумом порогового уровня h :

$$F = \int_h^\infty w_2(q) dq = 1 - \Phi\left(\frac{h}{\sqrt{2E/N_0}}\right), \quad (11.2.2)$$

где $\Phi(z)$ — интеграл вероятности (см. приложение IV).

При этом вероятность правильного обнаружения будет равна:

$$D = \int_h^\infty w_1(q) dq = 1 - \Phi\left(\frac{h}{\sqrt{2E/N_0}} - \sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right). \quad (11.2.3)$$

На рис. 11.4 площади, соответствующие вероятностям F и D , заштрихованы.

Формулы (11.2.2) и (11.2.3) показывают, что вероятность ложной тревоги F , как и вероятность правильного обнаружения D , однозначно определяются отношением порогового уровня h к величине сигнал/шум. Поэтому по заданной вероятности ложной тревоги F однозначно определяется уровень h , а зная его, находим вероятность правильного обнаружения D .

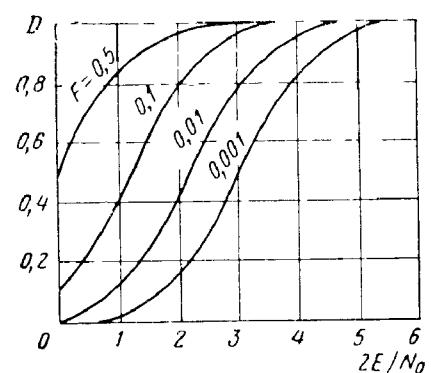


Рис. 11.5. Кривые обнаружения детерминированного сигнала

Таким образом можно рассчитать кривые обнаружения сигнала (рис. 11.5). Кривые обнаружения представляют зависимость вероятности правильного обнаружения D от отношения сигнала/шум при фиксированной вероятности ложной тревоги F .

Пользуясь кривыми обнаружения, можно определить пороговый сигнал. Пороговым называется сигнал, который при заданной вероятности ложной тревоги F можно обнаружить с требуемой вероятностью правильного обнаружения D . Пороговый сигнал характеризуется его энергией (или мощностью).

На основании полученных результатов можно сделать следующий фундаментальный вывод. Возможность обнаружения сигнала при оптимальном приеме с заданными вероятностями D и F не зависит от формы сигнала и определяется только отношением энергии сигнала к спектральной плотности шума, т. е. отношением сигнал/шум на выходе согласованного УПЧ.

В формулах (11.2.2) и (11.2.3) вероятности F и D выражены через безразмерные величины. На практике порог устанавливают по

дисперсии шума на выходе приемника. Чтобы ввести дисперсию шума (10.6.7) на выходе рассматриваемого приемника, запишем формулу (11.2.2) иначе:

$$F = 1 - \Phi\left(\frac{H}{\sigma_b}\right), \quad (11.2.4)$$

$$\text{т. е. } H = kN_0 h/2.$$

Пользуясь таблицами интеграла вероятности, по заданной вероятности ложной тревоги F находим значение аргумента H/σ_b , и, следовательно, при известной дисперсии σ_b^2 определяем порог H .

2. Обнаружение радиосигнала со случайной начальной фазой. Повторив рассуждения, которые привели к формуле (10.8.14), можно показать, что отношение правдоподобия для радиосигнала (10.2.10) имеет вид

$$l(a) = \exp\left(-\frac{\alpha a^2}{2N_0}\right) I_0\left(\frac{2aZ}{N_0}\right), \quad (11.2.5)$$

где положительная величина Z определена формулой (10.8.12) и физически представляет огибающую принятого колебания. При обнаружении нефедингующего сигнала, содержащего лишь неизвестную начальную фазу, безразмерный коэффициент a считается постоянным.

Как видно из (10.8.4), величина $\alpha/2$ равна энергии сигнала при $a = 1$, т. е. $E_1 = \alpha/2$. Полная энергия сигнала равна

$$E = a^2 E_1. \quad (11.2.6)$$

При $a = \text{const}$ отношение правдоподобия (11.2.5) можно записать так:

$$l(a) = \exp\left(-\frac{E}{N_0}\right) I_0\left(\frac{2aZ}{N_0}\right) = \text{const} I_0\left(\frac{2aZ}{N_0}\right). \quad (11.2.7)$$

Так как функция Бесселя $I_0(z)$ является монотонной, то решение о наличии или отсутствии сигнала можно принимать на основании сравнения с некоторым порогом любой монотонной функции от огибающей Z . Если сравнивать с порогом h саму огибающую Z (линейный детектор огибающей), то получим следующее правило. Решение о наличии или отсутствии сигнала принимается в зависимости от выполнения неравенств

$$Z \geq h. \quad (11.2.8)$$

Структурная схема оптимального приемника приведена на рис. 11.6. Она состоит из согласованного фильтра, линейного детектора огибающей и порогового устройства.

Предположим, что в принятой реализации $\xi(t)$ присутствует сигнал (10.2.10), т. е.

$$\xi(t) = n(t) + af(t - \tau) \cos(\omega t + \varphi(t - \tau)) \quad (11.2.9)$$

Будем считать пока фазу θ постоянной. Ниже мы убедимся, что в окончательные формулы она не входит. Подставив выражение (11.2.9) для $\xi(t)$ в формулы (10.8.11), получим, что при выполнении условий (10.8.3) случайные величины X и Y являются нормально распределенными с одинаковыми дисперсиями

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2 = \frac{1}{2} N_0 E_1, \quad (11.2.10)$$

а условные средние значения их соответственно равны

$$m_x = \langle X | \theta \rangle = aE_1 \cos \theta, \quad m_y = \langle Y | \theta \rangle = aE_1 \sin \theta.$$

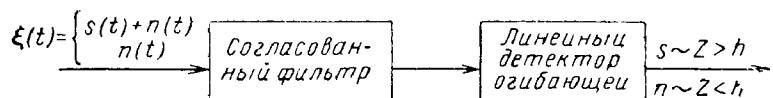


Рис. 11.6. Оптимальная схема для обнаружения радиосигнала со случайной начальной фазой.

Заметим, что величины X и Y можно считать практически независимыми, так как функция корреляции между ними приближенно равна нулю:

$$k_\theta(X, Y) = \frac{N_0}{4} \int f^2(t - \tau) \sin 2[\omega t - \phi(t - \tau)] d\tau \approx 0.$$

Поэтому плотность вероятности $W_1(Z | a)$ случайной величины $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ при $a = \text{const}$ согласно формуле (5.2.21) определяется законом Райса:

$$W_1(Z | a) = \frac{2Z}{N_0 E_1} \exp\left(-\frac{Z^2 + a^2 E_1}{N_0 E_1}\right) I_0\left(\frac{2aZ}{N_0}\right). \quad (11.2.11)$$

Рассмотрим теперь случай, когда сигнал отсутствует, т. е. $\xi(t) = n(t)$. Подставив в формулы (10.8.11) $n(t)$ вместо $\xi(t)$, получим, что независимые нормальные случайные величины X и Y имеют нулевое среднее значение и одинаковую дисперсию (11.2.10). На основании формулы (5.2.26) плотность вероятности $W_2(Z)$ случайной величины Z в данном случае будет релеевской:

$$W_2(Z) = \frac{2Z}{N_0 E_1} \exp\left(-\frac{Z^2}{N_0 E_1}\right). \quad (11.2.12)$$

Заметим, что для сигнала со случайной начальной фазой безразмерный коэффициент $a = \text{const}$ можно считать включенным в функцию $f(t)$. Это соответствует тому, что в формулах (11.2.11)

и (11.2.12) нужно положить $a = 1$, $E = E_1$. Тогда можем окончательно написать

$$W_1(Z) = \frac{2Z}{N_0 E} \exp\left(-\frac{Z^2 + E}{N_0 E}\right) I_0\left(\frac{2Z}{N_0}\right), \quad (11.2.13)$$

$$W_2(Z) = \frac{2Z}{N_0 E} \exp\left(-\frac{Z^2}{N_0 E}\right). \quad (11.2.14)$$

В соответствии с критерием Неймана — Пирсона по заданной вероятности ложной тревоги

$$I = \int_h^\infty W_2(Z) dZ = \int_{h_0}^\infty v \exp\left(-\frac{1}{2} v^2\right) dv = e^{-\frac{1}{2} h_0^2}, \quad h_0 = \frac{h}{\sqrt{N_0 E/2}}, \quad (11.2.15)$$

пределяется пороговый уровень h_0 , а затем вычисляется вероятность правильного обнаружения

$$D = \int_h^\infty W_1(Z) dZ = \int_{h_0}^\infty v \exp\left(-\frac{v^2 + 2E}{2}\right) I_0\left(v \sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right) dv. \quad (11.2.16)$$

Вероятность D является частным значением табулированной функции [7,8]

$$Q(v, u) = \int_u^\infty z \exp\left(-\frac{z^2 + v^2}{2}\right) I_0(zv) dz. \quad (11.2.17)$$

Результаты расчетов по формулам (11.2.15) и (11.2.16) представлены на рис. 11.7.

3. Обнаружение федингующего радиосигнала. Пусть в радиосигнале (10.2.10) является случайной не только фаза θ , но и амплитудный множитель a , причем плотность вероятности для безразмерной случайной величины a является релеевской:

$$W_{pr}(a) = \frac{a}{\sigma_a^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_a^2}\right), \quad a \geq 0. \quad (11.2.18)$$

Отношение правдоподобия для рассматриваемого сигнала можно получить путем усреднения выражения (11.2.5) по a . Воспользовавшись интегралом (10.8.18), получим

$$\langle l(a) \rangle = \int_0^\infty l(a) W_{pr}(a) da = \frac{N_0}{\sigma_a^2 + N_0} \exp\left[-\frac{2\sigma_a^2 Z}{N_0(\sigma_a^2 + N_0)}\right]. \quad (11.2.19)$$

Как следует из (11.2.6) и (10.8.17), величина $\alpha\sigma_a^2$ равна средней энергии сигнала:

$$E = \langle E \rangle = \langle a^2 \rangle E_1 = E_1 \int_0^\infty a^2 W_{pr}(a) da = 2\sigma_a^2 E_1. \quad (11.2.20)$$

Поскольку показательная функция является монотонной, то можно принять прежнее правило (11.2.8) решения вопроса о наличии или отсутствии сигнала в принятой реализации.

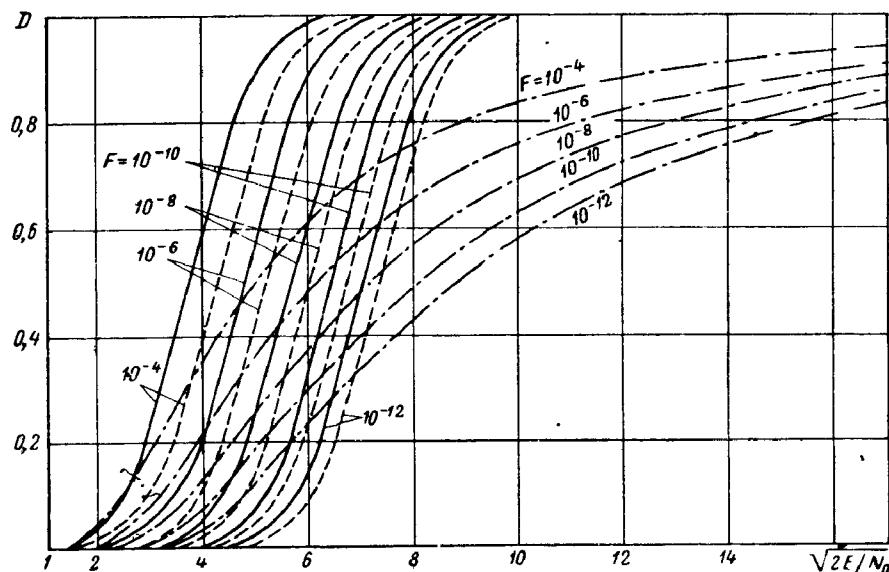


Рис. 11.7. Кривые обнаружения для детерминированного сигнала (сплошные линии), сигнала со случайной начальной фазой (пунктир) и сигнала со случайными амплитудой и начальной фазой (штрих-пунктир).

Усреднив выражение (11.2.11) по флюктуирующему амплитудному множителю a с плотностью вероятности (11.2.18), получим релеевскую плотность вероятности огибающей Z при наличии сигнала:

$$W_1(Z) = \frac{2Z}{N_0 E_1 + 2\sigma_a^2 E_1^2} \exp\left(-\frac{Z^2}{N_0 E_1 + 2\sigma_a^2 E_1^2}\right). \quad (11.2.21)$$

Плотность вероятности огибающей Z при наличии одного шума по-прежнему дается формулой (11.2.12).

Кривые обнаружения по критерию Неймана — Пирсона строятся так. По заданной вероятности ложной тревоги

$$F = \int_h^\infty W_2(Z) dZ = e^{-\frac{1}{2} \frac{h^2}{h_0}}, \quad h_0 = \frac{h}{\sqrt{N_0 E_1 / 2}}, \quad (11.2.22)$$

пределяется пороговый уровень h_0 и затем вычисляется вероятность правильного обнаружения

$$D = \int_h^\infty W_1(Z) dZ = \exp\left[-\frac{h_0^2}{2\left(1+\sigma_a^2 \frac{2E_1}{N_0}\right)}\right]. \quad (11.2.23)$$

Если нужно сравнивать характеристики обнаружения федингующих и нефедингующих радиосигналов, то естественно произошло такое сравнение для случая, когда средняя энергия федингующего сигнала равна энергии нефедингующего сигнала. Для этого, как видно из формулы (11.2.20), нужно положить

$$\sigma_a^2 = 1/2. \quad (11.2.24)$$

Тогда формулу (11.2.23) можно записать в таком виде:

$$D = F^{1/(1 + \frac{E}{N_0})}. \quad (11.2.25)$$

На рис. 11.7 приведены рассчитанные по формулам (11.2.3), (11.2.16) и (11.2.25) кривые обнаружения для трех видов сигналов: 1) детерминированного (сплошные линии); 2) сигнала со случайной начальной фазой (пунктир) и 3) сигнала со случайными амплитудой и начальной фазой (штрих-пунктир) [9].

Видно, что при увеличении отношения сигнал/шум все кривые zunächst растут медленно, а затем быстрее. При больших вероятностях правильного обнаружения кривые для сигнала со случайной начальной фазой и особенно для сигнала со случайными амплитудой и фазой смешены в сторону больших отношений сигнал/шум. Напротив, при малых вероятностях правильного обнаружения ($D \leq 0,2$) кривые обнаружения для федингующего сигнала идут выше соответствующих кривых для других двух сигналов. Это объясняется тем, что при равенстве энергий (11.2.24) амплитуда федингующего сигнала с вероятностью

$$\int_0^1 W_{pr}(a) da = \int_0^1 2a e^{-a^2} da \approx 0,74$$

будет превышать амплитуду нефедингующих сигналов.

§ 3. РАЗЛИЧЕНИЕ ДВУХ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

Задача обнаружения сигнала на фоне шума является частным случаем задачи различения двух сигналов. Рассмотрим здесь задачу различения двух детерминированных сигналов.

Пусть принятное колебание представляет сумму

$$\xi(t) = \lambda s_1(t) + (1 - \lambda) s_2(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (11.3.1)$$

где $n(t)$ — белый шум, $s_1(t)$ и $s_2(t)$ — полностью детерминированные сигналы. Неизвестный параметр λ может принимать одно из двух значений: $\lambda = 1$ (присутствует только сигнал s_1) и $\lambda = 0$ (присутствует сигнал s_2). Априорные вероятности $W_{pr}(s_1)$ присутствия сигнала s_1 и $W_{pr}(s_2)$ присутствия сигнала s_2 предполагаются известными.

По принятой реализации $\xi(t)$ нужно решить, какое именно значение имеет параметр λ , т. е. какой из сигналов $s_1(t)$ или $s_2(t)$ присутствует в реализации.

Для апостериорных вероятностей наличия сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ нетрудно получить следующие выражения:

$$W_{ps}(s_1) = k W_{pr}(s_1) \exp \left\{ -\frac{E_1}{N_0} + \frac{2}{N_0} \int_0^T \xi(t) s_1(t) dt \right\}, \quad (11.3.2)$$

$$W_{ps}(s_2) = k W_{pr}(s_2) \exp \left\{ -\frac{E_2}{N_0} + \frac{2}{N_0} \int_0^T \xi(t) s_2(t) dt \right\}, \quad (11.3.3)$$

где

$$E_1 = \int_0^T s_1^2(t) dt, \quad E_2 = \int_0^T s_2^2(t) dt. \quad (11.3.4)$$

В соответствии с критерием идеального наблюдателя будем считать, что присутствует сигнал $s_1(\lambda = 1)$, если выполняется соотношение

$$\frac{W_{ps}(s_1)}{W_{ps}(s_2)} = \frac{W_{pr}(s_1)}{W_{pr}(s_2)} \exp \left\{ -\frac{E_1 - E_2}{N_0} + \frac{2}{N_0} \int_0^T \xi(t) [s_1(t) - s_2(t)] dt \right\} > 1. \quad (11.3.5)$$

Отсюда получим

$$q = \frac{2}{N_0} \int_0^T \xi(t) [s_1(t) - s_2(t)] dt > \ln \frac{W_{pr}(s_2)}{W_{pr}(s_1)} + \frac{E_1 - E_2}{N_0} = h. \quad (11.3.6)$$

Назовем систему передачи двоичных сигналов симметричной, если для нее выполняются равенства:

$$W_{pr}(s_1) = W_{pr}(s_2) = \frac{1}{2}, \quad E_1 = E_2 = E. \quad (11.3.7)$$

Для симметричной системы формула (11.3.6) упрощается:

$$q = \frac{2}{N_0} \int_0^T \xi(t) [s_1(t) - s_2(t)] dt > h = 0. \quad (11.3.8)$$

Таким образом, на основании сравнения апостериорных вероятностей получаем следующее правило различения двух детерминированных сигналов. Принимается решение о наличии сигнала $s_1(t)$, если $q > 0$; при $q < 0$ принимается решение о наличии сигнала $s_2(t)$.

На рис. 11.8 приведены две схемы оптимального приемника для различения двух детерминированных сигналов: с использованием коррелометра и согласованных фильтров. Второй из них состоит

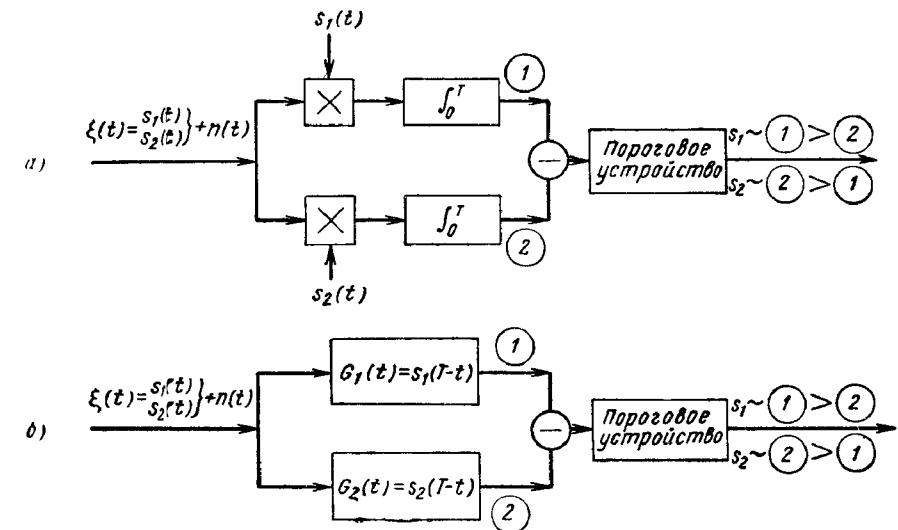


Рис. 11.8. Оптимальные схемы для различения двух детерминированных сигналов с использованием корреляционного приема (a) и согласованных фильтров (b).

из двух линейных фильтров, согласованных с сигналами $s_1(t)$ и $s_2(t)$ соответственно, вычитающего устройства и порогового устройства (например, типа электронного реле). В первом принятное колебание $\xi(t)$ раздельно перемножается с известными сигналами $s_1(t)$ и $s_2(t)$, интегрируется и разностное напряжение подается на пороговое устройство.

Предположим, что выполняются условия (11.3.7). Вычислим вероятность общей ошибки. Пусть присутствует сигнал $s_1(t)$, т. е.

$$\xi(t) = s_1(t) + n(t).$$

Тогда случайная величина

$$q = q_1 = \frac{2}{N_0} \int_0^T [s_1(t) + n(t)] [s_1(t) - s_2(t)] dt \quad (11.3.9)$$

будет иметь нормальную плотность вероятности $w_1(q)$ со следующими характеристиками:

$$m_1 = \langle q_1 \rangle = \frac{2E}{N_0} (1 - R_s), \quad \sigma_1^2 = \langle q_1^2 \rangle - m_1^2 = \frac{4E}{N_0} (1 - R_s). \quad (11.3.10)$$

Здесь

$$R_s = \frac{1}{E} \int_0^T s_1(t) s_2(t) dt \quad (11.3.11)$$

— коэффициент взаимной корреляции между сигналами $s_1(t)$ и $s_2(t)$.

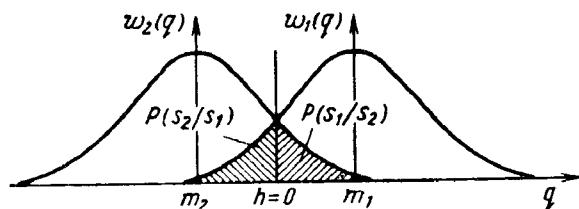


Рис. 11.9. Нормальные плотности вероятности при наличии одного из двух сигналов и вероятности ошибок.

Если присутствует сигнал $s_2(t)$, т. е.

$$\xi(t) = s_2(t) + n(t),$$

то случайная величина

$$q = q_2 = \frac{2}{N_0} \int_0^T [s_2(t) + n(t)] [s_1(t) - s_2(t)] dt \quad (11.3.12)$$

имеет нормальную плотность вероятности $w_2(q)$ с характеристиками

$$m_2 = \langle q_2 \rangle = -\frac{2E}{N_0} (1 - R_s), \quad \sigma_2^2 = \langle q_2^2 \rangle - m_2^2 = \frac{4E}{N_0} (1 - R_s). \quad (11.3.13)$$

Плотности вероятности $w_1(q)$ и $w_2(q)$ изображены на рис. 11.9.

Обозначим через $P(s_1|s_2)$ условную вероятность принять решение о наличии сигнала s_1 , когда в действительности присутствует сигнал s_2 , и через $P(s_2|s_1)$ — условную вероятность принять решение о наличии сигнала s_2 , когда в действительности присутствует сигнал s_1 . Очевидно, что вероятность общей ошибки равна

$$P_e = W_{pr}(s_2) P(s_1|s_2) + W_{pr}(s_1) P(s_2|s_1), \quad (11.3.14)$$

$$P(s_1|s_2) = \int_h^\infty w_2(q) dq, \quad P(s_2|s_1) = \int_{-\infty}^h w_1(q) dq. \quad (11.3.15)$$

Подставив в (11.3.14) значения априорных вероятностей из (11.3.7), находим вероятность суммарной ошибки

$$P_e = \frac{1}{2} \left[\int_h^\infty w_2(q) dq + \int_{-\infty}^h w_1(q) dq \right]. \quad (11.3.16)$$

Полагая, как это следует из (11.3.8), $h = 0$ и выполнив вычисления, получим

$$P_e = 1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{E}{N_0}} (1 - R_s) \right). \quad (11.3.17)$$

Следовательно, при известном отношении сигнал/шум $2E/N_0$, вычисление вероятности суммарной ошибки для детерминированных сигналов сводится к определению коэффициента взаимной корреляции между сигналами. Так как интеграл вероятности $\Phi(z)$ является монотонно возрастающей функцией аргумента, то при однином отношении сигнал/шум наибольшей помехоустойчивостью (меньшей вероятностью ошибки P_e) обладают сигналы, для которых коэффициент взаимной корреляции минимален.

Если сигналы обладают одинаковой энергией, то коэффициент взаимной корреляции R_s может изменяться от -1 (при $s_1(t) = -s_2(t)$) до $+1$ (когда $s_1(t) = s_2(t)$). В том случае, когда $R_s = 0$, говорят, что сигналы ортогональны. Очевидно, что одинаковые сигналы ($R_s = 1$) невозможно различить и поэтому $P_e = 1 - \Phi(0) = 0,5$. Наоборот, если сигналы одинаковы по форме и противоположны по знаку ($R_s = -1$), то их различить легче, чем любые другие два сигнала (например, ортогональные). Сказанное иллюстрируется рис. 11.10, на котором представлены результаты расчетов по формуле (11.3.17) [10].

Кривые, характеризующие зависимость вероятности суммарной ошибки P_e от отношения сигнал/шум при оптимальных методах приема, в радиосвязи часто называют кривыми потенциальной помехоустойчивости. Получим такие кривые для некоторых видов манипулированных сигналов, применяемых в радиотелеграфии.

Амплитудная манипуляция (AM). При амплитудной манипуляции

$$s_1(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi), \quad s_2(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (11.3.18)$$

В данном случае на основе критерия идеального наблюдателя нужно решить задачу обнаружения сигнала $s_1(t)$ на фоне шума.

Положив в выражениях (11.3.9) и (11.3.12) $s_2(t) = 0$, получим, что плотности вероятности $w_1(q)$ и $w_2(q)$ величин q_1 и q_2 являются

нормальными со следующими средними значениями и дисперсиями:

$$m_1 = \frac{2E}{N_0}, \quad \sigma_1^2 = \frac{2E}{N_0}, \quad m_2 = 0, \quad \sigma_2^2 = \frac{2E}{N_0}, \quad E = \frac{1}{2} A_m^2 T.$$

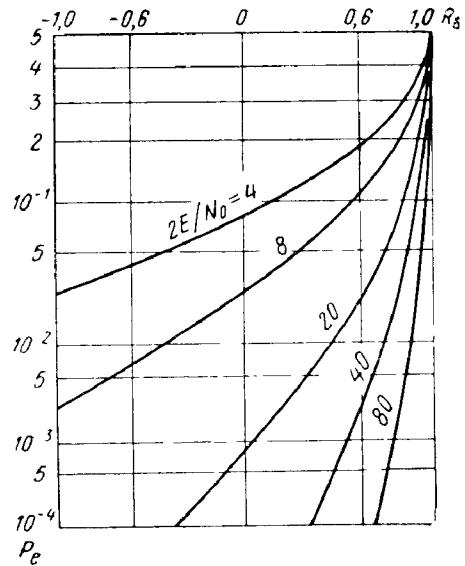


Рис. 11.10. Зависимость вероятности общей ошибки P_e от коэффициента взаимной корреляции R_s между детерминированными сигналами.

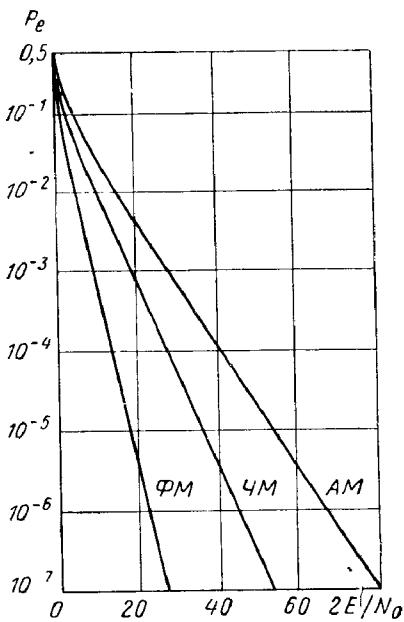


Рис. 11.11. Зависимость вероятности ошибки от отношения сигнал/шум для детерминированных сигналов при АМ, ЧМ и ФМ.

Пусть априорные вероятности наличия и отсутствия сигнала $s_1(t)$ одинаковы и равны 0,5. По формуле (11.3.16) записываем выражение для вероятности суммарной ошибки:

$$\begin{aligned} P_e = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{4\pi E/N_0}} \int_h^\infty \exp\left(-\frac{q^2}{4E/N_0}\right) dq + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{4\pi E/N_0}} \int_{-\infty}^h \exp\left[-\frac{\left(q - \frac{2E}{N_0}\right)^2}{4E/N_0}\right] dq \right\}. \end{aligned}$$

Значение оптимального порога h находим по формуле (11.3.6): $h = E/N_0 = (m_1 - m_2)/2$. Отсюда следует, что порог определяется

процессой точки пересечения плотностей вероятностей $w_1(q)$ и $w_2(q)$. При таком пороге вероятность ошибки минимальна и равна

$$P_e = 1 - \Phi\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right). \quad (11.3.19)$$

График этой функции представлен на рис. 11.11.

Частотная манипуляция (ЧМ). При ЧМ используются два гармонических сигнала одинаковой амплитуды и длительности, имеющие различные несущие частоты:

$$\begin{cases} s_1(t) = A_m \cos(\omega_1 t - \varphi_1), \\ s_2(t) = A_m \cos(\omega_2 t - \varphi_2), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T. \quad (11.3.20)$$

Согласно (11.3.11) в данном случае имеем

$$R_s = \frac{\sin(\omega_2 - \omega_1)T}{(\omega_2 - \omega_1)T}.$$

В практике обычно выполняется неравенство $(\omega_2 - \omega_1)T \gg 1$. Поэтому можно положить $R_s = 0$, и для вероятности ошибки из формулы (11.3.17) получим

$$P_e = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right). \quad (11.3.21)$$

Зависимость вероятности ошибки от отношения сигнал/шум изображена на рис. 11.11.

Фазовая манипуляция (ФМ). При фазовой манипуляции используются сигналы

$$\begin{cases} s_1(t) = A_m \cos \omega t, \\ s_2(t) = -A_m \cos \omega t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T. \quad (11.3.22)$$

В таких сигналов $R_s = -1$ и вероятность ошибки согласно (11.3.17) равна

$$P_e = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right). \quad (11.3.23)$$

График этой функции представлен на рис. 11.11.

Сравнивая графики рис. 11.11 для АМ, ЧМ и ФМ, видим, что при одной и той же энергии из трех рассмотренных видов манипуляции наибольшей помехоустойчивостью обладает фазовая манипуляция и наименьшей — амплитудная.

Выше был рассмотрен один из простейших примеров теории манипуляции двух сигналов на фоне помех. Конечно, практические задачи оказываются более сложными. Так, например, в радиосвязи и радиолокации не приходится оперировать с полностью известными (детерминированными) сигналами. Обычно бывают заранее не-

известными начальную фазу (время прихода) сигнала, его амплитуду, да и другие параметры.

Сигналы с полностью известными параметрами можно использовать в качестве своеобразных теоретических «эталонов», позволяющих получить максимальную информацию. Результаты оптимальной обработки сигналов с различными неизвестными параметрами целесообразно сравнивать с соответствующими результатами, получающимися для аналогичных сигналов с известными параметрами.

§ 4. РАЗЛИЧЕНИЕ ДВУХ РАДИОСИГНАЛОВ СО СЛУЧАЙНОЙ НАЧАЛЬНОЙ ФАЗОЙ

Пусть в выражении (11.3.1) сигналы $s_1(t)$ и $s_2(t)$ имеют вид

$$s_i(t) = f_i(t - \tau) \cos(\omega_i t + \varphi_i(t) - \theta_i), \quad i=1, 2, \quad (11.4.1)$$

где ω_i — несущие частоты, $f_i(t - \tau)$ и $\varphi_i(t)$ — функции, отображающие законы амплитудной и фазовой (частотной) модуляции, θ_i — начальные фазы, представляющие собой независимые случайные величины, распределенные равномерно на интервале $(-\pi, \pi)$. Предполагается, что ширина спектров сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ много меньше их несущих частот и, кроме этого, $|\omega_2 - \omega_1| \ll \omega_i$.

По критерию идеального наблюдателя нужно решить задачу различия двух таких радиосигналов со случайными начальными фазами [11].

Апостериорные вероятности наличия сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ со случайными начальными фазами получаются путем усреднения правых частей выражений (11.3.2) и (11.3.3) по начальным фазам как несущественным параметрам, т. е. можно написать

$$W_{ps}(s_1) = kW_{pr}(s_1) e^{-E_1/N_0} \times \\ \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left[\frac{2}{N_0} \int_0^T \xi(t) f_1(t - \tau) \cos(\omega_1 t + \varphi_1(t) - \theta_1) dt \right] d\theta_1, \quad (11.4.2)$$

$$W_{ps}(s_2) = kW_{pr}(s_2) e^{-E_2/N_0} \times \\ \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left[\frac{2}{N_0} \int_0^T \xi(t) f_2(t - \tau) \cos(\omega_2 t + \varphi_2(t) - \theta_2) dt \right] d\theta_2. \quad (11.4.3)$$

Если ввести обозначения

$$\left. \begin{aligned} X_i &= \int_0^T \xi(t) f_i(t - \tau) \cos[\omega_i t + \varphi_i(t)] dt, \\ Y_i &= \int_0^T \xi(t) f_i(t - \tau) \sin[\omega_i t + \varphi_i(t)] dt, \end{aligned} \right\} \quad (11.4.4)$$

$$Z_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2}, \quad (11.4.5)$$

из (11.4.2) и (11.4.3) для апостериорных вероятностей получим следующие выражения:

$$W_{ps}(s_1) = kW_{pr}(s_1) e^{-E_1/N_0} I_0 \left(\frac{2Z_1}{N_0} \right), \quad (11.4.6)$$

$$W_{ps}(s_2) = kW_{pr}(s_2) e^{-E_2/N_0} I_0 \left(\frac{2Z_2}{N_0} \right), \quad (11.4.7)$$

$I_0(z)$ — функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента.

Согласно критерию идеального наблюдателя решение о наличии сигнала $s_1(t)$ или сигнала $s_2(t)$ принимается в зависимости от выполнения неравенств

$$\frac{W_{ps}(s_1)}{W_{ps}(s_2)} = \frac{W_{pr}(s_1)}{W_{pr}(s_2)} e^{\frac{E_2 - E_1}{N_0}} \frac{I_0(2Z_1/N_0)}{I_0(2Z_2/N_0)} \geq 1$$

или

$$\ln I_0(2Z_1/N_0) - \ln I_0(2Z_2/N_0) \geq \frac{E_1 - E_2}{N_0} + \ln \frac{W_{pr}(s_2)}{W_{pr}(s_1)} = h. \quad (11.4.8)$$

Положительная величина Z_i , определенная равенством (11.4.5), равна корню квадратному из суммы квадратов двух нормально распределенных случайных переменных X_i и Y_i . Физически величина Z_i представляет собой огибающую суммы сигнала $s_i(t)$ и шума $n(t)$ на выходе согласованного фильтра, имеющего импульсную характеристику

$$G_t(t) = \begin{cases} s_t(T-t) & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ 0 & \text{при } t < 0, t > T. \end{cases} \quad (11.4.9)$$

Функцию $\ln I_0(2Z_i/N_0)$ можно получить в явном виде на выходе детектора огибающей с законом $\ln I_0(z)$.

Структурная схема оптимального приемника для различения двух радиосигналов с неизвестной начальной фазой представлена на рис. 11.12. Принятое колебание $\xi(t) = s_i(t) + n(t)$ воздействует на два согласованных фильтра с импульсными характеристиками (11.4.9). На выходе каждого из фильтров стоят детекторы огибаю-

щей, напряжения детекторов вычитаются, и эта разность воздействует на пороговое устройство с порогом h . Если напряжение превышает порог h , то принимается решение о наличии сигнала $s_1(t)$, если же порог не превышен, то констатируется наличие сигнала $s_2(t)$.

Отметим, что при выполнении условий (11.3.7), когда система является симметричной, пороговый уровень $h = 0$, и решение о наличии сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ принимается в зависимости от выполнения неравенств

$$\ln I_0(2Z_1/N_0) \geq \ln I_0(2Z_2/N_0). \quad (11.4.10)$$

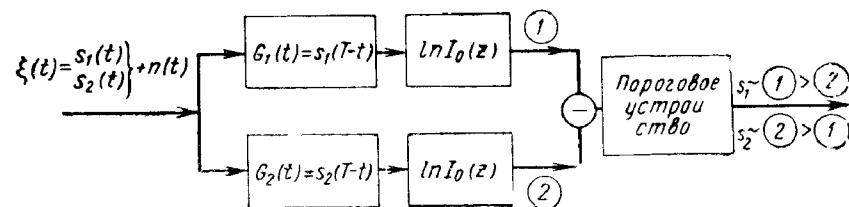


Рис. 11.12. Оптимальная схема для различения двух радиосигналов со случайными начальными фазами.

Функция Бесселя $I_0(z)$ является монотонной функцией аргумента. Поэтому закон детектирования не имеет существенного значения при различении двух сигналов. Важно лишь, чтобы выходное напряжение детектора было монотонной функцией огибающей Z_i . Если, например, в оптимальном приемнике (рис. 11.12) применить линейный детектор огибающей, то различение двух сигналов нужно производить путем сравнения значений самих огибающих Z_1 и Z_2 . При $Z_1 > Z_2$ принимается решение о наличии сигнала $s_1(t)$, и наоборот.

Ограничимся в дальнейшем рассмотрением симметричных каналов и примем, что различие сигналов производится путем сравнения огибающих Z_1 и Z_2 . Для симметричных каналов условные вероятности ошибок равны друг другу:

$$P(s_1|s_2) = P(s_2|s_1).$$

Для вычисления этих вероятностей нужно предварительно найти совместную плотность вероятности огибающих $W_2(Z_1, Z_2)$, пользуясь выражениями (11.4.4) и (11.4.5). Тогда

$$P(s_1|s_2) = \int_0^{\infty} dZ_1 \int_{Z_1}^{\infty} W_2(Z_1, Z_2) dZ_2$$

из вероятности общей ошибки согласно (11.3.14) получим формулу

$$P_e = \int_0^{\infty} dZ_1 \int_{Z_1}^{\infty} W_2(Z_1, Z_2) dZ_2. \quad (11.4.11)$$

Весьма громоздкие расчеты приводят к следующему окончательному результату:

$$P_e = Q\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2E}{N_0}}(1 - \sqrt{1 - \rho_s^2})\right), \quad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2E}{N_0}}(1 + \sqrt{1 - \rho_s^2}) - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{2F}{N_0}\right)} I_0\left(\frac{1}{4}\frac{2E}{N_0}\rho_s\right), \quad (11.4.12)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_s &= \frac{B}{E}, \quad B = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, \quad 0 \leq \rho_s \leq 1, \\ b_1 &= \frac{1}{2} \int_0^T f_1(t) f_2(t) \cos[(\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_2(t) - \varphi_1(t)] dt, \\ b_2 &= \frac{1}{2} \int_0^T f_1(t) f_2(t) \sin[(\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_2(t) - \varphi_1(t)] dt. \end{aligned} \right\} \quad (11.4.13)$$

где $Q(v, u)$ табулированная функция (11.2.17).

На рис. 11.13 приведены вычисленные по формуле (11.4.12) кривые, характеризующие зависимость вероятности ошибки от коэффициента взаимной корреляции сигналов ρ_s при нескольких значениях отношения сигнал/шум. Из кривых видно, что при заданном отношении сигнал/шум вероятность ошибки минимальна для ортогональных сигналов ($\rho_s = 0$). Наоборот, для двух сигналов, совпадающих по форме с точностью до начальной фазы ($\rho_s = 1$), вероятность ошибки всегда максимальна и равна $P_e = 0,5$.

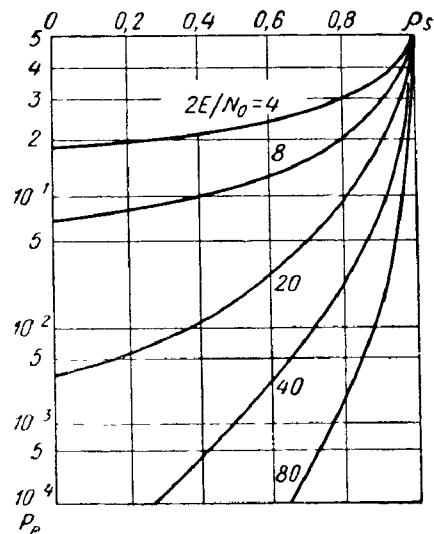


Рис. 11.13. Зависимость вероятности общей ошибки P_e от коэффициента взаимной корреляции между сигналами со случайными начальными фазами,

По формулам (11.3.17) и (11.4.12) были выполнены расчеты кривых потенциальной помехоустойчивости для различных сигналов, применяемых в радиотелеграфии. Ниже кратко указаны основные результаты вычислений.

Амплитудная манипуляция (АМ). Если в (11.3.18) начальная фаза ϕ случайна и равномерно распределена, то вероятность ошибки равна

$$P_e = \frac{1}{2} \left[1 + \exp \left(-\frac{1}{2} h^2 \right) - Q \left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}, h \right) \right], \quad (11.4.14)$$

где оптимальный порог h находится из уравнения

$$I_0 \left(h \sqrt{\frac{2E}{N_0}} \right) = \exp \left(\frac{1}{2} \frac{2E}{N_0} \right). \quad (11.4.15)$$

Частотная манипуляция (ЧМ). Считая в (11.3.20) фазы φ_1 и φ_2 случайными, получим

$$\rho_s = \left| \frac{\sin \frac{1}{2} (\omega_2 - \omega_1) T}{\frac{1}{2} (\omega_2 - \omega_1) T} \right| \approx 0 \text{ при } \frac{1}{2} (\omega_2 - \omega_1) T \gg 1.$$

В данном случае формула (11.4.12) упрощается:

$$P_e = Q \left(0, \sqrt{\frac{1}{2} \frac{2E}{N_0}} \right) - \frac{1}{2} \exp \left(-\frac{1}{4} \frac{2E}{N_0} \right).$$

Учитывая, что $Q(0, u) = \exp(-\frac{1}{2} u^2)$, окончательно получим

$$P_e = \frac{1}{2} \exp \left(-\frac{E}{2N_0} \right). \quad (11.4.16)$$

Тональная манипуляция АМ-АМ. В данном случае имеем

$$\begin{aligned} s_1(t) &= A_m (1 + m_1 \cos \Omega t) \cos(\omega t - \theta_1), \\ s_2(t) &= A_m (1 + m_2 \cos \Omega t) \cos(\omega t - \theta_2), \end{aligned}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (11.4.17)$$

Можно показать, что для таких сигналов формула (11.3.17) принимает вид

$$P_e = 1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{1}{4} \frac{2E_1}{N_0} \frac{(m_1 - m_2)^2}{2 + m_1^2}} \right), \quad E_1 = \frac{1}{2} A_m^2 T \left(1 + \frac{1}{2} m_1^2 \right). \quad (11.4.18)$$

При фиксированном значении $2E_1/N_0$ эта вероятность будет минимальной, когда $m_1=1$ и $m_2=0$. При этом

$$P_e = 1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{1}{12} \frac{2E_1}{N_0}} \right). \quad (11.4.19)$$

Тональная манипуляция ЧМ-АМ. При тональной манипуляции ЧМ-АМ используются сигналы

$$\begin{aligned} s_1(t) &= A_m (1 + m \cos \Omega_1 t) \cos(\omega t - \theta_1), \\ s_2(t) &= A_m (1 + m \cos \Omega_2 t) \cos(\omega t - \theta_2), \end{aligned}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (11.4.20)$$

шергии которых равны

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{2} A_m^2 T \left(1 + \frac{1}{2} m^2 \right) = E.$$

В случае детерминированных сигналов полагаем $\theta_i=0$ и пользуясь формулой (11.3.11):

$$\begin{aligned} R_s &= \frac{1}{E} \int_0^T s_1(t) s_2(t) dt = \\ &= \frac{A_m^2}{E} \int_0^T (1 + m \cos \Omega_1 t) (1 + m \cos \Omega_2 t) \cos^2 \omega t dt. \end{aligned}$$

На практике обычно выполняются соотношения $T = k_t 2\pi/\Omega_t$, Ω_t , где k_t — большие целые положительные числа ($k_t \gg 1$). С учетом этих условий после несложных преобразований получим

$$R_s = 2/(2 + m^2).$$

Подстановка этого значения R_s в формулу (11.3.17) дает

$$P_e = 1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{1}{2} \frac{2E}{N_0} \frac{m^2}{2+m^2}} \right) \quad (11.4.21)$$

При $m=1$ сигналы ЧМ-АМ различаются с минимальной вероятностью ошибки:

$$P_e = 1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{1}{6} \frac{2E}{N_0}} \right). \quad (11.4.22)$$

Для сигналов (11.4.20) со случайными начальными фазами θ_i числения по формулам (11.4.13) приводят к прежнему результату:

$$\rho_s = R_s = 2/(2 + m^2).$$

Вероятность ошибки при $m=1$ согласно (11.4.12) равна

$$P_e = Q(v, u) - \frac{1}{2} \exp \left(-\frac{1}{4} \frac{2E}{N_0} \right) I_0 \left(\frac{1}{6} \frac{2E}{N_0} \right), \quad (11.4.23)$$

где

$$v = \sqrt{\frac{1}{4} \frac{2E}{N_0} \frac{3 - \sqrt{5}}{3}}, \quad u = \sqrt{\frac{1}{4} \frac{2E}{N_0} \frac{3 + \sqrt{5}}{3}}.$$

Тональная манипуляция ФМ-АМ. В данном случае используются сигналы:

$$\begin{cases} s_1(t) = A_m (1 + m \cos \Omega t) \cos(\omega t - \theta_1), \\ s_2(t) = A_m (1 - m \cos \Omega t) \cos(\omega t - \theta_2), \end{cases}, 0 \leq t \leq T. \quad (11.4.24)$$

Энергии сигналов равны

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{2} A_m^2 T \left(1 + \frac{1}{2} m^2 \right) = E.$$

Коэффициенты взаимной корреляции R_s и ρ_s , вычисленные по формулам (11.3.11) и (11.4.13), одинаковы:

$$R_s = \rho_s = (2 - m^2) / (2 + m^2).$$

Обычно берут $m = 1$. При этом $R_s = \rho_s = \frac{1}{3}$.

Подставляя $R_s = \frac{1}{3}$ в формулу (11.3.17), получаем выражение для P_e при приеме детерминированных сигналов ФМ-АМ:

$$P_e = 1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{1}{3} \frac{2E}{N_0}} \right). \quad (11.4.25)$$

Вероятность ошибки P_e при приеме сигналов ФМ-АМ ($m = 1$) с неизвестной начальной фазой вычисляется по формуле

$$P_e = Q(v, u) - \frac{1}{2} \exp \left(-\frac{1}{4} \frac{2E}{N_0} \right) I_0 \left(\frac{1}{12} \frac{2E}{N_0} \right), \quad (11.4.26)$$

где

$$v = \sqrt{\frac{1}{4} \frac{2E}{N_0} \frac{3 - 2\sqrt{2}}{3}}, \quad u = \sqrt{\frac{1}{4} \frac{2E}{N_0} \frac{3 + 2\sqrt{2}}{3}},$$

которая получается из (11.4.12) путем подстановки $\rho_s = \frac{1}{3}$.

Тональная манипуляция АМ-ЧМ. При тональной манипуляции АМ-ЧМ используются следующие сигналы:

$$\begin{cases} s_1(t) = A_m \cos(\omega t + \beta_1 \cos \Omega t - \theta_1), \\ s_2(t) = A_m \cos(\omega t + \beta_2 \cos \Omega t - \theta_2), \end{cases}, 0 \leq t \leq T. \quad (11.4.27)$$

Энергии сигналов одинаковы:

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{2} A_m^2 T = E.$$

При вычислении коэффициентов взаимной корреляции нужно воспользоваться известным разложением:

$$\cos(x \cos \varphi) = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x) \cos 2n\varphi$$

Часто обычно выполняющиеся соотношения: $T = 2\pi k/\Omega$, $\omega \gg \Omega$, k — большое целое положительное число ($k \gg 1$). Получим следующие результаты:

$$R_s = J_0(\beta_2 - \beta_1), \quad \rho_s = |J_0(\beta_2 - \beta_1)|,$$

$J_0(z)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

При достаточно большой разности индексов модуляции $|\beta_2 - \beta_1| \gg 1$ можно приближенно принять

$$R_s = \rho_s = 0.$$

При этом вероятности ошибок P_e для разных случаев приема сигналов АМ-ЧМ будут определяться соответствующими формулами, полученными ранее для сигналов ЧМ.

Тональная телеграфия ЧМ-ЧМ. При тональной манипуляции ЧМ-ЧМ используются сигналы

$$\begin{cases} s_1(t) = A_m \cos(\omega t + \beta \cos \Omega t - \theta_1), \\ s_2(t) = A_m \cos(\omega t + \beta \cos \Omega t - \theta_2), \end{cases}, 0 \leq t \leq T, \quad (11.4.28)$$

коэффициенты которых равны

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{2} A_m^2 T = E.$$

Воспользовавшись разложениями

$$\left. \begin{aligned} \cos(x \cos \varphi) &= J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x) \cos 2n\varphi, \\ \sin(x \cos \varphi) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(x) \cos(2n+1)\varphi, \end{aligned} \right\}$$

можно получить следующие выражения для коэффициентов R_s и ρ_s :

$$R_s = \rho_s = J_0^2(\beta).$$

Для достаточно больших значений β (практически $\beta > 3$) можно положить $R_s = \rho_s = 0$. При этом вероятности ошибок P_e будут определяться соответствующими формулами, полученными выше для сигналов ЧМ.

Тональная телеграфия ФМ-ЧМ. При тональной телеграфии ФМ-ЧМ применяют радиосигналы

$$\left. \begin{aligned} s_1(t) &= A_m \cos(\omega t + \beta \cos \Omega t - \theta_1), \\ s_2(t) &= A_m \cos(\omega t - \beta \cos \Omega t - \theta_2), \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (11.4.29)$$

Энергии сигналов равны

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{2} A_m^2 T = E.$$

Коэффициенты R_s и ρ_s вычисляются по формулам (11.3.11) и (11.4.13) аналогично тому, как это делалось в двух предыдущих случаях; они равны

$$R_s = J_0(2\beta), \quad \rho_s = |J_0(2\beta)|.$$

Для достаточно больших β , когда $R_s = \rho_s = 0$, вероятности ошибок при приеме сигналов ФМ-ЧМ определяются формулами для соответствующих сигналов ЧМ.

По формулам (11.3.19), (11.3.21), (11.3.23), (11.4.14), (11.4.16), (11.4.19), (11.4.22), (11.4.23), (11.4.25) и (11.4.26) были выполнены расчеты кривых потенциальной помехоустойчивости для указанных выше сигналов, применяемых в радиотелеграфии. Результаты этих расчетов представлены на рис. 11.14, причем сплошные кривые относятся к детерминированным сигналам, а пунктирные — к соответствующим сигналам со случайной начальной фазой.

Эти кривые позволяют количественно сравнить различные системы радиотелеграфии по помехоустойчивости, указать значения отношения сигнал/шум, при которых получается заданная вероятность ошибки, а также оценить проигрыш в помехоустойчивости, получающийся из-за незнания начальной фазы.

Из графиков рис. 11.14 видно, что наименее помехоустойчивой является система с тональной манипуляцией вида АМ-АМ. При приеме детерминированных сигналов наибольшей помехоустойчивостью обладает фазовая манипуляция. Несмотря на это, на практике часто применяются также системы с частотной манипуляцией ввиду более простой их технической реализации.

Если задаться моделью принимаемого сигнала в виде (10.2.3), то для всех перечисленных примеров можно определить оптимальные схемы приемников и вычислить кривые помехоустойчивости с учетом не только случайных начальных фаз, но и амплитудных замираний (федингов) [10]. При рассмотрении амплитудных федингов следует различать два предельных случая: быстрые и медленные замирания.

Под быстрыми замираниями понимаются такие, когда амплитуда сигнала в течение длительности элементарной посылки испытывает

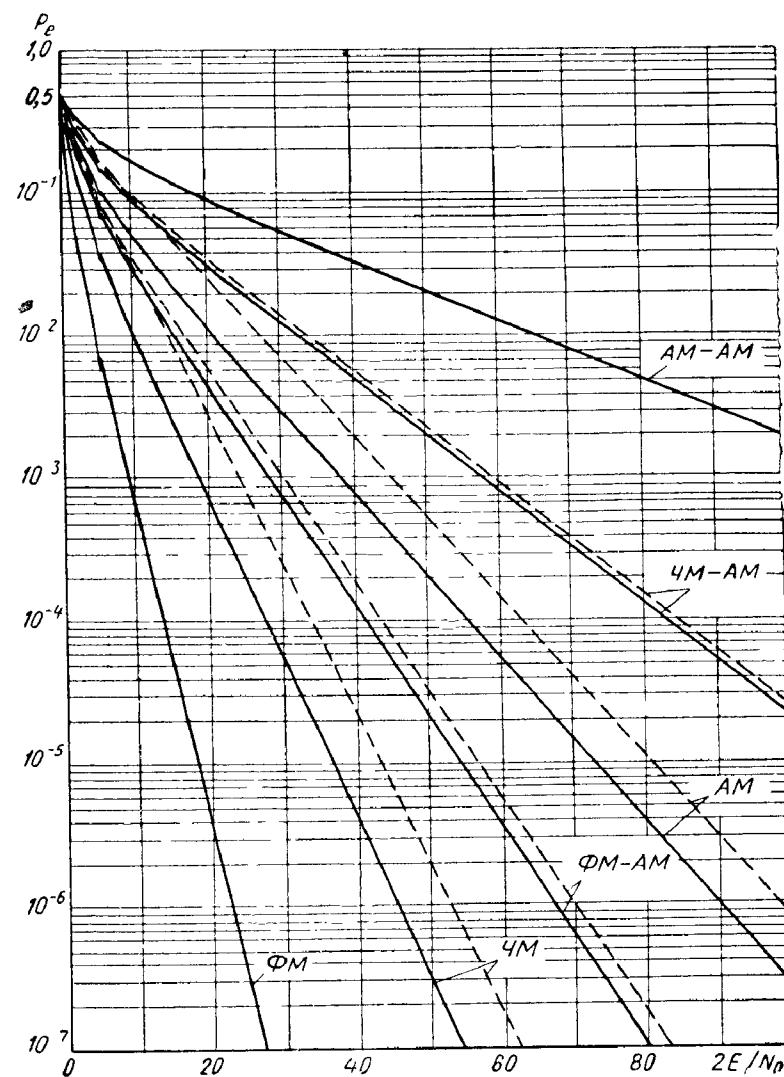


Рис. 11.14. Вероятность общей ошибки для различных систем радиотелеграфии при приеме на фоне шума детерминированных сигналов (сплошные линии) и сигналов со случайной начальной фазой (пунктир).

заметные флюктуации. Медленные замирания характеризуются тем, что амплитуды двух соседних посылок практически постоянны, но эти амплитуды изменяются случайным образом от одной пары посылок к другой.

Учет быстрых замираний требует специального математического рассмотрения. Это объясняется тем, что при случайной начальной фазе и быстро фадингющей амплитуде сами сигналы представляют собой отрезки квазигармонического шума. В данном случае оценка помехоустойчивости сводится к решению специфической задачи различия двух реализаций квазигармонического шума конечной длительности на фоне белого шума [12, 13, 14].

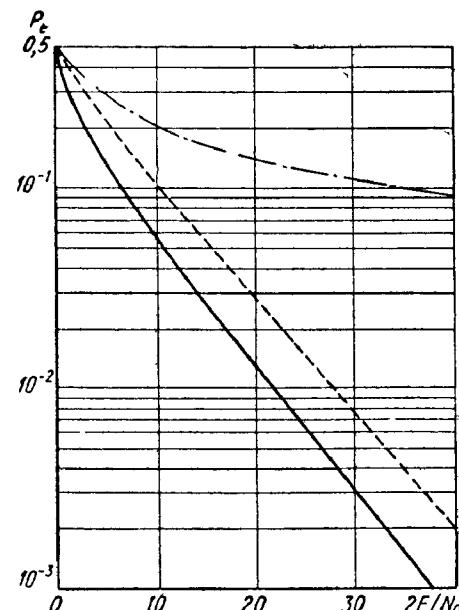
Для иллюстрации влияния медленных флюктуаций амплитуды сигнала на вероятность общей ошибки на рис. 11.15 приведены кривые, дающие зависимость вероятности ошибки от отношения сигнал/шум при приеме прямоугольного радиоимпульса (11.3.18) на фоне шума для трех случаев: 1) все параметры сигнала известны (сплошная линия); 2) начальная фаза случайная (пунктир) и 3) при случайной начальной фазе амплитуда сигнала изменяется по закону Релея

Рис. 11.15. Зависимость вероятности ошибки от отношения сигнал/шум для радиоимпульса с полностью известными параметрами (сплошная линия), с неизвестной начальной фазой (пунктир) и со случайными амплитудой и фазой (штрих-пунктир).

(11.2.18) при $\sigma_a^2 = 1/2$ (штрих-пунктир). Из рисунка видно, что при наличии амплитудного фадинга помехоустойчивость существенно понижается.

§ 5. О КВАЗИКОГЕРЕНТНОМ ПРИЕМЕ ФАЗОМАНИПУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

В § 3 для помехоустойчивости оптимального приема детерминированных сигналов фазовой манипуляции была получена формула (11.3.23). Как следует из соотношения (11.3.8), такая помехоустойчивость может быть реализована лишь при условии, если опорные



сигналы $s_1(t)$ и $s_2(t)$ известны на приемной стороне с точностью до малых фаз. На практике опорные сигналы часто формируют из принятого колебания $\xi(t)$ и поэтому они могут отличаться от истинных сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$. Такое отличие приводит к снижению помехоустойчивости приема сигналов фазовой манипуляции. Выполним степень этого снижения для двух конкретных методов приема, которые можно назвать квазикогерентными или квазисинхронными [15].

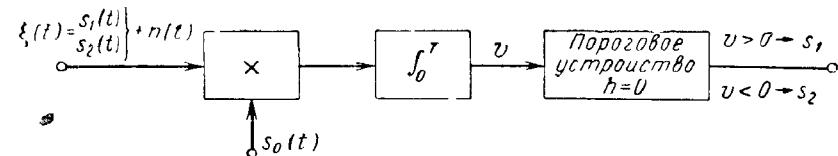


Рис. 11.16. Схема оптимального приемника для различия двух фазоманипулированных сигналов.

На основании (11.3.22) замечаем, что при фазовой манипуляции $\xi(t) = -s_2(t)$. Поэтому формула (11.3.8) несколько упрощается:

$$q = \frac{4}{N_0} \int_0^T \xi(t) s_1(t) dt > 0. \quad (11.5.1)$$

Следовательно, оптимальное приемное устройство для различия двух фазоманипулированных сигналов должно формировать величину

$$u = \int_0^T \xi(t) s_1(t) dt \quad (11.5.2)$$

и сравнивать ее с нулевым порогом $h = 0$ (рис. 11.16). При $u > 0$ принимается решение о наличии сигнала $s_1(t)$; при $u < 0$ принимается решение о наличии сигнала $s_2(t)$.

Предположим, что на один вход перемножителя приемника (рис. 11.16) воздействует принятое колебание (11.3.1), а на второй — опорный сигнал

$$s_0(t) = kA_m \cos(\omega t + \theta), \quad (11.5.3)$$

личающийся от сигнала $s_1(t)$ постоянным амплитудным множителем k и начальной фазой θ .

Тогда для напряжения на выходе перемножителя можем написать

$$\begin{aligned} u &= kA_m \int_0^T \xi(t) \cos(\omega t + \theta) dt = \\ &= kA_m^2 \int_0^T \cos[\omega t + (i+1)\pi] \cos(\omega t + \theta) dt + \\ &\quad + kA_m \int_0^T n(t) \cos(\omega t + \theta) dt. \end{aligned}$$

Здесь $i = 1$ при наличии в принятой реализации $\xi(t)$ сигнала $s_1(t)$ и $i = 2$ при наличии в $\xi(t)$ сигнала $s_2(t)$.

После несложных преобразований получим

$$u = (-1)^{i+1} kE \cos \theta + kA_m \int_0^T n(t) \cos(\omega t + \theta) dt. \quad (11.5.4)$$

Величина u нормально распределена со средним значением $\langle u \rangle = (-1)^{i+1} kE \cos \theta$ и дисперсией $\sigma_u^2 = k^2 EN_0/2$. Следовательно, плотность вероятности случайной величины u при условии наличия в колебании $\xi(t)$ полезного сигнала $s_i(t)$, $i = 1, 2$, равна

$$w(u | s_i) = \frac{1}{k \sqrt{\pi E N_0}} \exp \left\{ -\frac{[u + (-1)^i kE \cos \theta]^2}{k^2 E N_0} \right\}. \quad (11.5.5)$$

Условные вероятности $P(s_1 | s_2)$ и $P(s_2 | s_1)$, входящие в (11.3.14) в данном случае определяются равенствами

$$P(s_1 | s_2) = \int_0^\infty w(u | s_2) du, \quad P(s_2 | s_1) = \int_{-\infty}^0 w(u | s_1) du. \quad (11.5.6)$$

В результате несложных вычислений получим формулу

$$P_e(\theta) = 1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}} \cos \theta \right). \quad (11.5.7)$$

При $s_0(t) = s_1(t)$, т. е. $\theta = 0$, эта формула переходит в (11.3.23).

Предположим, что фаза θ случайно и медленно изменяется с известной плотностью вероятности $W(\theta)$ на интервале $(-\pi, \pi)$. В данном случае помехоустойчивость системы можно характеризовать средним значением вероятности общей ошибки

$$\langle P_e(\theta) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} P_e(\theta) W(\theta) d\theta = 1 - \int_{-\pi}^{\pi} \Phi \left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}} \cos \theta \right) W(\theta) d\theta. \quad (11.5.8)$$

Применим эту формулу к двум случаям, представляющим практический интерес.

Пусть опорное напряжение $s_0(t)$ формируется из принятой сиgnал $\xi(t)$ последовательности фазоманипулированных радиоимпульсов и белого шума схемой, состоящей из устройства снятия фазовой манипуляции и высокодобротного колебательного контура (рис. 11.17), который осуществляет фильтрацию немодулированного гармонического колебания частоты ω .

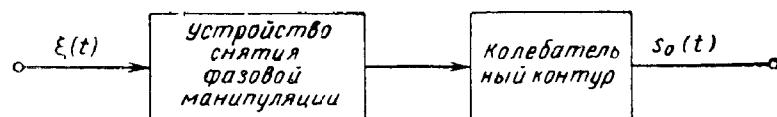


Рис. 11.17. Схема формирования опорного сигнала при помощи колебательного контура.

В данном случае опорное напряжение $s_0(t)$ представляет собой ширгармонический случайный процесс, плотность вероятности случайной фазы которого определяется формулой (7.6.1):

$$W(\theta) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2} a^2} \times \left[1 + \sqrt{2\pi} a \cos \theta \Phi(a \cos \theta) e^{\frac{1}{2} a^2 \cos^2 \theta} \right], \quad -\pi \leq \theta \leq \pi. \quad (11.5.9)$$

где $a = k_1 \sqrt{2E/N_0}$ — отношение сигнал/шум на выходе контура; k_1 — коэффициент, зависящий от фильтрующих свойств контура.

Подставив выражение (11.5.9) в формулу (11.5.8), получим

$$\begin{aligned} \langle P_e(\theta) \rangle &= 1 - \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2} a^2} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi \left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}} \cos \theta \right) \times \\ &\quad \times \left[1 + \sqrt{2\pi} a \cos \theta \Phi(a \cos \theta) e^{\frac{1}{2} a^2 \cos^2 \theta} \right] d\theta. \quad (11.5.10) \end{aligned}$$

Интеграл, входящий в (11.5.10), элементарно вычисляется при $a = \sqrt{2E/N_0}$. В этом случае найдем

$$\langle P_e(\theta) \rangle = \frac{1}{2} \exp \left(-\frac{E}{N_0} \right). \quad (11.5.11)$$

Результаты численного интегрирования (11.5.10) для нескольких значений коэффициента фильтрации k_1 приведены на рис. 11.18. При увеличении коэффициента фильтрации k_1 помехоустойчивость уменьшается, однако при этом увеличивается длительность процесса гашения.

2. Предположим, что опорный сигнал формируется фазовой автоподстройкой частоты. В данном случае

$$s_0(t) = U_m \cos(\omega t + \theta),$$

где θ — случайная разность фаз.

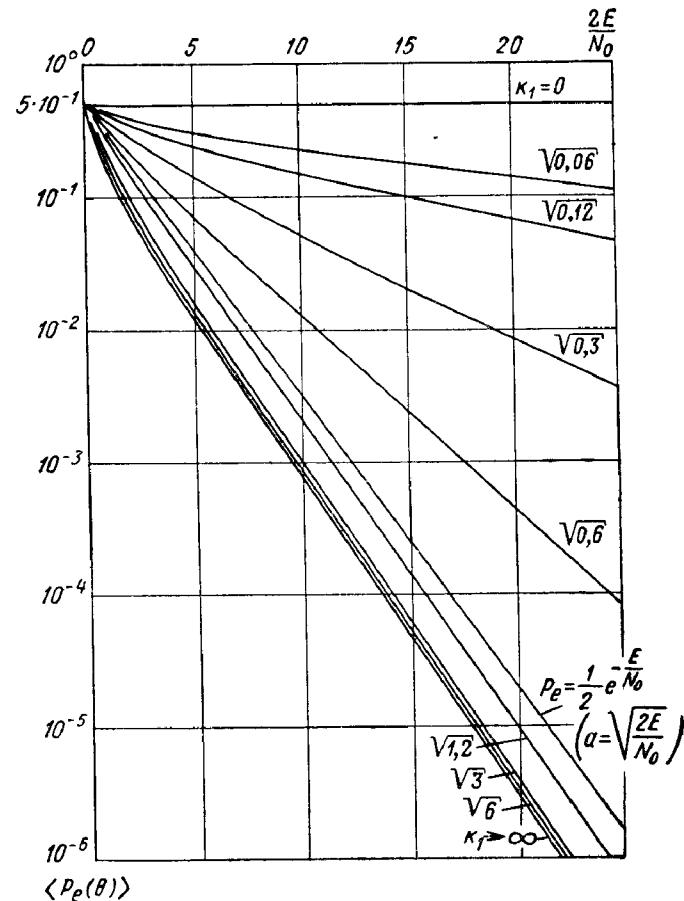


Рис. 11.18. Зависимость вероятности ошибки от отношения сигнал/шум при формировании опорного сигнала колебательным контуром.

В § 3 гл. 8 показано, что в отсутствие начальной расстройки плотность вероятности для θ имеет вид

$$W(\theta) = \frac{1}{2\pi I_0(D)} e^{D \cos \theta}, \quad -\pi < \theta \leq \pi, \quad (11.5.12)$$

где D — параметр, зависящий от отношения сигнал/шум на входе фазовой автоподстройки частоты.

Подставив (11.5.12) в формулу (11.5.8), получим

$$\langle P_e(\theta) \rangle = 1 - \frac{1}{2\pi I_0(D)} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}} \cos \theta\right) e^{D \cos \theta} d\theta. \quad (11.5.13)$$

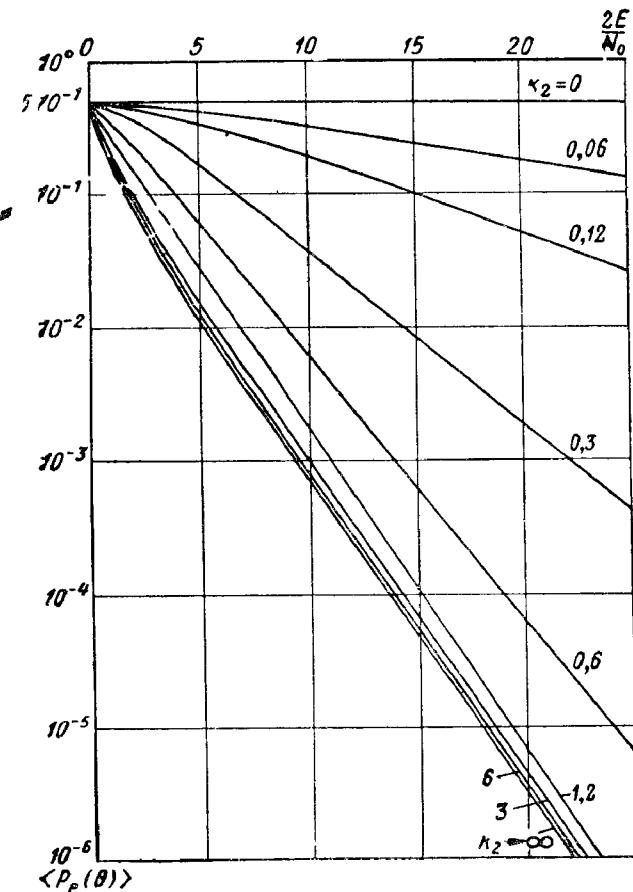


Рис. 11.19. Зависимость вероятности ошибки от отношения сигнал/шум при формировании опорного сигнала фазовой автоподстройкой частоты.

Результаты численного интегрирования (11.5.13) представлены на рис. 11.19. При расчетах принималось

$$D = k_2 \frac{2E}{N_0}, \quad (11.5.14)$$

где k_2 — коэффициент, характеризующий фильтрующие свойства фазовой автоподстройки.

Как и в предыдущем случае, помехоустойчивость повышается с увеличением коэффициента фильтрации k_2 .

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Котельников В. А. Теория потенциальной помехоустойчивости. Госэнергоиздат, 1956
- 2 Пороговые сигналы. Пер. с англ. под ред. А. П. Сиверса. Изд-во «Советское радио», 1952
- 3 Крамер Г. Математические методы статистики. Изд-во иностранной литературы, 1948
4. Питерсон В., Бердсал Т., Фокс В. Теория обнаружения сигналов. Пер. с англ. Теория информации и ее приложения. Сборник переводов под ред. А. А. Харкевича. Физматгиз, 1959.
5. Вальд А. Последовательный анализ. Пер. с англ. Физматгиз, 1960.
- 6 Башаринов А. Е., Флейшман Б. С. Методы статистического последовательного анализа и их приложения. Изд-во «Советское радио», 1962
7. Maccum J. I. A statistical theory of target detection by pulsed radar. Trans IRE, 1960, IT-6, № 2
- 8 Барк Л. С., Большев Л. Н., Кузнецов П. И., Чerenков А. П. Таблицы распределения Релея — Райса. ВЦ АН СССР, 1964
- 9 Ширман Я. Д., Голиков В. Н. Основы теории обнаружения радиолокационных сигналов и измерения их параметров. Изд-во «Советское радио», 1963
10. Tugn G. L. Error probabilities for binary symmetric ideal reception through nonselective slow fading and noise. Proc IRE, 1958, № 9.
11. Heiström C. W. The resolution of signals in white gaussian noise. Proc IRE, 1955, № 9
- 12 Хелстром К. Статистическая теория обнаружения сигналов. Пер. с англ. Изд-во иностранной литературы, 1963.
- 13 Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию радиосвязи. Пер. с англ., т 2 Изд-во «Советское радио», 1962
14. Bellio R. Some results on the problem of discriminating between two gaussian processes. Trans IRE, 1961, IT-7, № 4
15. Горянинов В. Т. Помехоустойчивость систем фазовой радиотелеграфии с учетом флюктуаций фазы опорного колебания. Сборник докладов XXII всесоюзной научной сессии НТОРиЭ им. А. С. Попова, 1966.
16. Selin I. The sequential estimation and detection of signals in normal noise. Information and control, 1964, № 4, 1965, № 1
17. Viterbi A. J. The effect of sequential decision feedback on communication over gaussian channel. Information and control, 1965, № 1.

Глава 12

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ РАДИОСИГНАЛА

§ 1 ХАРАКТЕРИСТИКИ ОЦЕНКИ И МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРА

В простейшем случае, когда оценивается один параметр сигнала заданной формы, задача ставится следующим образом. Пусть принятное на интервале $(0, T)$ колебание $\xi(t)$ представляет сумму сигнала $s(t, \lambda)$, зависящего от одного неизвестного параметра λ , и белого шума $n(t)$:

$$\xi(t) = s(t, \lambda) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (12.1.1)$$

Предполагается, что параметр λ является постоянным на интервале наблюдения $(0, T)$, т. е. не изменяется во времени, и известна априорная плотность вероятности этого параметра $W_{pr}(\lambda)$. По принятому колебанию $\xi(t)$ нужно решить наилучшим образом, какое именно значение из интервала возможных значений имеет параметр λ .

Из-за наличия шума $n(t)$ и случайного характера параметра λ реализация $\xi(t)$ представляет собой случайный процесс. Поэтому нельзя получить точное значение параметра λ , а можно лишь указать приближенную оценку.

Указать оценку — это значит каждой возможной реализации $\xi(t)$ на входе приемного устройства — измерителя поставить в соответствие некоторое значение λ^* из интервала возможных значений λ , т. е. сформировать некоторый функционал $\lambda^* = f[\xi(t)]$, называемый оценкой.

Пусть в принятой реализации $\xi(t)$ параметр λ имеет значение λ_0 . Для случайного характера оценку характеризуют условной плотностью вероятности $P(\lambda^* | \lambda_0)$. Вид плотности вероятности $P(\lambda^* | \lambda_0)$, имеющей вид функции $f[\xi(t)]$, определяет качество построенной оценки. Естественно стремиться подобрать такую функцию f , чтобы плотность вероятности $P(\lambda^* | \lambda_0)$ была как можно теснее сгруппирована вокруг λ_0 .

пирована около значения λ_0 . Если плотность вероятности имеет достаточно «хороший» вид, а именно, имеет одну вершину и почти симметрична, то в качестве количественных характеристик оценки целесообразно использовать величины

$$m(\lambda^*|\lambda_0) = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda^*) P(\lambda^*|\lambda_0) d\lambda^*, \quad (12.1.2)$$

$$\sigma^2(\lambda^*|\lambda_0) = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda^*)^2 P(\lambda^*|\lambda_0) d\lambda^*. \quad (12.1.3)$$

Величина $m(\lambda^*|\lambda_0)$ характеризует разность между оценкой λ^* и истинным значением параметра λ_0 , и поэтому ее можно назвать смещением. Величина $\sigma^2(\lambda^*|\lambda_0)$ определяет степень разброса (рассения) значений оценки λ^* относительно λ_0 . Конечно, всегда желательно построить оценку с нулевым смещением и минимальным рассеянием.

Величины $m(\lambda^*|\lambda_0)$ и $\sigma^2(\lambda^*|\lambda_0)$ не могут быть использованы как полные характеристики качества оценки. При определении таких характеристик нужно учесть, что в соответствии с априорным распределением $W_{pr}(\lambda)$ одни значения параметра λ встречаются чаще, чем другие; для редко встречающихся значений можно допустить большие смещения и рассеяния, чем для часто встречающихся значений.

В связи с этим можно ввести средние (по априорной вероятности) смещение и рассеяние:

$$\langle \lambda^* \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} m(\lambda^*|\lambda_0) W_{pr}(\lambda_0) d\lambda_0, \quad (12.1.4)$$

$$\sigma_{\lambda}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2(\lambda^*|\lambda_0) W_{pr}(\lambda_0) d\lambda_0. \quad (12.1.5)$$

Среднее смещение $\langle \lambda^* \rangle$ характеризует величину систематической погрешности результата измерения параметра, а среднеквадратичное значение — величину случайной погрешности.

Приведем теперь несколько определений. Оценка называется несмещенной, если среднее смещение равно нулю ($\langle \lambda^* \rangle = 0$), и смещенной — в противоположном случае. Оценка называется эффективной, если дисперсия σ_{λ}^2 для данной оценки меньше, чем для любой другой возможной оценки.

Один из методов нахождения оценки, т. е. выбора функции $f[\xi(t)] = \lambda^*$, состоит в том, что в качестве критерия оптимальности оценки используется требование получения эффективной оценки. При этом функция $f[\xi(t)]$ подбирается из условия минимума выражения (12.1.5).

В § 4 гл. 10 отмечалось, что вся информация об интересующем нас параметре содержится в апостериорной плотности вероятности $W_{ps}(\lambda)$. На основании анализа апостериорного распределения принимается то или иное решение об оцениваемом параметре. В математической статистике известно несколько правил (критерии), на основе которых делается оценка параметра. Укажем здесь сущность трех методов оценки параметра [1,2]:

- 1) оценка по минимуму среднеквадратичной погрешности;
- 2) оценка по максимуму апостериорной вероятности;
- 3) оценка по максимуму функции (функционала) правдоподобия.

1. В соответствии с критерием минимума среднеквадратичной ошибки минимизируется по λ^* выражение

$$\int_{\Lambda} (\lambda - \lambda^*)^2 W_{ps}(\lambda) d\lambda = \min. \quad (12.1.6)$$

Приравнивая производную дисперсии оценки по λ^* нулю ($\frac{d\sigma_{\lambda}^2}{d\lambda^*} = 0$ при $\frac{d^2\sigma_{\lambda}^2}{d\lambda^{*2}} > 0$), получаем, что в качестве оценки необходимо взять среднее значение (центр тяжести) апостериорного распределения

$$\lambda^* = \int_{\Lambda} \lambda W_{ps}(\lambda) d\lambda. \quad (12.1.7)$$

2. В дальнейшем нас в основном будет интересовать случай больших отношений сигнал/шум. Напомним (см. § 4 гл. 10), что при больших отношениях сигнал/шум апостериорная плотность вероятности имеет наибольший максимум в окрестности истинного значения параметра с вероятностью, близкой к единице. Это обстоятельство указывает, что в качестве оценки целесообразно взять значение $\lambda^* = \lambda_m$, которое обращает в максимум апостериорное распределение $W_{ps}(\lambda)$. Такой метод построения оценки называется методом максимальной апостериорной вероятности.

Важным достоинством метода максимальной апостериорной вероятности (так же, как и рассматриваемого дальше метода максимума функции правдоподобия) является то, что точка максимума не меняется при произвольном взаимно однозначном преобразовании апостериорного распределения. Поэтому в качестве оценки часто удобно брать тот корень уравнения

$$\frac{d}{d\lambda} \ln W_{ps}(\lambda) = 0, \quad (12.1.8)$$

который явным образом зависит от $\xi(t)$.

3. Во многих практических случаях априорная плотность вероятности $W_{pr}(\lambda)$ оказывается неизвестной и ее полагают достаточно равномерно распределенной на некотором интервале (c, d) . При этом координата λ_m максимума апостериорной вероятности будет

совпадать с соответствующей координатой функции (функционала) правдоподобия. В этом случае метод максимума апостериорной вероятности переходит в метод максимального правдоподобия. Здесь в качестве оценки берется тот корень уравнения

$$\frac{d}{d\lambda} \ln F(\lambda) = 0, \quad (12.1.9)$$

который явно зависит от $\xi(t)$.

Можно показать, что оценка любого параметра сигнала, принимаемого на фоне нормального шума, по методу максимального правдоподобия асимптотически эффективна, т. е. при большом отношении сигнал/шум оценка имеет минимально возможную дисперсию. Кроме этого, при большом отношении сигнал/шум все три метода оценки асимптотически эквивалентны [3].

Укажем, что параметры сигнала можно разделить на энергетические (например, амплитуда) и неэнергетические (время запаздывания, частота, фаза). Энергетическими называются те параметры сигнала λ , от которых зависит энергия сигнала $E = E(\lambda)$. В дальнейшем раздельно рассмотрим оценку амплитуды радиоимпульса, как наиболее интересного для практических приложений энергетического параметра, и оценку неэнергетических параметров.

§ 2. ОЦЕНКА АМПЛИТУДЫ СИГНАЛА

Пусть на вход приемного устройства поступает сумма полезного сигнала $s(t, a)$ с неизвестной амплитудой a , которая подлежит оценке, и белого шума $n(t)$

$$\xi(t) = s(t, a) + n(t). \quad (12.2.1)$$

В общем случае полезный сигнал $s(t, a)$ может представлять собой радиоимпульс вида

$$as_1(t) = s(t, a) = af(t) \cos[\omega t + \psi(t) - \theta], \quad 0 \leq t \leq T, \quad (12.2.2)$$

где $f(t)$ и $\psi(t)$ — законы амплитудной и фазовой модуляции;

ω — несущая частота;

θ — начальная фаза.

Рассмотрим оценку амплитуды $\lambda = a$ сигнала по максимуму функции правдоподобия раздельно для известного сигнала и для сигнала со случайной начальной фазой, равномерно распределенной на интервале $(-\pi, \pi)$.

1. **Оценка амплитуды детерминированного сигнала.** Согласно (10.3.24) функционал правдоподобия параметра a в данном случае равен

$$F(a) = \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [\xi(t) - as_1(t)]^2 dt \right\}. \quad (12.2.3)$$

Поэтому уравнение правдоподобия (12.1.9) принимает вид

$$\frac{d}{da} \ln F(a) = \frac{2}{N_0} \int_0^T [\xi(t) - as_1(t)] s_1(t) dt = 0. \quad (12.2.4)$$

Это уравнение имеет решение

$$a^* = \int_0^T \xi(t) s_1(t) dt / \int_0^T s_1^2(t) dt, \quad (12.2.5)$$

зависящее от $\xi(t)$, которое и является оценкой по максимуму функции правдоподобия.

Формула (12.2.5) вскрывает структуру оптимального приемного устройства, решающего упрощенное выражение для оценки неизвестной амплитуды. Основной операцией является линейная операция интегрирования суммы сигнала и шума (12.2.1) с весом $s_1(t)$. Эту операцию можно выполнить при помощи соответствующего линейного фильтра или коррелометра.

Найдем смещение оценки амплитуды, считая, что истинное значение амплитуды равно a_0 . Имеем

$$\langle a^* \rangle = \frac{\int_0^T [a_0 s_1(t) + \langle n(t) \rangle] s_1(t) dt}{\int_0^T s_1^2(t) dt} = a_0, \quad (12.2.6)$$

т. е. оценка несмещенная.

Дисперсия оценки определяется выражением

$$\sigma_a^2 = \langle (a^* - a_0)^2 \rangle = \frac{\int_0^T \int_0^T \langle n(t_1) n(t_2) \rangle s_1(t_1) s_1(t_2) dt_1 dt_2}{\left[\int_0^T s_1^2(t) dt \right]^2}. \quad (12.2.7)$$

Подставив сюда функцию корреляции белого шума из (10.2.13), получим

$$\sigma_a^2 = \frac{N_0}{2 \int_0^T s_1^2(t) dt} = \frac{N_0}{a}, \quad (12.2.8)$$

согласно (10.8.4)

$$a = 2 \int_0^T s_1^2(t) dt. \quad (12.2.9)$$

Таким образом, дисперсия оценки амплитуды полностью известного сигнала прямо пропорциональна мощности шума на единицу полосы частот и обратно пропорциональна удвоенной энергии сигнала при единичной амплитуде.

В качестве характеристики оценки амплитуды часто рассматривают относительную дисперсию оценки амплитуды

$$\frac{\sigma_a^2}{a_0^2} = \frac{1}{2E_0/N_0}, \quad (12.2.10)$$

где

$$E_0 = a_0^2 \int_0^T s_1^2(t) dt \quad (12.2.11)$$

— энергия принятого сигнала.

Из (12.2.10) видно, что относительная дисперсия оценки амплитуды детерминированного сигнала обратно пропорциональна удвоенному отношению энергии сигнала к спектральной плотности шума.

2. Оценка амплитуды радиосигнала со случайной начальной фазой В соответствии с (10.8.14) функционал правдоподобия амплитуды при приеме сигнала со случайной начальной фазой имеет вид

$$F(a) = \text{const} e^{-\alpha a^2/2N_0} I_0\left(\frac{2aZ}{N_0}\right). \quad (12.2.12)$$

Подставив это выражение в формулу (12.1.9), для оценки a^* получим уравнение

$$\left[-\frac{\alpha a^*}{N_0} I_0\left(\frac{2a^*Z}{N_0}\right) + \frac{2Z}{N_0} I_1\left(\frac{2a^*Z}{N_0}\right) \right] e^{-\frac{\alpha a^{*2}}{N_0}} = 0, \quad (12.2.13)$$

так как $I_0(x) = I_1(x)$. Отсюда находим

$$a^* = \frac{2Z}{\alpha} \frac{I_1(2a^*Z/N_0)}{I_0(2a^*Z/N_0)}. \quad (12.2.14)$$

Множитель $I_1(x)/I_0(x)$ нелинейно зависит от аргумента и изменяется от 0 до 1 при изменении x от 0 до ∞ , причем при $x \gg 1$ $I_1(x)/I_0(x) \approx 1$. Поэтому для больших отношений сигнал/шум $(2aZ/N_0 \gg 1)$ справедливо равенство

$$a^* \approx \frac{2Z}{\alpha}. \quad (12.2.15)$$

Следовательно, при больших отношениях сигнал/шум оценка амплитуды радиоимпульса со случайной начальной фазой линейно зависит от огибающей. Эта зависимость нарушается при малых отношениях сигнал/шум.

Если воспользоваться асимптотическим представлением (7.5.5), то для больших отношений сигнал/шум априорную вероятность при равномерном априорном распределении амплитуды в интервале $[0, N_0]$ можно представить в виде

$$W_{ps}(a) = \text{const} \left(\frac{2aZ}{N_0}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{\alpha a^2}{N_0} - \frac{2aZ}{N_0}\right)} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2}} e^{-\frac{(a-a^*)^2}{2\sigma_a^2}}, \quad (12.2.16)$$

где σ_a^2 — дисперсия оценки, равная

$$\sigma_a^2 = \frac{N_0}{\alpha}. \quad (12.2.17)$$

Из сравнения формулы (12.2.17) с формулой (12.2.8) можно сделать вывод, что дисперсии оценок амплитуды полностью известного радиоимпульса и радиоимпульса со случайной начальной фазой при большом отношении сигнал/шум ($2E/N_0 \gg 1$) одинаковы.

Для прямоугольного радиоимпульса длительностью τ_i , когда

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \tau_i, \\ 0, & t < 0, t > \tau_i, \end{cases} \quad (12.2.18)$$

на основании формулы (12.2.17) получим

$$\sigma_a^2 = \frac{N_0}{\tau_i}. \quad (12.2.19)$$

Дисперсия оценки амплитуды прямоугольного радиоимпульса прямопропорциональна спектральной плотности шума и обратно пропорциональна длительности импульса.

Если радиоимпульс имеет гауссову форму, т. е.

$$f(t) = \exp\left[-2,8 \frac{t^2}{\tau_i^2}\right], \quad (12.2.20)$$

где τ_i — длительность импульса на уровне 0,5 от максимального отклонения, то из формулы (12.2.17) получим

$$\sigma_a^2 = \frac{N_0}{\tau_i} \sqrt{\frac{\pi}{5,6}}. \quad (12.2.21)$$

3. ОЦЕНКА НЕЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ РАДИОИМПУЛЬСА

Рассмотрим более подробно методику оценки одного неэнергетического параметра сигнала $s(t, \lambda)$ по методу максимума функции правдоподобия. Сначала исследуем оценку параметра полностью известного сигнала за исключением оцениваемого параметра λ , а затем полученные результаты обобщим на оценку параметра радиоимпульса со случайной начальной фазой.

1. **Оценка параметра известного сигнала.** Воспользовавшись формулой (10.3.24) и повторив рассуждения, приведшие к формуле (10.4.4), для функционала правдоподобия параметра λ можем написать выражение

$$F(\lambda) = \text{const} \exp \left[-\frac{E}{N_0} + q(\lambda) \right] = \text{const} \exp [q(\lambda)], \quad (12.3.1)$$

где

$$q(\lambda) = \frac{2}{N_0} \int_0^T \xi(t) s(t, \lambda) dt \quad (12.3.2)$$

— логарифм функционала правдоподобия, зависящий от оценки.

На основании формулы (12.3.2) нетрудно получить общую структурную схему оптимального измерителя одного параметра сигнала по методу максимума функционала (функции) правдоподобия.

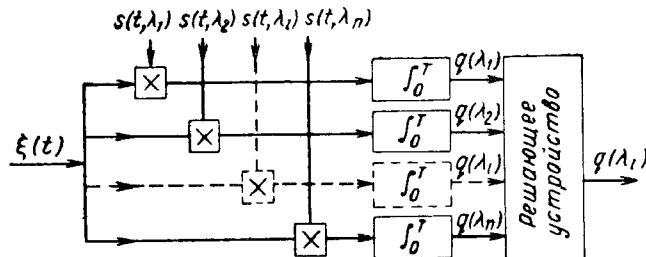


Рис. 12.1. Общая структурная схема оптимального измерителя одного параметра сигнала известной формы.

Структурная схема устройства, позволяющего получить функцию $q(\lambda)$ для нескольких фиксированных значений параметра λ_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$, приведена на рис. 12.1.

Поступающая на вход измерителя аддитивная смесь сигнала и шума $\xi(t)$ перемножается с сигналом $s(t, \lambda)$ при всевозможных значениях оцениваемого параметра из априорного интервала (c, d) и затем интегрируется в течение времени T . Результаты интегрирования в отдельных каналах подаются на решающее устройство, которое сравнивает значения $q(\lambda_i)$ в отдельных каналах и выдает на выходе номер канала, в котором значение $q(\lambda_i)$ максимально. Число каналов n зависит от требуемой точности измерения параметра. Применительно к конкретным частным случаям общая схема рис. 12.1 может быть уточнена (см. § 7).

Введем параметр

$$\varepsilon = \left[\frac{2}{N_0} \int_0^T s^2(t) dt \right]^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{N_0}{2E}}, \quad (12.3.3)$$

а обратно пропорциональный корню квадратному из отношения сигнал/шум.

Тогда функцию $q(\lambda)$ можно представить в следующем виде:

$$q(\lambda) = \frac{1}{\varepsilon^2} [S(\lambda - \lambda_0) + \varepsilon N(\lambda)], \quad (12.3.4)$$

где

$$S(\lambda - \lambda_0) = \left(\int_0^T s^2(t, \lambda) dt \right)^{-1} \int_0^T s(t, \lambda_0) s(t, \lambda) dt, \\ N(\lambda) = \left(\frac{N_0}{2} \int_0^T s^2(t, \lambda) dt \right)^{-1/2} \int_0^T n(t) s(t, \lambda) dt. \quad (12.3.5)$$

Введенные функции $S(\lambda - \lambda_0)$ и $N(\lambda)$ являются преобразованными «сигналом» и «шумом» на выходе оптимального корреляционного приемника. Эти функции обладают важными свойствами.

1. $S(\lambda) = S(\lambda - \lambda_0)$ — нормированная автокорреляционная функция входного полезного сигнала $s(t, \lambda)$ по оцениваемому параметру λ ; она симметрична относительно $\lambda = \lambda_0$ и зависит только от абсолютного значения разности $|\lambda - \lambda_0|$, причем $S(\lambda - \lambda_0) = 1$ при $\lambda = \lambda_0$.

2. $N(\lambda)$ — нормированный случайный процесс, зависящий от параметра λ . Поскольку $\langle n(t) \rangle = 0$, то

$$\langle N(\lambda) \rangle = \frac{\int_0^T \langle n(t) \rangle s(t, \lambda) dt}{\left[\frac{N_0}{2} \int_0^T s^2(t, \lambda) dt \right]^{1/2}} = 0. \quad (12.3.6)$$

Функция корреляции случайного процесса $N(\lambda)$ равна

$$\langle N(\lambda_1) N(\lambda_2) \rangle = \frac{2}{N_0} \frac{\int_0^T \int_0^T \langle n(t_1) n(t_2) \rangle s(t_1, \lambda_1) s(t_2, \lambda_2) dt_1 dt_2}{\int_0^T s^2(t, \lambda) dt} = \\ = \left(\int_0^T s^2(t, \lambda) dt \right)^{-1} \int_0^T s(t, \lambda_1) s(t, \lambda_2) dt = S(\lambda_1 - \lambda_2). \quad (12.3.7)$$

Таким образом, шум на выходе оптимального приемника имеет нормальное распределение с нулевым средним значением и функцией корреляции, совпадающей по форме с нормированной автокорреляционной функцией полезного сигнала. Этот шум $N(\lambda)$ гауссовлен, так как его функция корреляции зависит лишь от абсолютного значения разности $\lambda_1 - \lambda_2$.

Определим ошибки оценки параметра λ по максимуму $q(\lambda)$. При этом ограничимся рассмотрением случая, когда отношение сигнал/шум велико:

$$\frac{2E}{N_0} \gg 1. \quad (12.3.8)$$

В данном случае максимум функции $q(\lambda)$ или функционала правдоподобия (а при равномерном априорном распределении и апостериорной вероятности) будет расположен вблизи истинного значения параметра λ .

Из свойств логарифма функции правдоподобия $q(\lambda)$ следует, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ (отсутствие шума) положение максимума функции $q(\lambda)$ совпадает с положением максимума функции $S(\lambda - \lambda_0)$, т. е. с истинным значением оцениваемого параметра $\lambda = \lambda_0$. Это означает, что в отсутствие шума оценка по максимуму функции правдоподобия всегда совпадает с истинным значением параметра λ_0 .

В реальных задачах $\varepsilon \neq 0$. Однако при малых значениях $\varepsilon \ll 1$ (ε — малый параметр) оценку λ_m можно представить в виде ряда по степеням малого параметра ε :

$$\lambda_m = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_{10} + \varepsilon^2 \lambda_{20} + \varepsilon^3 \lambda_{30} + \dots, \quad (12.3.9)$$

где в качестве нулевого приближения выбирается λ_0 , а поправки к следующим приближениям ($\lambda_{10}, \lambda_{20}, \lambda_{30}$ и т. д.) необходимо определить. Ради простоты ограничимся первым приближением, т. е. положим

$$\lambda_m = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_{10}. \quad (12.3.10)$$

Для нахождения λ_{10} разложим правую часть уравнения (12.3.4) в ряд Тейлора в окрестности $\lambda = \lambda_0$ и учтем, что в точке максимума $\lambda = \lambda_m$ должно выполняться равенство

$$\left[\frac{dq(\lambda)}{d\lambda} \right]_{\lambda_m} = \frac{1}{\varepsilon^2} \left[\frac{dS(\lambda)}{d\lambda} + \varepsilon \frac{d^2N(\lambda)}{d\lambda^2} \right]_{\lambda_m} = 0. \quad (12.3.11)$$

Так как $\varepsilon \neq 0$, то, ограничиваясь двумя первыми членами разложения, имеем

$$\left[\frac{dS(\lambda)}{d\lambda} + \varepsilon \frac{dN(\lambda)}{d\lambda} \right]_{\lambda_0} + \left[\frac{d^2S(\lambda)}{d\lambda^2} + \varepsilon \frac{d^2N(\lambda)}{d\lambda^2} \right]_{\lambda_0} \varepsilon \lambda_{10} = 0. \quad (12.3.12)$$

Приравнивая члены с ε в первой степени, получим

$$\lambda_{10} = - \left[\frac{\frac{d}{d\lambda} N(\lambda)}{\frac{d^2}{d\lambda^2} S(\lambda)} \right]_{\lambda_0}. \quad (12.3.13)$$

Статистические характеристики величины λ_{10} определяют ошибки оценки

$$\Delta\lambda = \lambda_m - \lambda_0 = \varepsilon \lambda_{10}. \quad (12.3.14)$$

Так как согласно (12.3.6) $\langle N(\lambda) \rangle = 0$, то

$$\langle \Delta\lambda \rangle = \varepsilon \langle \lambda_{10} \rangle = - \left[\frac{\frac{d}{d\lambda} \langle N(\lambda) \rangle}{\frac{d^2S(\lambda)}{d\lambda^2}} \right]_{\lambda_0} = 0. \quad (12.3.15)$$

Следовательно, оценка параметра λ по максимуму функции правдоподобия при больших отношениях сигнал/шум несмешанная.

Дисперсия оценки параметра λ определяется выражением

$$\sigma_\lambda^2 = \langle \Delta\lambda^2 \rangle = \varepsilon^2 \langle \lambda_{10}^2 \rangle = \left\{ \frac{\frac{\partial^2}{\partial\lambda_1 \partial\lambda_2} \langle N(\lambda_1) N(\lambda_2) \rangle}{2E \left[\frac{d^2S(\lambda)}{d\lambda^2} \right]^2} \right\}_{\lambda_0}. \quad (12.3.16)$$

Путем соотношение (12.3.7), формула (12.3.16) преобразуется в

$$\sigma_\lambda^2 = \frac{1}{2E/N_0} \left[\frac{\frac{\partial^2}{\partial\lambda_1 \partial\lambda_2} S(\lambda_1 - \lambda_2)}{S''(\lambda)} \right]_{\lambda_0} = - \frac{1}{(2E/N_0) S''(\lambda_0)}. \quad (12.3.17)$$

Таким образом, дисперсия оценки параметра обратно пропорциональна отношению сигнал/шум и кривизне нормированной автокорреляционной функции полезного сигнала по оцениваемому параметру в ее максимуме.

Из первого равенства (12.3.5) и формулы (12.3.2) следует, что

$$\frac{2E}{N_0} S(\lambda) = q_s(\lambda) = \frac{2}{N_0} \int_0^T s(t, \lambda_0) s(t, \lambda) dt. \quad (12.3.18)$$

Поэтому формулу (12.3.17) можно записать иначе

$$\sigma_\lambda^2 = -1/q_s''(\lambda_0). \quad (12.3.19)$$

Следовательно, дисперсия оценки параметра λ обратно пропорциональна кривизне функции автокорреляции сигнала на выходе приемника в ее максимуме.

В качестве примера определим дисперсию оценки фазы радиоволны (12.2.2). По формуле (12.3.18) функция $q_s(\theta)$ равна

$$q_s(\theta) = \frac{2a^2}{N_0} \int_0^T f^2(t) \cos[\omega t + \psi(t) - \theta_0] \cos[\omega t + \psi(t) - \theta] dt \approx \frac{2E}{N_0} \cos(\theta - \theta_0). \quad (12.3.20)$$

Отсюда находим $q_s(\theta_0) = -2E/N_0$. Поэтому

$$\sigma_\theta^2 = N_0/2E. \quad (12.3.21)$$

Дисперсия оценки фазы обратно пропорциональна отношению сигнал/шум и не зависит от вида амплитудной и фазовой модуляции.

2. Оценка параметра радиосигнала со случайной начальной фазой. При приеме на фоне белого шума $n(t)$ радиосигнала $s(t, \lambda)$ со случайной начальной фазой, равномерно распределенной на интервале $(-\pi, \pi)$, функционал правдоподобия параметра λ согласно (10.8.14) может быть представлен в виде

$$F(\lambda) = \text{const} I_0[q(\lambda)], \quad (12.3.22)$$

где

$$q(\lambda) = \frac{2}{N_0} \left| \int_0^T \xi(t) s(t, \lambda) dt \right| \quad (12.3.23)$$

— огибающая (модуль) напряжения на выходе согласованного линейного фильтра.

Уравнение правдоподобия в соответствии с (12.1.9) определяется выражением

$$\left[\frac{d}{d\lambda} \ln F(\lambda) \right]_{\lambda_m} = \left\{ \frac{I_1[q(\lambda)]}{I_0[q(\lambda)]} \cdot \frac{dq(\lambda)}{d\lambda} \right\}_{\lambda_m} = 0. \quad (12.3.24)$$

Так как $q(\lambda_m) \neq 0$ и функции Бесселя $I_0[q(\lambda_m)]$ и $I_1[q(\lambda_m)]$ также не равны нулю, то уравнение правдоподобия упрощается и принимает вид

$$\left[\frac{dq(\lambda)}{d\lambda} \right]_{\lambda_m} = 0. \quad (12.3.25)$$

Из последнего выражения видно, что для оценки параметра сигнала со случайной начальной фазой оптимальной операцией является образование функции $q(\lambda)$ согласно (12.3.23) или любой монотонной от нее функции.

Итак, при приеме радиосигнала со случайной начальной фазой равномерно распределенной на интервале $(-\pi, \pi)$, в дополнении к структурной схеме для оценки параметра полностью известного сигнала (рис. 12.1), в каждом из параллельных каналов должны стоять амплитудный детектор огибающей с произвольной монотонной характеристикой.

Так же, как и при оценке параметра полностью известного сигнала, для больших отношений сигнал/шум, оценку можно искать в виде соответствующих приближений по малому параметру. Можно показать [4], что и в данном случае оценка параметра несмещенная,

дисперсия оценки по-прежнему определяется формулой (12.3.19), но теперь функция $q_s(\lambda)$ должна вычисляться по формуле

$$q_s(\lambda) = \frac{2}{N_0} \left| \int_0^T s(t, \lambda_0) s(t, \lambda) dt \right|. \quad (12.3.26)$$

Укажем, что если интересоваться вторым приближением оценки, то дисперсия оценки параметра сигнала оказывается равной [4].

$$\sigma_\lambda^2 = -\frac{1}{q_s''(\lambda_0)} \left[1 + \frac{q_s^{IV}(\lambda_0)}{q_s''^2(\lambda_0)} \right], \quad (12.3.27)$$

второе приближение имеет поправку по отношению к первому приближению, зависящую от отношения четвертой производной квадрату второй производной автокорреляционной функции по-известного сигнала в точке ее максимума.

Если вместо функции $q_s(\lambda)$ рассматривать нормированную функцию $S(\lambda)$, то поправка к первому приближению обратно пропорциональна отношению сигнал/шум и зависит также от четвертой и второй производных нормированных автокорреляционных функций известного сигнала в точке ее максимума.

Позложенный выше метод нахождения оценок при помощи малого параметра можно обобщить на случай совместных оценок двух параметров радиосигнала [5].

14. ДИСПЕРСИЯ ОЦЕНКИ ВРЕМЕННОГО ПОЛОЖЕНИЯ РАДИОИМПУЛЬСА СО СЛУЧАЙНОЙ НАЧАЛЬНОЙ ФАЗОЙ

Обычно применяемые на практике радиосигналы (12.2.2) являются узкополосными, т. е. их несущая частота ω_0 значительно превосходит ширину спектра. Для таких сигналов удобно использовать условное комплексное представление

$$s(t, \lambda) = aU(t, \lambda)e^{j(\omega_0 t + \varphi)}, \quad (12.4.1)$$

$U(t, \lambda)$ — комплексная функция, медленно изменяющаяся по сравнению с высокочастотным гармоническим колебанием частоты ω_0 ;

φ — результирующая начальная фаза.

В этом случае модуль автокорреляционной функции сигнала на выходе фильтра можно записать в виде

$$\left(\frac{2}{N_0} \left| \int_0^T s(t, \lambda_0) s(t, \lambda) dt \right| \right)^2 = \frac{a^2}{N_0} \int_0^T U^*(t, \lambda_0) U(t, \lambda) dt. \quad (12.4.2)$$

До сих пор оцениваемый неэнергетический параметр λ (за исключением оценки фазы) был лишен конкретного физического смысла. Между тем, конкретизация физического смысла параметра λ позволяет значительно упростить выражение (12.3.19) для дисперсии σ_λ^2 .

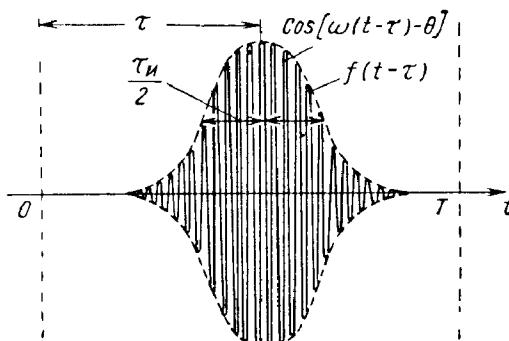


Рис. 12.2. Радиоимпульс.

Рассмотрим случай, когда оцениваемым параметром является временное положение τ радиоимпульса

$$s(t-\tau) = af(t-\tau) \cos[\omega_0(t-\tau) + \psi(t-\tau) - \theta], \quad 0 \leq t-\tau \leq T \quad (12.4.3)$$

Под τ будем понимать момент времени, соответствующий средине радиоимпульса, и под θ — начальную фазу в этот момент времени (рис. 12.2).

Комплексной огибающей сигнала (12.4.3)

$$U(t-\tau) = f(t-\tau) e^{j\psi(t-\tau)} \quad (12.4.4)$$

соответствует комплексный спектр

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (12.4.5)$$

Согласно (12.4.2) автокорреляционная функция сигнала $q_s(\tau)$ определяется выражением

$$q_s(\tau) = \frac{a^2}{N_0} \int_0^T U^*(t-\tau_0) U(t-\tau) dt, \quad (12.4.6)$$

а вторая производная ее в точке $\tau = \tau_0$ равна

$$q_s''(\tau_0) = \frac{a^2}{N_0} \int_0^T U^*(t-\tau_0) \left[\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} U(t-\tau) \right]_{\tau_0} dt. \quad (12.4.7)$$

Выразим $q_s''(\tau_0)$ через параметры комплексного спектра огибающей. Для этого воспользуемся преобразованием Фурье, обратным (12.4.5),

$$U(t-\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega(t-\tau)} dt \quad (12.4.8)$$

и учтем, что

$$U^*(t-\tau_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(j\Omega) e^{-j\Omega(t-\tau_0)} dt. \quad (12.4.9)$$

Инфильтрируя дважды равенство (12.4.8) по τ , получим

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} U(t-\tau) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 F(j\omega) e^{j\omega(t-\tau)} dt. \quad (12.4.10)$$

с учетом равенств (12.4.9) и (12.4.10) выражение (12.4.7) преобразуется к виду

$$q_s(\tau_0) = -\frac{a^2}{4\pi^2 N_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 F(j\omega) F^*(j\Omega) e^{-j(\omega-\Omega)\tau_0} d\omega d\Omega \int_0^T e^{j(\omega-\Omega)t} dt. \quad (12.4.11)$$

Так как по предположению радиоимпульс полностью расположен на интервале $(0, T)$, то значение внутреннего интеграла определяется формулой (П. 9). В результате интегрирования с дельта-функцией получим

$$q_s''(\tau_0) = -\frac{a^2}{2\pi N_0} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |F(j\omega)|^2 d\omega. \quad (12.4.12)$$

Определим ширину спектра огибающей радиоимпульса формулой

$$\beta^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |F(j\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega}. \quad (12.4.13)$$

На основании равенства Релея — Парсеваля имеем

$$\frac{1}{2\pi} a^2 \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \int_0^T s^2(t) dt = E, \quad (12.4.14)$$

где E — энергия сигнала.

С учетом последних двух соотношений можем написать

$$q_s''(\tau_0) = -\frac{2E}{N_0} \beta^2. \quad (12.4.15)$$

Подставив это выражение в (12.3.19), получаем окончательную формулу для дисперсии оценки временного положения радиоимпульса

$$\sigma_\tau^2 = \frac{1}{\beta^2 (2E/N_0)}. \quad (12.4.16)$$

Вычислим σ_τ^2 для радиоимпульсов прямоугольной и гауссовой форм без внутренней частотной модуляции ($\psi(t) = 0$). Напомним, что основная формула (12.3.19) справедлива в тех случаях, когда

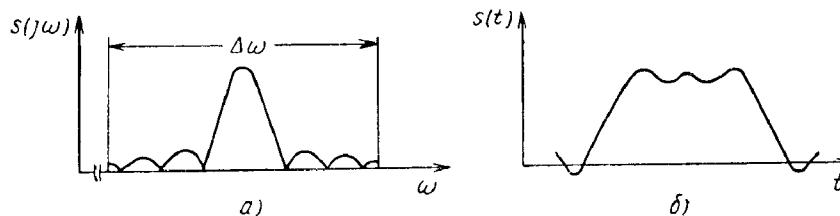


Рис. 12.3. Спектр прямоугольного радиоимпульса, ограниченного полосой $\Delta\omega$ (a), и огибающая соответствующего радиоимпульса (b).

сигнальная функция $q_s(\tau)$ является аналитической в окрестности τ_0 . Однако для прямоугольного радиоимпульса функция $q_s(\tau)$ при $\tau = \tau_0$ имеет излом (см. рис. 10.3). Поэтому к ней неприменимо разложение (12.3.12) и нельзя пользоваться формулой (12.3.19).

На практике импульсы не являются идеально прямоугольными, так как нулевое время нарастания и спада импульса требует бесконечно широкой полосы пропускания. Чтобы вычислить ошибку в определении времени запаздывания, которая получается для реального «прямоугольного» импульса, можно рассуждать так [6]. Будем считать спектр прямоугольного видеопульса

$$F(j\omega) = \tau_i \sin\left(\frac{\omega\tau_i}{2}\right) / \left(\frac{\omega\tau_i}{2}\right) \quad (12.4.17)$$

отличным от нуля только внутри полосы шириной $\Delta\omega$. Это эквивалентно тому, что прямоугольный импульс пропускается через идеальный фильтр с прямоугольной амплитудно-частотной характеристикой шириной $\Delta\omega$. Если $\Delta\omega\tau_i > 1$, то на выходе фильтра появится «сглаженный» импульс длительностью приблизительно равной τ_i , но с конечным наклоном переднего и заднего фронтов, и спектром, ограниченным полосой частот $\Delta\omega$. Такой прямоугольный импульс с ограниченным спектром показан на рис. 12.3. Для этого сглаженного импульса функция $q_s(\tau)$ оказывается непрерывной и можно

пользоваться формулой (12.3.19), только интегрирование в (12.4.13) нужно выполнять в пределах от $-\Delta\omega/2$ до $\Delta\omega/2$.

Подставив (12.4.17) в (12.4.13) и выполнив интегрирование, получим

$$\beta^2 = \frac{1}{\tau_i^2} \frac{(\Delta\omega\tau_i/2) - \sin(\Delta\omega\tau_i/2)}{\text{Si}(\Delta\omega\tau_i/2) + [\cos(\Delta\omega\tau_i/2) - 1]/(\Delta\omega\tau_i/2)}, \quad (12.4.18)$$

где $\text{Si}(z)$ — интегральный синус; $\text{Si}(z \rightarrow \infty) = \pi/2$.

При $\Delta\omega\tau_i > 1$ из формулы (12.4.18) получаем

$$\beta^2 \approx \Delta\omega/\pi\tau_i = 2\Delta f/\tau_i. \quad (12.4.19)$$

Расчеты, выполненные по формуле (12.4.18), показывают, что равенство (12.4.19) является достаточно хорошим приближением при значениях $\Delta\omega\tau_i$, встречающихся в практических задачах.

Следовательно, дисперсия оценки времени запаздывания для прямоугольного импульса длительностью τ_i , ограниченного по спектру полосой Δf , приближенно равна

$$\sigma_\tau^2 = \frac{\tau_i}{2\Delta f(2E/N_0)}. \quad (12.4.20)$$

Совладение этой формулы с результатом (9.2.10) показывает, что предельная точность измерения времени запаздывания радиоимпульса практически может быть реализована способом, рассмотренным в § 2 гл. 9.

Формально величину σ_τ^2 для идеально прямоугольного радиоимпульса можно вычислить другим способом [7]. В пренебрежении шумовой функцией $q_n(\tau)$ априорная плотность вероятности параметра τ на основании формул (10.4.6) и (10.4.12) равна

$$W_{ps}(\tau) = \text{const} \exp[q_s(\tau)] = \text{const} \exp\left[\frac{2E}{N_0}\left(1 - \frac{|\tau - \tau_0|}{\tau_i}\right)\right] = k \exp\left[-\frac{2E}{N_0} \cdot \frac{|\tau - \tau_0|}{\tau_i}\right], \quad |\tau - \tau_0| \leq \tau_i, \quad (12.4.21)$$

где $k = E/N_0\tau_i$.

При выполнении условия (12.3.8) можно положить

$$\sigma_\tau^2 = \int_{\tau_0 - \tau_i}^{\tau_0 + \tau_i} (\tau - \tau_0)^2 W_{ps}(\tau) d\tau = 2\tau_i^2/(2E/N_0)^2. \quad (12.4.22)$$

Вычисления по формуле (12.4.13) для радиоимпульса гауссовой формы (12.2.20) дают следующий результат:

$$\beta^2 = 2,8/\tau_i^2 = (\pi\Delta f)^2/1,4, \quad (12.4.23)$$

где Δf — ширина энергетического спектра импульса на уровне 0,5. Поэтому

$$\sigma_{\tau}^2 = \frac{\tau_n^2}{2,8(2E/N_0)} - \frac{1,4}{(\pi\Delta f)^2(2E/N_0)}. \quad (12.4.24)$$

Видно, что при фиксированной энергии точность измерения времени запаздывания радиоимпульса повышается с уменьшением длительности импульса.

§ 5. ДИСПЕРСИЯ ОЦЕНКИ СМЕЩЕНИЯ ЧАСТОТЫ РАДИОИМПУЛЬСА

Принимаемый полезный сигнал запишем в виде

$$s(t, \Omega) = a f(t) \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \psi(t) - \theta], \quad -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}, \quad (12.5.1)$$

где оцениваемый параметр Ω обычно представляет собой смещение несущей частоты из-за эффекта Доплера.

Комплексная огибающая радиосигнала (12.5.1) равна

$$U(t, \Omega) = f(t) e^{-j\Omega t + j\psi(t)} \quad (12.5.2)$$

Подставляя выражение (12.5.2) в формулу (12.4.2), имеем

$$q_s(\Omega) = \frac{a^2}{N_0} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) e^{j(\Omega_0 - \Omega)t} dt. \quad (12.5.3)$$

Отсюда находим вторую производную

$$q_s''(\Omega_0) = -\frac{a^2}{N_0} \int_{-T/2}^{T/2} t^2 f^2(t) dt. \quad (12.5.4)$$

Подставив в это выражение значение a^2 из соотношения

$$E = \frac{1}{2} a^2 \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt,$$

по формуле (12.3.19) получаем дисперсию оценки частоты $f = \Omega/2\pi$

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{4\pi^2} \sigma_{\Omega}^2 = \frac{1}{a^2(2E/N_0)}. \quad (12.5.5)$$

Здесь параметр α равен

$$\alpha^2 = (2\pi)^2 \frac{\int_{-T/2}^{T/2} t^2 f^2(t) dt}{\int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt}. \quad (12.5.6)$$

Если применить формулу (12.5.6) к прямоугольному радиоимпульсу длительностью τ_n , то получим

$$\alpha^2 = (2\pi)^2 \int_{-\tau_n/2}^{\tau_n/2} t^2 dt \left/ \int_{-\tau_n/2}^{\tau_n/2} dt \right. = \pi^2 \tau_n^2 / 3.$$

Такому

$$\sigma_f^2 = \frac{3}{(\pi\tau_n)^2(2E/N_0)}. \quad (12.5.7)$$

Для радиоимпульса гауссовой формы (12.2.20), практически полностью расположенного внутри интервала $(-T/2, T/2)$, получим

$$\alpha^2 = (2\pi)^2 \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \exp\left[-5,6\left(\frac{t}{\tau_n}\right)^2\right] dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-5,6\left(\frac{t}{\tau_n}\right)^2\right] dt} = \frac{(\pi\tau_n)^2}{2,8}. \quad (12.5.8)$$

Следовательно, дисперсия оценки частоты гауссова радиоимпульса равна

$$\sigma_f^2 = \frac{2,8}{(\pi\tau_n)^2(2E/N_0)} = \frac{\Delta f^2}{1,4(2E/N_0)}, \quad (12.5.9)$$

последнее равенство написано на основании (12.4.23). Формула (12.5.5) получена при условии, что полезный сигнал (12.5.1) не флюктуирует по амплитуде и фазе. Однако на практике счет фединга полезный сигнал на входе приемника подвержен амплитудным и фазовым флюктуациям. При этом, естественно, влияние фединга будет оказываться и на измерении смещения частоты сигнала, причем это влияние будет тем больше, чем больше происходит расширение спектра федингующего сигнала по сравнению со спектром нефедингующего сигнала.

Рассмотрим измерение допплеровского смещения частоты федингующего по амплитуде $a(t)$ и фазе $\theta(t)$ узкополосного радиосигнала

$$s(t, \Omega) = a(t) \cos[(\omega_0 + \Omega)t - \theta(t)], \quad -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}. \quad (12.5.10)$$

Тогда считать, что сигнал (12.5.10) является отрезком стационарного нормального узкополосного шума с функцией корреляции

$$\langle s(t) s(t+\tau) \rangle = k(\tau) = \sigma_0^2 \rho(\tau) \cos(\omega_0 + \Omega)\tau. \quad (12.5.11)$$

σ_0^2 — средняя мощность полезного сигнала.

При произвольном соотношении времени наблюдения T и времени корреляции полезного сигнала τ_k аналитически затруднительно получить выражение для дисперсии оценки частоты. Задача существенно облегчается, если время корреляции сигнала $s(t)$ много меньше времени наблюдения T ($T \gg \tau_k$). Так как этот случай

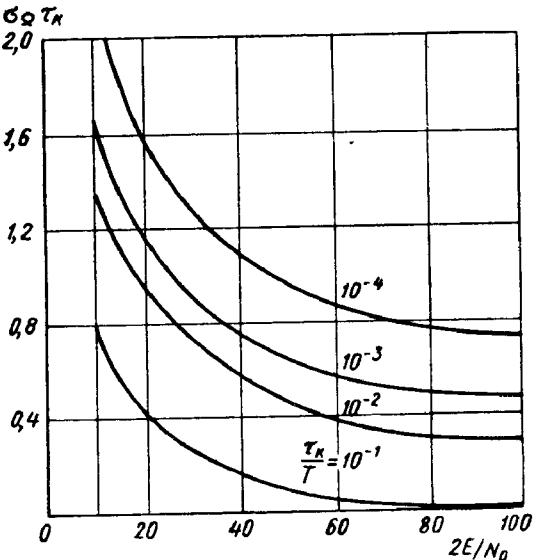


Рис. 12.4. Зависимость нормированной среднеквадратичной ошибки измерения смещения частоты узкополосного шума от отношения сигнал/шум (τ_k — время корреляции, T — интервал наблюдения).

представляет практический интерес, то приведем относящиеся к нему результаты. При этом ограничимся рассмотрением достаточно больших отношений сигнал/шум

$$\frac{2E}{N_0} = \frac{2\varepsilon_0^2 T}{N_0} \gg 1. \quad (12.5.12)$$

Можно показать [8], что при приеме федингующего полезного сигнала с функцией корреляции вида

$$k(\tau) = \sigma_0^2 e^{-\gamma|\tau|} \cos(\omega_0 + \Omega)\tau, \quad \tau_k = \frac{1}{\gamma}, \quad (12.5.13)$$

дисперсия оценки смещения частоты Ω определяется формулой

$$\sigma_{\Omega}^2 = \frac{\gamma_1^2}{2E/N_0} \left(1 + \frac{\gamma}{\gamma_1}\right)^4 \left(1 + \frac{\gamma}{2\gamma_1}\right), \quad (12.5.14)$$

$$\gamma_1 = \gamma \sqrt{1 + \frac{(2E/N_0)}{T} \frac{\tau_k}{T}}. \quad (12.5.15)$$

На рис. 12.4 приведена зависимость нормированной среднеквадратичной ошибки измерения смещения частоты $\sigma_{\Omega} \tau_k$ от отношения сигнал/шум (12.5.12) для четырех отношений времени корреляции узкового сигнала к интервалу наблюдения (τ_k/T). Из кривых видно, что при фиксированных $2E/N_0$ и T с уменьшением времени корреляции τ_k среднеквадратичная ошибка увеличивается.

Из формул (12.4.20) и (12.4.24) видно, что при заданном отношении сигнал/шум погрешность измерения временного положения уменьшается при расширении спектра сигнала. Погрешность измерения смещения частоты Ω , как следует из формул (12.5.7) и (12.5.9), всегда уменьшается при увеличении длительности радиоимпульса.

Если интересоваться совместной или раздельной оценкой параметров τ и Ω , то возникает вопрос о выборе такой формы сигнала, который обеспечивал бы высокую точность определения как τ , так и Ω . Предельные возможности подобных измерений и некоторые соображения о выборе рациональных видов сигналов приводятся в следующем параграфе.

6. СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И ВЫБОР ФОРМЫ СИГНАЛА

Для простоты рассмотрим случай, когда оценка временного положения и смещения частоты радиоимпульса производится не вместе, а раздельно и независимо, причем радиоимпульс не имеет внутренней частотной модуляции ($\Psi(t) = 0$), т. е.

$$(t, \tau, \Omega) = af(t - \tau) \cos[(\omega_0 - \Omega)t - \theta], \quad -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}, \quad (12.6.1)$$

где $f(t - \tau)$ — действительная функция аргумента.

Огибающая (12.4.4) такого импульса является также действительной функцией времени $U(t - \tau) = f(t - \tau)$. Поэтому формулу (12.4.7) в данном случае можно записать так:

$$q_s''(\tau_0) = \frac{a^2}{N_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f''(t - \tau_0) f(t - \tau_0) dt, \quad (12.6.2)$$

штрихом обозначена производная по τ при $\tau = \tau_0$.

Покажем, что при независимых измерениях среднеквадратичные ошибки измерения временного положения τ и смещения частоты Ω импульса $s(t, \tau, \Omega)$ удовлетворяют следующему неравенству:

$$\sigma_{\tau} \sigma_f \leq \frac{1}{\pi(2E/N_0)}. \quad (12.6.3)$$

Действительно, из формул (12.4.16) и (12.5.5) следует, что

$$\sigma_{\tau} \sigma_f = \frac{1}{\alpha \beta (2E/N_0)}. \quad (12.6.4)$$

Но произведение величин α и β , определенных соответственно формулами (12.5.6) и (12.4.13), удовлетворяет неравенству

$$\alpha \beta \geq \pi, \quad (12.6.5)$$

известному под названием «соотношения неопределенности».

Таким образом, для доказательства неравенства (12.6.3) необходимо лишь убедиться в справедливости соотношения неопределенности (12.6.5). Из (12.4.13) и (12.5.6) имеем

$$(\alpha \beta)^2 = (2\pi)^2 \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |F(j\omega)|^2 d\omega \int_{-T/2}^{T/2} t^2 f^2(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt}. \quad (12.6.6)$$

Приравнивая правые части выражений (12.4.12) и (12.6.2), находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |F(j\omega)|^2 d\omega = -2\pi \int_{-T/2}^{T/2} f''(t - \tau_0) f(t - \tau_0) dt = 2\pi \int_{-T/2}^{T/2} f'^2(t) dt. \quad (12.6.7)$$

Последнее равенство получено путем интегрирования по частям, при этом предполагается, что функция $f(t - \tau_0)$ исчезает на концах интервала наблюдения.

Запишем также известное равенство Релея — Парсеваля

$$\int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega. \quad (12.6.8)$$

Подставив (12.6.7) и (12.6.8) в (12.6.6), получим

$$(\alpha \beta)^2 = (2\pi)^2 \frac{\int_{-T/2}^{T/2} f'^2(t) dt \int_{-T/2}^{T/2} t^2 f^2(t) dt}{\left[\int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt \right]^2}. \quad (12.6.9)$$

Применим к числителю выражения (12.6.9) неравенство Шварца — Буняковского (10.6.13), положив $F(t) = f'(t)$, $\Gamma(t) = tf(t)$:

$$\begin{aligned} & \int_{-T/2}^{T/2} f'^2(t) dt \int_{-T/2}^{T/2} t^2 f^2(t) dt \geq \left\{ \int_{-T/2}^{T/2} t f'(t) f(t) dt \right\}^2 = \\ & = \left\{ \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} t \frac{d}{dt} f^2(t) dt \right\}^2 = \frac{1}{4} \left[\int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt \right]^2. \end{aligned} \quad (12.6.10)$$

Следовательно, знак равенства имеет место только в том случае, когда

$\Gamma(t) = \text{const} \cdot \Gamma(t)$, т. е. когда

$$f'(t) = \text{const} \cdot t f(t). \quad (12.6.11)$$

Пославив (12.6.10) в (12.6.9), убеждаемся в справедливости соотношения неопределенности.

Неравенство (12.6.3) показывает, что время запаздывания и частота в принципе могут быть измерены с заведомо гарантированной погрешностью лишь за счет увеличения отношения сигнал/шум. Однако при фиксированном отношении сигнал/шум погрешность можно уменьшить за счет выбора формы сигнала.

Полная энергия импульсного сигнала E при разработке системы обычно определяется из уравнения дальности системы. Тем самым для известных условий приема величина $2E/N_0$ будет фиксированной. Поэтому для достижения высокой точности измерения параметров сигнала нужно применять такие виды сигналов, для которых величина $\alpha \beta$ имеет большое значение. Так как α растет с величиной длительности сигнала, а β — с увеличением ширины спектра сигнала, то для получения высокой точности определения времени запаздывания и частоты необходимо использовать длинные сигналы, обладающие широким спектром (узкой функцией корреляции).

Нетрудно убедиться, что для гауссова радиоимпульса (12.2.20) выполняется равенство (12.6.11) и $\alpha \beta = \pi$. Следовательно, точность измерения τ и f в гауссовом радиоимпульсе ниже, чем в любом другом радиоимпульсе.

Приведенные соображения о выборе формы сигнала важны не только с точки зрения получения высокой точности измерения, но также и с точки зрения устранения неоднозначности определения параметров и требования высокого разрешения сигналов. Под разрешением понимается способность системы различать два или несколько сигналов.

Как следует из пояснений, приведенных в § 4 гл. 10, для устранения неоднозначности (ненадежности) желательно использовать сигналы, для которых сигнальная функция имеет лишь один узкий пик в окрестности истинного значения оцениваемого параметра. Требование согласуется с требованием получения высокой точности оценки параметра.

Проблема разрешения является весьма сложной. Мы ограничимся здесь лишь элементарными пояснениями. Необходимость разрешения в радиолокации возникает при наличии нескольких целей, в радиосвязи — при многолучевом распространении радиоволн. Желательность хорошего разрешения целей в радиолокации очевидна; таким же образом, разрешение в радиосвязи. Обычно многолучевое распространение радиоволн приводит к замираниям сигнала в месте приема вследствие интерференции радиосигналов, приходящих

по различным лучам. Это считается вредным явлением. Однако если сигналы, распространяющиеся по разным путям, можно разрешить (принять раздельно), то затем их можно сложить, и тем самым использовать многолучевое распространение с выгодой для повышения отношения сигнал/шум.

Пусть требуется разрешить два сигнала: $s_1(t) = s(t, \tau_1)$ и $s_2(t) = s(t, \tau_2)$, отличающихся только временами запаздывания. На рис. 12.5 изображены сигнальные функции сигналов и их апостериорные вероятности. По-видимому, возможность различия двух

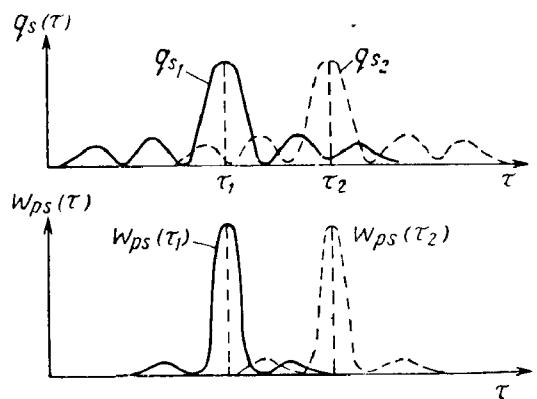


Рис. 12.5. Сигнальные функции и апостериорные вероятности для двух сигналов.

целей при малых значениях разности $\tau = \tau_2 - \tau_1$ будет определяться тем, насколько узки главные максимумы апостериорных вероятностей и как сильно они выделяются среди побочных боковых лепестков; чем выше и уже максимумы и чем меньше боковые лепестки, тем при меньших значениях τ можно раздельно зафиксировать два сигнала. Но вид апостериорной вероятности при больших отношениях сигнал/шум определяется сигнальной функцией. Следовательно, для получения хорошего разрешения нужно применять такие сигналы, автокорреляционные функции которых имеют под возможности один высокий и узкий пик (широкий спектр). Добиться этого за счет уменьшения лишь длительности импульса (например, прямоугольного) практически не удается.

Для обеспечения большой дальности действия обычно требуются высокие значения энергии, а следовательно, при малой длительности и большие мощности E/τ_i . Во многих случаях радиотехнические устройства не могут нормально работать при очень больших мощностях (пробой волноводов и т. д.). Чтобы, несмотря на наличие этих «пиковых ограничений», можно было независимо выбирать дальность и разрешающую способность, применяют импульсные

специальной формы — сигналы с внутриимпульсной модуляцией (частотной, фазовой и др.).

Со сих пор речь шла о точности и разрешающей способности по времени запаздывания. Итог приведенных рассуждений состоит в том, что для получения высокой точности и разрешающей способности нужно применять сигналы с узкими автокорреляционными функциями (широким спектром) без боковых лепестков. Если интересоваться точностью и разрешающей способностью одновременно времени запаздывания и частоте, то можно показать [9, 10], что вид сигнала должен определяться на основе анализа модуля трехмерной функции корреляции

$$|R(\tau, \Omega)| = \frac{1}{2E} \left| \int_0^T U(t-\tau) U^*(t) e^{j\Omega t} dt \right|. \quad (12.6.12)$$

Функция $|R(\tau, \Omega)|$ называется функцией неопределенности. Вопросы, указанные в данном параграфе, более подробно рассматриваются в гл. 14.

12.7 ОПТИМАЛЬНАЯ СХЕМА ЧАСТОТНОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ

Покажем на частном примере, что общую структурную схему оптимального измерителя (рис. 12.1) можно конкретизировать и проанализировать.

Пусть в принятом колебании (12.1.1) полезным сигналом $s(t)$ является отрезок квазигармонического шума (10.8.23) с функцией автокорреляции (10.8.24). Частота полезного сигнала ω считается постоянной на интервале наблюдения $(0, T)$, но заранее точно неизвестной. Предполагается известным априорное распределение частоты; будем считать его равномерным на некотором интервале (ω_1, ω_2) , т. е. положим

$$W_{pr}(\omega) = \begin{cases} 1/(\omega_2 - \omega_1) & \text{при } \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2, \\ 0 & \text{при } \omega < \omega_1, \omega > \omega_2. \end{cases} \quad (12.7.1)$$

Нужно найти оптимальную схему измерителя, определяющую известную частоту сигнала. В качестве критерия оптимальности мы пользуемся критерием максимального правдоподобия, согласно которому оптимальный приемник-измеритель частоты должен следить за наиболее правдоподобным значением частоты.

После приема колебания $\xi(t)$ на интервале $(0, T)$ нужно указать исходное значение частоты, соответствующее виду колебания $\xi(t)$. Обозначим это оценочное значение, зависящее от T , через $\hat{\omega}(T)$. С течением времени T оценочное значение частоты $\hat{\omega}_0$ уточняется, поскольку увеличивается объем апостериорных сведений.

Чтобы получить уравнения оптимальной схемы в дифференциальной форме, исследуем изменение апостериорного распределения

(10.8.25) при увеличении времени наблюдения T . С этой целью прологарифмируем обе части равенства (10.8.25):

$$\ln W_{ps}(\omega) = \frac{2\sigma_1^2}{N_0^2} Z_T^2(\omega) + \ln C, \quad \sigma_1^2 = \frac{\gamma}{\gamma_1} \sigma^2. \quad (12.7.2)$$

Здесь $C = \text{const}$ — нормировочная постоянная.

Беря производную по T и обозначив ее точкой сверху, получим

$$\dot{W}_{ps} = [F(T, \omega) - \lambda] W_{ps}, \quad (12.7.3)$$

где

$$F(T, \omega) = \frac{2\sigma_1^2}{N_0^2} \frac{\partial Z_T^2(\omega)}{\partial T}. \quad (12.7.4)$$

Через коэффициент λ здесь обозначена величина $\lambda = -\frac{d}{dT} \ln C$. Коэффициент λ всегда можно определить, пользуясь тем, что по условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{W}_{ps}(\omega) d\omega = \frac{\partial}{\partial T} \int_{-\infty}^{\infty} W_{ps}(\omega) d\omega = 0.$$

Поэтому в результате интегрирования (12.7.3) по ω получим

$$\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} F(T, \omega) W_{ps}(\omega) d\omega = \langle F(T, \omega) \rangle. \quad (12.7.5)$$

В дальнейшем будем предполагать, что отношение сигнал/шум велико. Естественно ожидать, что при больших отношениях сигнал/шум оценка будет достаточно точной, т. е. апостериорная плотность вероятности частоты будет тесно сконцентрирована в небольшой окрестности около оценки. При этом функцию $F(T, \omega)$ можно разложить в ряд Тейлора в окрестности ω_0 и ограничиться учетом лишь первых трех членов разложения:

$$F(T, \omega) = F(T, \omega_0) + \frac{\partial F(T, \omega_0)}{\partial \omega} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(T, \omega_0)}{\partial \omega^2} (\omega - \omega_0)^2 \quad (12.7.6)$$

Следствием принятого упрощения (12.7.6), справедливого при большом отношении сигнал/шум, как следует из уравнения (12.7.3), является тот результат, что апостериорная плотность вероятности считается при этом нормальной (гауссово приближение). Запишем ее в обычном виде:

$$W_{ps}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\omega}^2}} \exp \left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\sigma_{\omega}^2} \right], \quad (12.7.7)$$

оценка ω_0 и ее дисперсия σ_{ω}^2 зависят от T , т. е. $\omega_0 = \omega_0(T)$, $\sigma_{\omega}^2(T)$. Из (12.7.7) имеем

$$W_{ps} = \left[-\frac{1}{2} \frac{\sigma_{\omega}^2}{\sigma_{\omega}^2} + \frac{(\omega - \omega_0)}{\sigma_{\omega}^2} \omega_0 + \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\sigma_{\omega}^4} \sigma_{\omega}^2 \right] W_{ps}. \quad (12.7.8)$$

Подставив (12.7.8) в левую часть и (12.7.6) в правую часть уравнения (12.7.3), получим равенство

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \frac{\sigma_{\omega}^2}{\sigma_{\omega}^2} + \frac{(\omega - \omega_0)}{\sigma_{\omega}^2} \omega_0 + \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\sigma_{\omega}^4} \sigma_{\omega}^2 = F(T, \omega_0) - \\ & - \langle F(T, \omega_0) \rangle + \frac{\partial F(T, \omega_0)}{\partial \omega} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(T, \omega_0)}{\partial \omega^2} (\omega - \omega_0)^2. \end{aligned} \quad (12.7.9)$$

Из этого соотношения

$$\langle F(T, \omega_0) \rangle - F(T, \omega_0) = \frac{1}{2} \sigma_{\omega}^2 \frac{\partial^2 F(T, \omega_0)}{\partial \omega^2}, \quad (12.7.10)$$

которое получается в результате подстановки (12.7.6) и (12.7.7) в (12.7.3).

Приравнивая члены при одинаковых степенях $(\omega - \omega_0)$ в левой и правой частях равенства (12.7.9), получаем

$$\omega_0 = \frac{2\sigma_1^2}{N_0^2} \sigma_{\omega}^2 \frac{\partial^2 Z_T^2(\omega_0)}{\partial \omega \partial T}, \quad \sigma_{\omega}^{-2} = \frac{2\sigma_1^2}{N_0^2} \frac{\partial^3 Z_T^2(\omega_0)}{\partial \omega^2 \partial T}.$$

Последнее соотношение можно записать иначе

$$\sigma_{\omega}^{-2} = \frac{2\sigma_1^2}{N_0^2} \frac{\partial^2 Z_T^2(\omega_0)}{\partial \omega^2}.$$

Таким образом, окончательные уравнения, определяющие ω_0 и $\sigma_{\omega}^2(T)$, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= \frac{2\sigma_1^2}{N_0^2} \sigma_{\omega}^2 \frac{\partial^2 Z_T^2(\omega_0)}{\partial \omega \partial T}, \\ \sigma_{\omega}^{-2} &= \frac{2\sigma_1^2}{N_0^2} \frac{\partial^2 Z_T^2(\omega_0)}{\partial \omega^2}. \end{aligned} \right\} \quad (12.7.11)$$

Формула, моделирующая эти уравнения, дает на выходе оптимальную оценку интересующей нас частоты сигнала.

Преобразуем первое из уравнений (12.7.11), для чего воспользуемся известной формулой дифференцирования интеграла по параметру. Если

$$J(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx,$$

то

$$J'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y) dx + \beta'(y) f(\beta(y), y) - \alpha'(y) f(\alpha(y), y). \quad (12.7.12)$$

Из выражения (10.8.26) с учетом (12.7.12) получим

$$\frac{\partial Z_T^2(\omega_0)}{\partial T} = 2\xi(T) \int_0^T e^{-\gamma_1(T-t)} \xi(t) \cos \omega_0(T-t) dt = 2\xi(T) X_0(T). \quad (12.7.13)$$

Применяя формулу (12.7.12) к выражению

$$X_0(T) = \int_0^T e^{-\gamma_1(T-t)} \xi(t) \cos \omega_0(T-t) dt, \quad (12.7.14)$$

нетрудно убедиться, что $X_0(T)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{X}_0 + 2\gamma_1 X_0 + (\omega_0^2 - \gamma_1^2) X_0 = \ddot{\xi}(T) + \gamma_1 \xi(T).$$

Считая, что $\omega_0 \gg \gamma$ и учитывая выполняющееся при этом неравенство $\xi(T) \gg \gamma_1 \xi(T)$, имеем

$$\dot{X}_0 + 2\gamma_1 X_0 + \omega_0^2 X_0 = \ddot{\xi}(T). \quad (12.7.15)$$

Таким уравнением определяется напряжение на колебательном контуре с резонансной частотой ω_0 и затуханием γ_1 , когда на контур воздействует случайный ток $\ddot{\xi}(T)$. Следовательно, $X_0(T)$ представляет собой напряжение на колебательном контуре при воздействии на него принятого колебания $\ddot{\xi}(t)$.

С учетом соотношения (12.7.13) первое уравнение (12.7.11) можно записать

$$\omega_0 = \frac{2\sigma_1^2}{N_0^2} \sigma_\omega^2 \xi(T) \frac{\partial X_0(T)}{\partial \omega}$$

или, иначе,

$$\omega_0 = \frac{2\sigma_1^2}{N_0^2 \Delta} \sigma_\omega^2 [\xi(T) X_1(T) - \xi(T) X_2(T)]. \quad (12.7.16)$$

т.е. $\lambda_1(T)$ соответствует частоте $\omega_1 = \omega_0 + \frac{1}{2} \Delta$, $X_2(T)$ — частоте $\omega_0 - \frac{1}{2} \Delta$ и Δ — небольшая разность резонансных частот пуроров ($\Delta < \gamma_1$).

Оптимальный приемник-измеритель частоты можно моделировать при помощи блок-схемы, представленной на рис. 12.6. На вход $\xi(t)$ параллельных резонансных контуров с одинаковыми затуханиями γ_1 , но расстроенных друг относительно друга на малую величину Δ , воздействует принятное колебание $\ddot{\xi}(t)$. Выходные напряжения контуров перемножаются порознь с принятым колебанием $\ddot{\xi}(t)$ и подаются на сумматоры. Сумматоры выдают напряжения, пропорциональные разности частот контуров, т.е.

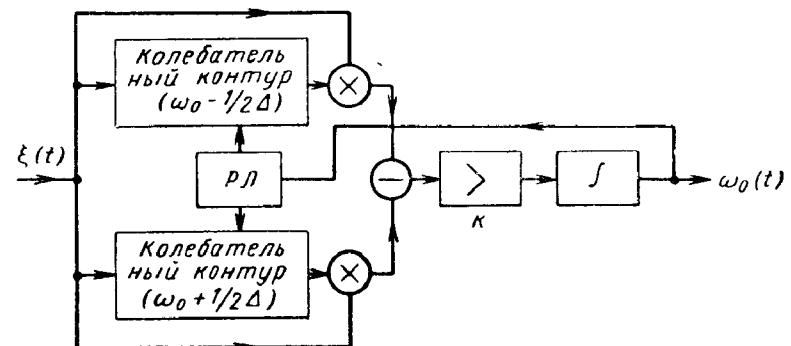


Рис. 12.6. Функциональная схема оптимальной частотной автоподстройки частоты.

и затем вычитываются. Полученная разность усиливается и подается на интегратор. Напряжение на выходе интегратора, дающее оценочное значение частоты $\omega_0(T)$, посредством обратной связи и лампы реактивного сопротивления регулирует резонансную частоту контуров.

Из формулы (12.7.16) видно, что коэффициент усиления усиления

$$k = \frac{2\sigma_1^2}{N_0^2} \sigma_\omega^2 \quad (12.7.17)$$

в оптимальной схеме должен быть переменным вследствие того, что дисперсия апостериорного распределения σ_ω^2 в общем случае зависит от времени.

Общеизвестная система частотной автоподстройки [11] отличается от схемы рис. 12.6 тем, что вместо «автокорреляционных детекторов-перемножителей» в ней применяются обычные детекторы огибающей, вместо идеального интегратора — интегрирующие цепочки R/C и, наконец, вместо перестройки контуров дискриминатора используется изменение собственной частоты гетеродина. Существен-

ное отличие состоит в том, что параметры оптимальной схемы, как следует из формулы (12.7.17), должны изменяться в зависимости от значения отношения сигнал/шум на входе (см. ниже).

Точно вычислить σ_ω^2 из второго уравнения (12.7.11) весьма сложно. Поэтому ограничимся рассмотрением стационарного состояния, когда выполняется условие

$$(\gamma + \gamma_1) T = \gamma T \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\sigma^2}{\gamma N_0}} \right) \gg 1. \quad (12.7.18)$$

Противоположный случай ($\gamma T \ll 1$) является более простым: сигнал $s(t)$ можно рассматривать как отрезок не квазигармонического, а чисто гармонического колебания.

При выполнении условия (12.7.18) и при больших отношениях сигнал/шум флуктуации дисперсии σ_ω^2 будут малыми и с некоторым приближением во втором уравнении (12.7.11) можно заменить случайную величину

$$Z_T^2(\omega) = \int_0^T \int_0^T e^{-\gamma_1|t-t'|} \cos \omega(t-t') \xi(t) \xi(t') dt dt' \quad (12.7.19)$$

ее средним значением $\langle Z_T^2(\omega) \rangle$.

Пусть истинное неизвестное значение частоты сигнала в принятом колебании равно ω^* . Учитывая, что случайные процессы $A_s(t) = A(t) \sin \varphi(t)$, $A_c(t') = A(t') \cos \varphi(t')$ и $n(t'')$ взаимно независимы, причем

$$\langle A_s(t) A_s(t') \rangle = \langle A_c(t) A_c(t') \rangle = \sigma^2 e^{-\gamma|t-t'|},$$

получим

$$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \sigma^2 e^{-\gamma|t-t'|} \cos \omega^*(t-t') + \frac{1}{2} N_0 \delta(t-t'). \quad (12.7.20)$$

На основании выражений (12.7.19) и (12.7.20) можем написать

$$\begin{aligned} \langle Z_T^2(\omega) \rangle &= \frac{1}{2} N_0 T + \frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^T \int_0^T e^{-(\gamma+\gamma_1)|t-t'|} \times \\ &\quad \times [\cos(\omega^* - \omega)(t-t') + \cos(\omega^* + \omega)(t-t')] dt dt'. \end{aligned}$$

Разность частот $\omega^* - \omega$ имеет порядок σ_ω и при указанных выше условиях будет малой величиной. При этом интеграл от второго слагаемого, содержащего $\cos(\omega^* + \omega)(t-t') \approx \cos 2\omega^*(t-t')$ будет значительно меньше интеграла от первого слагаемого.

Воспользовавшись формулой

$$\begin{aligned} J &= \int_0^T \int_0^T e^{-(\gamma+\gamma_1)|t-t'|} \cos(\omega^* - \omega)(t-t') dt dt' = \\ &= 2 \int_0^T (T-t) e^{-(\gamma+\gamma_1)t} \cos(\omega^* - \omega) t dt \end{aligned}$$

и выполнив вычисления, получим

$$\begin{aligned} \langle Z_T^2(\omega) \rangle &= \frac{1}{2} N_0 T + \sigma^2 [(\gamma + \gamma_1)^2 - (\omega^* - \omega)^2]^{-1} \times \\ &\quad \times \{e^{-(\gamma+\gamma_1)T} [((\gamma + \gamma_1)^2 - (\omega^* - \omega)^2) \cos(\omega^* - \omega) T - 2(\gamma + \gamma_1) \times \\ &\quad \times (\omega^* - \omega) \sin(\omega^* - \omega) T] - [(\gamma + \gamma_1)^2 - (\omega^* - \omega)^2]\}. \end{aligned}$$

При выполнении условия (12.7.18) это выражение упрощается:

$$\langle Z_T^2(\omega) \rangle = \frac{1}{2} N_0 T + \sigma^2 \frac{(\gamma + \gamma_1)^2 - (\omega^* - \omega)^2}{[(\gamma + \gamma_1)^2 + (\omega^* - \omega)^2]^2}. \quad (12.7.21)$$

Следовательно находим

$$\frac{\partial \langle Z_T^2(\omega) \rangle}{\partial \omega^2} = \frac{6\sigma^2}{(\gamma + \gamma_1)^4} \frac{(1+2p-p^2)(1-2p-p^2)}{(1+p^2)^4}, \quad p = \frac{\omega^* - \omega}{\gamma + \gamma_1}. \quad (12.7.22)$$

Если в этом выражении положить $\omega = \omega_0$ и затем подставить во второе уравнение (12.7.11), то получим

$$\sigma_\omega^{-2} = \frac{12\sigma^2 \gamma_1^2}{N_0^2 (\gamma + \gamma_1)^4} \frac{(1+2p_0-p_0^2)(1-2p_0-p_0^2)}{(1+p_0^2)^4}, \quad p_0 = \frac{\omega^* - \omega_0}{\gamma + \gamma_1}. \quad (12.7.23)$$

По физическому смыслу дисперсия σ_ω^2 не может быть отрицательной величиной. Поэтому следует предположить, что оптимальная схема (рис. 12.6) может нормально работать лишь при одновременном выполнении двух неравенств

$$1+2p_0-p_0^2 > 0, \quad 1-2p_0-p_0^2 > 0.$$

Решая совместно эти два неравенства, находим

$$|p_0| < 1/(1 + \sqrt{2}) = 0,41. \quad (12.7.24)$$

Подставив в (12.7.24) выражение p_0 из (12.7.23), определяем максимальное значение разности $\omega_m - \omega_0$, при которой система с тонкой автоподстройки работает еще нормально. Этую максимальную расстройку в автоматике принято называть полосой схватывания:

$$\Delta\omega_{\text{ex}} = |\omega_m^* - \omega_0| = \frac{\gamma + \gamma_1}{1 + \sqrt{2}} = \frac{\gamma}{1 + \sqrt{2}} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\sigma^2}{\gamma N_0}} \right). \quad (12.7.25)$$

Если задан равномерный априорный интервал возможных частот (ω_1, ω_2), то начальная частота сигнала ω^* может находиться в любой точке этого интервала. Целесообразно принять начальное

оценочное значение частоты ω_0 равным центральной частоте априорного интервала, т. е. положить

$$\omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \quad \text{при } T = 0. \quad (12.7.26)$$

Тогда оптимальная схема будет выполнять свое назначение лишь при выполнении неравенства

$$\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) < \Delta\omega_{\text{сх}}. \quad (12.7.27)$$

При этом колебательные контуры схемы рис. 12.6 в начальный момент времени должны быть настроены соответственно на частоты ω_1 и ω_2 .

В тех случаях, когда неравенство (12.7.27) не выполняется, нужно априорный интервал возможных частот разбить на $m \geq (\omega_2 - \omega_1)/2\Delta\omega_{\text{сх}}$ примыкающих подинтервалов, и в каждом из них осуществлять точное определение частоты при помощи самостоятельной схемы указанного вида.

Возвращаясь к условию (12.7.18), заметим, что оно гарантирует получение достаточно точной оценки, соответствующей $|p_0| \ll 1$. Пренебрегая p_0 по сравнению с единицей, из формулы (12.7.23) получим следующее значение дисперсии оценки частоты:

$$\sigma_\omega^2 = \frac{N_0^2(\gamma + \gamma_1)^4}{12(\gamma\sigma_1)^2} = \frac{\gamma\gamma_1}{3} \left(1 + \frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^4 \left(\frac{2\sigma^2}{\gamma N_0}\right)^{-2}. \quad (12.7.28)$$

Подставив это выражение для σ_ω^2 в (12.7.17), находим оптимальное значение коэффициента усиления

$$k = \frac{(\gamma + \gamma_1)^4}{6\sigma^2} = \frac{\gamma^4}{6\sigma^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\sigma^2}{\gamma N_0}}\right)^4. \quad (12.7.29)$$

Заметим, что ширина энергетического спектра стохастического сигнала $s(t)$, имеющего функцию корреляции (10.8.24), равна $\Delta f_s = \gamma/2$. Поэтому $\gamma N_0/2 = N_0 \Delta f_s$ есть энергия белого шума в полосе сигнала и, следовательно, величину $2\sigma^2/\gamma N_0$ условно можно назвать отношением сигнал/шум на входе.

Формула (12.7.29) показывает, что коэффициент усиления в оптимальной схеме зависит от дисперсии σ^2 и времени корреляции $\tau_c \approx 1/\gamma$ сигнала, а также от отношения сигнал/шум на входе. Величина апостериорной дисперсии оценки частоты σ_ω^2 определяется только отношением сигнал/шум на входе и временем корреляции сигнала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крамер Г. Математические методы статистики Изд-во иностранной литературы, 1948.
2. Слеруп Д. Estimation of signals parameters in the presence of point Trans. IRE, 1954, IT-3, March.
3. Фалькович С. Е. Прием радиолокационных сигналов на фоне флюктуационных помех. Изд-во «Советское радио», 1961.
4. Куликов Е. И. Предельная точность оценки параметра сигнала при приеме в нормальном шуме. «Радиотехника», 1962, № 7.
5. Куликов Е. И. Предельная точность совместной оценки двух параметров сигнала при приеме в нормальном шуме. «Радиотехника», 1963, № 1.
6. Skolnik M. I. Introduction to radar systems. McGraw-Hill, 1962.
7. Ширман Я. Д., Голиков В. Н. Основы теории обнаружения радиолокационных сигналов и измерения их параметров. Изд-во «Советское радио», 1963.
8. Куликов Е. И. Предельная точность измерения центральной частоты узкополосного нормального случайного процесса на фоне белого шума. «Радиотехника и электроника», 1964, № 10.
9. Зиберт В. Общие закономерности обнаружения целей при помощи радиолокации. «Вопросы радиолокационной техники», 1957, № 4 (41).
10. Вакман Д. Е. Сложные сигналы и принцип неопределенности в радиолокации. Изд-во «Советское радио» 1965.
11. Кривицкий Б. Х. Автоматические системы радиотехнических устройств. Госэнергоиздат, 1962.

Глава 13

ФИЛЬТРАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ ИЗ ШУМОВ

§ 1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ

Рассмотрим общую постановку задачи фильтрации сигнала из шумов и затем конкретизируем ее применительно к двум частным случаям, которые будут подробно рассмотрены в дальнейшем.

Пусть колебание $\xi(t)$, принятое на некотором интервале времени, является функцией от сигнала $s(t, \lambda(t))$ и шума $\eta(t)$:

$$\xi(t) = F(s(t, \lambda(t)), \eta(t)). \quad (13.1.1)$$

Сигнал $s(t, \lambda(t))$ в общем случае может зависеть не от одного, а от нескольких «параметров» $\lambda_i(t)$, причем сам сигнал $s(t, \lambda(t))$ или интересующий нас параметр $\lambda(t)$ — случайный процесс. Шум $\eta(t)$ может быть произвольным; сигнал и шум не обязательно представляют аддитивную смесь.

Предполагаются априорно известными вид функции F (т. е. способ комбинирования сигнала и шума) и некоторые статистические характеристики случайного сигнала и шума. Располагая этими априорными данными, нужно решить оптимальным образом, какая реализация самого сигнала $s(t, \lambda)$ или его «параметра» $\lambda(t)$ содержится в принятом колебании $\xi(t)$.

Из-за наличия шума и вследствие случайного характера сигнала оценка реализации сигнала или его параметра, вообще говоря, не будет совпадать с истинной реализацией, что приводит к ошибкам фильтрации. Для количественной характеристики качества фильтрации можно использовать несколько критериев. Укажем два таких критерия: критерий минимума среднеквадратичной погрешности и критерий максимума апостериорной вероятности.

1. Обозначим оценку истинной реализации сигнала $s(t, \lambda(t))$ в принятом колебании $\xi(t)$ через $s^*(t, \lambda(t))$. В некоторых задачах качество фильтрации целесообразно характеризовать величиной средней квадратичной погрешности $\varepsilon^2 = \langle [s^*(t, \lambda(t)) - s(t, \lambda(t))]^2 \rangle$,

уменьшение производится по всем априорным сведениям. При использовании критерия минимума среднеквадратичной погрешности структура оптимального фильтрующего устройства определяется из условия получения минимума величины ε^2 (см. § 2).

2. В ряде задач фильтрации более просто находится решение критерия максимума апостериорной вероятности. В данном случае оптимальное фильтрующее устройство должно следить за максимумом апостериорной вероятности; точность этого слежения можно характеризовать дисперсией апостериорной вероятности (см. § 3).

В дальнейшем ограничимся в основном рассмотрением того практически важного, но частного случая, когда сигнал и шум являются стационарными случайными процессами и взаимодействуют аддитивно, т. е. просто складываются:

$$\xi(t) = s(t, \lambda(t)) + \eta(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (13.1.2)$$

В зависимости от дополнительных предположений о характере сигнала и шума ниже раздельно рассмотрены два вида фильтрации: линейная и нелинейная.

1.2 ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Предположим, что сигнал $s(t)$ и шум $\eta(t)$ в (13.1.2) являются независимыми стационарными нормальными случайными процессами с известными корреляционными функциями $k_s(\tau)$ и $k_\eta(\tau)$ и равными нулю средними значениями. Требуется определить систему, которая с минимальной средней квадратичной погрешностью избавляет из шума не информационное сообщение, а сам полезный сигнал, т. е. минимизирует величину

$$\varepsilon^2 = \langle [s^k(t) - s(t + \Delta)]^2 \rangle, \quad (13.2.1)$$

и вычислить значение ε_{\min}^2 .

Здесь для общности введен временной сдвиг на Δ . При $\Delta > 0$ оценка $s^k(t)$ должна предсказывать значение входного сигнала $s(t + \Delta)$ на Δ вперед; если $\Delta < 0$, то оценка информирует нас о том, какое значение входного сигнала было до момента времени $t - \Delta$. Наконец, при $\Delta = 0$ задача сводится только к выделению сигнала из шума.

Строгое математическое решение сформулированной задачи было дано А. Н. Колмогоровым [1] и Н. Винером [2]. Оптимальное фильтрующее устройство является линейным и для полубесконечного интервала наблюдения $(-\infty, T)$ может быть рассчитано по формуле Колмогорова — Винера. В ряде последующих работ эта формула была обобщена для конечного интервала наблюдения $(0, T)$ для стационарных процессов [3, 4, 5].

Не приводя здесь всех математических доказательств, ограничимся простыми физическими рассуждениями.

Если сигнал и шум являются независимыми нормальными стационарными случайными процессами с нулевыми средними значениями, то они могут отличаться только корреляционными функциями или, иначе, спектральными плотностями. Этот факт используется при осуществлении фильтрации. По-видимому, нужно стремиться к тому, чтобы по возможности с наименьшими искажениями воспроизвести спектр сигнала и как можно сильнее подавить спектральные компоненты мешающего шума. Как известно, задача частотной селекции успешно решается надлежащим образом подобранными линейными фильтрами.

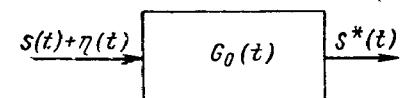


Рис. 13.1. К определению оптимального линейного фильтра.

Итак, будем искать оптимальное фильтрующее устройство среди линейных фильтров. В качестве оценки входного сигнала берется выходной сигнал фильтра (рис. 13.1), т. е. если $G(t)$ — импульсная характеристика искомого фильтра, то

$$s^*(t) = \int_0^t G(\tau) \xi(t-\tau) d\tau. \quad (13.2.2)$$

При этом выражение для средней квадратичной погрешности (13.2.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 = & \left\langle \left\{ \int_0^t [s(t-\tau) + \eta(t-\tau)] G(\tau) d\tau - s(t+\Delta) \right\}^2 \right\rangle = \sigma_s^2 + \\ & + \int_0^t G(\tau_2) d\tau_2 \left\langle \int_0^t [k_s(\tau_2-\tau_1) + k_\eta(\tau_2-\tau_1)] G(\tau_1) d\tau_1 - 2k_s(\tau_2+\Delta) \right\rangle. \end{aligned} \quad (13.2.3)$$

Для того чтобы определить импульсную характеристику $G_0(t)$ оптимального фильтра, обеспечивающего минимум средней квадратичной погрешности, воспользуемся известным приемом вариационного исчисления. Пусть $G(t) = G_0(t) + \mu g(t)$, где μ — параметр, не зависящий от t , а $g(t)$ — произвольная функция.

Условие минимума средней квадратичной погрешности теперь можно записать в виде

$$\frac{d\varepsilon^2}{d\mu} \Big|_{\mu=0} = 0. \quad (13.2.4)$$

Это условие приводит к соотношению

$$\begin{aligned} & \int_0^t g(\tau_2) d\tau_2 \left\{ \int_0^t [k_s(\tau_2-\tau_1) + k_\eta(\tau_2-\tau_1)] \times \right. \\ & \left. \times G_0(\tau_1) d\tau_1 - k_s(\tau_2+\Delta) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (13.2.5)$$

Поскольку это соотношение должно выполняться при произвольной функции $g(t)$, то отсюда следует, что импульсная характеристика оптимального фильтра $G_0(t)$ должна удовлетворять интегральному уравнению Фредгольма первого рода

$$\int_0^t [k_s(\tau-x) + k_\eta(\tau-x)] G_0(x) dx = k_s(\tau+\Delta). \quad (13.2.6)$$

Это интегральное уравнение является основным уравнением теории линейной фильтрации и называется уравнением линейной регрессии или уравнением Винера — Хопфа [6]. Найдя из него $G_0(t)$ и подставив ее вместо $G(t)$ в (13.2.3), получим значение ε_{min}^2 .

Следует заметить, что оптимальные линейные фильтры, определяемые уравнением (13.2.6), отличны от согласованных и оптимальных фильтров, рассмотренных в § 6, 7 гл. 10; их функции и назначение различно. Если основное назначение рассматриваемых здесь фильтров состоит в наилучшем воспроизведении формы полезного сигнала из аддитивной смеси его с шумом, то задача согласованных фильтров заключается не в воспроизведении формы сигнала, а в формировании максимально возможного пика сигнала на шумовом фоне.

Теория оптимальной линейной фильтрации (по критерию минимума средней квадратичной погрешности) имеет ряд недостатков:

- 1) она охватывает мало практически интересных случаев;
- 2) интегральное уравнение регрессии не всегда решается;
- 3) даже в тех случаях, когда удаётся решить это уравнение, оптимальные фильтры оказываются практически трудно реализуемыми.

Первый недостаток очевиден из исходных предпосылок, на которых базируется теория линейной фильтрации. Линейные фильтры являются оптимальными лишь для выделения не сообщения, а самого сигнала в виде нормального случайного процесса. Однако в радиотехнике обычно используются модулированные радиосигналы определенной длительности, не являющиеся нормальными процессами, и ставится задача оптимальной фильтрации какого-либо параметра сигнала*. Поэтому значительно больший практический интерес представляет рассмотрение теории нелинейной фильтрации, когда предположение о нормальном характере сигнала не требуется.

* Примеры применения линейной фильтрации к когерентному приему широкодиапазонных модулированных сигналов рассмотрены в [22].

Для иллюстрации двух остальных недостатков, наиболее существенным из которых является третий, приведем один простой конкретный пример. Пусть требуется с минимальной средней квадратичной погрешностью отфильтровать сигнал в виде нормального стационарного шума с нулевым средним значением и экспоненциальной функцией корреляции

$$k_s(\tau) = \sigma_s^2 e^{-\alpha|\tau|} \quad (13.2.7)$$

от аддитивного белого шума $\eta(t) = n(t)$ с характеристиками (10.2.13).

Учтем, что согласно выражению (13.2.5) переменная τ в уравнении (13.2.6) является положительной ($0 \leq \tau < t$). Полагая далее $\Delta = 0$, после подстановки выражений для корреляционных функций в (13.2.6) получим

$$\sigma_s^2 \int_0^t e^{-\alpha|\tau-x|} G_0(x) dx = \sigma_s^2 e^{-\alpha x} - \frac{1}{2} N_0 G_0(\tau). \quad (13.2.8)$$

Разобьем интервал интегрирования $(0, t)$ на два интервала $(0, \tau)$ и (τ, t) , в каждом из которых показательную функцию можно записать без модуля:

$$e^{-\alpha\tau} \int_0^\tau e^{\alpha x} G_0(x) dx + e^{\alpha\tau} \int_\tau^t e^{-\alpha x} G_0(x) dx = e^{-\alpha\tau} - \frac{N_0}{2\sigma_s^2} G_0(\tau). \quad (13.2.9)$$

Умножим левую и правую части на $e^{\alpha\tau}$ и затем дважды проинтегрируем по τ . В результате придем к следующему дифференциальному уравнению второго порядка:

$$G_0''(\tau) - \gamma^2 G_0(\tau) = 0, \quad \gamma^2 = \alpha^2 \left(1 + \frac{4\sigma_s^2}{\alpha N_0}\right). \quad (13.2.10)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$G_0(\tau) = c_1 e^{-\gamma\tau} + c_2 e^{\gamma\tau}, \quad (13.2.11)$$

где произвольные постоянные c_1 и c_2 определяются путем подстановки решения (13.2.11) в уравнение (13.2.9) и приравнивания коэффициентов при $e^{-\gamma\tau}$ и $e^{\gamma(t-\tau)}$.

Выполнив вычисления, найдем уравнения для определения коэффициентов c_1 и c_2 :

$$\frac{1}{\alpha - \gamma} c_1 + \frac{1}{\alpha + \gamma} c_2 = -1, \quad \frac{1}{\alpha + \gamma} e^{-\gamma t} c_1 + \frac{1}{\alpha - \gamma} e^{\gamma t} c_2 = 0.$$

Отсюда получим

$$c_1 = -\frac{(\alpha + \gamma)^2 (\alpha - \gamma) e^{2\gamma t}}{(\alpha + \gamma)^2 e^{2\gamma t} - (\alpha - \gamma)^2}, \quad c_2 = \frac{(\alpha + \gamma) (\alpha - \gamma)^2}{(\alpha + \gamma)^2 e^{2\gamma t} - (\alpha - \gamma)^2}. \quad (13.2.12)$$

Некоторые простые решения интегрального уравнения линейной фильтрации (13.2.6) для других случаев приведены в приложении III [17].

Для рассмотренного простейшего примера (экспоненциальной функции корреляции полезного сигнала и дельтокоррелированного аддитивного шума) уравнение решается сравнительно просто. Однако импульсную характеристику оптимального фильтра из-за различия в ней функций $e^{\alpha t}$ и $e^{2\gamma t}$ реализовать нелегко.

4. З. НЕЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Хотя общая теория нелинейной фильтрации охватывает разнообразные и весьма сложные задачи, для разъяснения применяемых методов рассмотрим простейший частный случай, для которого формулируем исходные предпосылки.

Пусть принимаемое колебание $\xi(t)$ представляет собой сумму импульса $s(t, \lambda(t))$, зависящего от одного «параметра» $\lambda(t)$, и стационарного белого шума $n(t)$:

$$\xi(t) = s(t, \lambda(t)) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (13.3.1)$$

Предполагается, что характеристики шума $n(t)$ известны и определяются формулой (10.2.13), а закон изменения параметра $\lambda(t)$ на интервале $(0, T)$ задан известным стохастическим дифференциальным уравнением, например, вида

$$\frac{d\lambda}{dt} + \alpha\lambda = n_1(t). \quad (13.3.2)$$

Здесь $n_1(t)$ — другой белый шум с известными характеристиками и α — заданный коэффициент.

Располагая этими априорными данными, нужно найти устройство, которое бы с наилучшей точностью воспроизводило изменяющийся во времени случайный параметр $\lambda(t)$. Иначе говоря, оптимальное устройство должно с наименьшей ошибкой следить за случаем процессом $\lambda(t)$.

Тот факт, что полезный сигнал $s(t, \lambda(t))$, как правило, зависит от интересующего нас параметра $\lambda(t)$ нелинейно, определяет нелинейный характер устройства оптимальной фильтрации.

В качестве критерия оптимальности будем применять критерий максимума апостериорной вероятности. Тогда, естественно, первый этап в решении данного примера состоит в вычислении апостериорной вероятности параметра $\lambda(t)$. С принципиальной точки зрения эту апостериорную вероятность можно найти в двух случаях: 1) когда параметр $\lambda(t)$ представляет собой марковский процесс и 2) когда параметр $\lambda(t)$ является нормальным случаем процессом.

По этим двум направлениям и развивалась теория нелинейной фильтрации.

Второе направление, развитое в работе [8], основано на использовании того, что случайный процесс $\lambda(t)$ является нормальным. При этом ответ дается интегральным уравнением, результат решения которого часто моделируется фильтрами с переменными параметрами. Ряд решенных практических примеров приведен в [9].

Первое направление было разработано Р. Л. Стратоновичем [10, 11]. Ввиду того, что соответствующие результаты будут использованы в дальнейшем, остановимся на этом направлении подробнее, изложив его применительно к сформулированному частному случаю [12].

Итак, предположим, что параметр $\lambda(t)$ на интервале $(0, T)$ является марковским процессом. Обозначим значения параметра $\lambda(t)$ в два близкоотстоящих момента времени: t и $t + \tau$, $\tau > 0$, соответственно через λ и λ_τ , а вероятность перехода — через $p_\tau(\lambda_\tau, \lambda) = p(\lambda_\tau, t, \lambda)$.

Будем интересоваться изменением вероятности перехода в зависимости от τ , считая t фиксированным. Возьмем очевидное начальное условие

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} p_\tau(\lambda_\tau, \lambda) = \delta(\lambda_\tau - \lambda), \quad (13.3.3)$$

где $\delta(z)$ — дельта-функция.

Как указывалось на стр. 125, вероятность перехода определяется уравнением Фоккера — Планка (3.19.7):

$$\frac{\partial p_\tau(\lambda_\tau, \lambda)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial \lambda_\tau} [K_1(\lambda_\tau) p_\tau] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda_\tau^2} [K_2(\lambda_\tau) p_\tau]. \quad (13.3.4)$$

Коэффициенты $K_1(\lambda_\tau)$ и $K_2(\lambda_\tau)$ находятся из дифференциального уравнения, описывающего поведение параметра $\lambda(t)$, по известным формулам (3.19.5):

$$K_1(\lambda_\tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\langle \lambda_\tau - \lambda \rangle}{\tau}, \quad K_2(\lambda_\tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\langle (\lambda_\tau - \lambda)^2 \rangle}{\tau}. \quad (13.3.5)$$

Для малых временных интервалов τ справедливо равенство $\partial p_\tau / \partial \tau = \Delta p_\tau / \tau$, где Δp_τ — приращение вероятности перехода за малое время τ . Поэтому соотношение (13.3.4) можно записать иначе:

$$\Delta p_\tau = -\tau \frac{\partial}{\partial \lambda_\tau} [K_1(\lambda_\tau) \delta(\lambda_\tau - \lambda)] + \frac{1}{2} \tau \frac{\partial^2}{\partial \lambda_\tau^2} [K_2(\lambda_\tau) \delta(\lambda_\tau - \lambda)] + \tau^2 \dots$$

Очевидно, что при малом τ вероятность перехода для момента времени $t + \tau$ равна начальной вероятности $\delta(\lambda_\tau - \lambda)$ в момент времени t плюс ее приращение Δp_τ за время τ :

$$\begin{aligned} p_\tau(\lambda_\tau, \lambda) &= \delta(\lambda_\tau - \lambda) - \tau \frac{\partial}{\partial \lambda_\tau} [K_1(\lambda_\tau) \delta(\lambda_\tau - \lambda)] + \\ &+ \frac{1}{2} \tau \frac{\partial^2}{\partial \lambda_\tau^2} [K_2(\lambda_\tau) \delta(\lambda_\tau - \lambda)] + \tau^2 \dots \end{aligned} \quad (13.3.6)$$

Это соотношение будет использовано несколько позже.

Перейдем теперь к вычислению апостериорной вероятности параметра $\lambda(t)$. Разобьем весь интервал наблюдения T на m элементарных интервалов одинаковой длительности $\Delta = T/m$, причем берем Δ настолько малым, чтобы выполнялось неравенство

$$\Delta \ll \tau_{k\lambda}, \quad (13.3.7)$$

где $\tau_{k\lambda}$ — время корреляции случайного процесса $\lambda(t)$.

При выполнении условия (13.3.7) параметр λ на каждом из элементарных интервалов можно считать практически постоянным и давным, например, его значению в конце рассматриваемого элементарного интервала.

При таком рассмотрении вся априорная информация о параметре λ дается совместной плотностью вероятности $W_m(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, где λ_i — значение параметра λ в конце i -го элементарного интервала, т. е. $\lambda_i = \lambda(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$. Согласно формуле (3.18.6) априорная вероятность $W_m(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ выражается через начальную вероятность $W(\lambda_1)$ и вероятность перехода:

$$\begin{aligned} W_m(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) &= p_\Delta(\lambda_m, \lambda_{m-1}) \times \\ &\times p_\Delta(\lambda_{m-1}, \lambda_{m-2}) \dots p_\Delta(\lambda_2, \lambda_1) W(\lambda_1). \end{aligned} \quad (13.3.8)$$

Запишем выражения совместных апостериорных плотностей вероятностей последовательно для значений параметра в конце 1-го интервала, в конце 1-го и 2-го интервалов, в конце 1-го, 2-го и 3-го интервалов и т. д. Обозначим эти апостериорные вероятности соответственно через $W_{ps}(\lambda_1)$, $W_{ps}(\lambda_1, \lambda_2)$, $W_{ps}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ и т. д.

Очевидно, что апостериорная вероятность значения параметра λ в конце 1-го элементарного интервала определяется формулой (11.3.25) и равна:

$$W_{ps}(\lambda_1) = k_1 W(\lambda_1) \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^\Delta [\xi(t) - s(t, \lambda_1)]^2 dt \right\},$$

где k_1 — несущественная произвольная постоянная, не зависящая от λ .

При записи совместной апостериорной вероятности для λ_1 и λ_2 нужно учесть два обстоятельства. Во-первых, апостериорные сведения, полученные на первом элементарном интервале, целесообразно использовать в качестве априорных для второго интервала. Во-вторых, необходимо также учесть априорно известный факт, что параметр λ изменяется с значения λ_1 до λ_2 , причем из условия (13.3.7) видно, что λ_1 и λ_2 коррелированы. Дополнительные априорные сведения о параметрах λ_1 и λ_2 даются условной вероятностью $W(\lambda_2|\lambda_1)$, которая согласно (3.18.2) совпадает с вероятностью перехода $W(\lambda_2|\lambda_1) = p_\Delta(\lambda_2, \lambda_1)$.

С учетом сказанного можем написать

$$W_{ps}(\lambda_1, \lambda_2) = k_2 W_{ps}(\lambda_1) p_\Delta(\lambda_2, \lambda_1) \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_{\Delta}^{2\Delta} [\xi(t) - s(t, \lambda_2)]^2 dt \right\} = \tilde{k}_2 p_\Delta(\lambda_2, \lambda_1) W(\lambda_1) \times \\ \times \prod_{i=1}^2 \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} [\xi(t) - s(t, \lambda_i)]^2 dt \right\}.$$

Аналогично поступаем при вычислении апостериорной вероятности $W_{ps}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Следует лишь иметь в виду, что для простого марковского процесса условное распределение λ_{i+1} зависит только от λ_i и не зависит от $\lambda_{i-1}, \lambda_{i-2}, \dots$. Поэтому все дополнительные априорные сведения, которые необходимо учесть, будут определяться вероятностью перехода $p_\Delta(\lambda_3, \lambda_2)$. Таким образом, можем написать

$$W_{ps}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = k_3 W_{ps}(\lambda_1, \lambda_2) p_\Delta(\lambda_3, \lambda_2) \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_{2\Delta}^{3\Delta} [\xi(t) - s(t, \lambda_3)]^2 dt \right\} = \tilde{k}_3 W_2(\lambda_1, \lambda_2) p_\Delta(\lambda_3, \lambda_2) \times \\ \times \prod_{i=1}^3 \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} [\xi(t) - s(t, \lambda_i)]^2 dt \right\}.$$

Здесь при написании последнего равенства была использована формула (13.3.8).

Если продолжить эти рассуждения, то для апостериорной вероятности первых $(v+1) \leq m$ значений λ_i получим формулу

$$W_{ps}(\lambda_1, \dots, \lambda_v, \lambda_{v+1}) = k_{v+1} W_p(\lambda_1, \dots, \lambda_{v-1}, \lambda_v) p_\Delta(\lambda_{v+1}, \lambda_v) \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_{v\Delta}^{(v+1)\Delta} [\xi(t) - s(t, \lambda_{v+1})]^2 dt \right\}. \quad (13.3.9)$$

Будем интересоваться лишь финальной апостериорной вероятностью, т. е. апостериорной вероятностью только последнего значения λ_{v+1} . Обозначим ее через $\tilde{W}_{v+1}(\lambda_{v+1}) = W_{ps}(\lambda_{v+1})$. Финальная апостериорная вероятность $\tilde{W}_{v+1}(\lambda_{v+1})$ характеризует информацию о последнем значении параметра λ_{v+1} после обработки реализации $\xi(t)$ на всех $(v+1)$ первых интервалах.

Для этого нужно проинтегрировать (усреднить) апостериорную вероятность вероятности (13.3.9) по всем v первым значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_v$, рассматривая их как несущественные. На основании условия согласованности (3.2.5) имеем

$$W_{ps}(\lambda_{v+1}) = \tilde{W}_{v+1}(\lambda_{v+1}) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} W_{ps}(\lambda_1, \dots, \lambda_v, \lambda_{v+1}) d\lambda_1 \dots d\lambda_v. \quad (13.3.10)$$

Подставив сюда выражение (13.3.9), получим последовательную цепочку преобразований одномерных апостериорных вероятностей:

$$\tilde{W}_{v+1}(\lambda_{v+1}) = k'_{v+1} \exp \left[\int_{v\Delta}^{(v+1)\Delta} F(t, \lambda_{v+1}) dt \right] \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{W}_v(\lambda_v) p_\Delta(\lambda_{v+1}, \lambda_v) d\lambda_v, \quad (13.3.11)$$

$$F(t, \lambda) = -\frac{1}{N_0} [\xi(t) - s(t, \lambda)]^2. \quad (13.3.12)$$

Заметим, что, как и при оценке параметров (см. стр. 484), следует различать энергетические и неэнергетические параметры. Если параметр $\lambda(t)$ является неэнергетическим и сигнал $s(t, \lambda)$ гармоничен, то в формуле (13.3.11) множитель

$$\exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_{v\Delta}^{(v+1)\Delta} [\xi^2(t) + s^2(t, \lambda)] dt \right\}$$

можно включить в постоянную k'_{v+1} и соответственно функцию $F(t, \lambda)$ определить равенством

$$F(t, \lambda) = \frac{2}{N_0} \xi(t) s(t, \lambda). \quad (13.3.13)$$

Если в формуле (13.3.6) положить $\lambda_\tau = \lambda_{\nu+1}$, $\lambda = \lambda_\nu$, $\tau = \Delta$, то для малых $\Delta \rightarrow 0$ можем написать

$$p_\Delta(\lambda_{\nu+1}, \lambda_\nu) = \delta(\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu) - \Delta \frac{\partial}{\partial \lambda_{\nu+1}} [K_1(\lambda_{\nu+1}) \delta(\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu)] + \\ + \frac{1}{2} \Delta \frac{\partial^2}{\partial \lambda_{\nu+1}^2} [K_2(\lambda_{\nu+1}) \delta(\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu)] + \Delta^2 \dots \quad (13.3.14)$$

Подставив выражение вероятности перехода из (13.3.14) в (13.3.11) и выполнив интегрирование с дельта-функцией, получим

$$\tilde{W}_{\nu+1}(\lambda_{\nu+1}) = k_{\nu+1} \exp \left[\int_{\nu \Delta}^{(\nu+1)\Delta} F(t, \lambda_{\nu+1}) dt \right] \left\{ \tilde{W}_\nu(\lambda_{\nu+1}) - \Delta \frac{\partial}{\partial \lambda_{\nu+1}} \times \right. \\ \left. \times [K_1(\lambda_{\nu+1}) \tilde{W}_\nu(\lambda_{\nu+1})] + \frac{1}{2} \Delta \frac{\partial^2}{\partial \lambda_{\nu+1}^2} [K_2(\lambda_{\nu+1}) \tilde{W}_\nu(\lambda_{\nu+1})] + \Delta^2 \dots \right\} \quad (13.3.15)$$

Кроме этого, при $\Delta \rightarrow 0$ экспоненциальный множитель в правой части (13.3.15) близок к единице и, следовательно,

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} k_{\nu+1} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \tilde{W}_{\nu+1}(\lambda_{\nu+1}) / \tilde{W}_\nu(\lambda_{\nu+1}) = 1.$$

Поэтому при достаточно малых Δ можно положить

$$k_{\nu+1} = 1 - \gamma \Delta, \quad \exp \left[\int_{\nu \Delta}^{(\nu+1)\Delta} F(t, \lambda_{\nu+1}) dt \right] = \\ = \exp [F(t, \lambda_{\nu+1}) \Delta] = 1 + F(t, \lambda_{\nu+1}) \Delta. \quad (13.3.16)$$

Во избежание недоразумений отметим, что при написании последнего соотношения использована симметризованная форма записи стохастических интегралов, предложенная Р. Л. Стратоновичем [13].

Подстановка соотношений (13.3.16) в (13.3.15) дает

$$\tilde{W}_{\nu+1}(\lambda_{\nu+1}) = [1 + (F - \gamma) \Delta + \gamma F \Delta^2] \left\{ \tilde{W}_\nu(\lambda_{\nu+1}) - \Delta \frac{\partial}{\partial \lambda_{\nu+1}} \times \right. \\ \left. \times [K_1(\lambda_{\nu+1}) \tilde{W}_\nu(\lambda_{\nu+1})] + \frac{1}{2} \Delta \frac{\partial^2}{\partial \lambda_{\nu+1}^2} [K_2(\lambda_{\nu+1}) \tilde{W}_\nu(\lambda_{\nu+1})] + \Delta^2 \dots \right\}$$

или иначе

$$\tilde{W}_{\nu+1}(\lambda_{\nu+1}) - \tilde{W}_\nu(\lambda_{\nu+1}) = \frac{1}{2} \Delta \frac{\partial^2}{\partial \lambda_{\nu+1}^2} [K_2(\lambda_{\nu+1}) \tilde{W}_\nu(\lambda_{\nu+1})] - \\ - \Delta \frac{\partial}{\partial \lambda_{\nu+1}} [K_1(\lambda_{\nu+1}) \tilde{W}_\nu(\lambda_{\nu+1})] + \Delta (F - \gamma) \tilde{W}_\nu(\lambda_{\nu+1}) + \Delta^2 \dots \quad (13.3.17)$$

Разделив обе части этого равенства на Δ и переходя к пределу при $\Delta \rightarrow 0$, получим, что одномерная апостериорная вероятность должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial \tilde{W}(t, \lambda)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} [K_2(\lambda) \tilde{W}] - \frac{\partial}{\partial \lambda} [K_1(\lambda) \tilde{W}] + [F(t, \lambda) - \gamma] \tilde{W}. \quad (13.3.18)$$

Чтобы определить не зависящую от λ постоянную γ , нужно проинтегрировать выражение (13.3.18) по всем значениям λ и учсть, что $\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \tilde{W}(t, \lambda) = 0$, и по условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \tilde{W}(t, \lambda)}{\partial t} d\lambda = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{W}(t, \lambda) d\lambda = 0.$$

Тогда получим

$$\gamma = \langle F(t, \lambda) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} F(t, \lambda) \tilde{W}(t, \lambda) d\lambda. \quad (13.3.19)$$

Следовательно, финальная апостериорная вероятность определяется следующим дифференциальным уравнением в частных производных:

$$\frac{\partial \tilde{W}(t, \lambda)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} [K_2(\lambda) \tilde{W}] - \frac{\partial}{\partial \lambda} [K_1(\lambda) \tilde{W}] + \\ + [F(t, \lambda) - \langle F(t, \lambda) \rangle] \tilde{W}. \quad (13.3.20)$$

Таким образом, если принятая реализация представляет собой единичную смесь сигнала и белого шума (13.3.1), причем интересующий нас случайный параметр сигнала $\lambda(t)$ является простым марковским стационарным процессом, то оптимальное фильтрующее устройство определяется уравнением (13.3.20). Это уравнение должно формировать апостериорную вероятность $\tilde{W}(t, \lambda)$ и определять значение $\lambda_m(t)$, соответствующее, например, максимуму апостериорной вероятности. Это значение $\lambda_m(t)$ принимается за истинное мгновенное значение параметра $\lambda(t)$, а дисперсия апостериорного распределения $\sigma_\lambda^2(t)$ будет характеризовать погрешность следования за параметром $\lambda(t)$.

Однако практическое осуществление этих операций оказывается весьма сложным. Поэтому ограничимся решением задачи в гауссовом приближении. Оно базируется на предположении, что апостериорная плотность вероятности является нормальной:

$$\tilde{W}(t, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\lambda^2(t)}} \exp\left\{-\frac{[\lambda(t) - \lambda_0(t)]^2}{2\sigma_\lambda^2(t)}\right\}. \quad (13.3.21)$$

Рассмотрение задачи в гауссовом приближении существенно упрощается, так как апостериорная плотность вероятности (13.3.21) определяется всего двумя параметрами: средним значением $\lambda_0(t)$, максимизирующими апостериорную вероятность, и дисперсией $\sigma_\lambda^2(t)$, характеризующей ширину апостериорного распределения. Поэтому вместо формирования и анализа апостериорной вероятности оптимальное фильтрующее устройство может определять только эти два параметра.

Как следует из рассуждений, приведенных в § 2 гл. 12, предположение о том, что апостериорная плотность вероятности является нормальной, в известной мере оказывается оправданным при больших отношениях сигнал/шум и нормальному шуме. Вследствие нормальности шума в рассматриваемом случае должно выполняться подобное условие. В общем виде гауссово приближение справедливо при условии $\sigma_\lambda \ll \Delta\lambda$, где $\Delta\lambda \approx s(t, \lambda)/\frac{\partial s(t, \lambda)}{\partial \lambda}$ — некоторый масштаб по λ .

В пределах малой «ширины» апостериорной вероятности $\sigma_\lambda(t)$ коэффициенты $K_1(\lambda)$, $K_2(\lambda)$ и $F(t, \lambda)$ будут мало изменяться и их можно представить первыми членами разложения в ряд Тейлора в окрестности точки λ_0 :

$$\left. \begin{aligned} K_1(\lambda) &= K_1(\lambda_0) + K'_1(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0), \quad K_2(\lambda) = K_2(\lambda_0), \\ F(t, \lambda) &= F(t, \lambda_0) + F'(t, \lambda_0)(\lambda - \lambda_0) + \frac{1}{2} F''(t, \lambda_0)(\lambda - \lambda_0)^2. \end{aligned} \right\} \quad (13.3.22)$$

Здесь и ниже штрихами обозначены производные по параметру λ .

Число учтенных членов ряда здесь выбрано исходя из того, что используемые разложения (13.3.22) должны находиться в согласии с нормальной плотностью вероятности (13.3.21), а не противоречить ей.

Отметим, кстати, что приведенные выражения для $K_1(\lambda)$ и $K_2(\lambda)$, означают, что априорно сам параметр λ в окрестности λ_0 изменяется по нормальному закону [см. выражение (3.19.19)].

Получим дифференциальные уравнения, определяющие $\lambda_0(t)$ и $\sigma_\lambda^2(t)$. Если подставить выражения (13.3.21) и (13.3.22) в исходное уравнение (13.3.20), то после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} -\frac{d\sigma_\lambda}{dt} + 2(\lambda - \lambda_0) \frac{d\lambda_0}{dt} + \frac{(\lambda - \lambda_0)^2}{\sigma_\lambda^2} \frac{d\sigma_\lambda^2}{dt} = \\ -[2\sigma_\lambda^2 K_1(\lambda_0) + K_2(\lambda_0) + 2\sigma_\lambda^2 \langle F(t, \lambda) \rangle - 2\sigma_\lambda^2 F(t, \lambda_0)] + \\ + 2(\lambda - \lambda_0) [K_1(\lambda_0) + \sigma_\lambda^2 F'(t, \lambda_0)] + \\ + (\lambda - \lambda_0)^2 \left[2K'_1(\lambda_0) + \frac{1}{\sigma_\lambda^2} K_2(\lambda_0) + \sigma_\lambda^2 F''(t, \lambda_0) \right]. \quad (13.3.23) \end{aligned}$$

Заметим, что первое слагаемое в квадратных скобках в правой части равенства (13.3.23) можно несколько упростить, если учесть усвоение

$$\langle F(t, \lambda) \rangle - F(t, \lambda_0) = \frac{1}{2} \sigma_\lambda^2 F''(t, \lambda_0),$$

которое получается в результате подстановки выражений (13.3.21) и (13.3.22) в формулу (13.3.19).

Приравняв члены при одинаковых степенях $(\lambda - \lambda_0)$ в левой и правой частях выражения (13.3.23), получим окончательные дифференциальные уравнения, определяющие $\lambda_0(t)$ и $\sigma_\lambda^2(t)$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\lambda_0}{dt} &= K_1(\lambda_0) + \sigma_\lambda^2(t) F'(t, \lambda_0), \\ \frac{d\sigma_\lambda^2}{dt} &= 2\sigma_\lambda^2 K'_1(\lambda_0) + K_2(\lambda_0) + \sigma_\lambda^4 F''(t, \lambda_0). \end{aligned} \right\} \quad (13.3.24)$$

Если $\lambda_0(t)$ принимается за оптимальную оценку параметра, то задача оптимальной нелинейной фильтрации состоит в совместном решении уравнений (13.3.24). Система, моделирующая эти уравнения, будет воспроизводить на выходе интересующий нас параметр $\lambda(t)$, отфильтрованный от помех оптимальным образом.

Основные уравнения нелинейной фильтрации (13.3.20) и (13.3.24) можно обобщить на случай другого шума и когда параметр $\lambda(t)$ является многомерным марковским процессом, т. е. сигнал зависит от нескольких параметров: $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, ... [11].

Пусть, например, сигнал $s(t, \lambda_1, \lambda_2)$ зависит от двух параметров: $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$. В данном случае уравнение (13.3.4) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_\tau(\lambda_{1\tau}, \lambda_{2\tau}, \lambda_1, \lambda_2)}{d\tau} = - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial \lambda_{i\tau}} [K_i(\lambda_{1\tau}, \lambda_{2\tau}) p_\tau] + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial \lambda_{i\tau} \partial \lambda_{j\tau}} [K_{ij}(\lambda_{1\tau}, \lambda_{2\tau}) p_\tau]. \quad (13.3.25) \end{aligned}$$

Теперь вместо (13.3.21) нужно использовать двумерную нормальную апостериорную плотность вероятности

$$\tilde{W}(t, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2\pi V \sigma_1^2 \sigma_2^2 - k^2} \exp \left\{ -\frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{2(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - k^2)} \left[\frac{(\lambda_1 - \lambda_{10})^2}{\sigma_1^2} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{2k(\lambda_1 - \lambda_{10})(\lambda_2 - \lambda_{20})}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} + \frac{(\lambda_2 - \lambda_{20})^2}{\sigma_2^2} \right] \right\},$$

где $k(t)$ — функция взаимной корреляции между параметрами.

Введем обозначение:

$$F(t, \lambda_1, \lambda_2) = -\frac{1}{N_0} [\xi(t) - s(t, \lambda_1, \lambda_2)]^2. \quad (13.3.26)$$

Тогда можно получить уравнения оптимальной нелинейной фильтрации следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\lambda_{10}}{dt} &= K_1 + \sigma_1^2 \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} + k \frac{\partial F}{\partial \lambda_2}, \\ \frac{d\lambda_{20}}{dt} &= K_2 + \sigma_2^2 \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} + k \frac{\partial F}{\partial \lambda_1}, \\ \frac{d\sigma_1^2}{dt} &= K_{11} + 2\sigma_1^2 \frac{\partial K_1}{\partial \lambda_1} + \sigma_1^4 \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_1^2} + k^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_2^2} + \\ &\quad + 2k\sigma_1^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} + 2k \frac{\partial K_1}{\partial \lambda_2}, \\ \frac{d\sigma_2^2}{dt} &= K_{22} + 2\sigma_2^2 \frac{\partial K_2}{\partial \lambda_2} + \sigma_2^4 \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_2^2} + k^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_1^2} + \\ &\quad + 2k\sigma_2^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_2 \partial \lambda_1} + 2k \frac{\partial K_2}{\partial \lambda_1}, \\ \frac{dk}{dt} &= K_{12} + k \left(\frac{\partial K_1}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial K_2}{\partial \lambda_2} \right) + k \left(\sigma_1^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_1^2} + \sigma_2^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_2^2} \right) + \\ &\quad + (\sigma_1^2 \sigma_2^2 + k^2) \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} + \sigma_1^2 \frac{\partial K_2}{\partial \lambda_1} + \sigma_2^2 \frac{\partial K_1}{\partial \lambda_2}. \end{aligned} \right\} \quad (13.3.27)$$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением частного случая, когда параметр $\lambda(t)$ представляет собой нормальный марковский процесс, т. е. описывается уравнением (13.3.2), в котором $n_1(t)$ — нормальный шум с нулевым средним значением и функцией корреляции

$$\langle n_1(t) n_1(t + \tau) \rangle = \frac{1}{2} N_1 \delta(\tau). \quad (13.3.28)$$

Как следует из (3.19.24), в данном случае $K_1(\lambda) = -\alpha\lambda$, $K_2(\lambda) = V_1/2$. Поэтому уравнения (13.3.24) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\lambda_0}{dt} &= -\alpha\lambda_0 + \sigma_\lambda^2(t) F'(t, \lambda_0), \\ \frac{d\sigma_\lambda^2}{dt} &= -2\alpha\sigma_\lambda^2 + \frac{1}{2} N_1 + \sigma_\lambda^4 F''(t, \lambda_0). \end{aligned} \right\} \quad (13.3.29)$$

Ниже эти уравнения будут применены к частным примерам. При этом основная цель состоит не в решении сложных практических задач, а в том, чтобы проиллюстрировать применение теории линейной фильтрации на простейших примерах. Будет показано, что в этих примерах теория позволяет получить устройства, которые известны и широко используются на практике. Несмотря на то, что рассмотрение примеров оказывается полезным в трех отношениях: 1) оно в некоторой мере демонстрирует принципиальные возможности теории и трудности строгого решения задач; 2) позволяет, насколько те или иные устройства приближаются к оптимальным, 3) позволяет установить оптимальные характеристики устройств и их отдельных элементов.

4. ФИЛЬТРАЦИЯ СЛУЧАЙНОЙ ФАЗЫ УЗКОПОЛОСНОГО СИГНАЛА И ФАЗОВАЯ АВТОПОДСТРОЙКА ЧАСТОТЫ

Применим уравнения оптимальной нелинейной фильтрации (13.3.20) и (13.3.24) к следующему практически важному случаю. Пусть параметром $\lambda(t)$ является блюздающая фаза $\varphi(t)$ узкополосного радиосигнала

$$s(t, \varphi) = A_0 \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]. \quad (13.4.1)$$

Амплитуда радиосигнала A_0 и его частота ω_0 считаются известными, а фаза $\varphi(t)$ — случайной (блюздающей):

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = n_1(t), \quad (13.4.2)$$

где $n_1(t)$ — белый шум с функцией корреляции

$$\langle n_1(t_1) n_1(t_2) \rangle = \frac{1}{2} N_1 \delta(t_2 - t_1). \quad (13.4.3)$$

Если не учитывать амплитудные флюктуации, то радиосигнал (13.4.1) описывает автоколебания генератора томсоновского типа, причем под $n_1(t)$ нужно понимать собственные флюктуации генератора.

Нетрудно убедиться, что применительно к данному случаю отдельные коэффициенты, входящие в уравнение (13.3.20), согласно (13.3.5), (13.3.13) и (13.3.19) равны:

$$\left. \begin{aligned} K_1(\varphi) &= 0, \quad K_2(\varphi) = \frac{1}{2} N_1, \\ \langle F(t, \varphi) \rangle &= \frac{2}{N_0} \xi(t) \int_{-\pi}^{\pi} s(t, \varphi) \tilde{W}(t, \varphi) d\varphi, \\ F(t, \varphi) &= \frac{2}{N_0} \xi(t) s(t, \varphi) = \frac{2A_0}{N_0} \xi(t) \times \\ &\times [\cos(\varphi - \varphi_0) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) - \\ &- \sin(\varphi - \varphi_0) \sin(\omega_0 t + \varphi_0)]. \end{aligned} \right\} \quad (13.4.4)$$

Поэтому уравнение (13.3.20) принимает вид:

$$\frac{\partial \tilde{W}(t, \varphi)}{\partial t} = \frac{1}{4} N_1 \frac{\partial^2 \tilde{W}(t, \varphi)}{\partial \varphi^2} + [F(t, \varphi) - \langle F(t, \varphi) \rangle] \tilde{W}(t, \varphi). \quad (13.4.5)$$

Покажем, что оптимальным устройством для выделения ближайшей фазы радиосигнала, принимаемого на фоне аддитивного белого шума, является фазовая автоподстройка частоты (ФАПЧ).

При этом не будем заранее пользоваться гауссовым приближением, а, базируясь на предварительном знании статистической динамики ФАПЧ [14], решим данную задачу при несколько более общих исходных предпосылках. Они физически адекватны характеру рассматриваемой задачи и в принципе охватывают нестационарный режим работы; в стационарном режиме получаются результаты работы [15]. Рассматривая переход от нестационарного режима к стационарному, можно высказать определенные соображения о пределах применимости гауссова приближения в теории нелинейной фильтрации.

Приведем некоторые предварительные сведения о работе ФАПЧ при наличии флюктуационных помех. Поскольку частота ω_0 принимаемого сигнала $s(t, \varphi)$ предполагается заранее известной, то частоту колебаний синхронизируемого генератора можно предварительно установить равной ω_0 . Поэтому в дальнейшем будем считать, что начальная расстройка по частоте равна нулю. Обозначим фазу колебаний синхронизируемого генератора через $\varphi_0 = \varphi_0(t)$.

Пусть в момент времени $t = 0$ на схему ФАПЧ начинает действовать принятное колебание $\xi(t)$. Если бы шум $n(t)$ отсутствовал и фаза сигнала была бы постоянной $\varphi(t) = \varphi(0) = \text{const}$, то после включения синхронизирующего сигнала фаза φ_0 стремилась бы к стационарному синхронному значению $\varphi(0)$. Так как начальная фаза сигнала $\varphi(0)$ хотя и постоянна, но заранее неизвестна, то в ходе установления плотность вероятности разности фаз $\Delta\varphi_0 = \varphi(0) - \varphi_0$ изменяется от равномерной $\tilde{W}(\Delta\varphi_0, 0) = 1/2\pi$ при

до дельтообразной $\tilde{W}(\Delta\varphi_0, \infty) = \delta(\Delta\varphi_0)$ в пределе при $t \rightarrow \infty$. Наличие флюктуационного шума $n(t)$ приводит к тому, что стационарная плотность вероятности из дельтообразной превращается в другую, а именно [16]:

$$\tilde{W}(\varphi - \varphi_0, \infty) = \frac{1}{2\pi I_0(D)} e^{D \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad -\pi \leq \varphi - \varphi_0 \leq \pi, \quad (13.4.6)$$

где $I_0(z)$ — функция Бесселя, а коэффициент D определяется отношением сигнал/шум на входе и параметрами схемы ФАПЧ.

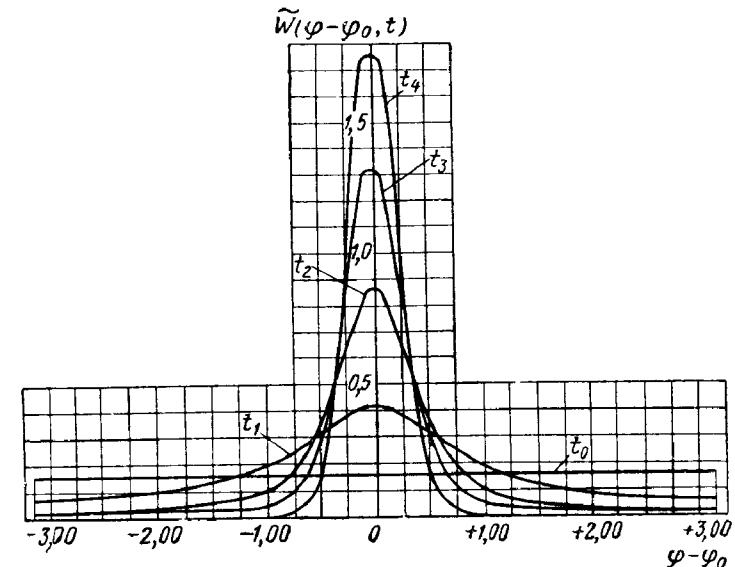


Рис. 13.2. Характер изменения плотности вероятности разности фаз во времени.

Таким образом, в процессе установления распределение разности фаз $\tilde{W}(\varphi - \varphi_0, t)$ проходит все этапы эволюции от начального равномерного до конечного стационарного (13.4.6). Характер изменения плотности вероятности разности фаз во времени иллюстрируется на рис. 13.2, на котором приведен вид плотностей вероятностей для пяти моментов времени: $t_4 > t_3 > t_2 > t_1 > t_0 = 0$.

Примем, что плотность вероятности вида (13.4.6) с изменяющимся коэффициентом D описывает финальную апостериорную вероятность на всех этапах слежения за фазой $\varphi(t)$ принимаемого сигнала, начиная с момента включения до установления стационарного режима, причем оценочное значение фазы φ_0 и параметр D изменяются во времени, т. е. $\varphi_0 = \varphi_0(t)$ и $D = D(t)$. Следовательно, полагаем, что применительно к рассматриваемому конкретному

случаю финальная апостериорная вероятность, входящая в основное уравнение (13.4.5), имеет вид:

$$\begin{aligned}\tilde{W}(\varphi, t) &= \tilde{W}(\varphi - \varphi_0, t) = \\ &= \frac{1}{2\pi I_0(D)} e^{D \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad -\pi \leq \varphi - \varphi_0 \leq \pi.\end{aligned}\quad (13.4.7)$$

Основанием для такого предположения является то, что формула (13.4.7) находится в согласии с кривыми рис. 13.2. Действительно, если при $t \geq 0$ параметр D очень мал ($D \ll 1$), то, используя приближенные равенства $\exp[D \cos(\varphi - \varphi_0)] \approx 1$, $I_0(D) \approx 1$ при $D \ll 1$, из (13.4.7) получим равномерное распределение разности фаз. В тех случаях, когда при достаточно больших t параметр D оказывается большим ($D \gg 1$) и обеспечивается хорошее слаживание за фазой ($\varphi - \varphi_0 \ll 1$), на основании известных соотношений

$$\cos(\varphi - \varphi_0) \approx 1 - \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_0)^2, \quad I_0(D) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^D,$$

из (13.4.7) получим нормальную плотность вероятности

$$\tilde{W}(\varphi, t) = \frac{1}{\sigma_\varphi \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\varphi - \varphi_0)^2}{2\sigma_\varphi^2}\right], \quad \sigma_\varphi^2 = \frac{1}{D}. \quad (13.4.8)$$

Финальная апостериорная вероятность (13.4.7) определяется двумя параметрами φ_0 и D . Получим дифференциальные уравнения для определения этих параметров.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$z(t, \varphi) = \ln \tilde{W}(t, \varphi) = D \cos(\varphi - \varphi_0) - \ln[2\pi I_0(D)]. \quad (13.4.9)$$

Нетрудно убедиться, что основное уравнение (13.4.5) для функции $z(t, \varphi)$ имеет вид:

$$\frac{\partial z(t, \varphi)}{\partial t} = \frac{1}{4} N_1 [D^2 \sin^2(\varphi - \varphi_0) - D \cos(\varphi - \varphi_0)] + F(t, \varphi) - \langle F(t, \varphi) \rangle. \quad (13.4.10)$$

Функция z зависит от t через параметры $\varphi_0 = \varphi_0(t)$ и $D = D(t)$. Поэтому из (13.4.9) получим

$$\frac{\partial z}{\partial t} = D \cos(\varphi - \varphi_0) - \dot{\varphi}_0 D \sin(\varphi - \varphi_0) - D \frac{I_1(D)}{I_0(D)}, \quad (13.4.11)$$

так как для модифицированных функций Бесселя нулевого и первого порядков выполняется равенство $I_0'(x) = I_1(x)$. В правой части (13.4.11) точкой сверху обозначены производные по времени.

Воспользовавшись плотностью вероятности (13.4.7) и двумя последними выражениями (13.4.4), получим

$$\langle F(t, \varphi) \rangle = \frac{2A_0 I_1(D)}{N_0 I_0(D)} \xi(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (13.4.12)$$

и как

$$\begin{aligned}\langle \cos(\varphi - \varphi_0) \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\varphi - \varphi_0) \tilde{W}(t, \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi I_0(D)} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \psi e^{D \cos \psi} d\psi = \frac{I_1(D)}{I_0(D)}, \\ \langle \sin(\varphi - \varphi_0) \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\varphi - \varphi_0) \tilde{W}(t, \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi I_0(D)} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \psi e^{D \cos \psi} d\psi = 0.\end{aligned}$$

Приравнивая правые части соотношений (13.4.10) и (13.4.11) и подставив выражения для $F(t, \varphi)$ и $\langle F(t, \varphi) \rangle$ из (13.4.4) и (13.4.12), получим

$$\begin{aligned}D \cos(\varphi - \varphi_0) - \varphi_0 D \sin(\varphi - \varphi_0) - D \frac{I_1(D)}{I_0(D)} &= \\ = \frac{1}{8} N_1 D [D - D \cos 2(\varphi - \varphi_0) - 2 \cos(\varphi - \varphi_0)] + \\ \frac{2A_0}{N_0} \xi(t) [\cos(\varphi - \varphi_0) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) - \sin(\varphi - \varphi_0) \sin(\omega_0 t + \varphi_0)] - \\ - \frac{2A_0 I_1(D)}{N_0 I_0(D)} \xi(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0).\end{aligned} \quad (13.4.13)$$

Производная от оценки $\varphi_0(t)$ входит в это равенство лишь в качестве множителя при $\sin(\varphi - \varphi_0)$. Приравнивая коэффициенты при $\sin(\varphi - \varphi_0)$ в обеих частях равенства (13.4.13), получим дифференциальное уравнение для определения $\varphi_0(t)$:

$$\dot{\varphi}_0 + \frac{2A_0}{N_0 D} \xi(t) \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = 0. \quad (13.4.14)$$

Так как равенство (13.4.13) должно выполняться при всех возможных значениях оценки φ_0 , то оно, в частности, должно выпол-

няться и при $\varphi = \varphi_0$. Полагая $\varphi = \varphi_0$, из (13.4.13) получим следующее дифференциальное уравнение для параметра D :

$$D + \frac{1}{4} N_1 D f(D) = \frac{2A_0}{N_0} \xi(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (13.4.15)$$

где

$$f(D) = \frac{I_0(D)}{I_0(D) - I_1(D)}. \quad (13.4.16)$$

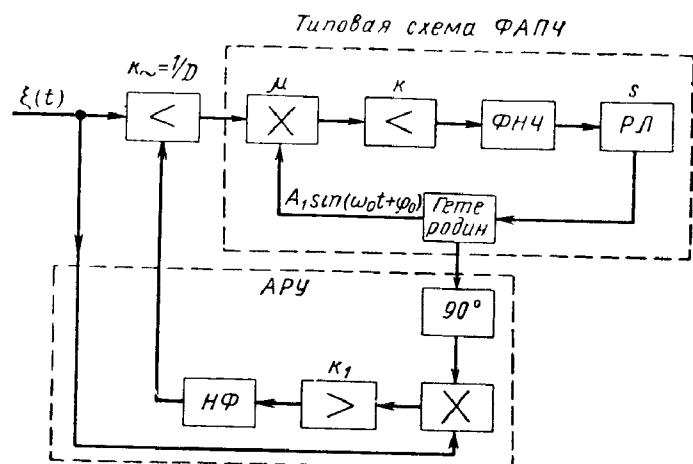


Рис. 13.3. Оптимальная схема ФАПЧ.

Введем в рассмотрение мгновенную ошибку слежения за фазой сигнала

$$\varepsilon_\varphi(t) = \varphi_0(t) - \varphi(t). \quad (13.4.17)$$

Тогда уравнение (13.4.14) с учетом (13.4.2) принимает вид

$$\varepsilon_\varphi + \frac{2A_0}{N_0 D} \xi(t) \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -n_1(t).$$

Это уравнение можно записать в форме, характерной для обычной фазовой автоподстройки частоты [17]:

$$\varepsilon_\varphi + A_1 \mu s k \frac{1}{D} \xi(t) \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -n_1(t), \quad k = \frac{2A_0}{A_1 N_0 s \mu}. \quad (13.4.18)$$

Если бы в уравнении (13.4.18) параметр D был постоянным, то оно моделировалось бы типовой схемой ФАПЧ, представленной в верхней части рис. 13.3. Она состоит из умножителя с коэффициентом пересчета μ , усилителя с коэффициентом усиления k , фильтра низкой частоты (ФНЧ), лампы реактивного сопротивления с кру-

той преобразования s и гетеродина, вырабатывающего гармоничное колебание $A_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$.

Однако в общем случае параметр D , зависящий от отношения сигнал/шум, изменяется во времени. Поэтому для полного моделирования уравнений (13.4.14) и (13.4.15) типовую схему ФАПЧ надо дополнить усилителем с переменным коэффициентом усиления $k \sim 1/D$. В соответствии с уравнением (13.4.15) коэффициент усиления надо регулировать схемой АРУ, принципиальная схема которой в нижней части рис. 13.3. Она состоит из фазовращателя на 90° , умножителя, усилителя и нелинейного фильтра (НФ), характеристика которого определяется выражением (13.4.16) и представлена на рис. 13.4 [18].

На основании асимптотических представлений функций Бесселя (7.5.4) и (7.5.5) имеем $f(D) \approx 1$ при $D \ll 1$, $f(D) \approx 2D$ при $D \gg 1$. Поэтому для малых и больших D уравнение (13.4.15) можно несколько упростить. В частности, для больших D оно примет вид:

$$D + \frac{1}{2} N_1 D^2 = \frac{2A_0}{N_0} \xi(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad D \gg 1. \quad (13.4.19)$$

Рис. 13.4. Характеристика нелинейного фильтра.

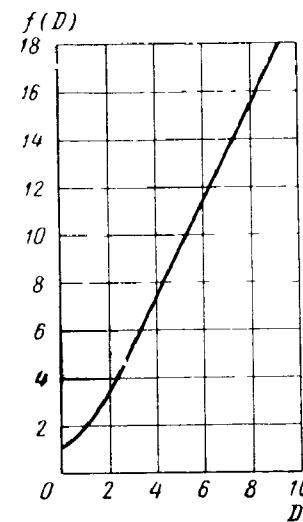
Если в уравнениях (13.4.14) и (13.4.19) перейти от параметра D к постериорной дисперсии $\sigma_\varphi^2(t) = 1/D(t)$, то получим следующие уравнения нелинейной фильтрации:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi}_0 + \frac{2A_0}{N_0} \sigma_\varphi^2(t) \xi(t) \sin(\omega_0 t + \varphi_0) &= 0, \\ \dot{\sigma}_\varphi^2 + \frac{2A_0}{N_0} \sigma_\varphi^4 \xi(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) &= \frac{1}{2} N_1, \end{aligned} \right\}, \quad D \gg 1. \quad (13.4.20)$$

Путем подстановки значений коэффициентов $K_1(\varphi)$ и $K_2(\varphi)$ из (13.4.4) в (13.4.20) нетрудно проверить, что уравнения (13.4.20) точно совпадают с уравнениями нелинейной фильтрации в гауссовом приближении.

В стационарном режиме работы при больших отношениях сигнал/шум типовую схему ФАПЧ (рис. 13.5) можно рассматривать как квазиоптимальное приближение к наилучшему устройству, опередяющему за случайнай фазой радиосигнала.

Действительно, в стационарном состоянии при слабом шуме параметр $D(t)$ будет flуктуировать около некоторого постоянного сред-



него значения $D_0 = \text{const}$. Если принять $D(t) = D_0$, то отпадает необходимость в дополнительном усилителе (k_\sim) и схеме АРУ. При этом коэффициент усиления в типовой схеме следует взять равным

$$k_0 = 2A_0/A_1 N_0 D_0 s\mu. \quad (13.4.21)$$

Некоторая погрешность, связанная с заменой D на D_0 , окупается упрощением оптимальной схемы.

Для определения величины D_0 нужно обратиться ко второму уравнению (13.4.20), которое является нелинейным стохастическим дифференциальным уравнением. Хотя при малом шуме можно пред-

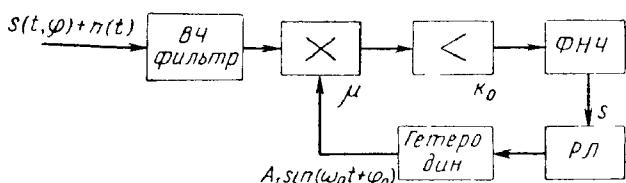


Рис. 13.5. Квазиоптимальная схема ФАПЧ ($D \gg 1$).

ложить стройную процедуру последовательных приближений с использованием малого параметра [15], оценим $D_0 = 1/\sigma_\phi^2$ путем следующих нестрогих упрощений. Так как в стационарном состоянии дисперсия не должна зависеть от времени, то $\sigma_\phi = \sigma_0 = 0$. Учитывая малость шума $n(t)$, положим $\cos(\phi - \phi_0) \approx 1$ и отбросим колебательный член с двойной частотой $2\omega_0$. Последнее оправдывается тем, что в цепи обратной связи ФАПЧ в качестве фильтра применяют низкочастотные фильтры, не пропускающие колебания с частотой $2\omega_0$. После этих упрощений из второго уравнения (13.4.20) получим

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{D_0} = \left(\frac{N_0 N_1}{2A_0^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (13.4.22)$$

Подставив это значение D_0 в (13.4.21), определяем коэффициент усиления

$$k_0 = \frac{1}{A_1 s\mu} \left(2 \frac{N_1}{N_0} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (13.4.23)$$

Формула (13.4.23) показывает, что оптимальное значение коэффициента усиления k_0 при других фиксированных параметрах прямо пропорционально корню квадратному из отношения интенсивности блуждания фазы сигнала к интенсивности аддитивного шума и не зависит от амплитуды сигнала.

Заметим, что основные уравнения нелинейной фильтрации (13.4.14) и (13.4.15) выше были получены в предположении, что начальная расстройка между частотой полезного сигнала и колебаниями гетеродина равна нулю. Реализовать практически этот случай можно лишь тогда, когда частота сигнала ω_0 постоянна и абсолютно известна, что, как правило, не имеет места в реальных условиях. Наличие случайной начальной расстройки учитывается § 5.

13.5. ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ЧАСТОТЫ УЗКОПОЛОСНЫХ СИГНАЛОВ

Рассмотрим задачу оптимального приема узкополосных сигналов с частотной модуляцией. Предположим, что радиосигнал

$$s = (t, \varphi) = A_0 \cos [\omega_0 t + \varphi(t)] \quad (13.5.1)$$

имеет постоянные амплитуду A_0 и частоту ω_0 , а фаза $\varphi(t)$ представляет собой компоненту двумерного марковского процесса:

$$\dot{\varphi} = \Omega, \quad \Omega = -\alpha\Omega + n_1(t). \quad (13.5.2)$$

Здесь $n_1(t)$ — нормальный белый шум с дельта-функцией корреляции (13.4.3). Полезным сообщением является процесс изменения частоты $\Omega(t)$, причем согласно второму уравнению (13.5.2) Ω есть нормальный марковский процесс. В данном случае $\Omega(t)$ не входит непосредственно в выражение для сигнала (13.5.1).

Решим задачу оптимального выделения сообщения $\Omega(t)$ при приеме сигнала $s(t, \varphi)$ на фоне аддитивного нормального белого шума $n(t)$.

По практическому содержанию указанная задача наиболее близко подходит к проблеме измерения допплеровского смещения частоты узкополосных сигналов. При этом α есть ширина спектра допплеровских флуктуаций, а $(N_1/4\alpha)^{1/2}$ — среднее квадратичное отклонение частоты. Точно так же ставится задача приема частотно модулированных радиосигналов при условии, что сообщение представляется собой экспоненциально-коррелированный случайный процесс. В этом случае α есть ширина спектра сообщения, а $N_1/4\alpha^2$ — индекс модуляции.

Ограничимся решением задачи в гауссовом приближении. При этом структура оптимального приемника будет определяться первыми двумя уравнениями (13.3.27), а его параметры — тремя последними. Тот факт, что решения этих трех уравнений в общем случае зависят от времени, означает, что оптимальный приемник должен иметь переменные параметры. Для упрощения результатов и реализации оптимального приемника произведем усреднение

коэффициентов в уравнениях для σ_1 , σ_2 , k [15], и будем интересоваться только их стационарными значениями.

Применимально к рассматриваемой задаче имеем

$$\left. \begin{aligned} \xi(t) &= s(t, \varphi) + n(t), F(t, \varphi) = \frac{2}{N_0} \xi(t) A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi), \\ K_1 &= \Omega, K_2 = -\alpha \Omega, K_{11} = K_{12} = 0, K_{22} = \frac{1}{2} N_1, \\ \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_1^2} \right\rangle &= -\frac{A_0^2}{N_0}. \end{aligned} \right\} \quad (13.5.3)$$

После усреднения последние три уравнения системы (13.3.27) можно записать в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} 2k - \sigma_1^4 K &= 0, \\ \frac{1}{2} N_1 - 2\alpha\sigma_2^2 - k^2 K &= 0, \\ \sigma_2^2 - \alpha k - k\sigma_1^2 K &= 0. \end{aligned} \right\}, \quad K = \frac{A_0^2}{N_0}. \quad (13.5.4)$$

Эти уравнения имеют следующее решение

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1^2 &= \frac{\alpha}{K} (\sqrt{1+2Q} - 1), \\ \sigma_2^2 &= \frac{\alpha^3}{K} (1+Q-\sqrt{1+2Q}) \sqrt{1+2Q}, \\ k &= \frac{\alpha^2}{K} (1+Q-\sqrt{1+2Q}). \end{aligned} \right\} \quad (13.5.5)$$

Здесь величина Q характеризует отношение сигнал/шум и равна

$$Q = \frac{A_0}{\alpha^2} \sqrt{\frac{N_1}{N_0}}. \quad (13.5.6)$$

Перейдем к выяснению структуры оптимального приемника. С учетом соотношений (13.5.3) запишем первые два уравнения (13.3.27):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi_0}{dt} &= \Omega_0 - \sigma_1^2 \frac{2A_0}{N_0} \xi(t) \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \\ \frac{d\Omega_0}{dt} &= -\alpha \Omega_0 - k \frac{2A_0}{N_0} \xi(t) \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \end{aligned} \right\} \quad (13.5.7)$$

Учитывая, что перемножение принятого колебания $\xi(t)$ с сигналом $A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ может быть выполнено при помощи фазового детектора, уравнения (13.5.7) можно трактовать как уравнения системы фазовой автоподстройки частоты.

соответствующая схема приведена на рис. 13.6. В ее состав входит местный генератор (Γ), вырабатывающий напряжение $s(\omega_0 t + \varphi_0)$, перемножитель (фазовый детектор) с коэффициентом передачи μ , два усилителя с коэффициентами усиления k_1 и k_2 , инерционное звено и сумматор, образующие параллельный цепь (на рисунке он обведен пунктиром) и, наконец, управитель

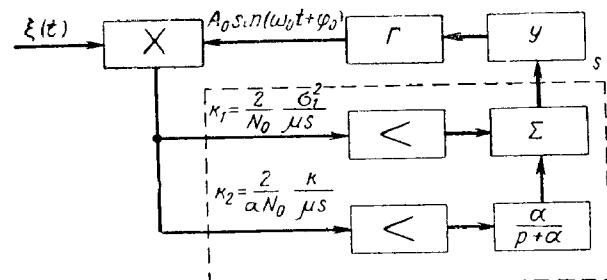


Рис. 13.6. Оптимальная схема ФАПЧ.

, который изменяет частоту местного генератора пропорционально напряжению на выходе фильтра. Согласно (13.5.7) оценочное значение сообщения $\Omega_0(t)$ реализуется на выходе инерционного звена (интегрирующей цепи RC).

Параллельный фильтр системы может быть заменен последовательным. Два варианта такого фильтра, называемого пропорционально-интегрирующим, показаны на рис. 13.7. Последовательный с ним должен быть включен усилитель с коэффициентом передачи $1 + k/\mu s N_0$. Отношение

противлений $R_1/(R+R_1)$ в схеме рис. 13.7, а или отношение емкостей $C_1/(C+C_1)$ в схеме рис. 13.7, б должно равняться $\alpha\sigma_1^2/(k+\alpha\sigma_1^2)$.

Можно показать, что в гауссовом приближении рассматриваемая схема остается оптимальной и в том случае, когда амплитуда сигнала A_0 не постоянна, а изменяется во времени. Однако теперь ей нужно дополнить автоматической регулировкой уровня шума, поступающего на фазовый детектор [19,20]. Параметры ФАПЧ и величины σ_1^2 и σ_2^2 сохраняются прежними, а величина K в формулах (13.5.4) и (13.5.5) следует определять иначе:

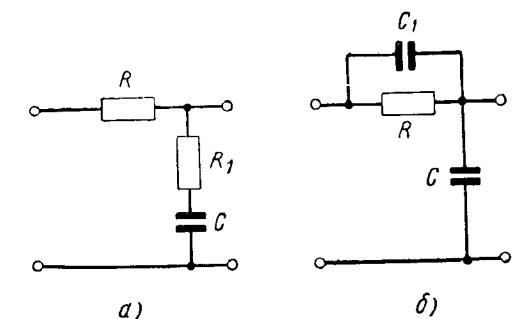


Рис. 13.7. Две схемы пропорционально-интегрирующего фильтра.

§ 6. СИНХРОННЫЙ ПРИЕМ АМПЛИТУДНО-МОДУЛИРОВАННОГО РАДИОСИГНАЛА

Выясним схему оптимального приемника для фильтрации белого шума сообщения $m(t)$, когда принимаемый радиосигнал имеет вид:

$$s(t, m) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = [A_0 + m(t)] \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (13.6.1)$$

Здесь A_0 , ω_0 и φ_0 предполагаются известными постоянными величинами, а сообщение $m(t)$ представляет собой случайный марковский процесс, описываемый уравнением вида (13.3.2):

$$\dot{m} + \alpha m = n_1(t), \quad \langle n_1(t) n_1(t + \tau) \rangle = \frac{1}{2} N_1 \delta(\tau). \quad (13.6.2)$$

В данном случае параметр $m(t)$ является энергетическим функцией $F(t, m)$ определяется формулой (13.3.12):

$$\begin{aligned} F(t, m) &= -\frac{1}{N_0} [\xi(t) - s(t, m)]^2 = \\ &= -\frac{1}{N_0} [\xi(t) - (A_0 + m) \cos(\omega_0 t + \varphi_0)]^2. \end{aligned}$$

Если в функции $F(t, m)$ отбросить вибрационный член с двойной частотой (что практически легко реализуется при помощи линейного фильтра), то

$$F(t, m) = -\frac{1}{N_0} \left[\xi^2(t) - 2(A_0 + m) \xi(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{1}{2} (A_0 + m)^2 \right]. \quad (13.6.3)$$

Подставив в (13.3.29) значения производных функции $F(t, m)$ при $m = m_0$, получим уравнения оптимальной фильтрации:

$$\left. \begin{aligned} \dot{m}_0 + \left(\alpha + \frac{1}{N_0} \sigma_m^2 \right) m_0 &= \frac{2}{N_0} \sigma_m^2 \left[\xi(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) - \frac{1}{2} A_0 \right], \\ \sigma_m^2 + 2\alpha\sigma_m^2 + \frac{1}{N_0} \sigma_m^4 &= \frac{1}{2} N_1. \end{aligned} \right\} \quad (13.6.4)$$

Решая второе уравнение (13.6.4), получим следующее выражение для апостериорной дисперсии [21]:

$$\sigma_m^2(t) = N_0 (e^{2\gamma t} - 1)^{-1} [(\gamma + \alpha) + (\gamma - \alpha) e^{2\gamma t}], \quad \gamma = \alpha \sqrt{1 + \frac{N_1}{2\alpha^2 N_0}}. \quad (13.6.5)$$

Полагая $\gamma t \gg 1$, из (13.6.5) находим стационарное значение дисперсии

$$\sigma_0^2 = N_0 (\gamma - \alpha) = \alpha N_0 \left(\sqrt{1 + \frac{N_1}{2\alpha^2 N_0}} - 1 \right). \quad (13.6.6)$$

Так как следует из (13.6.5), в первом уравнении (13.6.4) дисперсия $\sigma_m^2(t)$ в общем случае зависит от времени. Однако если заменить $\sigma_m^2(t)$ на $\sigma_0^2 = \text{const}$, то первое уравнение (13.6.4) принимает вид:

$$m_0 + \gamma m_0 = \frac{2}{N_0} \sigma_0^2 \left[\xi(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) - \frac{1}{2} A_0 \right]. \quad (13.6.7)$$

Уравнение (13.6.7) моделируется синхронным приемником (рис. 13.8). Он содержит умножитель, на который воздействует синхронное колебание $\xi(t)$ и гармоническое колебание $A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ синхронного гетеродина (СГ). Напряжение с выхода

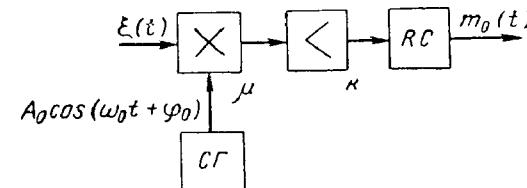


Рис. 13.8. Синхронный радиоприемник.

умножителя, смещенное на постоянную величину $0.5A_0$ подается на усилитель и интегрирующую цепочку RC с постоянной времени $1/RC$. Усилитель имеет коэффициент усиления

$$k = 2 \sigma_0^2 / \gamma N_0. \quad (13.6.8)$$

Зависимость коэффициента усиления k от постоянной γ объясняет тем, что в правую часть дифференциального уравнения, определяющего напряжение на емкости цепочки RC , входит не просто действующее напряжение $\eta(t)$, а величина $\gamma \eta(t)$ [см., например, (6.11)].

Напряжение на выходе цепочки RC дает оценку величины $m(t)$. Рассмотренные примеры дают представление о круге задач, которые позволяет решать теория нелинейной фильтрации, и практической ценности получаемых результатов. Можно сказать, что теория нелинейной фильтрации позволяет составить структурные схемы оптимальных систем передачи непрерывной информации для многих практических интересных систем радиосвязи и оценить минимально достижимые погрешности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н. Интерполирование и экстраполирование одномерных случайных последовательностей. «Известия АН СССР», сер. математическая, 1941, № 5.

- 2 Wiener N Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. John Wiley, 1949
- 3 Яглом А М Введение в теорию стационарных случайных функций УМН, 1952, вып 5 (51).
- 4 Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. Физматгиз, 1960.
5. Лэнинг Дж. Х., Бэттин Р. Г. Случайные процессы в задачах автоматического управления. Пер. с англ. Изд-во иностранной литературы, 1958
- 6 Солодовников В. В. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления Физматгиз, 1960.
7. Амантов И. Н. Применение теории решений к задачам обнаружения сигналов и выделения сигналов из шумов. ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1958.
8. Большаков И. А., Репин В. Г. Вопросы нелинейной фильтрации. «Автоматика и телемеханика», 1961, № 4.
9. Бакут П. А., Большаков И. А., Герасимов Б. М., Курикша А. А., Репин В. Г., Тартаковский Г. П., Широков В. В. Вопросы статистической теории радиолокации, т. II. Изд-во «Советское радио», 1964.
10. Стратонович Р. Л. К теории оптимальной нелинейной фильтрации случайных функций. «Теория вероятностей и ее применения», 1959, № 2.
11. Стратонович Р. Л. Применение теории процессов Маркова для оптимальной фильтрации сигналов. «Радиотехника и электроника», 1960, № 11.
12. Тихонов В. И. Нелинейная фильтрация и квазиоптимальный характер фазовой автоподстройки частоты. «Техническая кибернетика», 1965, № 2.
13. Стратонович Р. Л. Новая форма стохастических интегралов и уравнений. «Вестник Московского университета», сер. математ., механ., 1964, № 1.
14. Тихонов В. И. Влияние флуктуаций на точность работы устройств синхронизации УФН, 1964, в. 4.
15. Кульман Н. К., Стратонович Р. Л. Фазовая автоподстройка частоты и оптимальное измерение параметров узкополосного сигнала с непостоянной частотой в шуме. «Радиотехника и электроника», 1964, № 1.
- 16 Тихонов В. И. Работа фазовой автоподстройки частоты при наличии шумов. «Автоматика и телемеханика», 1960, № 3.
- 17 Тихонов В. И. Влияние шумов на работу схемы фазовой автоподстройки частоты. «Автоматика и телемеханика», 1959, № 9.
18. Тихонов В. И. Основные статистические характеристики канала синхронизации. «Электросвязь», 1966, № 4.
19. Van Trees H. L. Analog communication over randomly-time-varying channels «Wescon—64», pt.4.
20. Бакаев Ю. Н., Гуж А. А. Оптимальный прием сигналов частотной модуляции в условиях эффекта Доппеля. «Радиотехника и электроника», 1965, № 1.
21. Кульман Н. К. Оптимальное выделение амплитудно-модулированного сигнала из шумов при помощи синхронного детектирования. «Радиотехника и электроника», 1964, № 5
22. Lindsey W C. Optimal coherent linear demodulation. Trans. IEEE 1965, COM—13, № 2.

Глава 14

ФОРМИРОВАНИЕ И ПРИЕМ СИГНАЛОВ С ВНУТРИПУЛЬСНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

§ 1. ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗОНДИРУЮЩИХ СИГНАЛОВ

Конкретизируем некоторые общие положения, изложенные в предыдущих главах, применительно к радиолокации. В частности, рассмотрим подробнее теорию зондирующих сигналов.

Наиболее важными являются следующие характеристики зондирующего сигнала.

1. Ширина спектра Δf , определяющая разрешающую способность по дальности. При правильно выбранной форме спектра зондирующего сигнала временная длительность сигнала на выходе радиотракта приближенно равна $1/\Delta f$, причем максимальное отношение сигнал/шум в пике равно $2E/N_0$.

2. Длительность сигнала T , которая определяет разрешающую способность по скорости. При правильно выбранной форме огибающей «протяженность» сигнала в зависимости от допплеровского сдвига частоты равна $1/T$.

3. Энергия сигнала E , определяющая максимально достижимое отношение сигнал/шум на выходе радиотракта РЛС, равное $2E/N_0$.

Напомним основные результаты теории, относящиеся к зондирующими радиолокационным сигналам [1].

Теория оптимального приема устанавливает, что при оценке неизвестных параметров сигнала, отраженного от цели, таких, как временная задержка τ и сдвиг Ω несущей круговой частоты ω_0 , приемное устройство должно произвести операцию взвешивания принимаемых данных с весом $s(t, \tau, \Omega)$, где $s(t)$ — зондирующий радиосигнал. Указанная операция может быть выполнена с помощью согласованных фильтров или многоканальных корреляторов, либо устройств смешанного типа. Сигнал на выходе оптимального устройства, нормированный так, чтобы его максимальное значение равнялось единице, имеет вид:

$$|R(\tau, \Omega)| = \frac{1}{2E} \left| \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s^*(t - \tau) e^{j\Omega t} dt \right| \quad (14.1.1)$$

и называется функцией неопределенности зондирующего сигнала. При оптимальном приеме отношение сигнал/шум в максимуме выходного сигнала равно $2E/N_0$; отношение сигнала к шуму при любом другом способе приема меньше чем $2E/N_0$.

Зондирующий сигнал $s(t)$ можно представить в виде

$$s(t) = A(t) e^{j\omega_0 t},$$

где $A(t)$ — комплексная огибающая зондирующего сигнала; ω_0 — его несущая частота.

С учетом этого, (14.1.1) можно записать в следующей форме:

$$|R(\tau, \Omega)| = \frac{1}{2E} \left| \int_{-\infty}^{\infty} A(t) A^*(t - \tau) e^{j\Omega t} dt \right|. \quad (14.1.2)$$

Если положить здесь $\Omega = 0$, то получим

$$|R(\tau, 0)| = \frac{1}{2E} \left| \int_{-\infty}^{\infty} A(t) A^*(t - \tau) dt \right|. \quad (14.1.3)$$

В соответствии с этим сечение функции неопределенности (14.1.1), плоскостью $\Omega = 0$ иногда называют модулем корреляционной функции огибающей $A(t)$ сигнала $s(t)$.

Функция неопределенности позволяет узнать все характеристики сигнала, определяющие его выбор. Совместная разрешающая способность по задержке τ и сдвигу Ω несущей ω_0 определяется формой поверхности $|R(\tau, \Omega)|$, конкретнее, формой главного максимума (в окрестности точки $\tau = 0, \Omega = 0$), величиной и расположением побочных максимумов (так называемых боковых лепестков). Неоднозначность измерений определяется количеством и расположением побочных максимумов, сравнимых с главным. Обнаруживаемость сигнала зависит главным образом от величины отношения сигнал/шум и в меньшей степени от вида функции неопределенности. Точность измерений зависит от скорости спадания главного лепестка функции неопределенности и отношения сигнал/шум.

В настоящей главе содержится краткий качественный обзор функций неопределенности некоторых зондирующих сигналов, используемых в радиолокации. Более подробно рассмотрены два вида сигналов: импульсы с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ импульсы) и импульсы с фазовой манипуляцией (ФМ импульсы).

Перечисленные выше характеристики зондирующих сигналов не определены количественно; используется только интуитивное

представление, базирующееся в основном на следующих положениях:

- 1) разрешающая способность увеличивается, если протяженность функции неопределенности по соответствующей координате уменьшается;
- 2) разрешающая способность увеличивается, если боковые лепестки функции неопределенности по соответствующей координате уменьшаются;
- 3) точность измерения координаты возрастает, если протяженность основного лепестка функции неопределенности уменьшается;
- 4) неоднозначность измерений уменьшается, если растет расстояние по соответствующей координате между конкурирующими выбросями функции неопределенности;
- 5) ширина главного максимума функции неопределенности вдоль оси задержек имеет порядок $1/\Delta f$;
- 6) ширина главного максимума функции неопределенности вдоль оси частотных сдвигов имеет порядок $1/T$.

Функция неопределенности, как это видно из приведенных выше изображений, играет в радиолокации фундаментальную роль. Следует, однако, заметить, что область применений функции неопределенности ограничена. Среди ограничений особо важными являются следующие.

1. Время T когерентного накопления сигнала должно быть значительно меньше, чем время корреляции фидинга цели. В противном случае части сигнала, расположенные друг от друга на временных интервалах, превышающих это время корреляции, будут суммироваться в произвольной фазе и выходной сигнал оптимального устройства существенно исказится.

2. Спектр сигнала значительно меньше его несущей центральной частоты, вследствие чего можно считать, что все составляющие спектра имеют одинаковый сдвиг частот за счет эффекта Доплера. Другими словами, ширина главного лепестка функции неопределенности по оси задержек должна быть такой, чтобы за время накопления T задержка принимаемого сигнала за счет движения цели была бы значительно меньше, чем временная протяженность выходного сигнала.

3. Движение цели за время T является равномерным и не учитывается радиальное ускорение цели.

Необходимо различать функции неопределенности, построенные в следующих двух случаях. Функции неопределенности импульсных сигналов, называемые в дальнейшем «импульсными» функциями неопределенности, получаются в том случае, когда огибающая $s(t)$ радиосигнала $s(t)$ занимает во времени конечный отрезок; это может быть, например, одиночный импульс или серия импульсов, следующих с определенным периодом (так называемая «пачка» импульсов), или серия «случайно» расположенных импульсов различной формы. При этом бесконечные пределы интегрирования

в (14.1.1) имеют символическое значение; фактически интегрирование распространяется только на области, где произведение $A(t) A^*(t - \tau)$ отлично от нуля. Соответственно приемное устройство имеет «память», равную длительности T огибающей $A(t)$.

Другой частный случай имеет место, если используется периодический сигнал с периодом T_0 и выбрано время усреднения, равное периоду T_0 . Функция неопределенности, построенная в этих условиях, называется далее «непрерывной» функцией неопределенности. Конкретные примеры импульсных и непрерывных функций неопределенности приведены ниже.

Общее ограничение, накладываемое на функцию неопределенности зондирующего сигнала, известно под названием «принцип неопределенности»: объем под квадратом функции неопределенности равен единице. Таким образом, при любом преобразовании зондирующего сигнала «тело неопределенности» деформируется так, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau, \Omega)|^2 d\tau d\Omega = \text{const.} \quad (14.1.4)$$

§ 2. ФУНКЦИИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИМПУЛЬСОВ

Рассмотрим функции неопределенности некоторых видов конечных импульсных последовательностей, т. е. имеющих начало и конец последовательностей одинаковых импульсов, расположенных друг относительно друга различным образом [2].

Равномерная импульсная последовательность. Предположим, что высокочастотное заполнение импульсов получается «вырубкой» из одного колебания и импульсы расположены на одинаковых расстояниях друг от друга (рис. 14.1, а). При условии, что длительность τ_n отдельного импульса меньше половины периода повторения T_0 , функция неопределенности в сечении по оси τ при $\nu = \frac{\Omega}{2\pi} = 0$ состоит из неперекрывающихся треугольников, высота которых линейно уменьшается по закону $1 - \frac{|m|}{N}$ (рис. 14.1, б), где N — число импульсов, $|m|$ — целое число периодов повторения импульсов, укладывающихся на величине запаздывания τ . За единицу принята высота центрального пика при $\tau = 0$. Высоты остальных пиков уменьшаются вследствие того, что при увеличении τ все меньшее число импульсов входит в произведение $A(t) A^*(t - \tau)$.

Рассмотрим теперь сечение поверхности неопределенности плоскостью $\tau = 0$. Очевидно, что функция $|R(0, \nu)|$ представляет собой

спектральное преобразование произведения $A(t)A^*(t)$, являющееся последовательностью прямоугольных видеоимпульсов.

Спектр последовательности N прямоугольных видеоимпульсов (при условии, что суммарная площадь N импульсов равна единице) имеет вид

$$|R(0, \nu)| = \left| \frac{\sin \pi \nu \tau_n}{\pi \nu \tau_n} \cdot \frac{\sin \pi \nu N T_0}{\sin \pi \nu T_0} \right|, \quad (14.2.1)$$

где τ_n — длительность одного импульса;

T_0 — период повторения импульсов.

Вид функции $|R(0, \nu)|$ представлен на рис. 14.2.

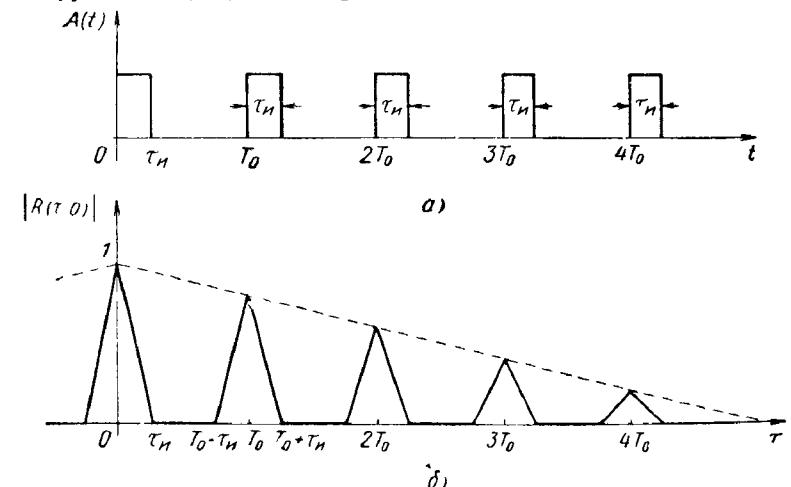


Рис. 14.1. Равномерная последовательность импульсов (а) и сечение ее функции неопределенности плоскостью $\Omega = 0$ (б).

В сечении поверхности неопределенности плоскостью $\tau = mT_0$ получается кривая, определяемая выражением

$$|R(mT_0, \nu)| = \left| \frac{\sin \pi \nu \tau_n}{\pi \nu \tau_n} \cdot \frac{\sin \pi \nu (N - |m|) T_0}{\sin \pi \nu T_0} \left(1 - \frac{|m|}{N} \right) \right|. \quad (14.2.2)$$

Размеры пунктирной кривой (или «огибающей») по оси ординат с ростом m сокращаются и по оси абсцисс остаются неизменными, ширина же внутренних пиков увеличивается и становится равной $[(N - |m|)T_0]^{-1}$. Это происходит из-за того, что произведение $A(t) A^*(t - \tau)$ представляется не N прямоугольными импульсами, как при $\tau = 0$, а $N - |m|$ импульсами, т. е. длительность последовательности прямоугольных импульсов $A(t) A^*(t - mT_0)$ сокращается на $|m|$ импульсов.

Теперь рассмотрим сечение поверхности неопределенности плоскостью $\tau = mT_0 + \Delta$, где $|\Delta| < \tau_n$. В этом случае произведение $A(t) A^*(t - \tau)$ представляет собой последовательность $N - |m|$

прямоугольных импульсов, каждый из которых имеет длительность $\tau_n = \Delta$. В данном случае «огибающая» как бы расплывается по оси абсцисс. Ширина первого лепестка «огибающей» становится равной $1/\tau_n = \Delta$, а амплитуда «огибающей» уменьшается вследствие уменьшения площадки каждого импульса произведения. При $\tau_n \ll |\Delta|$, T_0 произведение $A(t)A^*(t - \tau) = 0$ и его спектр равен нулю.

Таким образом, функция неопределенности равномерной последовательности импульсов, заполненных одной несущей частотой, имеет несколько выбросов, величина которых конкурирует с глав-

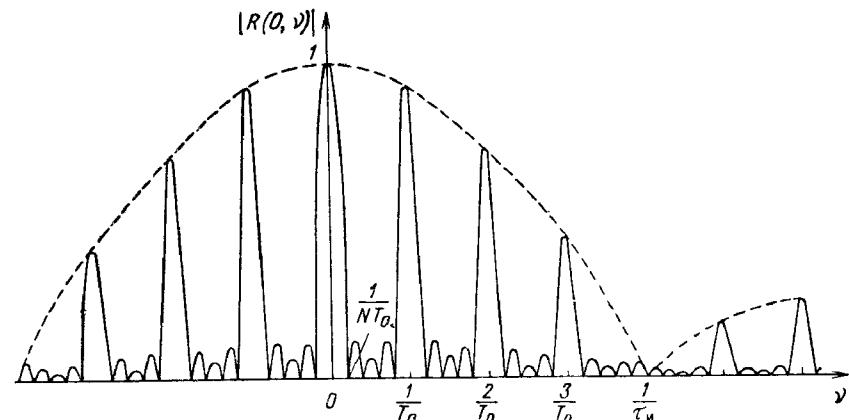


Рис. 14.2. Сечение функции неопределенности равномерной последовательности импульсов плоскостью $t=0$.

ным максимумом ($t = 0, v = 0$), причем эти выбросы расположены в точках с координатами $t = pT_0$ и $v = q/T_0$, где p, q — целые числа. Происхождение этих побочных максимумов легко понять, если рассмотреть поведение такой последовательности в приемном устройстве (рис. 14.3).

Описываемое приемное устройство состоит из набора линий задержек с отводами, сделанными через период последовательности T_0 . На каждом отводе расположен фазовращатель, поворачивающий фазу несущей на некоторый угол. Каждый канал устройства настроен на прием последовательности, несущая которой сдвинута на определенную величину Ω . При большой скважности допплеровского смещение частоты проявляется как сдвиг начальной фазы высокочастотного заполнения у первого импульса на величину $\varphi_1 = 0$, у второго импульса на $\varphi_2 = \Omega T_0$, у третьего импульса на $\varphi_3 = -2\Omega T_0$, у четвертого импульса на $\varphi_4 = 3\Omega T_0$, у пятого импульса на величину $\varphi_5 = 4\Omega T_0$.

Если вся последовательность вошла в линию задержки первого канала, настроенную на данный сдвиг частоты Ω , то все дополнительные сдвиги фаз компенсируются и пять импульсов суммируются в фазе. При этом на выходе канала появляется главный максимум функции неопределенности. Если последовательность с допплеровским сдвигом попадает в канал, настроенный на другой допплеровский сдвиг, то фазовращатели не компенсируют фазовых сдвигов полностью, импульсы складываются не в фазе и максимума не получается. Этот случай соответствует одному из небольших лепестков (рис. 14.2), расположенных между большими боковыми лепестками.

Приемное устройство для приема последовательности когерентных импульсов показано на рис. 14.3. Входной сигнал $A(t)$ (последовательность импульсов 1, 2, 3, 4, 5) подается на линии задержки. На каждой линии задержки имеется пять фазовращателей, сдвиги фаз которых равны $-\varphi_1, -\varphi_2, -\varphi_3, -\varphi_4, -\varphi_5$. Сигналы с выходов линий задержки подаются на фильтры, на выходах которых получены сигналы Y_1 и Y_2 .

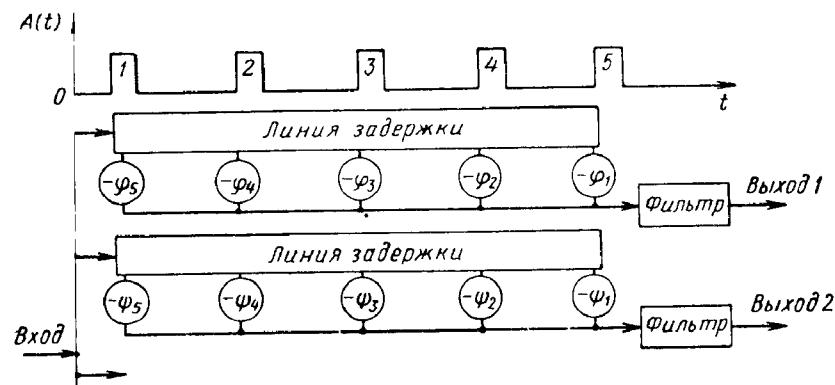


Рис. 14.3. Устройство для приема последовательности когерентных импульсов.

При некоторых допплеровских сдвигах может оказаться, что приращения фаз несущих за период находятся в соотношении $2\pi\nu_1 T_0 - 2\pi\nu_2 T_0 = \Omega_1 T_0 - \Omega_2 T_0 = 2\pi k$, $\nu_1 - \nu_2 = \frac{k}{T_0}$, $k = 1, 2, \dots$

При этом условии на выходе каналов приемника, настроенных на сдвиги Ω_1 и Ω_2 , будут почти одинаковые максимумы сигнала в момент, когда последовательность с фактическим сдвигом, например Ω_1 , полностью войдет в линии задержки. Это будут главный максимум и большой ложный максимум. Величина сигнала на выходе канала в момент полного входа сигнала в линию, изображенная как функция допплеровского сдвига (или номера канала), представляет сечение функции неопределенности при $t = 0$.

Формирование сечения функции неопределенности при $\Omega = 0$ можно проследить таким же образом. Большие боковые лепестки соответствуют случаям, когда в линию задержки вошла только часть последовательности, состоящая из одного, двух, трех и четырех импульсов соответственно.

Наличие конкурирующих максимумов приводит к потере разрешающей способности в соответствующих точках (τ, Ω) , и к неоднозначности измерения координат. В ряде случаев, однако, рабо-

чий диапазон сдвигов $\tau_{max} < T_0$ и $v_{max} < \frac{1}{T_0}$, поэтому равномерную последовательность импульсов можно использовать без всяких ограничений характеристик радиолокатора.

Последовательность с линейно нарастающими расстояниями между импульсами (рис. 14.4). При правильно выбранных параметрах такой последовательности можно обеспечить следующее важное свойство: при любом временном сдвиге сигнала $s(t)$ по времени произойдет не более, чем одно совпадение импульсов основной и

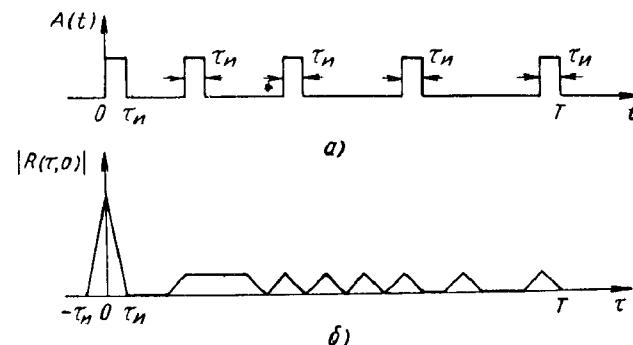


Рис. 14.4. Последовательность с линейно нарастающими расстояниями между импульсами (а) и сечение ее функции неопределенности плоскостью $\Omega = 0$ (б).

сдвинутой последовательности. Это свойство обеспечивает получение небольших боковых лепестков при сечении функции неопределенности плоскостью $\Omega = 0$. На рис. 14.4 представлена также корреляционная функция рассматриваемой последовательности. Отношение главного максимума к максимальному боковому лепестку здесь равно $1/N$, где N — число импульсов последовательности. Аналогичным образом, в сечении $\tau = 0$ будут отсутствовать ярко выраженные максимумы, характерные для периодической последовательности импульсов. Действительно, функция $|R(0, \Omega)|$ пропорциональна спектру $F(j\Omega)$ последовательности $A(t)$, причем

$$F(j\Omega) = F_0(j\Omega) \sum_{n=0}^{N-1} \exp\{j\Omega t_n\}, \quad t_n = \sum_{m=1}^n m [T_0 + (m-1)\Delta T_0], \quad (14.2.3)$$

где $F_0(j\Omega)$ — спектр одиночного прямоугольного импульса длительностью τ_n , ΔT_0 — приращение периода по сравнению с предыдущим периодом.

Графическая интерпретация этого соотношения приведена на рис. 14.5. Здесь угол $\alpha = 2\pi v T_0$ — поворот вектора за счет периода повторения импульсов, угол $\beta = 2\pi v \Delta T_0$ — поворот за счет при-

ятия к периоду повторения. Таким образом, углы α и β зависят величины допплеровского смещения. Модуль каждого вектора определяется величиной спектральной составляющей отдельного импульса $F_0(j\Omega)$ при данном Ω . Спектральная составляющая всей последовательности импульсов определяется как сумма всех векторов.

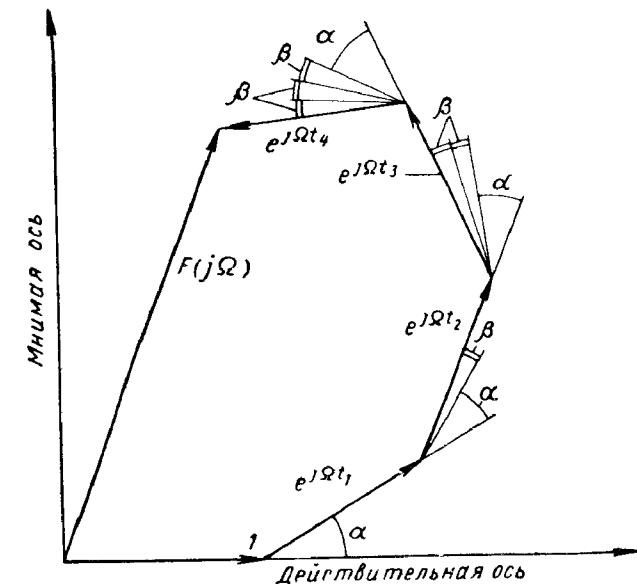


Рис. 14.5. Графическая интерпретация спектра $F(j\Omega)$ последовательности с линейно нарастающим расстоянием между импульсами

Нетрудно убедиться, что там, где для периодической последовательности были максимумы ($\Delta T_0 = 0$, $\Omega T_0 = 2\pi k$, k — целое число), теперь за счет дополнительных приращений фаз не происходит синфазного сложения импульсов. Сечение функции неопределенности плоскостью $\tau = 0$, полученное непосредственным расчетом для последовательности рис. 14.4, представлено на рис. 14.6.

Последовательность импульсов с минимальным числом совпадений. Последовательность с линейно нарастающим расстоянием между импульсами является частным случаем последовательности с минимальным числом совпадений. Другой частный случай получается, если потребовать сохранения свойства «не более чем одного совпадения» и ограничиться последовательностями с минимально возможной длиной (при заданном числе импульсов N). Такие последовательности, рассмотренные Шерманом [3], подробно обсуждаются в дальнейшем. Здесь отметим лишь некоторые характеристические свойства их функций неопределенности. Требование не более

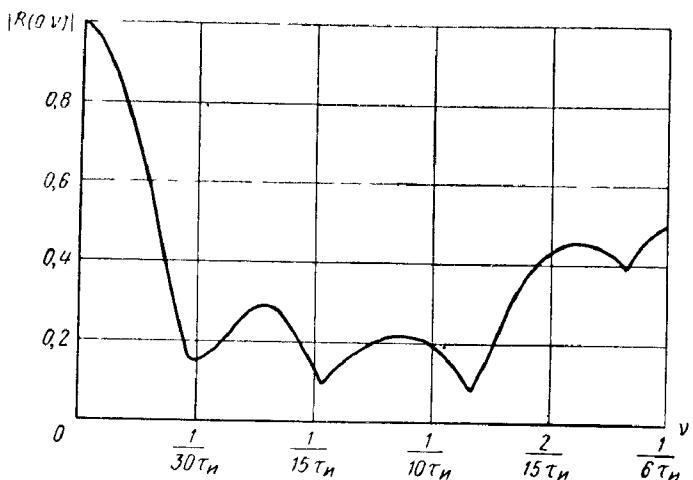
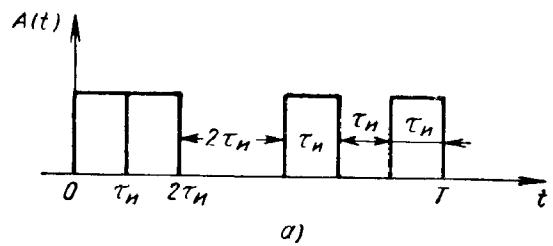
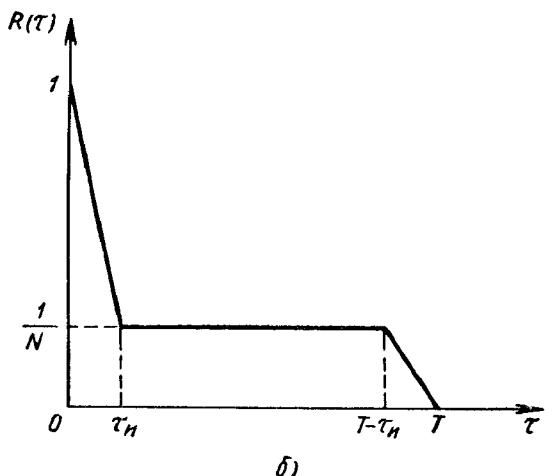


Рис. 14.6. Сечение функции неопределенности последовательности с линейно нарастающим расстоянием между импульсами плоскостью $\tau=0$.



а)



б)

Рис. 14.7. Последовательность Шермана (*а*) и сечение ее функции неопределенности плоскостью $\Omega=0$ (*б*).

о одного совпадения импульсов при сдвиге на любое τ означает, что все боковые лепестки автокорреляционной функции не превышают уровня $1/N$. На рис. 14.7, *а* представлена последовательность Шермана для $N = 4$, а на рис. 14.7, *б* — ее автокорреляционная функция. В этом примере боковые лепестки образуют «однородный фон боковых лепестков», в общем случае имеющий вид ломаной линии. Указанная особенность позволяет достаточно просто рассчитать сечение функции неопределенности при $\tau = 0$. Результаты такого расчета для указанного примера приведены на рис. 14.8.

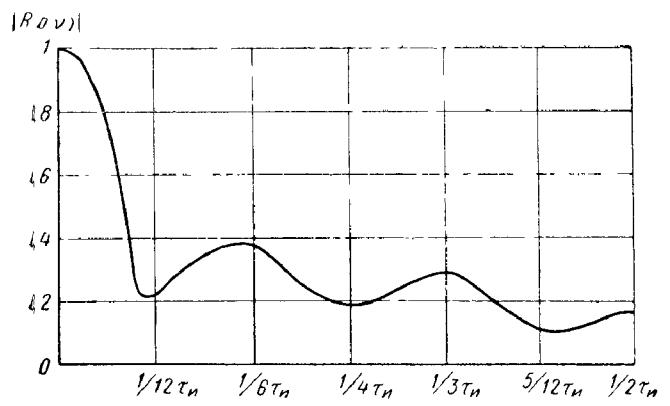


Рис. 14.8. Сечение функции неопределенности последовательности Шермана плоскостью $\tau=0$.

«Псевдохаотическая» расстановка импульсов позволяет значительно уменьшить боковые лепестки в сечении $\tau = 0$ по сравнению с регулярным случаем.

В сечении $\tau = m\tau_n$, где m — целое число, функция неопределенности представляет собой спектр прямоугольного импульса (свойство одного совпадения!) длительностью τ_n и высотой $1/N\tau_n$ (с учетом нормировки центрального пика к единице). Поэтому высота боковых лепестков в этих сечениях меньше $1/N$. Это тем более справедливо для сдвигов, не кратных τ_n , но больших, чем τ_n . Следовательно, во всех точках плоскости (τ, Ω) , за исключением узкой полосы $-\tau_n < \tau < \tau_n, -\infty < \Omega < \infty$, функция неопределенности меньше, чем $1/N$. Внутри указанной полосы боковые лепестки вне области $-1/T < v < 1/T$, где $T = M\tau_n$ — общая длительность последовательности, также достаточно малы.

§ 3. ОПТИМАЛЬНЫЙ ПРИЕМ СИГНАЛОВ С ВНУТРИИМПУЛЬСНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

Среди сигналов, имеющих функции неопределенности подходящего вида, наибольшее распространение на практике получили сигналы с линейным изменением частоты внутри импульса (ЛЧМ импульсы) и сигналы с фазовой манипуляцией внутри импульса (ФМ импульсы). В последнем случае производится специальное внутриимпульсное кодирование (изменение фазы колебаний в зависимости от времени по определенному закону), причем закон подбирается так, чтобы получить желаемый вид функции неопределенности.

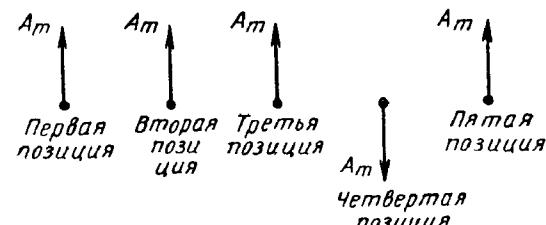


Рис. 14.9. Векторная диаграмма фазо-манипулированного зондирующего сигнала. Длительность каждой позиции Δ .

В большинстве случаев длительность импульса такова, что за время импульса изменение фазы несущей вследствие движения цели (эффект Допплера) незначительно. При этом вид функции неопределенности на всей плоскости (t, Ω) уже несуществен, важен лишь вид корреляционной функции (14.1.3) сигнала.

Корреляционная функция сигнала обычно имеет протяженность порядка $1/\Delta f$, где Δf — полоса сигнала. Таким образом, исходный сигнал длительностью T преобразуется в приемном устройстве в сигнал, имеющий длительность $1/\Delta f$. При $\Delta f T \gg 1$ выходной сигнал значительно короче входного.

Основная цель внутриимпульсного кодирования состоит в том, чтобы получить на выходе радиотракта РЛС сигнал, длительность которого меньше длительности огибающей $A(t)$ исходного импульса $s(t)$. Желательно, чтобы при таком «укорочении» не происходило уменьшения отношения сигнал/шум в пике выходного сигнала по сравнению со случаем использования немодулированного по фазе зондирующего импульса. Рассмотрим кратко физику укорочения.

Предположим, что зондирующий импульс длительностью T разделен на пять одинаковых частей (позиций), причем фаза колебаний, посыпаемых на каждой позиции, может иметь два значения: 0 или π (рис. 14.9). В качестве приемника используем устройство (рис. 14.10), состоящее из широкополосной линии задержки с от-

зами, фазовращателя на втором отводе линии, сумматора колебаний фильтра, согласованного с элементарным прямоугольным импульсом длительностью $\Delta = T/5$. Все устройство реализуется на высокой или промежуточной частоте.

Входной шум, задерживаясь в линии, складывается в сумматоре, приводит к увеличению мощности на единицу полосы частот в π раз. Входной сигнал, проходя через устройство, претерпевает более существенные изменения. Сначала колебание первой позиции по первому отводу линии передается на вход сумматора. Выходное колебание при этом имеет амплитуду A_m и длится Δ сек. Да-

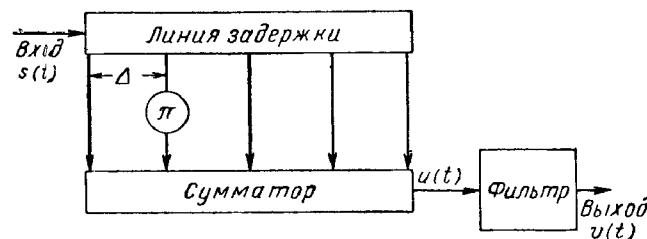


Рис. 14.10. Устройство для приема фазо-манипулированного зондирующего импульса.

в сумматоре складываются колебания двух позиций (первой и второй), причем первое колебание, будучи повернуто по фазе на π , усиливает второе и в течение следующих Δ сек выход сумматора равен нулю. В дальнейшем в сумматоре будут складываться три колебания (два в фазе и одно в противофазе, так что выход имеет амплитуду A_m) и четыре колебания (два синфазных и два противофазных, так что выход равен нулю). Наконец, когда колебание из первой позиции достигнет последнего отвода, на выходе будут складываться пять колебаний, при этом все пять составляющих складываются синфазными, поскольку единственное противофазное колебание в зондирующем импульсе как раз проходит через фазовращатель и восстанавливает фазу 0. По мере «выхода» сигнала из линии задержки описанный процесс повторяется в обратном порядке.

Таким образом, огибающая $U(t)$ сигнала $u(t)$ на выходе сумматора имеет вид, показанный на рис. 14.11, а.

Фильтр, стоящий после сумматора, должен быть согласован

прямоугольным импульсом длительностью Δ . Все прямоугольные импульсы в этом случае растягиваются по длительности в два раза,

так что огибающая $V(t)$ сигнала $v(t)$ на выходе фильтра имеет вид, изображенный на рис. 14.11, б.

Характерные особенности выходного сигнала $v(t)$ состоят в сле-

ющем.

1. Максимальное значение отношения сигнал/шум по мощности равно $2E/V_0$.

2. Главный максимум сигнала по амплитуде в пять раз превышает максимальный боковой лепесток.

3. Боковые лепестки занимают вместе с главным максимумом время, равное удвоенной длительности T зондирующего импульса.

Описанный способ приема фазо-манипулированного зондирующего импульса не является единственным. Рассмотрим работу устройства, изображенного на рис. 14.12.

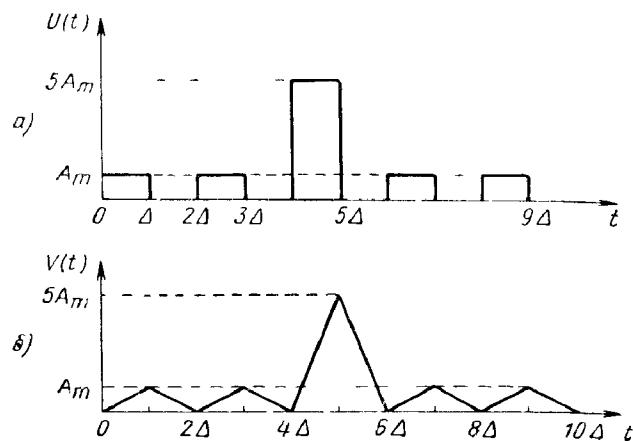


Рис. 14.11. Огибающие сигналов на выходе сумматора (а) и выходе фильтра (б) приемника фазо-манипулированного импульса.

Принимаемый сигнал поступает на вход пяти каналов. Каждый канал состоит из смесителя ($СМ$), фильтра на промежуточной частоте (Φ), детектора (D) и селектора (C). Опорные напряжения, подаваемые на смесители в каналах, отличаются сдвигом по времени на одну позицию и по форме повторяют зондирующий сигнал, отличаясь только несущей частотой. Символически опорные сигналы можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_1 &= 1; 1; -1; 1; \\ u_2 &= 1; 1; 1; -1; 1; \\ u_3 &= 1; 1; 1; -1; 1; \\ u_4 &= 1; 1; 1; -1; 1; \\ u_5 &= 1; 1; 1; -1; 1. \end{aligned}$$

Здесь через «1» обозначен элементарный радиоимпульс с фазой 0° , а через « -1 » — с фазой π .

Предположим, что принимаемый сигнал совпадает, например, с опорным напряжением $u_5(t)$. Фаза колебаний на выходе пятого смесителя на всех позициях остается постоянной, поскольку фазы входного и опорного сигналов меняются все время одинаково. На

ходе пятого смесителя получается, таким образом, немодулированный по фазе прямоугольный радиоимпульс длительностью 5Δ .

Проходя через согласованный фильтр, этот импульс расширяется по длительности в два раза, причем амплитуда импульса достигает максимума в момент окончания входного сигнала. В этот момент и должна осуществляться выборка напряжения с выхода селектора.

Принимая коэффициент передачи фильтра равным единице, получим, что и в этом случае отношение сигнал/шум по мощности на максимуме равно $2E/N_0$.

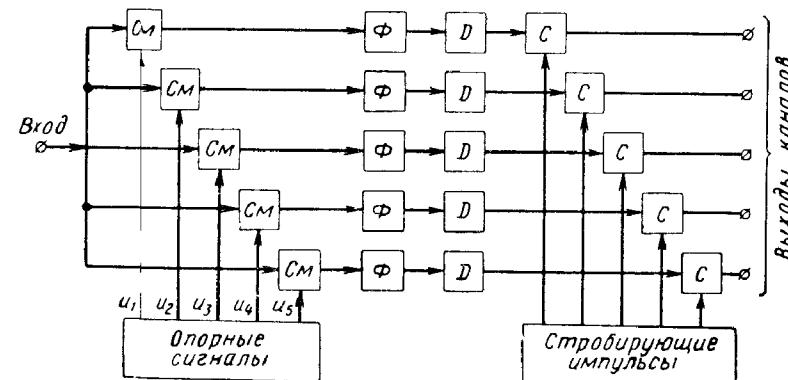


Рис. 14.12. Многоканальный коррелятор для приема фазо-манипулированного импульса

Следует обратить внимание, что сущность получения одного и того же отношения сигнал/шум в рассмотренных устройствах различна. В первом приемном устройстве (рис. 14.10) полоса пропускания согласованного фильтра в пять раз больше, чем полоса пропускания согласованного фильтра во втором приемнике (рис. 14.12). Кроме этого, с отводом линии задержки складываются пять независимых шумов. Поэтому дисперсия шума на выходе фильтра в первом случае вдвадцать пять раз больше, чем дисперсия шума во втором случае. Однако в первом приемнике имеет место когерентное суммирование колебаний элементарных радиоимпульсов длительностью Δ , в результате чего пиковое значение сигнала в пять раз превышает пиковое значение сигнала во втором случае.

Сигнал, совпадающий с опорным напряжением $u_5(t)$, проходя входы других каналов, дает на их выходах мешающие колебания. Так можно видеть, что на выходе фильтра четвертого канала складываются два синфазных и два противофазных колебания; в результате момента стробирования (которое производится в конце импульса сигнала $u_4(t)$), на выходе четвертого канала сигнал отсутствует. В целом, амплитуды выходных сигналов каналов (расположенные

в порядке от 5-го к 1-му каналу) находятся в соотношениях 5; 0; 1; 0; 1, что соответствует импульсной автокорреляционной функции зондирующего сигнала.

Описанное выше устройство является примером корреляционного приемника (§ 5 гл. 10). Исследуемый интервал дальности разбивается здесь на несколько отрезков, причем каждый канал коррелятора обеспечивает наилучший прием сигнала, отраженного от цели, находящейся в середине определенного отрезка рабочего интервала дальности. Задержка между серединами соседних отрезков в данном примере равна длительности позиции Δ . Каждый канал коррелятора оптимален, если импульсный отклик его фильтра согласован с огибающей зондирующего импульса (в рассматриваемом примере импульсный отклик каждого канала должен быть прямоугольным с длительностью T). В этом случае, если дискретные выходы каналов линейно интерполировать, приняв задержку между дискретами равной задержке между опорными сигналами, выходной сигнал коррелятора при дискретном зондирующем сигнале совпадает с импульсной автокорреляционной функцией сигнала. Если задержка принимаемого сигнала находится между задержками, на которые настроены соседние каналы коррелятора, то амплитуда сигнала на выходе соответствующего канала уменьшается в соответствии с главным лепестком корреляционной функции.

Для того чтобы перекрыть дискретными каналами интервал задержек, равный длительности импульса, необходимо иметь число каналов, равное числу позиций в импульсе. Задержки, лежащие вне этого интервала, можно перекрыть теми же физическими каналами. С этой целью опорные сигналы коррелятора делаются периодическими с сохранением сдвига между ними. Стробирующие импульсы также повторяются периодически с сохранением задержек между ними. Импульсные отклики в каждом канале являются прямоугольными.

Такая система позволяет измерять задержки в единицах длительности импульса по номеру периода селектирующего строба (градуальная шкала), а в единицах позиций — по номеру канала (точечная шкала).

Для подсчета корреляционной функции ФМ сигнала, т. е. сигнала на выходе оптимального приемника, можно воспользоваться представлением зондирующего сигнала в виде N -мерного вектора

$$\bar{s} = (s_1, s_2, \dots, s_N), \quad (14.3.1)$$

где $s_i = A_i \exp\{j\phi_i\}$, A_i и ϕ_i — амплитуда и фаза колебания в i -й позиции.

В рассмотренном примере при $A_i = 1$

$$s_1 = \exp\{j \cdot 0\} = 1; s_2 = \exp\{j \cdot 0\} = 1, s_3 = \exp\{j \cdot 0\} = 1;$$

$$s_4 = \exp\{j \cdot \pi\} = -1; s_5 = \exp\{j \cdot 0\} = 1.$$

Импульсный отклик оптимального приемника также удобно представить в виде N -компонентного вектора

$$\bar{H} = (s_N, s_{N-1}, \dots, s_1). \quad (14.3.2)$$

Помимо той корреляцию векторов \bar{s} и \bar{H} при различных сдвигах между ними, можно найти значения r_t выходного сигнала в точках $t = 0, t = \pm \Delta, t = \pm 2\Delta, \dots$, используя следующие вычисления:

$$\left. \begin{aligned} s_1 s_N &= R(-(N-1)\Delta) = R((N-1)\Delta), \\ s_1 s_{N-1} + s_2 s_N &= R(-(N-2)\Delta) = R((N-2)\Delta), \\ &\vdots \\ s_1 s_2 + \dots + s_{N-1} s_N &= R(-\Delta) = R(\Delta), \\ s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_N^2 &= R(0). \end{aligned} \right\} \quad (14.3.3)$$

Значения сигнала в промежуточных точках получаются линейной интерполяцией.

Типовая схема РЛС, использующей импульсы с внутриимпульсной модуляцией, приведена на рис. 14.13. В ее состав входят: зондирующее устройство ($КУ$), формирующее код для внутриимпульсной модуляции; устройство, формирующее радиочастотный сигнал на низком уровне мощности ($УФ$); усилитель мощности ($УМ$), усиливающий входной модулированный импульс низкого уровня до нужной пиковой мощности; переключатель прием — передача ($П$); усилитель высокой частоты ($УВЧ$); преобразователь частоты и усилитель промежуточной частоты ($Пр-УПЧ$); декодирующее устройство ($ДУ$).

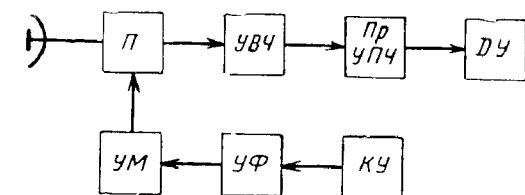


Рис. 14.13. Типовая схема РЛС, использующей зондирующие сигналы с внутриимпульсной модуляцией.

Декодирующее устройство может быть выполнено в виде согласованного фильтра. В этом случае на его выходе от каждой цели появляется отраженный укороченный импульс длительностью порядка $1/\Delta f$. Если декодирующее устройство выполнено в виде коррелятора, то оно имеет много выходов, причем на любом из них могут появиться отраженные сигналы, имеющие длительности порядка T . Каждый канал «настроен» на определенную дальность и расстояние между каналами по задержке равно $1/\Delta f$.

В кодирующем устройстве для формирования ЛЧМ импульсов можно использовать линейное видеонапряжение, а для формирования ФМ импульсов — набор видеоимпульсов, соответствующих используемому коду. Формирование ЛЧМ импульсов может быть выполнено так называемым «пассивным» или «активным» способом.

В первом варианте для формирования ЛЧМ импульсов используется основное свойство согласованного фильтра: импульсный отклик согласованного фильтра является зеркальным отражением формы сигнала, с которым этот фильтр согласован. Поэтому при подаче на вход согласованного с ЛЧМ импульсом фильтра достаточно короткого импульса на выходе фильтра получается ЛЧМ импульс с законом изменения частоты от начала к концу импульса противоположным нужному. Для формирования нужного закона с помощью преобразователя частоты вычитают частоту выхода согласованного фильтра из постоянной частоты гетеродина.

При «активном» способе формирования ЛЧМ импульсов используется задающий генератор, частота которого зависит от величины управляющего напряжения на одном из электродов. Подбором формы управляющего напряжения можно добиться изменения частоты задающего генератора с нужной крутизной. Для обеспечения требуемой точности формирования импульсов в «активном» способе иногда используется автоподстройка частоты.

Формирование ФМ импульсов имеет специфические особенности и часто основано на использовании специальных генераторов последовательностей символов, подробнее описываемых далее.

§ 4. ИМПУЛЬСЫ С ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТОТНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

Импульсные сигналы с линейным изменением частоты внутри импульса используются в радиолокации чаще всего. Это объясняется тем, что функция неопределенности ЛЧМ импульсов имеет достаточно хорошие свойства и прием ЛЧМ импульсов может производиться с помощью компактных согласованных фильтров.

Зондирующий импульс с ЛЧМ имеет постоянную амплитуду A_m (рис. 14.14), а его мгновенная частота меняется по линейному закону с наклоном k [Мгц/мксек]:

$$f - f_0 = kt, \quad (14.4.1)$$

где f_0 — центральная частота. Соответственно круговая частота

$$\omega = \omega_0 = 2\pi kt,$$

а фаза внутри импульса изменяется по параболическому закону

$$\varphi = \pi kt^2 + \omega_0 t + \varphi_0. \quad (14.4.2)$$

Максимальная девиация частоты от начала до конца импульса равна:

$$F = kT.$$

Приращение фазы за время длительности импульса обычно значительно превышает число π . Так, например, если $F = 10$ Мгц, 10 мксек, то «квадратичная часть» приращения фазы за время импульса составляет 100π .

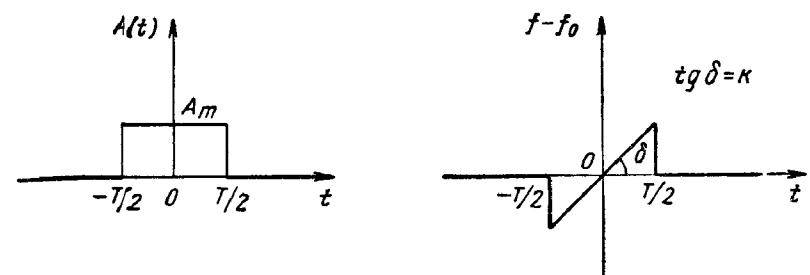


Рис. 14.14. Параметры зондирующего импульса с линейной частотной модуляцией.

Возможности импульсных ЛЧМ сигналов достаточно хорошо иллюстрируются их функцией неопределенности, аналитическое выражение которой имеет вид

$$|R(\tau, v)| = \begin{cases} \left| \frac{\sin \left[(\pi v + \pi k \tau) \left(1 - \frac{|\tau|}{T} \right) T \right]}{(\pi v + \pi k \tau) T} \right|, & -T < \tau < T, \\ 0 \text{ при других } \tau. & \end{cases} \quad (14.4.3)$$

Сечение этой функции неопределенности плоскостью задержка — круговой частотный сдвиг (τ, v) на уровне 3 дБ от максимального значения приведено на рис. 14.15.

Особенность функции неопределенности ЛЧМ импульса состоит в том, что в направлении $v = k\tau$ функция неопределенности расширяется, а в перпендикулярном к нему направлении сжата.

В тех частных случаях, когда значение центральной частоты принимаемого сигнала отличается от частоты гетеродина приемника точно на промежуточную частоту ($v = 0$), или когда стробирование выходов приемников производится в момент, соответствующий приходу отраженного сигнала ($\tau = 0$), на выходе приемного устройства получаются сечения функции неопределенности, представленные на рис. 14.16. Как следует из (14.4.3), сечение функции неопре-

деленности ЛЧМ импульса плоскостью $\tau = 0$ представляет собой спектр прямоугольного видеоимпульса (рис. 14.16, а):

$$|R(0, v)| = \left| \frac{\sin \pi v T}{\pi v T} \right|, \quad (14.4.4)$$

а сечение ее плоскостью $v = 0$ имеет вид:

$$|R(\tau, 0)| = \left| \frac{\sin \pi k \tau \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) T}{\pi k \tau T} \right|. \quad (14.4.5)$$

Таким образом, длительность корреляционной функции вдоль оси задержек, совпадающая с временной протяженностью выходного сигнала, имеет порядок $1/F$ и, например, при $F = 10 \text{ МГц}$ составляет

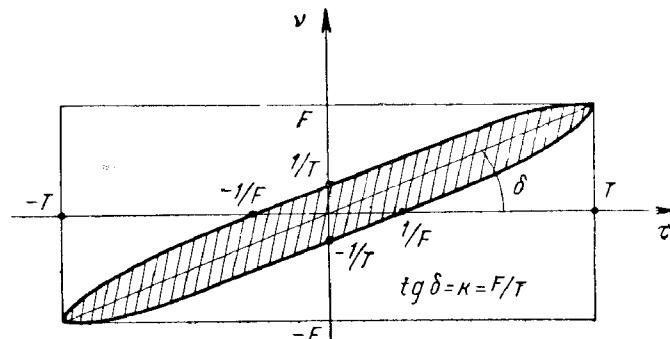


Рис. 14.15. Топографическая проекция функции неопределенности ЛЧМ импульса.

0,1 мксек. Эта величина не зависит от длительности огибающей импульса T и определяется только максимальной девиацией частоты F . Форма сигнала на выходе оптимального приемника для случая $FT \gg 1$ определяется выражением (рис. 14.16, б)

$$|R(\tau, 0)| = |R(\tau)| = \left| \frac{\sin \pi F \tau}{\pi F \tau} \right|. \quad (14.4.6)$$

Таким образом, входной сигнал длительностью T , в оптимальном приемнике укорачивается; выходной сигнал имеет длительность порядка $1/F$. Коэффициент FT называется иногда коэффициентом укорочения.

Вытянутость функции неопределенности вдоль оси $v = k\tau$ приводит к тому, что разрешающая способность, например, для двух целей, координаты которых (допплеровский сдвиг и задержка по времени) неизвестны, значительно ухудшается. Если, однако, $\tau = 0$ или $v = 0$, то, как показано выше, разрешающая способность по другой координате достаточно высока.

В случае одиночной цели, движущейся с неизвестной радиальной скоростью, возникает неизвестный сдвиг максимума выходного импульса во времени относительно истинного положения. Если скорость цели известна, то указанный сдвиг можно учесть в дальнейшем. Этот эффект является в некоторых случаях неприятной особенностью ЛЧМ импульсов. Однако вытянутость функции неопределенности может играть и положительную роль. Например, на выходе согласованного фильтра (подробнее согласованные фильтры для ЛЧМ импульсов описаны ниже), настроенного на $v = 0$, при появлении допплеровского сдвига в пределах $-1/T \leq v \leq 1/T$ вид

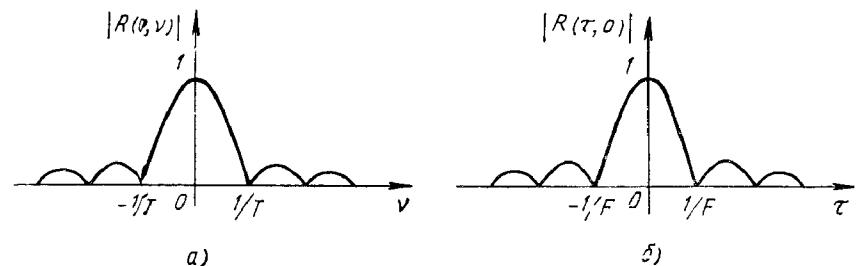


Рис. 14.16. Сечения функции неопределенности ЛЧМ импульса плоскостями $\tau=0$ (а) и $v=0$ (б).

сигнала на выходе фильтра меняется мало и отношение сигнал/шум в пике почти не уменьшается. Это обстоятельство выгодно для работы систем обнаружения. Сдвиг v можно рассматривать и как результат различных частотных нестабильностей, поэтому РЛС, использующие ЛЧМ импульсы, оказываются малочувствительными к нестабильностям частоты, если они не превышают указанных выше пределов.

В ряде технических приложений самостоятельное значение имеет амплитудно-фазовый спектр $S(j\omega)$ ЛЧМ импульса. Точное выражение для такого спектра достаточно сложно [4]. Однако при $FT \gg 1$ его амплитудный спектр $|S(j\omega)|$ приближается к прямоугольному (рис. 14.17, а) с протяженностью по оси частот от $f_0 - F/2$ до $f_0 + F/2$, где f_0 — несущая частота. Фазовый спектр $\Phi(\omega)$ имеет параболический характер и определяется соотношением (рис. 14.17, б)

$$\Phi(\omega) = \Phi_0 + \frac{(\omega - \omega_0)^2}{4\pi k}. \quad (14.4.7)$$

Нагородно отметить, что амплитудно-фазовый спектр ЛЧМ импульса по форме повторяет зависимости амплитуды и фазы от времени, причем переход от временных соотношений к частотным совершается умножением времени на коэффициент k наклона «ЧМ пилы». Это обстоятельство часто используется в теории устройств, работающих с ЛЧМ импульсами.

Рассмотрим некоторые схемы приема ЛЧМ импульсов. Применительно к импульсным ЛЧМ сигналам корреляционный приемник может иметь специфические особенности. Рассмотрим, в частности, приемник, позволяющий обрабатывать сигналы, при-

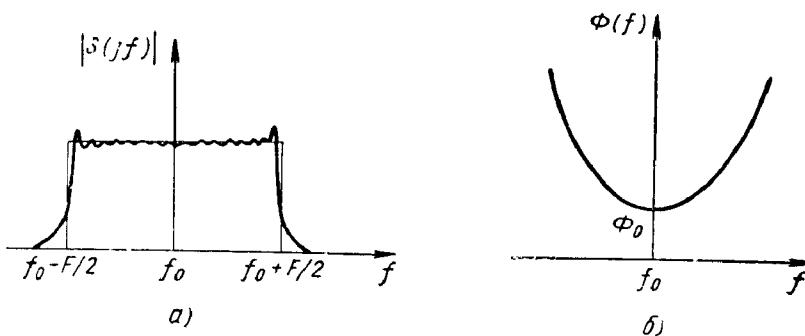


Рис. 14.17. Амплитудный и фазовый спектры ЛЧМ импульса.

ходящие лишь с некоторого участка дальности (рис. 14.18). Такого рода устройства используются в радиолокационных станциях сопровождения целей [5].

Отраженные от целей сигналы после усиления широкополосным усилителем высокой частоты (УВЧ) поступают на вход смесителя

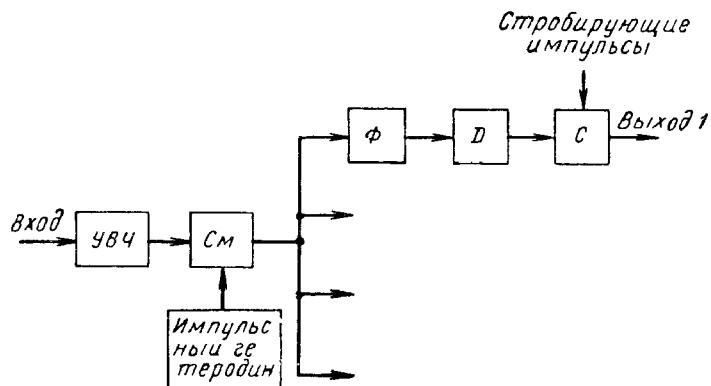


Рис. 14.18. Многоканальный коррелятор для приема ЛЧМ импульса

(См.). Сигнал гетеродина является также ЛЧМ импульсом, причем крутизна изменения его частоты во времени совпадает с крутизной зондирующего импульса, а длительность θ превышает длительность T зондирующего импульса на величину интервала возможных задержек τ отраженных импульсов.

На рис. 14.19 представлены временные зависимости частоты и длительности для зондирующего импульса и импульса гетеродина. Центральная частота импульса гетеродина соответствует моменту t_0 , являющемуся серединой интервала возможных задержек отраженных импульсов относительно зондирующего. Очевидно, что полный интервал возможных задержек равен $\theta - T$ и лежит в области

$$t_0 - \frac{\theta - T}{2} < t < t_0 + \frac{\theta - T}{2}. \quad (14.4.8)$$

Если отраженный сигнал находится в середине этого интервала, то на выходе смесителя имеет место импульсный сигнал длительностью T , заполненный номинальной промежуточной частотой

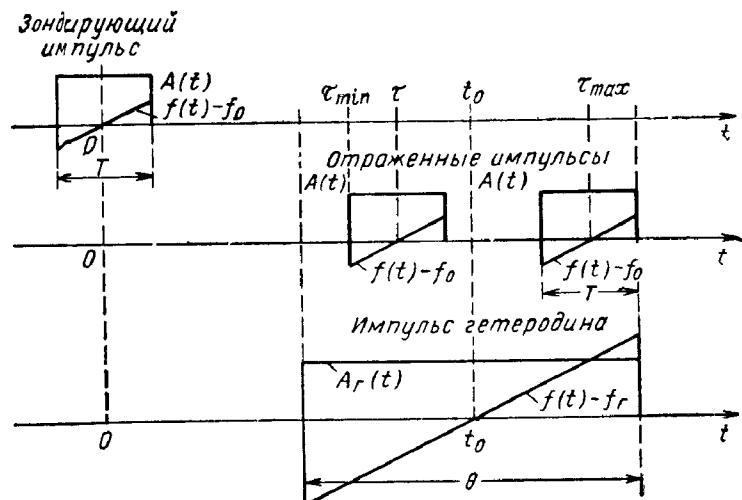


Рис. 14.19. Зондирующий и отраженные от цели сигналы и импульс гетеродина при гетеродинном способе приема ЛЧМ импульсов.

$f_{\text{пр}} = f_0 - f_r$. Отраженным импульсам, имеющим минимальную τ_{min} и максимальную τ_{max} задержки, на выходе смесителя соответствуют импульсы с частотами заполнения $f_{\text{пр}} - \frac{\theta - T}{2} k$ и $f_{\text{пр}} + \frac{\theta - T}{2} k$.

Промежуточная частота произвольно расположенного импульса, имеющего задержку τ , будет равна $f_{\text{пр}}(\tau) = f_{\text{пр}} + (\tau - t_0) k$.

Таким образом, ЧМ гетеродин превращает различия в задержках τ отраженных сигналов в различия в промежуточных частотах $f_{\text{пр}}(\tau)$.

Частота заполнения $f_{\text{пр}}(\tau)$ импульсов на выходе смесителя определяется с помощью гребенки согласованных с ними фильтров (Φ), настроенных на различные центральные частоты и перекрывающих весь диапазон $(\theta - T)$ к возможных изменений $f_{\text{пр}}(\tau)$.

Поскольку определенная частота соответствует определенной задержке, продектированные детекторами (Д) выходы фильтров должны стробироваться в селекторах (С) в различные моменты времени, принадлежащие области (14.4.6), сдвинутой на $T/2$. Так, к примеру, фильтр, настроенный на частоту $f_1 = f_{\text{пр}}(\tau_1)$, стробируется в момент $t = \tau_1 + \frac{T}{2}$. Отметим, что работа устройства слабо зависит от ширины стробирующих импульсов.

Таким образом, каждый выход устройства (рис. 14.18) соответствует определенной дальности. В этом смысле устройство подобно многоканальному коррелятору. Отличие состоит в том, что различные опорные сигналы объединены здесь в один сигнал импульсного ЧМ гетеродина, вследствие чего каждый канал по необходимости настроен на свою промежуточную частоту. Так же, как в многоканальном корреляторе отношение сигнал/шум, равное $2E/N_0$, достигается здесь за счет фильтрации шума в фильтре, согласованном с импульсом на выходе смесителя.

Частотный масштаб на выходе рассматриваемого приемника легко пересчитывается в задержку или дальность. Два фильтра, отстоящие по центральным частотам на $\Delta f_{\text{пр}}$, анализируют точки, отстоящие по оси задержек на $\Delta\tau = \Delta f_{\text{пр}}/k$. Так, например, для ЛЧМ импульса с параметрами $T = 10 \text{ мксек}$, $F = 10 \text{ Мгц}$ величине $\Delta f_{\text{пр}} = 100 \text{ кгц}$ соответствует интервал $\Delta\tau = 0,1 \text{ мксек}$, равный половине ширины (по нулям) центрального пика автокорреляционной функции. Если фильтры расставлены на $1/T \text{ Мгц}$, то это означает, что временные отсчеты берутся через $1/F \text{ мксек}$ и корреляционная функция передается этими дискретными отсчетами. Расстановка фильтров определяется многими обстоятельствами.

Рассматриваемая схема может быть легко получена при радиотехнических интерпретациях оптимальных операций над входными данными, которые предписываются выражением логарифма функции правдоподобия задержки, измеряемой в белом шуме с помощью зондирующего ЛЧМ импульса.

На примере многоканального коррелятора легко понять роль неизвестного частотного сдвига в формировании выходного сигнала приемника.

В том случае, если принимаемый сигнал сдвинут по несущей частоте на v из-за движения цели в радиальном направлении и если этот сдвиг заранее нескомпенсирован в гетеродинном напряжении, промежуточная частота отличается от своего значения на величину $\Delta f_{\text{пр}} = v$ и, следовательно, максимум сигнала будет зарегистрирован в фильтре, соответствующем другой задержке; ошибка в определении задержки составит v/k .

Как отмечалось ранее (§ 6 гл. 10), согласованным фильтром называется линейное устройство, импульсный отклик $G(t)$ которого является зеркальным отражением (относительно произвольного момента времени) сигнала $s(t)$, с которым фильтр согласован. При

том начальная фаза высокочастотного заполнения импульсного отклика произвольна. Для ЛЧМ импульсов примерный вид сигнала и отклик фильтра представлен на рис. 14.20.

Зеркальное отображение импульсного отклика согласованного фильтра по сравнению с формой зондирующего сигнала означает, что амплитудно-частотная характеристика фильтра совпадает с амплитудным спектром сигнала, а его фазо-частотная характеристика обратна по знаку фазовому спектру сигнала; таким образом, согласованный с ЛЧМ импульсом фильтр имеет прямоугольную в полосе / амплитудно-частотную характеристику и параболическую фазо-частотную характеристику.

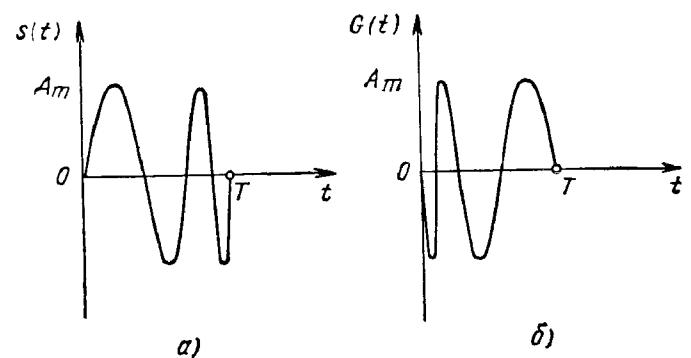


Рис. 14.20. ЛЧМ импульс (а) и импульсный отклик (б) согласованного с ним фильтра.

Можно предложить много различных способов построения фильтров, согласованных с ЛЧМ импульсами. Некоторые из них могут быть реализованы.

Изготовление согласованных фильтров для ЧМ сигнала является трудной задачей, поскольку необходимо обеспечить своеобразный импульсный отклик (или частотную характеристику). Как правило, для синтеза требуемого импульсного отклика ЧМ импульса с законом модуляции, обратным исходному сигналу, используются схемы, содержащие линии задержки (ЛЗ). Поскольку реальный фильтр всегда отличается от идеально согласованного, более правильно такие схемы называть укорачивающими устройствами (или фильтрами).

Рассмотрим несколько типовых схем построения укорачивающих устройств и покажем формирование требуемого импульсного отклика или частотной характеристики.

ЛЗ с дискретными отводами (рис. 14.21). Сигналы с отводов ЛЗ после прохождения делителей с заданным коэффициентом ослабления складываются. При подаче на вход δ -функции на выходе появится набор сдвинутых во времени δ -функций с амплитудами, определяемыми коэффициентами ослабления.

деляемыми ослаблением в соответствующих отводах. Правильным подбором коэффициентов ослабления можно добиться, чтобы огибающая этих δ -функций давала требуемый отклик. Дискретность устраняется фильтром с полосой $1/\Delta$, где Δ — задержка между соседними отводами.

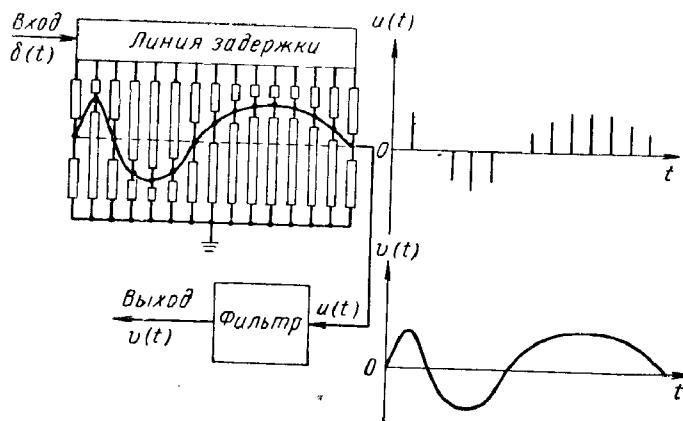


Рис. 14.21. Реализация согласованного с ЛЧМ импульсом фильтра в виде линии задержки с отводами.

ЛЗ с непрерывным съемом (рис. 14.22). Принцип работы аналогичен предыдущему случаю, но вместо дискретных отводов применяется непрерывный съем, например, в виде куска фольги, наложенной на линию. Связь осуществляется через емкость «ЛЗ —

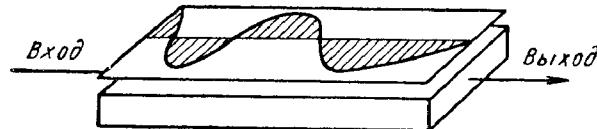


Рис. 14.22. Реализация согласованного с ЛЧМ импульсом фильтра в виде линии задержки с непрерывным съемом.

съем», фигурная форма последнего обеспечивает изменение этой связи в зависимости от времени задержки и соответственно требуемую форму отклика.

Диспергирующая ЛЗ. Этот вид укорачивающих устройств использует элементы, имеющие равномерную амплитудно-частотную характеристику и существенно нелинейную фазо-частотную характеристику, аналогичную приведенной на рис. 14.23. Конструктивно ЛЗ такого типа состоит из последовательно соединенных мостиковых фильтров, количество которых подбираются так,

чтобы получить максимальное приближение к требуемой параболической фазовой характеристике в заданной полосе частот.

Последнее время большое распространение получили ультразвуковые дисперсионные ЛЗ, использующие в качестве звукопровода стекляшку ленту. Для каждого участка выбираются области частот, в которых наиболее сильно выражена нелинейность фазовой характеристики (1-я и 2-я зоны на рис. 14.23). Широкую полосу такого устройства можно значительно расширить, делая звукопровод с переменной толщиной.

При приеме очень широкополосных ЛЧМ импульсов с большим произведением $F\Gamma$ применяются комбинированные методы приема. В этих случаях оптимальная обработка (полная воротка) сигнала с помощью согласованного фильтра становится

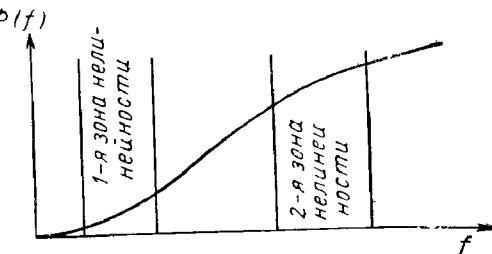


Рис. 14.23. Фазо-частотная характеристика диспергирующей линии задержки.

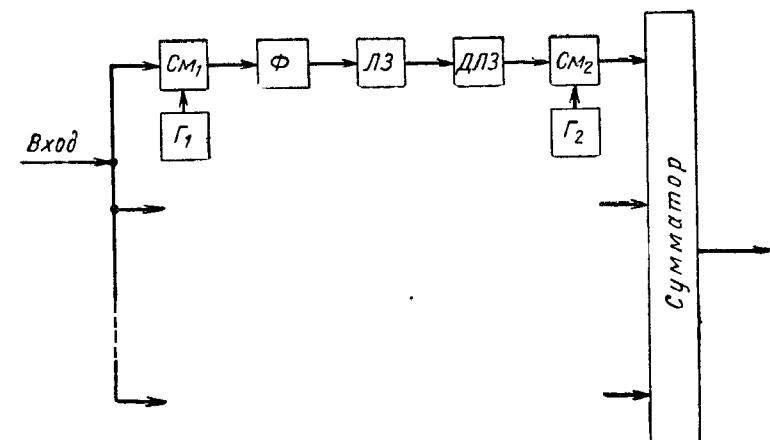


Рис. 14.24. Схема комбинированной обработки ЛЧМ импульса.

затруднительной из-за отсутствия линий задержки с соответствующими свойствами. С другой стороны, для перекрытия заданного интервала дальности пришлось бы использовать коррелятор с очень большим числом каналов. Одна из схем комбинированной обработки, описанная Тором [6], приведена на рис. 14.24. Схема состоит из N идентичных каналов, образованных входными смесителями (CM_i) и гетеродинами (Γ_1) фильтрами (Φ), линиями задержки

(Л3), диспергирующими линиями задержки (ДЛЗ) и выходными смесителями (C_{M2}) и гетеродинами (Γ_2). Выходы всех каналов подключены к сумматору.

С помощью входных преобразователей и фильтров спектр входного широкополосного ЛЧМ импульса разбивается на N примыкающих друг к другу подспектров. На выходе каждого фильтра имеется ЧМ колебание, соответствующее выделенному фильтром подспектру. Поскольку для входного ЛЧМ импульса каждому подспектру соответствует определенный временной интервал, ЧМ колебания на выходе фильтров оказываются сдвинутыми во времени. Эти временные сдвиги выравниваются канальными линиями задержки. Следующие за ними диспергирующие ЛЗ осуществляют свертку ЧМ колебаний с данным подспектром, а выходные преобразователи сдвигают несущие частоты и фазируют колебания укороченных ЧМ колебаний. При сложении этих колебаний в сумматоре происходит окончательное укорочение входного ЛЧМ импульса до величины $1/F$.

Таким образом, основная идея рассматриваемой схемы обработки широкополосных ЛЧМ импульсов состоит в том, что здесь диспергирующие ЛЗ каналов обеспечивают свертку лишь в части частотного диапазона, в N раз более узкой, чем спектр входного сигнала. Недостатком такой схемы является необходимость жесткой фазировки колебаний входных и выходных гетеродинов.

Как отмечалось выше, фильтр, согласованный с ЛЧМ импульсом, при $F\tau \gg 1$ дает на выходе сигнал

$$|R(\tau)| = \left| \frac{\sin \pi F\tau}{\pi F\tau} \right|,$$

боковые лепестки которого весьма велики (максимальное значение первого и бокового лепестков составляет 21%, а второго — 13% от максимального значения главного лепестка). Уже упоминалось о том, что боковые лепестки сигнала по дальности оказывают вредное влияние, снижая возможности РЛС. В частности, ухудшается решающая способность по дальности в режимах обнаружения и сопровождения целей в многоцелевых РЛС. Желательно поэтому по возможности уменьшить уровень боковых лепестков.

Форма выходного сигнала, в частности ширина главного лепестка и уровень боковых лепестков, чувствительна к изменению частотной характеристики укорачивающего фильтра. Согласованный с ЛЧМ импульсом фильтр имеет параболическую фазо-частотную и прямоугольную амплитудную характеристики. Если, однако, сгладить амплитудно-частотную характеристику $|K(j\omega)|$ фильтра, допустив спадание к краям спектра сигнала, то боковые лепестки существенно уменьшаются; главный лепесток при этом расширяется. Одновременно несколько уменьшается отношение сигнал/шум на выходе фильтра. Можно показать, что существует оптимальная, но физически нереализуемая амплитудно-частотная характеристика

Дольфа — Чебышева, обеспечивающая минимальные боковые лепестки при заданном расширении главного лепестка. Реализуемой аппроксимацией характеристики Дольфа — Чебышева является характеристика Тейлора, примерный вид которой представлен на рис. 14.25.

Хорошие результаты получаются также в случае, когда амплитудно-частотная характеристика фильтра аппроксимируется функцией

$$|K(\omega)| = p + (1-p) \cos \frac{q\omega}{2F}, \quad p \ll 1, \quad (14.4.9)$$

где p и q имеют различные значения.

Приведем табл. 14.4.1, содержащую данные по подавлению боковых лепестков с помощью различных фильтров, имеющих амплитудно-частотные характеристики вида (14.4.9).

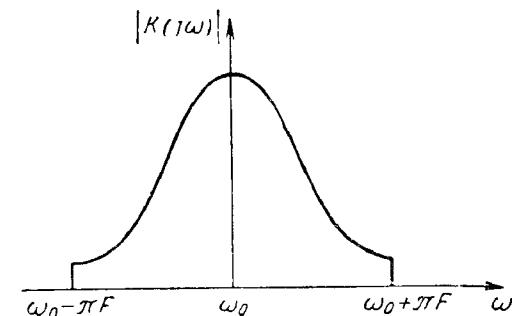


Рис. 14.25. Амплитудно-частотная характеристика Тейлора.

Таблица 14.4.1

Подавление боковых лепестков

p	q	Уровень максимального бокового лепестка относительно главного, дБ	Расширение главного лепестка	Погрешность в отношении сигнал/шум, дБ
0,08	2	-42,8	1,47	-1,34
0	2	-32,2	1,62	-1,76
0	3	-39,1	1,87	-2,38
0,04	1	-23,0	1,31	-0,82
0,16	2	-34,0	1,41	-1,01
0,02	3	-40,8	1,79	-2,23

Вид сигнала на выходе фильтра для случая $p = 0,08$, $q = 2$ (фильтр с характеристикой Хэмминга) представлен на рис. 14.26 [7].

Таким образом, с помощью подходящей амплитудно-частотной характеристики приемного устройства можно значительно уменьшить боковые лепестки выходного сигнала по сравнению с уровнем на выходе согласованных фильтров. Подавление боковых лепестков сопровождается расширением главного лепестка и уменьшением отношения сигнал/шум в максимуме.

Другие способы уменьшения боковых лепестков состоят в специальном подборе отклонений от линейного закона изменения частоты или формы огибающей импульса с тем, чтобы автокорре-

ляционная функция получающегося сигнала имела бы желаемый вид. Так, например, нереализуемая идеальная гауссова форма импульса при линейной частотной модуляции приводит к гауссовому укороченному импульсу. Вообще при достаточно большом коэффициенте укорочения справедливо следующее приближение для корреляционных функций ЛЧМ импульсов различной формы:

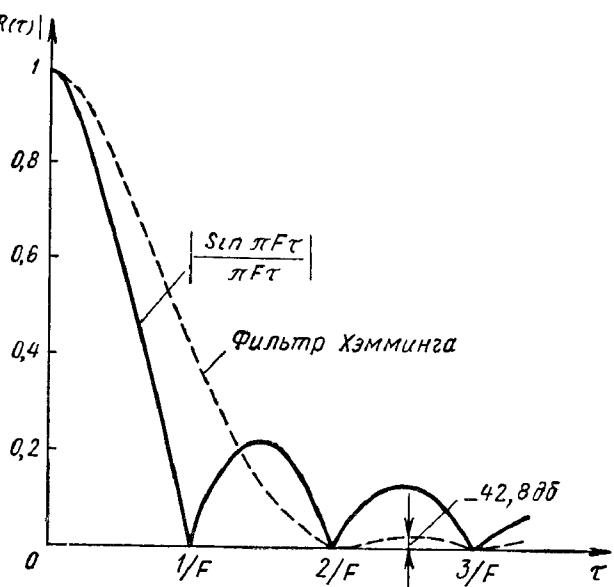


Рис. 14.26. Сигнал на выходе фильтра Хэмминга.

и, следовательно, подбором формы импульса $A(t)$ всегда можно синтезировать нужный сигнал $R(\tau)$. Этот путь, однако, трудно осуществить на практике.

§ 5. ИСКАЖЕНИЯ ЛЧМ ИМПУЛЬСОВ В РАДИОТРАКТЕ РЛС

Применение описанных выше принципов формирования и приема ЛЧМ импульсов ограничивается искажениями сигнала, которые возникают в различных элементах радиотракта РЛС. Существует много источников искажений. Основные из них следующие.

Даже при идеальном модулирующем импульсе частотные характеристики усилителя мощности не являются идеальными. Ампли-

тудно-частотная характеристика в пределах рабочей полосы имеет «глубокий» и «скосы» и может выглядеть так, как это представлено на рис. 14.27. Соответственно и реальная фазо-частотная характеристика отличается от линейной.

Модулирующий импульс, подаваемый на усилитель мощности, является идеальным и имеет фронты, скос и осцилляции на вершине. Этим амплитудно-временным искажениям из-за электронного изменения фазы в приборе соответствуют также фазо-временные искажения.

Искажения ЛЧМ импульсов сильно зависят и от дисперсионных свойств волноводного тракта. Фазо-частотная характеристика волновода нелинейна и может быть разложена в окрестности центральной

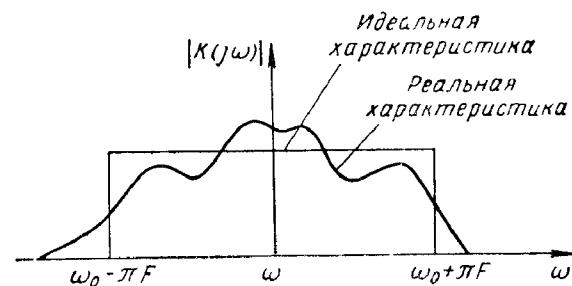


Рис. 14.27. Амплитудно-частотная характеристика усилителя мощности.

частоты ω_0 в ряд Тейлора, коэффициенты которого зависят от отношения несущей к критической частоте. Линейный член обуславливает постоянную задержку выходного сигнала, квадратичный — изменение наклона ЧМ в импульсе, а кубический — несимметричное искажение формы укороченного импульса и увеличение боковых лепестков. (Если изменение наклона не будет компенсировано, то это приведет к увеличению боковых лепестков.)

Несогласованные неоднородности в волноводном тракте за счет двойного отражения сигнала (сначала в направлении, противоположном основному, а затем при отражении обратной волны от другой неоднородности в прямом направлении) также приводят к увеличению боковых лепестков.

Специфические искажения типа отклонения от линейности изменения частоты в зависимости от времени возникают при формировании «частотной пилы». В реальных устройствах на идеальную «пилу» накладываются гармонические и полиномиальные составляющие различной скорости.

Наконец, частотные характеристики приемного устройства, включая укорачивающий фильтр, также отличаются от идеальных, что приводит к появлению дополнительных лепестков.

Перечисленные выше основные искажения могут иногда в значительной степени изменить укороченный импульс, расширяя его главный лепесток и увеличивая боковые лепестки.

Рассмотрим кратко некоторые типичные искажения и их влияние на форму выходного сигнала. Как уже упоминалось, амплитудный и фазовый спектры ЛЧМ импульса по форме повторяют зависимость амплитуды и фазы от времени. Поэтому одинаковые по

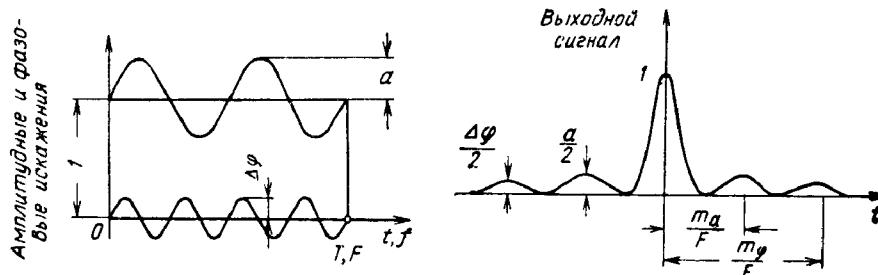


Рис. 14.28. Периодические искажения ЛЧМ импульса.

форме и величине искажения частотной характеристики радиотракта и временные отклонения самого сигнала будут приводить к одинаковым результатам. Этот принцип эквивалентности частоты и времени часто используется в теории искажений. Поэтому в частности, на рис. 14.28—14.30 и 14.32 ось абсцисс, соответствующая

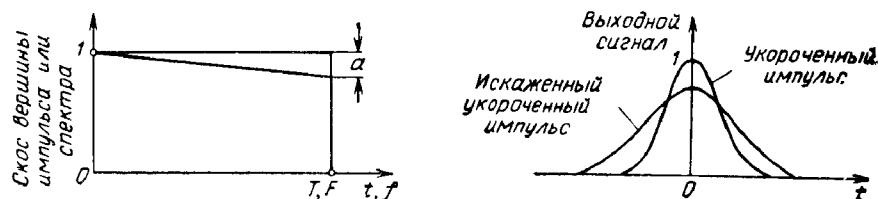


Рис. 14.29. Искажения типа «скос».

оси времени для временных искажений, для частотных искажений соответствует оси частот. Вследствие этого на этих рисунках точка T на временной оси совпадает с точкой F на частотной оси.

Рассмотрим влияние наиболее типичных искажений на форму укороченного импульса.

Периодические искажения амплитуды величиной a и фазы величиной $\Delta\phi$ вызывают появление пары ложных импульсов для каждого «гармоника» с амплитудами, равными соответственно $a/2$ и $\Delta\phi/2$. Эти ложные импульсы симметрично сдвинуты относительно основного лепестка на величину, зависящую от числа периодов искажений, укладывающихся на длительности импульса (или на ширину

спектра). Указанный сдвиг равен m/F для временных и m/T для частотных искажений, где m — число периодов, укладывающихся на длительности T или на ширине спектра F соответственно.

На рис. 14.28 изображена идеальная форма огибающей импульса или амплитудный спектр ЛЧМ импульса, возможные периодические искажения амплитуды и фазы и форма выходного сигнала.

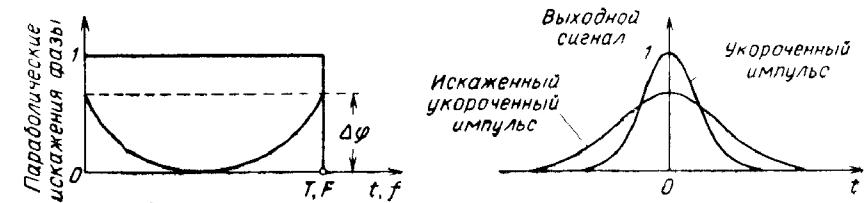


Рис. 14.30. Параболические искажения фазы ЛЧМ импульса.

Если принять высоту неискаженного импульса равной единице, то скос зондирующего сигнала величиной a_c приводит к уменьшению амплитуды на величину $a_c/2$ и симметричному расширению укороченного импульса на уровне 0,7 на величину $\approx 0,02 a_c^2$ (рис. 14.29). Уменьшение амплитуды символизирует уменьшение сигнал/шум в пике сигнала.

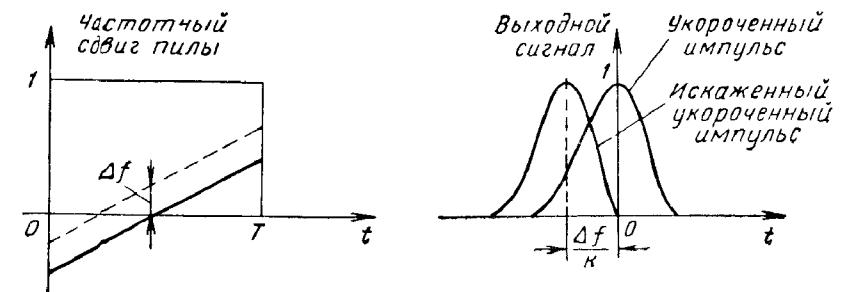


Рис. 14.31. Частотный сдвиг закона модуляции ЛЧМ импульса.

Параболические искажения фазовой характеристики (дополнительное приращение $\Delta\phi$ фазы на краю спектра сигнала относительно определяемого соотношением (14.4.7) значения) также приводят к уменьшению амплитуды укороченного импульса на величину $0,02(\Delta\phi)^2$, что ухудшает отношение сигнал/шум, и обуславливает расширение импульса на $0,05 (\Delta\phi)^2$. (рис. 14.30).

Вследствие доплеровского сдвига и неточности привязки закона модуляции частоты может возникнуть частотный сдвиг на величину Δf , это приводит к сдвигу укороченного импульса во времени на $\Delta t = \Delta f/k$ (рис. 14.31).

Во многих случаях точный вид искажений неизвестен. Тогда удобно считать их случайной функцией с нулевым средним значением, дисперсией σ^2 и временем корреляции $\tau_{\text{к}}$. Такие искажения

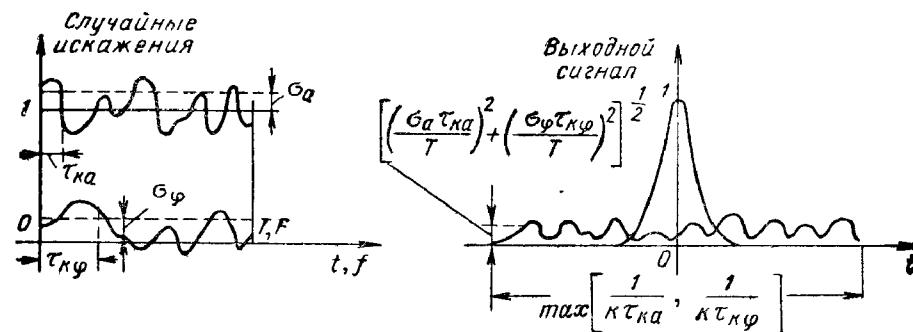


Рис. 14.32. Случайные искажения ЛЧМ импульса.

приводят к появлению случайных боковых лепестков со среднеквадратичным значением $\sigma_{\text{к}}/T$, расположенных во временном интервале $1/k\tau_{\text{к}}$ около основного импульса (рис. 14.32).

Теория искажений развита в нескольких работах, в том числе в [8, 9].

§ 6. ДИСКРЕТНЫЕ СИГНАЛЫ

Наряду с ЛЧМ импульсами в современной радиолокации широко используются дискретные сигналы, которые строятся следующим образом. Отрезок времени T (длительность импульса) разбивается на N временных позиций длительностью $\Delta = T/N$ каждая. На i -й позиции формируется колебание $A_i \exp\{j\varphi_i\}$, где A_i и φ_i — заранее выбранные амплитуда и фаза колебаний высокой частоты. Наборы A_1, \dots, A_N и $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ образуют коды, которые выбираются так, чтобы обеспечить функцию неопределенности с нужными свойствами.

В зависимости от ограничений, наложенных на A_i и φ_i , получаются разные классы сигналов. Например, если все $A_i = \text{const}$, а φ_i могут принимать лишь два значения (обычно 0 и π), то получается класс сигналов, называемый обычно классом ФМ импульсов. Сравнительная простота реализации фазового кодирования и выгоды, связанные с постоянством амплитуды при усилении по мощности, обеспечили ФМ импульсам широкое применение.

Функция неопределенности дискретных сигналов при достаточно большом числе позиций N имеет почти идеальный вид, представленный на рис. 14.33. На этом рисунке около нуля расположен глав-

ной максимум функции неопределенности, сосредоточенный в области

$$-\Delta \leq \tau \leq \Delta, -1/T \leq v \leq 1/T. \quad (14.6.1)$$

Вне этой области расположены боковые лепестки, имеющие значительно меньший уровень. За исключением сечения $\tau = 0$ уровень боковых лепестков зависит от числа позиций N и обычно составляет $1/\sqrt{N}$. Примерный вид сечений функции неопределенности ФМ импульсов при $v = 0$ и $\tau = 0$ представлен на рис. 14.34. Отметим, что уровень боковых лепестков зависит от вида используемого кода. Приведенные рисунки относятся к случаю так называемых «псевдослучайных» кодов.

Спектр ФМ импульса также зависит от вида используемого кода. Некоторую общую ориентировку дает рис. 14.35, где представлены амплитудный $|S(j\omega)|$ и фазовый $\Phi(\omega)$ спектры триадцатипозиционного сигнала Баркера.

Используя введенную ранее символическую запись (+1 — колебание с единичной амплитудой и фазой 0 и —1 — колебание с единицей

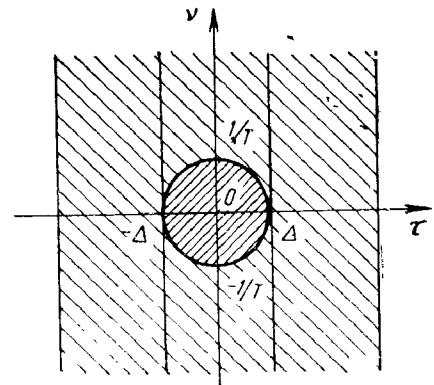


Рис. 14.33. Топографическая проекция функции неопределенности.

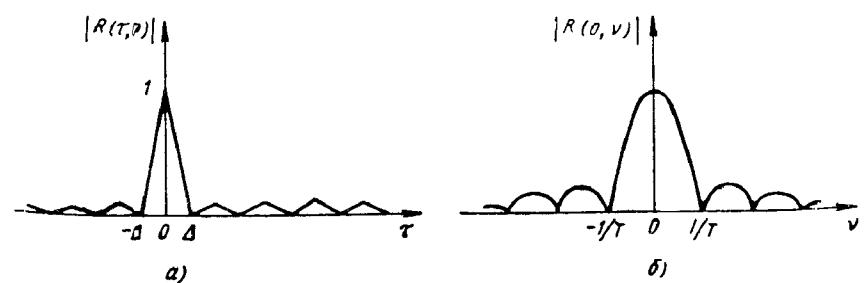


Рис. 14.34. Сечение функции неопределенности ФМ импульса плоскостями $v=0$ (a) и $\tau=0$ (b).

ничной амплитудой и фазой π), триадцатипозиционный сигнал Баркера можно представить в виде следующей последовательности символов:

1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, 1.

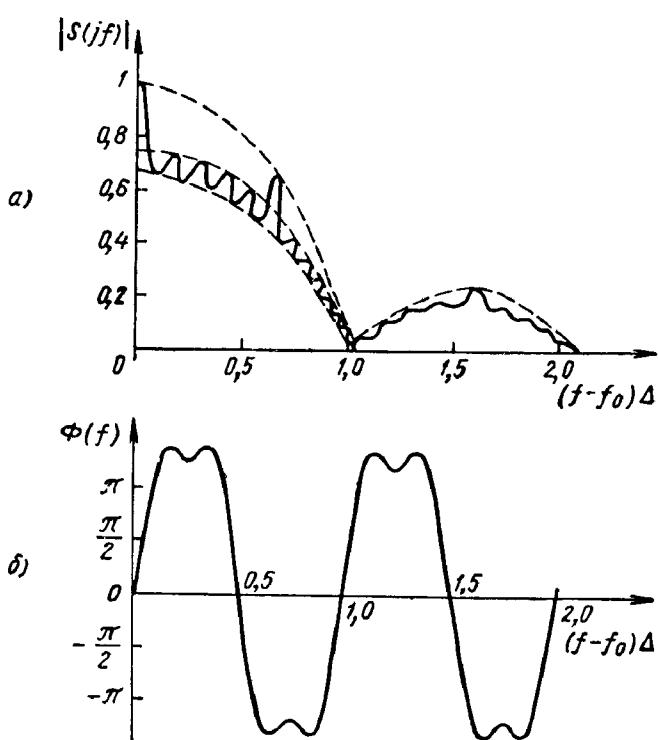


Рис. 14.35. Амплитудный (а) и фазовый (б) спектры тринадцатипозиционного сигнала Баркера.

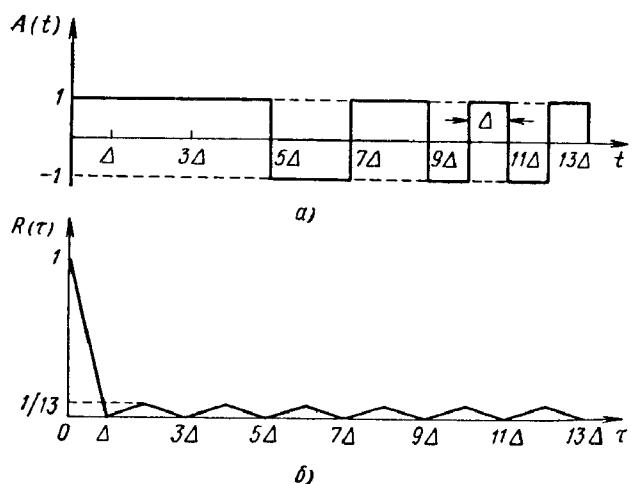


Рис. 14.36. Тринадцатипозиционный сигнал Баркера (а) и его корреляционная функция (б).

Корреляционная функция $R(\tau)$ сигнала Баркера имеет специфический регулярный характер (рис. 14.36), причем уровень ее боковых лепестков не превышает величины $1/N$. Характерная особенность амплитудного спектра рассматриваемого сигнала Баркера состоит в появлении на определенных частотах выбросов. Для других сигналов Баркера появляются провалы, иногда доходящие почти до нуля. Фазовый спектр сигнала имеет регулярный характер.

В дальнейшем рассмотрим некоторые классы кодов для дискретных сигналов, причем основное внимание уделим получению сигналов с хорошими корреляционными функциями $R(\tau)$. Как уже указывалось ранее, корреляционная функция $R(\tau)$ является определяющей характеристикой зондирующего сигнала в случае, если максимальный сдвиг частоты, независимо от того, какую природу он имеет (допплеровский сдвиг или нестабильности гетеродинов), удовлетворяет условию

$$\gamma_{\max} \ll 1/T. \quad (14.6.2)$$

§ 7. ДИСКРЕТНЫЕ СИГНАЛЫ, СВЯЗАННЫЕ С ЛИНЕЙНЫМИ РЕКУРРЕНТНЫМИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ

Обширный класс дискретных сигналов строится на основе линейных рекуррентных последовательностей (ЛРП) [10]. Использование ЛРП целесообразно по следующим основным причинам.

Импульсные ФМ сигналы, использующие ЛРП, имеют хорошие корреляционные свойства, а именно, отношение главного максимума к максимальному боковому лепестку автокорреляционной функции растет приближенно как \sqrt{N} , где N — число позиций в импульсе длительностью T . Кроме того, рекуррентный характер последовательностей и некоторые их свойства позволяют построить компактные формирователи сигналов и приемники корреляционного типа И, наконец, непрерывные ФМ сигналы, построенные на основе ЛРП, могут иметь идеальные автокорреляционные функции.

Структура сигнала рассматриваемого вида имеет случайный характер, хотя способ его формирования вполне регулярен. Шумоподобный характер сигнала при манипуляции фазы на два положения (0 или π) проявляется, в частности, в том, что общее число позиций, содержащих колебания с фазой 0 и с фазой π , почти одинаково, общее число пар соседних позиций, содержащих фазы (0, 0), (0, π), (π , 0), (π , π), также почти одинаково и т. д.

Линейной рекуррентной последовательностью называется периодическая последовательность символов

$$\dots, s_1, s_2, s_3, \dots, s_t, \dots, \quad (14.7.1)$$

каждый из которых может принимать значения из области G (0, 1, ..., $p - 1$), удовлетворяющая рекуррентному правилу

$$a_0 s_t + a_1 s_{t-1} + \dots + a_n s_{t-n}, \quad (14.7.2)$$

причем $a, a_i \in G$ и операции сложения и умножения производятся по модулю p^* . Предполагается, что модуль p является простым числом. Соотношение (14.7.2) называется правилом кодирования, число p — основанием последовательности, число n — памятью последовательности.

ЛРП удобно строить, задав произвольную «начальную комбинацию» из n символов s_1, s_2, \dots, s_n и применяя далее правило кодирования (14.7.2).

Пример 1. Пусть $p = 5$, $n = 2$, $s_i = s_{i-1} + 3s_{i-2}$ — правило кодирования и начальная комбинация $(0, 1)$. Тогда ЛРП имеет вид: $0, 1, 1, 4, 2, 4, 0, 2, 2, 3, 4, 3, 0, 4, 4, 1, 3, 1, 0, 3, 3, 2, 1, 2, 0, 1, \dots$

Далее основное внимание уделяется частному случаю $a = 0$. При этом рекуррентное соотношение (14.7.2) может быть записано в следующем матричном виде. Пусть $\bar{s}_k = [s_{k+n-1}, \dots, s_k]^+$ — вектор-столбец и определена производящая матрица:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (14.7.3)$$

Тогда

$$\bar{s}_{k+1} = A\bar{s}_k = A^k \bar{s}_1. \quad (14.7.4)$$

Вектор \bar{s}_k характеризует состояние, в котором находится последовательность на k -м шаге.

Ниже перечислены некоторые свойства ЛРП.

ЛРП является периодической последовательностью с периодом

$$P \leq N = p^n - 1. \quad (14.7.5)$$

Действительно, имеется всего p^n различных состояний последовательности. Состояние $\bar{0} = [0, \dots, 0]^+$ является особым, так как $A^k \bar{0} = \bar{0}$. За исключением этого состояния имеется всего $p^n - 1$ возможностей. Если при построении последовательности пробегаются все возможные состояния, то последовательность имеет

* Операция сложения двух чисел a и b по модулю m определяется правилом:

$$a + b = \begin{cases} a + b, & a + b < m, \\ a + b - m, & a + b \geq m \end{cases}$$

Например, $2 + 3 = 1$ ($m = 4$).

максимальный период, в противном случае — период, меньший максимального. В примере 1 максимальный период P_{max} равен $\lambda = 5^2 - 1 = 24$. Последовательности максимального периода (МЛРП) имеют для радиолокации особое значение.

Период МЛРП содержит по $p^n - 1$ символов вида $1, 2, \dots, p-1$ и $p^{n-1} - 1$ нулей и распадается на $p-1$ «цугов» длительностью $\lambda = N/(p-1) = (p^n - 1)/(p-1)$ каждый, причем в матрице

$$B = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_M \\ s_{M+1} & s_{M+2} & \dots & s_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{M(p-2)+1} & \dots & \dots & s_N \end{bmatrix} \quad (14.7.6)$$

$p - 1$ строки, M столбцов и все строки пропорциональны. Коэффициент пропорциональности k является первообразным корнем единицы модуля p^* . Значения первообразных корней для некоторых значений модуля p приведены в табл. 14.7.1.

Таблица 14.7.1
Первообразные корни k единицы модуля p

p	3	5	7	11	13
k	2	2; 3	3; 5	2; 6; 7; 8	2; 6; 7; 11

Отыскание МЛРП или, точнее говоря, правил кодирования, формирующих МЛРП, производится с помощью ограниченного перебора возможностей. В настоящее время составлены таблицы правил кодирования, формирующих МЛРП. Показано также, что при любых заданных p и n число Q различных МЛРП равно

$$Q = \frac{1}{n} \Phi(p^n - 1), \quad (14.7.7)$$

где $\Phi(h)$ — функция Эйлера в теории чисел**.

В результате исследования МЛРП в различное время было построено несколько специальных классов сигналов.

* Первообразным корнем единицы модуля p называется число k , удовлетворяющее условию:

$k^q = 1$ только для $q = p - 1$,

$k^q \neq 1$ для любого другого $q < p - 1$.

** Функция Эйлера $\Phi(h)$ равна количеству целых чисел, включая единицу, меньших числа h и взаимно простых с h . Например, если h равно простому числу p , то $\Phi(p) = p - 1$.

Сигналы Хаффмена [11]. Если $p = 2$, то получаются двоичные последовательности, состоящие из единиц и нулей. Значения числа различных МЛРП при заданных n приведены в табл. 14.7.2.

Таблица 14.7.2

Количество различных МЛРП при $p = 2$

n	2	3	4	5	6	7	8
Q	2	2	2	6	6	18	16

В качестве примера ниже приведены правила кодирования МЛРП для $n \leq 5$:

n	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
2	—	—	—	—	1	1	1
3	—	—	1	0	1	1	1
4	—	1	0	0	0	1	1
5	1	0	0	1	1	0	1
	1	0	1	1	1	1	1
	1	1	0	1	1	1	1

Недостающие МЛРП получаются зеркальным отображением выписанных правил.

Сигнал Хаффмена строится на основе рассмотренных МЛРП с $p = 2$ в соответствии со следующим правилом: нулю последовательности соответствует колебание единичной амплитуды и нулевой фазы, единице последовательности соответствует колебание единичной амплитуды и фазы π . Символически это правило можно представить следующим образом:

$$0 \rightarrow 1 = \exp\{j0\}, \\ 1 \rightarrow -1 = \exp\{j\pi\}.$$

Пример 2. Пусть правило кодирования определяется соотношением $s_t = s_{t-1} + s_{t-3}$, начальная комбинация представляет собой последовательность $(0; 0; 1)$. При этих условиях МЛРП имеет вид:

$$0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, \dots, N = 2^8 - 1 = 7,$$

а соответствующий ей сигнал Хаффмена представляет собой следующую последовательность символов:

$$1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1, \dots$$

В непрерывной радиолокации используется бесконечный пе-риодический сигнал Хаффмена; в импульсной локации может быть использован любой период МЛРП, т. е. период, начинающийся с любой фазы, что соответствует заданию произвольной начальной комбинации при построении МЛРП.

Корреляционные свойства сигналов Хаффмена в настоящее время достаточно хорошо изучены. Легко показать, что в непрерывном режиме работы автокорреляционная функция имеет главный максимум, равный 1, и одинаковые по величине боковые лепестки, равные $-1/\sqrt{N}$. Это фундаментальное свойство сигналов, связанных с МЛРП. К сожалению, «непрерывные» корреляционные функции зондирующих сигналов обычно важны лишь в тех случаях, когда нельзя пренебречь сдвигом Доплера и, следо-вательно, важен полный вид функции неопределенности, а не только ее сечения вдоль оси задержек при нулевом частотном сдвиге. Однако хорошие свойства «непрерывной» автокорреляционной функции отражаются и на «импульсной» автокорреляции. Если обозначить «импульсную» автокорре-ляцию как

$$r_N, r_{N-1}, \dots, r_1,$$

где r_N — значение главного лепестка, а r_1, \dots, r_{N-1} — значения боковых лепестков автокорреляционной функции, то для сигналов Хаффмена справедливо равенство

$$r_q + r_{N-q} = -1, q = 1, 2, \dots, N-1. \quad (14.7.8)$$

Это соотношение накладывает ограничения на боковые лепестки, примыкающие к главному. Общий характер боковых лепестков автокорреляционной функции соответствует рис. 14.37, причем уровень боковых лепестков не превышает величины $1/\sqrt{N}$.

Уровень $1/\sqrt{N}$ объясняется псевдослучайным характером сигнала. Боковой лепесток корреляционной функции является суммой произведений компонент сигнала. В силу случайного характера сигнала в указанной сумме содержится приблизительно одинаковое число +1 и -1. Таким образом, среднее значение бокового лепестка равно нулю, а дисперсия равна N . Разделив среднеквадратичное значение бокового лепестка \sqrt{N} на максимальное значение главного лепестка, равное N , получим уровень $1/\sqrt{N}$.

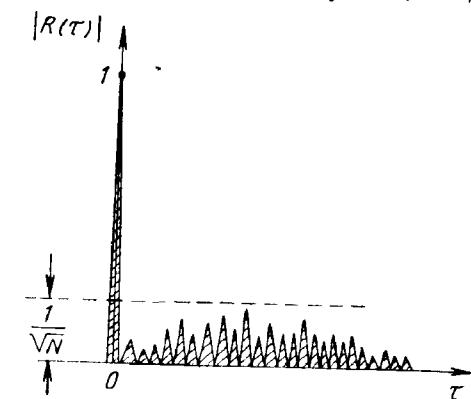


Рис. 14.37. Автокорреляционная функция сигнала Хаффмена.

Как отмечалось выше, при заданных P и n существует определяемое формулой (14.7.7) число Q различных МЛРП. Любой период каждой из этих МЛРП, отличающийся начальной комбинацией символов, может быть использован для формирования сигнала. Соответствующие этим МЛРП сигналы Хаффмена отличаются как порядком чередования символов $+1$ и -1 , так и максимальными значениями r боковых лепестков. В каждом из возможных при заданных $p = 2$ и n сигналов Хаффмена можно указать боковой лепесток, имеющий наибольшее по сравнению с остальными лепестками максимальное значение, равное r_{max} . Путем перебора возможных (при сформулированных выше условиях) сигналов Хаффмена можно отыскать среди них сигнал, у которого наибольшее максимальное значение r_{max} боковых лепестков будет наименьшим среди рассматриваемых сигналов. В дальнейшем это «минимаксное» значение бокового лепестка обозначается через $r_{min\ max}$, а соответствующий ему сигнал называется минимаксным сигналом Хаффмена. Некоторые характеристики минимаксных сигналов Хаффмена приведены в табл. 14.7.3. Из таблицы, в частности, следует, что минимаксное значение $r_{min\ max}$ несколько меньше \sqrt{N} , однако по мере увеличения N оно все больше приближается к этой величине.

Таблица 14.7.3

Некоторые характеристики минимаксных сигналов Хаффмена

n	N	$r_{min\ max}$	\sqrt{N}	$1/\sqrt{N}$
3	7	1	2,6	0,39
4	15	3	3,9	0,26
5	31	4	5,6	0,17
6	63	6	7,9	0,13
7	127	8	11,3	0,09
8	255	13	16,0	0,06

В качестве примера ниже приведен минимаксный сигнал Хаффмена для $n = 5$:

$-1, -1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, -1,$
 $-1, -1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, 1, 1.$

Модуль его ненормированной автокорреляционной функции имеет следующий вид:

1, 0, 1, 4, 1, 2, 3, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 3, 2, 1, 0, 31.

Сигналы Цирлера [10]. Эти сигналы получаются из МЛРП при любом p и n заменой символов МЛРП на колебания по правилу:

$$\left. \begin{aligned} 0 &\rightarrow \exp\{j \cdot 0 \cdot 2\pi/p\}, \\ 1 &\rightarrow \exp\{j \cdot 1 \cdot 2\pi/p\}, \\ \dots &\dots \\ p-1 &\rightarrow \exp\{j(p-1)2\pi/p\}. \end{aligned} \right\} \quad (14.7.9)$$

Корреляционные свойства сигналов Цирлера аналогичны свойствам сигналов Хаффмена как в непрерывном, так и в импульсном режиме работы.

Следующие классы сигналов связаны с заменой элементов МЛРП на символы Лежандра.

Сигналы Пэли-Плоткина [12, 13]. Частным случаем МЛРП является последовательность единичной памяти, имеющая следующее правило кодирования:

$$s_i = \mu + s_{i-1}, \quad (14.7.10)$$

и представляющая при $\mu = 1$ натуральный ряд чисел

$$0, 1, 2, \dots, p-1, 0, 1, 2, \dots$$

Предположим, что $p = 4k - 1$, $k = 1, 2, 3, \dots$, и сигнал строится в соответствии с правилом

$$s_i \rightarrow V_i = \left(\frac{s_i}{p} \right), \quad (14.7.11)$$

где $\left(\frac{s_i}{p} \right)$ — символ Лежандра числа s_i по модулю p^* , причем $\left(\frac{0}{p} \right) = \pm 1$. Получающаяся при этом последовательность символов Лежандра обладает хорошими корреляционными свойствами. В частности, в непрерывном режиме боковые лепестки автокорреляционной функции равны -1 , а главный лепесток равен p .

Пример 3. Пусть $p = 7$, $s_i = 2 + s_{i-1}$. Тогда МЛРП имеет вид: ..., 0, 2, 4, 6, 1, 3, 5,

* Символ Лежандра $V = \left(\frac{s}{p} \right)$ числа s равен $+1$, если s является квадратичным вычетом модуля p , и равен -1 , если s является квадратичным невычетом модуля p . Число является квадратичным вычетом, если оно представляет квадрат по модулю p какого-либо целого числа и невычетом — в противном случае. Например, при $p = 5$ имеем

$1^2 = 1; 2^2 = 4; 3^2 = 4; 4^2 = 1$
и поэтому 1, 4 — квадратичные вычеты, а 2, 3 — квадратичные невычеты модуля 5. Таким образом,

$$\left(\frac{1}{5} \right) = +1; \left(\frac{2}{5} \right) = -1; \left(\frac{3}{5} \right) = -1; \left(\frac{4}{5} \right) = +1$$

а соответствующая ей последовательность символов Лежандра равна

$$\pm 1, 1, 1, 1, -1, -1, \pm 1, 1, \dots$$

Легко установить, что непрерывная автокорреляционная функция такого сигнала имеет следующий вид:

$$7, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 7, \dots$$

Импульсные автокорреляционные функции сигналов Пэли—Плоткина аналогичны автокорреляционным функциям псевдослучайных сигналов. Уровень их боковых лепестков приблизительно равен $1/\sqrt{p}$. Кроме того, боковые лепестки таких сигналов подчиняются условию $r_q + r_{N-1} = -1$.

Последовательности символов Лежандра МЛРП общего вида. Предположим, что построена последовательность максимального периода при произвольных p и n в соответствии с правилом

$$s_i \rightarrow V_i = \left(\frac{s_i}{p} \right), \quad (14.7.12)$$

причем символ Лежандра нуля считается равным нулю.

В результате такой замены получается периодический сигнал с периодом $2 \frac{p^n - 1}{p - 1}$, равным удвоенной длительности цуга. Полупериоды сигнала отличаются только знаком.

Построенные таким способом сигналы имеют примечательные корреляционные свойства. Непрерывная функция корреляции имеет нулевые боковые лепестки и главный максимум, равный $\pm p^{n-1}$. Следует, однако, оговориться, что непрерывная функция корреляции подсчитывается при интегрировании за полпериода последовательности, в соответствии с чем ее главные максимумы следуют через полпериода.

В импульсном режиме могут использоваться полупериоды последовательности символов Лежандра, начинающиеся с любой фазы. Эти сигналы содержат нулевые провалы по огибающей и кодирование по фазе производится на два состояния: 0 и 1. Сигналы имеют псевдослучайные свойства и их ненормированные автокорреляционные функции обладают боковыми лепестками с уровнем

приближенно равным $\sqrt{\frac{p^n - 1}{p - 1}}$.

Пример 4. Пусть $p = 29$, $n = 2$ и правило кодирования выбрано в виде $s_i = 16s_{i-1} + 11s_{i-2}$. Если начальной комбинацией является $(0, 1)$, то сигнал имеет вид:

$$0, 1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, \\ -1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, 1.$$

Сигнал содержит $\frac{29^2 - 1}{29 - 1} = 30$ символов, но так как единственный нулевой символ стоит первым, фактически имеется 29-позиционный фазо-манипулированный сигнал.

Автокорреляционная функция такого сигнала имеет вид:

$$0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, -3, 0, 1, 0, -3, 0, -3, 0, -3, 0, 1, 0,$$

$$3, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 29, \text{ причем максимальный боковой лепесток ее равен } 3.$$

Класс сигналов, построенный на основе МЛРП при $n = 2$, побоблытен тем, что здесь на полупериоде последовательности имеется только один нуль.

§ 8. ДРУГИЕ КЛАССЫ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

Сигналы Баркера [14]. Особое место занимают сигналы, имеющие минимально возможный при данном N уровень боковых лепестков, равный 1. Такие сигналы существуют только для определенных значений $N = 2, 3, 4, 5, 7, 11, 13$ и называются сигналами Баркера. Вид таких сигналов при различных N и соответствующие им автокорреляционные функции приведены в табл. 14.8.1.

Таблица 14.8.1

N	Сигналы Баркера	
	Сигналы Баркера	Автокорреляционная функция
3	1, 1, -1	-1, 0, 3
4	1, 1, 1, -1 1, 1, -1, 1	-1, 0, 1, 4 1, 0, -1, 4
5	1, 1, 1, -1, 1	1, 0, 1, 0, 5
7	1, 1, 1, -1, -1, 1, -1	-1, 0, -1, 0, -1, 0, 7
11	1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, -1, 1, -1	-1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, 11
13	1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1	1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 13

Сигналы Баркера являются уникальными сигналами, имеющими регулярные автокорреляционные функции.

Некоторые усложненные сигналы. Усложнение дискретного сигнала (например, фазовая манипуляция на несколько уровней, дополнительная амплитудная манипуляция и др.) приводит к улучшению его корреляционных свойств. Проиллюстрируем это положение некоторыми примерами.

Предположим, что боковые лепестки автокорреляционной функции должны удовлетворять условию

$$|r_1| = 1, r_2 = r_3 = \dots = r_{N-1} = 0.$$

Можно показать, что сигналы с корреляционными функциями, удовлетворяющими этому требованию, могут быть найдены в классе сигналов, дискреты s , которых являются действительными числами. Формирование таких сигналов возможно при произвольной амплитудной манипуляции и манипуляции фазы на два положения (0 или π). Легко убедиться, что при $N = 5$ требуемую функцию корреляции имеет сигнал вида $1; q; q^2/2; -q; 1$. Например, при $q = 2$ такой сигнал представляет собой последовательность 1, 2, 2, -2, 1, а его корреляционная функция имеет вид 1, 0, 0, 0, 14.

В некоторых случаях можно отказаться от требования нулевых боковых лепестков. Имеющиеся здесь возможности можно показать на примере следующего сигнала с дополнительной амплитудной манипуляцией:

$$1; 1; 0,5; -3; -3; -3; +3; -3; -0,5; 1; -1.$$

Нетрудно убедиться, что автокорреляционная функция такого сигнала имеет вид:

$$-1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 50.$$

Хорошой иллюстрацией возможности дополнительной амплитудной манипуляции на два уровня (0 или 1) является сигнал, представляющий собой последовательность

$$1, 1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, 0, 0, -1,$$

автокорреляционная функция которого имеет следующий вид:

$$-1, -1, 1, 0, -1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 0, 1, 13.$$

Сигналы Шермана [3]. Сигналы Шермана могут принимать на позициях два дискретных значения 0 или 1, что соответствует применению только амплитудной манипуляции. Как отмечалось в § 2, сигналы Шермана удовлетворяют требованию не более чем одного совпадения при сдвиге на любое t . Вследствие этого импульсные корреляционные функции этих сигналов имеют боковые лепестки, принимающие лишь два значения: 0 или 1. Так, например, сигнал Шермана для $N = 8$ имеет вид 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, а его автокорреляционная функция $-1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 4$.

С точки зрения обработки желательно иметь наименьшую длину сигнала, сохраняя при этом заданное число единиц. Такие «оптимальные» сигналы найдены для случаев $M = 3, 4, \dots, 10$ (M — число единиц в сигнале) и представлены в табл. 14.8.2.

Зависимость $\log N$ от M имеет вид прямой линии. Экстраполируя значения M , можно найти, что для $M = 30$ ожидается $N \approx 1000$. Таким образом, сигналы Шермана при значительной длительности T обеспечивают сравнительно небольшую энергию в импульсе.

Таблица 14.8.2
Сигналы Шермана

N	M	Расстояние между единицами
4	3	1, 2
7	4	1, 3, 2
12	5	1, 3, 5, 2
18	6	1, 3, 6, 2, 5
26	7	1, 3, 6, 8, 5, 2
35	8	1, 3, 5, 6, 7, 10, 2
46	9	1, 3, 9, 11, 6, 8, 2, 5
62	10	1, 6, 4, 15, 13, 8, 9, 3, 2

Многофазовые коды Френка [15]. Естественный путь построения фазо-манипулированного импульсного сигнала с фазовой манипуляцией на несколько уровней состоит в передаче дискретными уровнями параболической зависимости фазы от времени, что соответствует в непрерывном случае ЛЧМ импульсу. Подобного рода коды, построенные Френком, имеют хорошие непрерывные свойства.

Пусть p и N — целые взаимно простые числа, а единица фазового сдвига равна $\Psi = 2\pi p/N$. Значения фаз на позициях, измеренные в единицах Ψ фазового сдвига, удобно изобразить в виде матрицы:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & (N-2) & (N-1) \\ 0 & 2 & 4 & 2(N-2) & 2(N-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & (N-2) & 2(N-2) & \dots & (N-2)(N-1) \\ 0 & (N-1) & 2(N-1) & \dots & (N-1)(N-2) \end{bmatrix} \pmod{N}.$$

При этом временная кодовая последовательность Френка формируется последовательным выписыванием строки за строкой. Вследствие того, что матрица C содержит N строк и N столбцов, период такой последовательности равен N^2 .

Пример 1. Пусть $N = 4$. Тогда матрица C принимает вид

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

что соответствует следующей последовательности Френка:

$$0, 0, 0, 0, 1, 1, 3, 0, 2, 0, 2, 0, 3, 2, 1, \dots$$

Автокорреляционная функция непрерывного сигнала Френка имеет нулевые боковые лепестки и главные максимумы, равные N^2 , следующие с периодом N^2 . В качестве кода для импульсного сигнала Френка может быть использована любая циклическая перестановка периода. Лучшие результаты, однако, получаются при использовании основного периода.

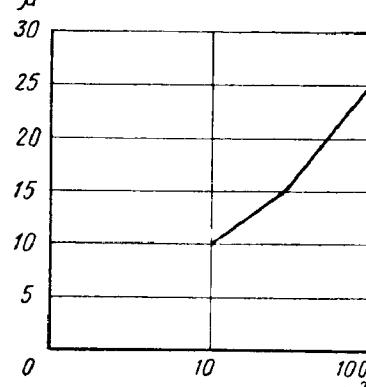


Рис. 14.38. Уровень боковых лепестков корреляционных функций сигналов Френка.

Кроме того, структура кодов компактные схемы генераторов кодов.

В заключение отметим, что функция неопределенности сигналов Френка на плоскости «частота — задержка» имеет много общего с функцией неопределенности ЛЧМ импульсов.

§ 9. ПОДАВЛЕНИЕ БОКОВЫХ ЛЕПЕСТКОВ ПРИ НЕОПТИМАЛЬНОМ ПРИЕМЕ

Дискретные сигналы, в особенности при сравнительно небольшом коэффициенте укорочения и достаточно простой форме (например, прямоугольная огибающая и фазовая манипуляция на два уровня: 0 и π), имеют автокорреляционные импульсные функции с большими боковыми лепестками. Для подавления боковых лепестков следует использовать не согласованные фильтры, а фильтры, специально подобранные таким образом, чтобы выходной сигнал имел требуемые боковые лепестки.

Подавление боковых лепестков сопровождается проигрышем в отношении сигнал/шум в максимуме выходного сигнала по сравнению с оптимальной величиной $2E/N_0$. В отличие от импульсов с линейной частотной модуляцией подавление боковых лепестков корреляционных функций ФМ импульсов не сопровождается расширением главного максимума. Вместо этого расширяется область боковых лепестков выходного сигнала.

Приемное устройство в данном случае удобно представить в виде центральной линии задержки (с максимальной задержкой $\theta > T$) с отводами, отстоящими друг от друга на длительность позиции Δ (рис. 14.39). На выходе каждого отвода помещен фазовращатель (ΦB), который может изменить фазу на π , и аттенюатор (A), изменяющий амплитуду сигнала в нужное число раз. Выходные сигналы аттенюаторов суммируются, и результат суммирования фильтруется в полосе $1/\Delta$. Результат совместного действия фазовращателя и аттенюатора сводится к умножению сигнала с каждого входа отвода на действительный вес h_i , где i — номер отвода.

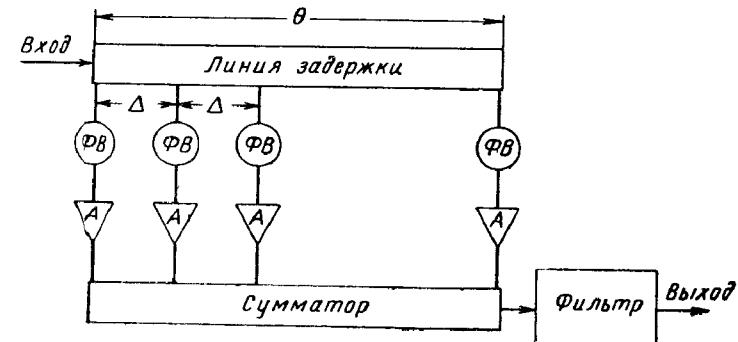


Рис. 14.39. Приемное устройство, подавляющее боковые лепестки ФКМ импульсов.

Выходной сигнал фильтра в зависимости от конкретного вида весов h_i имеет различный характер. Для получения желаемого эффекта веса подбирают так, чтобы выходной сигнал имел большой главный лепесток (ширина по основанию 2Δ) и маленькие боковые лепестки.

При теоретическом синтезе устройства удобно пользоваться одним из двух критериев. Пусть величина μ равна отношению главного максимума к максимальному боковому лепестку выходного сигнала, а величина v — отношению главного максимума к корню квадратному из суммы квадратов боковых лепестков.

Если веса h_i выбраны из условия максимизации величины μ при заданной форме входного сигнала, то соответствующий фильтр называется далее μ -фильтром. Если значения весов максимизируют параметр v , то фильтр называется v -фильтром. Оба вида фильтров могут быть использованы в радиолокации.

Для отыскания весов по μ -критерию используются модернизированные алгоритмы линейного программирования. Для отыскания весов по v -критерию используется обычная методика отыскания условного экстремума функций многих переменных и различные специальные приемы решения систем линейных уравнений. Теоретически дело сводится к отысканию экстремума квадратичной формы

при некоторых дополнительных ограничениях линейного вида. Техника решения таких задач разработана сравнительно хорошо. Поэтому практически пользоваться v -критерием легче, чем μ -критерием.

Ниже приведены результаты построения μ - и v -фильтров, подавляющих боковые лепестки сигналов Баркера с $N = 5, 7, 13$.

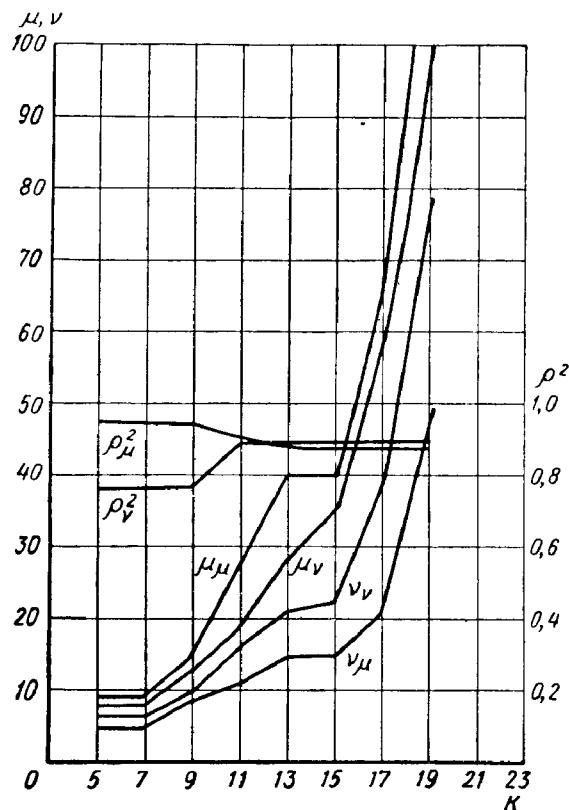


Рис. 14.40. Подавление боковых лепестков сигнала Баркера с $N=5$.

На рис. 14.40 — 14.42 представлены зависимости параметров μ , v и ρ^2 (где ρ^2 — отношение сигнал/шум по мощности в максимуме выходного сигнала, поделенное на $2E/N_0$) от максимальной задержки линии, измеренной в единицах длительности позиции: $k = \theta/\Delta + 1$. Для сигналов Баркера с $N = 5$ и 7 приводятся сравнительные результаты по μ - и v -фильтрам. Для сигналов Баркера с $N = 13$ приводятся результаты по v -фильтрам.

Эффективность подавления боковых лепестков увеличивается с возрастанием параметра k приблизительно экспоненциально.

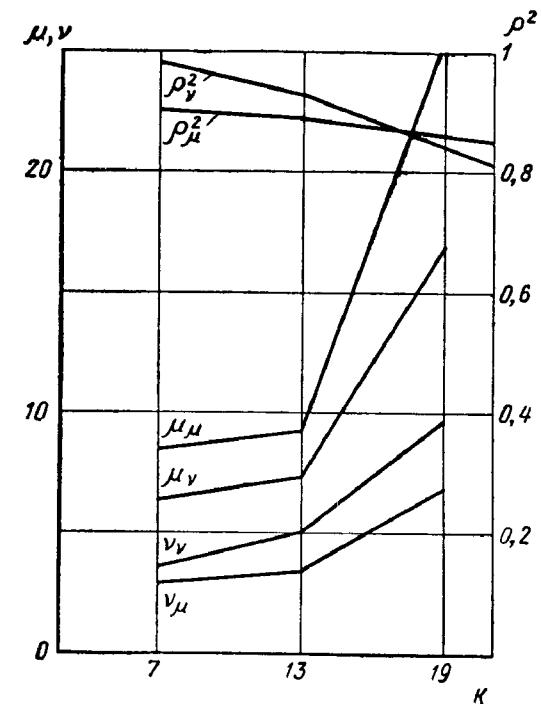


Рис. 14.41. Подавление боковых лепестков сигнала Баркера с $N=7$.

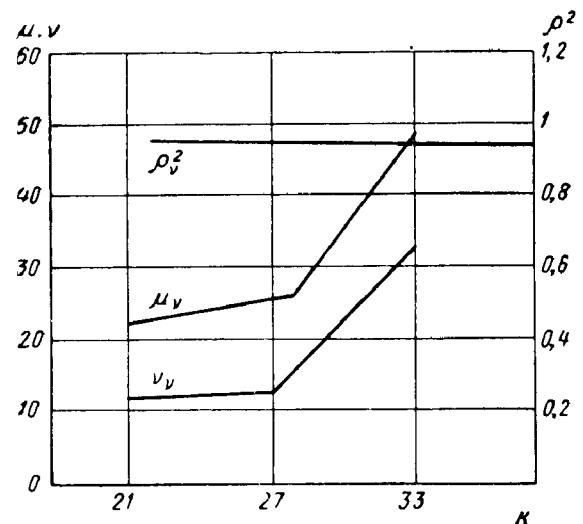


Рис. 14.42. Подавление боковых лепестков по v -критерию для сигнала Баркера с $N=13$.

При достаточно большом k может быть достигнут любой наперед заданный уровень боковых лепестков. При этом проигрыш в отношении сигнал/шум по мощности по сравнению с оптимальной фильтрацией незначителен. Последнее объясняется тем, что импульсный отклик μ - и v -фильтров, в основном, имеет следующую структуру; центральная часть импульсного отклика почти согласована с используемым сигналом; начало и конец импульсного отклика хотя и могут быть довольно длинными, по амплитуде значительно меньше центральной части. Таким образом, начало и конец импульсного отклика, выполняя корректирующую роль в смысле подавления боковых лепестков, мало влияют на отношение сигнал/шум. Сказанное иллюстрируется следующим примером.

Для пятипозиционного сигнала Баркера $1, -1, 1, 1, 1$, веса отводов линии задержки, используемые в μ -фильтре при $k = 19$, равны $1, 2, 1, -3, -8, -8, 1, 21, 37, 23, -37, 21, -1, -8, 8, -3, -1, 2, -1$, причем $\mu = 139$, $v = 49$, $\rho^2 = 0,88$. Импульсный отклик этого фильтра, снятый на выходе сумматора, будет состоять из серии δ-функций, коэффициенты которых равны выписанным весам.

На рис. 14.43 представлен μ -фильтр с числом отводов $k = 33$, построенный для сигнала Баркера с $N = 13$. Характеристики μ и ρ^2 такого фильтра соответственно равны $\mu = 96$ и $\rho^2 = 0,96$.

Среди большого разнообразия различных дискретных сигналов имеются сигналы, хорошо «поддающиеся» неоптимальной обра-

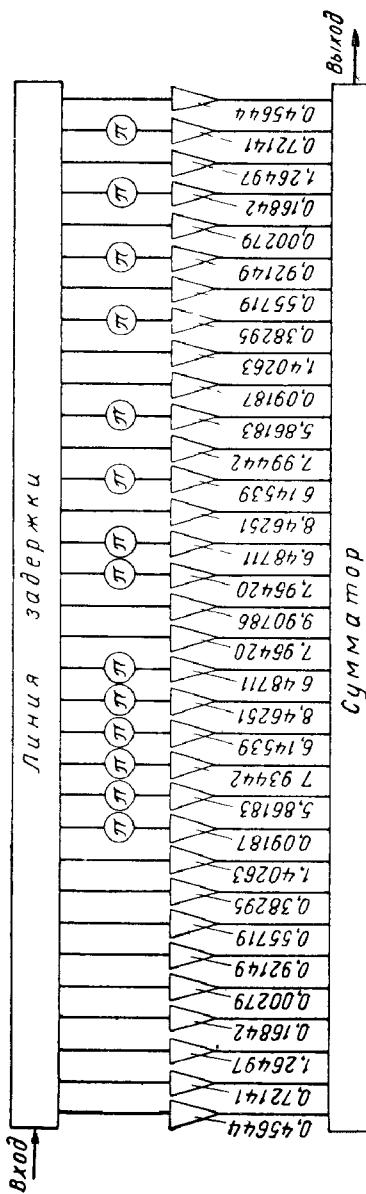


Рис. 14.43. μ -фильтр для сигнала Баркера с $N = 13$ ($k = 33$).

зите, и сигналы, для которых «несогласованный» прием неэффективен. В частности, сигналы Баркера с числом позиций 5 и 13 в этом смысле более эффективны, чем с числом позиций 7 и 11.

Интересно отметить также, что μ - и v -фильтры дают не очень отличающиеся результаты. Это, в частности, следует из сравнения рис. 14.40 и 14.41.

§ 10. ВОПРОСЫ «СВЕРХУКОРОЧЕНИЯ»

При помощи специальных фильтров можно укоротить входной сигнал таким образом, что длительность сигнала на выходе фильтра будет значительно меньше величины $1/\Delta f$, где Δf — полоса исходного сигнала. Такое укорочение сопровождается, конечно, значительными потерями в отношении сигнал/шум. Однако в некоторых случаях (например, как мера борьбы с пассивными помехами масового типа) сверхукошение является целесообразным.

Ниже представлены результаты построения укорачивающих μ - и v -фильтров для прямоугольного импульса без фазовой внутренней модуляции. С помощью комбинаций дифференцирующих устройств можно, конечно, добиться разнообразных форм выходного сигнала. Однако фильтры, построенные по μ - и v -критериям, являются в этом отношении оптимальными.

Пусть необходимо укоротить исходный прямоугольный импульс в L раз. Импульсный отклик μ -фильтра имеет следующий характеристический вид (приводятся веса отводов);

$$\begin{aligned} & -1, 2, \underbrace{0, \dots, 0}_{L-2 \text{ нуля}}, \underbrace{-3, 4, \underbrace{0, \dots, 0}_{L-2 \text{ нуля}}, \underbrace{-5, 6, \underbrace{0, \dots, 0}_{L-2 \text{ нуля}}, \dots, }_{\text{3 звено}} \\ & \quad \text{1 звено} \qquad \text{2 звено} \qquad \text{3 звено} \\ & - (2J-1), 2J, \underbrace{0, \dots, 0}_{L-2 \text{ нуля}}, 2J, -(2J-1), \end{aligned}$$

Импульсный отклик симметричен относительно середины, проходящей между звеньями, содержащими веса $-(2J-1)$, $2J$ и $2J$, $-(2J-1)$. Модули весов отводов образуют натуральный ряд чисел, причем знаки весов чередуются.

Фильтр, состоящий из пяти звеньев и укорачивающий в $L = 5$ раз, представлен на рис. 14.44. Там же представлены входной и выходной сигналы фильтра.

Физика работы этого фильтра достаточно проста. Входной импульс всегда действует только на пару соседних отводов, веса ко-

торых противоположны по знаку и отличаются по величине на единицу. Поэтому на выходе сумматора будет появляться сигнал

$$-1, 1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, 12, 1, 1, \dots$$

Максимум, равный 12, появляется в случае, когда импульс занял в линии задержки среднее положение. За счет наращивания звеньев линии можно получить теоретически любые отношения главного максимума к боковому лепестку.

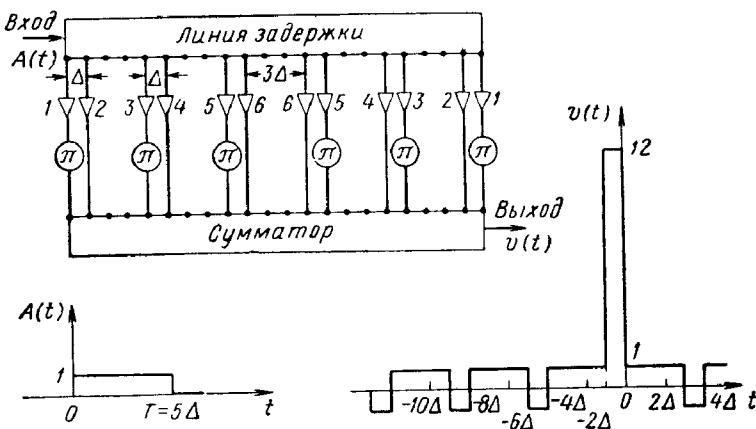


Рис. 14.44. Укорачивающий μ -фильтр.

Сигнал на выходе μ -фильтра имеет следующие параметры:

$$\mu = 4J; v = 4\sqrt{\frac{J}{L}}; \rho^2 = \frac{24J}{(2J+1)(4J+1)}; \rho^2 \approx \frac{3}{JL}.$$

Последнее равенство справедливо при достаточно большом J .

Для того, чтобы получить достаточно большое подавление боковых лепестков (например, $\mu \approx 50$), необходимо выбрать число звеньев порядка 10. При этом $\rho^2 \approx 1/3L$, т. е. отношение сигнал/шум по мощности в пике выходного сигнала примерно в три раза меньше отношения сигнал/шум по мощности для РЛС, работающей с зондирующим импульсом в L раз более коротким, чем исходный.

Определенный ранее v -фильтр, укорачивающий прямоугольный импульс, имеет структуру, подобную μ -фильтру. Ниже приведены сведения, относящиеся к v -фильтру.

Импульсный отклик такого фильтра имеет вид:

$$-2, 2 + \frac{1}{\varepsilon}, \underbrace{0, \dots, 0}_{L-2 \text{ нуля}}, -4 - \frac{1}{\varepsilon}, 4 + \frac{2}{\varepsilon}, \underbrace{0, \dots, 0}_{L-2 \text{ нуля}}$$

1 звено 2 звено

$$6 - \frac{2}{\varepsilon}, 6 + \frac{3}{\varepsilon}, \underbrace{0, \dots, 0}_{L-2 \text{ нуля}}, -2J - \frac{J-1}{\varepsilon}, 2J + \frac{J}{\varepsilon}, \underbrace{0, \dots, 0}_{L-2 \text{ нуля}}$$

3 звено

и далее симметрично относительно середины отклика. Параметры сигнала на выходе такого фильтра равны

$$\mu = 2J + \frac{J}{\varepsilon}; v = \sqrt{4J + \frac{2J}{\varepsilon}}; \rho^2 \approx \frac{3}{LJ},$$

где $L = 2\varepsilon + 1$ — число раз, в которое укорачивается исходный импульс. Последнее равенство справедливо при больших J и ε .

§ 11. ФОРМИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

Формирование дискретных сигналов имеет специфические особенности.

К числу их, в частности, относится наличие правила кодирования у дискретных сигналов, основанных на ЛРП.

Пусть $[s_i]$ представляет собой ЛРП с правилом кодирования

$$s_i = a_1 s_{i-1} + \dots + a_n s_{i-n},$$

где a_m, s_i — двоичные числа, и сложение производится по модулю 2. Последовательность двоичных символов $[s_i]$ может быть сформирована с помощью устройства, изображенного на рис. 14.45.

Устройство состоит из сдвигающего регистра, имеющего n разрядов, причем каждый разряд может находиться в одном из двух состояний (0 или 1), умножителей на коэффициент a_m (в двоичном случае это означает просто наличие или отсутствие связи с сумматором), сумматора по модулю 2 и цепи обратной связи. Устройство работает от внешних запускающих импульсов, следующих с периодом, равным длительности позиций Δ . В каждом такте в разрядах регистра хранятся двоичные числа: s_{i-1} хранится в первом разряде, ..., s_{i-n} — в n -м разряде. При этом на выходе сумматора формируется

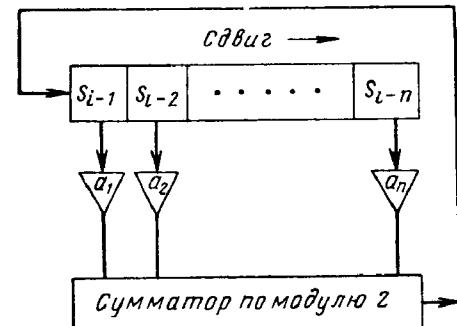


Рис. 14.45. Генератор двоичной последовательности символов.

число s_i , определяемое правилом кодирования. В случае появления очередного запускающего импульса происходит сдвиг содержимого регистра на один разряд в направлении, указанном на рис. 14.45. При этом в первый разряд записывается число s_i , хранившееся в предыдущем такте на выходе сумматора, во второй разряд записывается число s_{i-1} , хранившееся в первом разряде предыдущего такта и т. д. Начиная с первого такта, в регистре хранится последовательность состояний:

$$[s_1, \dots, s_n], [s_2, \dots, s_{n+1}], \dots$$

Прямое решение задачи формирования последовательности символов с периодом $N = 2^n - 1$ потребовало бы применения устройства, имеющего «память» N , например, линии задержки с максимальной задержкой, равной $T = N\Delta$. Сдвигающие регистры, охваченные петлей обратной связи, имеют «память» $n \approx \log_2 N$, что позволяет упростить устройство в целом.

В некоторых случаях двоичные сигналы псевдослучайного характера не имеют столь простого правила кодирования. Однако выбором подходящей памяти и применением нелинейной логики можно всегда сформировать генератор, подобный описанному.

После того, как последовательность видеопульсов, соответствующая коду, получена, формирование радиочастотного сигнала может быть выполнено при помощи быстродействующего коммутатора, пропускающего на вход усилителя мощности один из сигналов (например, $\cos \omega_0 t$ или $-\cos \omega_0 t$) в зависимости от величины коммутирующего напряжения.

Вторая особенность применения дискретных сигналов заключается в возможности получения кодовых последовательностей, задержанных относительно исходной, с помощью логических операций над разрядами сдвигающего регистра. В качестве примера рассмотрим эти операции применительно к сигналам Хаффмена.

Предположим, что, кроме основной цепи обратной связи, над разрядами сдвигающего регистра осуществляется линейная операция вида

$$u_i = c_1 s_{i-1} + \dots + c_n s_{i-n},$$

где c_m — двоичные числа и сложение производится по модулю 2.

Можно показать, что каждой комбинации коэффициентов c_1, \dots, c_n (т. е. каждому виду связи разрядов с дополнительным сумматором) соответствует последовательность $[s_i]$, задержанная относительно исходной на некоторое число символов, т. е.

$$[u_i] = [s_{i+l}], 1 \leq l \leq N-1.$$

Общее число комбинаций из n символов c_1, c_2, \dots, c_n , за исключением нулевой, равно $2^n - 1 = N$.

На рис. 14.46 представлены генератор последовательности и формирователи сдвинутых последовательностей ЛРП класса $p = 2$, $n = 3$ с периодом $N = 7$.

В случае использования сигналов Хаффмена логика получения сдвинутых последовательностей является линейной. В других случаях можно воспользоваться нелинейной логикой.

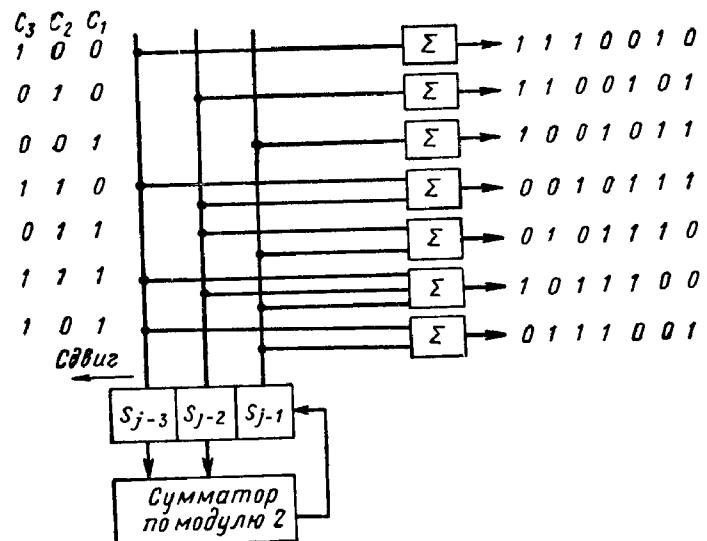


Рис. 14.46. Генератор опорных сигналов для многоканального коррелятора.

Описанный генератор может быть использован и в многоканальном корреляторе в качестве задающего устройства для формирования опорных сигналов в каналах коррелятора.

§ 12. ИСКАЖЕНИЯ ФМ ИМПУЛЬСОВ В РАДИОТРАКТЕ РЛС

Дискретные сигналы, проходя по тракту РЛС, претерпевают искажения, ограничивающие практическое использование таких сигналов. Некоторые искажения ФМ импульсов и ЛЧМ импульсов имеют общую природу. К их числу следует отнести, в частности, перечисленные в § 5 искажения, вызываемые неидеальностью амплитудно частотной характеристики усилителя мощности и укорачивающего фильтра; дисперсионными свойствами волноводов антенно-фидерного тракта; отличием формы модулирующего импульса, подаваемого на усилитель мощности, от прямоугольной; наличием несогласованных неоднородностей в антенно-фидерном тракте и т. п.

Кроме того, имеются искажения, связанные с дискретной структурой зондирующего сигнала и соответственно с дискретностью формирователя и дискретностью в приемном устройстве. Эти искажения можно разделить на две группы:

1) искажения, связанные с неточностями установки фазы манипуляции сигнала и с неточностями весов отводов линии задержки по амплитуде и фазе (амплитудно-фазовые неточности);

2) искажения, связанные с неточностями временной структуры сигнала и фильтра, в частности, с неточностями моментов манипуляции фазы сигнала и неточностями в расположении отводов на линии задержки (временные неточности).

Рассмотрим влияние некоторых видов искажений на форму выходного сигнала. Характер этого влияния в определенной степени зависит от конкретного вида дискретного сигнала. Хорошие оценки можно получить, если воспользоваться процедурой усреднения по значениям сигнала, считая, что значения сигнала от позиции к позиции независимы и значения фазы на позиции (например, 0 и π при $p = 2$) равновероятны. Оценки, полученные таким способом, очевидно, соответствуют случаю использования псевдослучайного сигнала с большим числом позиций $N \gg 1$.

Влияние искажений сказывается не только на уровне боковых лепестков выходного сигнала, но также и на форме главного лепестка и на отношении сигнал/шум в главном лепестке. Проигрыш в отношении сигнал/шум удобно оценивать параметром ρ^2 , который равен фактическому отношению сигнал/шум по мощности при наличии искажений, отнесенному к отношению сигнал/шум на выходе согласованного фильтра.

Амплитудно-фазовые неточности. Пусть σ_ϕ^2 — дисперсия фазовых неточностей сигнала, σ_a^2 — дисперсия амплитудных неточностей весов отводов ЛЗ, σ_ψ^2 — дисперсия фазовых неточностей весов отводов ЛЗ. Сами неточности предполагаются нормальными случайными величинами с нулевым средним значением. Тогда дисперсия значений выходного сигнала имеет вид рис. 14.47. Здесь λ^2 — дисперсия дополнительных боковых лепестков, отнесенная к квадрату центрального пика, равная при $t = 0$

$$\lambda^2 = \frac{1}{N} \left[\sigma_\phi^2 \left(1 - \frac{1}{p} \right) + \sigma_a^2 + \sigma_\psi^2 \right]. \quad (14.12.1)$$

Характерные особенности этих искажений заключаются в том, что наибольшие дополнительные лепестки возникают в окрестности главного максимума и линейно уменьшаются к краям корреляционной функции. Величина дополнительных боковых лепестков обратно пропорциональна числу позиций N . Таким образом, эти искажения можно уменьшить, выбрав псевдослучайный код с большим числом позиций.

Отношение сигнал/шум при наличии такого рода искажений определяется формулой

$$\rho^2 = 1 - \sigma_\phi^2 \left(1 - \frac{1}{p} \right) - \sigma_a^2 - \sigma_\psi^2 = 1 - N\lambda^2. \quad (14.12.2)$$

Неточности момента манипуляции фазы сигнала. Пусть σ_t^2 — дисперсия неточности момента коммутации фазы, причем сама неточность распределена по равномерному закону в пределах длительности позиции с нулевым средним значением. Относительная дисперсия боковых лепестков, возникающих из-за амплитудно-фазовых неточностей, имеет вид рис. 14.47, причем величина дисперсии в районе главного максимума равна:

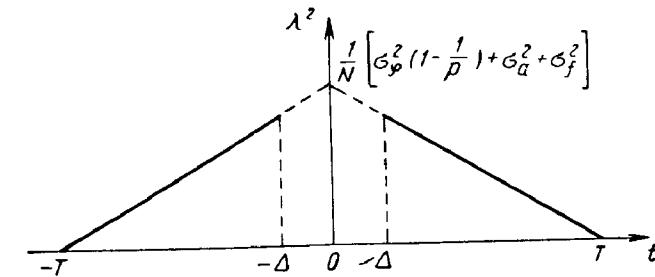


Рис. 14.47. Относительная дисперсия боковых лепестков, возникающих из-за амплитудно-фазовых неточностей.

Проигрыш в отношении сигнал/шум по мощности при наличии искажений такого вида определяется формулой

$$\rho^2 = \frac{1,25}{N} \left(\frac{\sigma_t}{\Delta} \right)^2. \quad (14.12.3)$$

Таким образом, этот вид искажений также зависит от числа позиций N .

Неточности установки отводов ЛЗ по задержке. Пусть σ_z^2 — дисперсия неточности установки отводов ЛЗ по задержке. Предполагается, что приращение фазы, возникающей из-за указанной неточности, выбрано при настройке фазовращателей в отводах линии. Сама неточность распределена равномерно на интервале Δ с нулевым средним значением. Относительная дисперсия боковых

лестков имеет вид рис. 14.47, причем в этом случае справедливы соотношения

$$\lambda^2 = \frac{0.9}{N} \left(\frac{\sigma_t}{\Delta} \right)^2, \quad (14.12.5)$$

$$\rho^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sigma_t}{\Delta} \right)^2. \quad (14.12.6)$$

Данные искажения также могут быть ослаблены выбором большого N .

Помимо появления дополнительных лепестков и уменьшения отношения сигнал/шум временные неточности приводят также к искажению формы главного максимума. Средний главный максимум

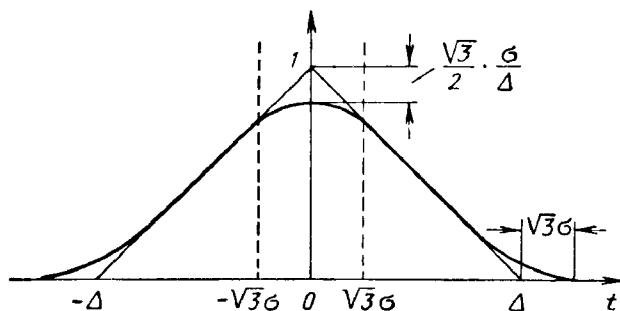


Рис. 14.48. Среднее значение главного лепестка при временных искажениях.

отличается от треугольника и имеет вид, изображенный на рис. 14.48. Здесь σ может быть σ_t или σ_τ в зависимости от того, какая неточность рассматривается. Средний главный максимум расширяется и уменьшается по амплитуде. Последнее символизирует проигрыш в отношении сигнал/шум по напряжению.

Рассмотрим теперь сигнальные искажения непрерывного характера, такие, как непрерывная модуляция сигнала по фазе и по амплитуде. Анализ этих искажений приводит к следующим результатам.

Синусоидальная фазовая или амплитудная модуляция. Этот тип искажений представлен на рис. 14.49. Количественно искажения выходного сигнала характеризуются дисперсией, причем усреднение производится по ансамблю зондирующих сигналов так же, как и при анализе дискретных искажений. Относительная дисперсия имеет вид рис. 14.47, причем максимальное значение для фазовых искажений равно $\Delta\varphi^2/2N$, а для амплитудных искажений —

$\cdot 2N$. При больших $m_\varphi \gg 1$ и $m_a \gg 1$ проигрыш в отношении сигнал/шум не зависит от m_φ и m_a и равен

$$\rho^2 = 1 - \frac{\Delta\varphi^2}{2}; \quad \rho = (1 - a)^2 \quad (14.12.7)$$

для амплитудных и фазовых искажений соответственно.

Искажения типа «скос». Наличие скоса угибающей импульса (рис. 14.29) приводит к появлению несимметричных относительно центра дополнительных боковых лепестков. Наибольшее значение таких лепестков достигается при $t = \Delta$ и равно $a_c^2/3N$.

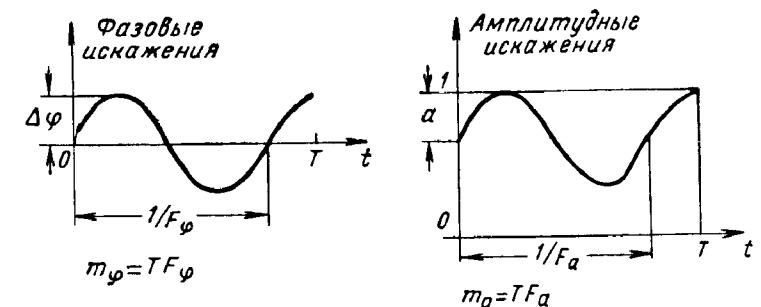


Рис. 14.49. Непрерывные амплитудно-фазовые искажения ФМ импульса.

Приведенные результаты по регулярным искажениям ФМ сигналов показывают, что их влияние на выходной сигнал ослабляется в зависимости от числа позиций N . Формально это является следствием усреднения по сигналу, который считается случайным. По существу уменьшение искажений объясняется тем, что регулярные искажения, проходя по отводам ЛЗ согласованного фильтра, приобретают случайный характер и затем суммируются уже как случайные величины.

Важным видом искажений является частотный сдвиг несущей частоты относительно центральной, на которую настроен согласованный фильтр. Анализ влияния этого сдвига на боковые лепестки и форму главного лепестка для случайных сигналов показывает, что уровень боковых лепестков не зависит от частотного сдвига, в то время как отношение сигнал/шум по мощности в главном пике уменьшается в соответствии с квадратом $|R(0, \Omega)|^2$ функции неопределенности.

Сравнивая результаты влияния однотипных искажений ЧМ импульсов и ФМ импульсов на форму выходного сигнала, можно заметить, что псевдослучайные ФМ сигналы проявляют значительно большую устойчивость к большинству типовых искажений, чем ЛЧМ импульсы. Относительная дисперсия боковых лепестков ФМ

сигналов в этих случаях обратно пропорциональна числу позиций, что позволяет эффективно подавлять «технические» боковые лепестки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вудворд Ф. М. Теория вероятностей и теория информации с применением в радиолокации. Пер. с англ. Изд-во «Советское радио», 1955.
2. Рихачек А. В. Разрешающие свойства импульсных последовательностей. Пер. с англ. Труды института инженеров по электротехнике и радиоэлектронике, 1964, № 2.
3. Shegarp H. Some optimal signals for time measurement. Trans. IRE, 1956, IT-2, № 1.
4. Cook C. E. Pulse compression key to more efficient radar transmission. Proc. IRE, 1960, № 3.
5. Тимис Ц. Л., Сайтрин А., Левиола М. А. Блок сжатия импульсов для РЛС сопровождения. «Зарубежная радиоэлектроника», 1964, № 11.
6. Тор Р. К. Техника сжатия импульса с большим произведением длительности на ширину спектра. «Зарубежная радиоэлектроника», 1963, № 12.
7. Temes C. L. Side lobe suppression in a range channel pulse — compression radar. Trans. IRE, 1962, MiL-6, № 2.
8. Кладдер Д. Р. и др. Теория и расчет импульсных радиолокационных станций с частотной модуляцией. «Зарубежная радиоэлектроника», 1961, № 1.
9. ДиФрайко Ж. В., Рубин В. Л. Анализ искажений при обработке радиолокационного сигнала. «Зарубежная радиоэлектроника», 1963, № 9.
10. Цирлер Н. Линейные рекуррентные последовательности. «Кибернетический сборник», 1963, вып. 6.
11. Хаффмей Д. Синтез линейных цепей последовательного кодирования. Сб. ст.: «Теория передачи сообщений». Изд-во иностранной литературы, 1957.
12. Плоткин М. Двоичные коды с заданным минимальным расстоянием. «Кибернетический сборник», 1963, вып. 7.
13. Джоши. О верхних границах для кодов с минимальным расстоянием. «Кибернетический сборник», 1960, вып. 1.
14. Birkel R. H. Group synchronizing of binary digital systems. Communication theory. Academic Press, 1953.
15. Франк Р. Многофазовые коды с хорошими непериодическими корреляционными свойствами. «Зарубежная радиоэлектроника», 1963, № 12.

Раздел IV

ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ