

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

---

Санкт-Петербургский государственный электротехнический  
университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

---

**СБОРНИК ЗАДАЧ СТУДЕНЧЕСКИХ ОЛИМПИАД  
ПО РАДИОТЕХНИЧЕСКИМ  
И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫМ СИСТЕМАМ**

Учебное пособие

Санкт-Петербург  
Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»  
2023

УДК 621.396(07)+621.39(07)

ББК 3 841я7+3 889.1я7

C23

Авторы: **В. П. Ипатов, А. С. Маругин, В. К. Орлов, А. М. Полетаев, М. В. Рыжов, Ю. Д. Ульяницкий.**

C23 Сборник задач студенческих олимпиад по радиотехническим и телекоммуникационным системам: учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2023, 152 с.

ISBN 978-5-7629

Содержит задачи, предложенные для решения студентам на региональных олимпиадах по радиотехнике и всероссийских олимпиадах по радиотехническим и телекоммуникационным системам в 2000–2022 гг.

Предназначен для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 11.03.01, 11.04.01 «Радиотехника», 11.03.02, 11.04.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», специальности 11.05.01 «Радиоэлектронные системы и комплексы», 11.05.02 «Специальные радиотехнические системы», а также может быть полезен аспирантам и инженерно-техническим работникам этих областей знаний.

УДК 621.396(07)+621.39(07)

ББК 3 841я7+3 889.1я7

Рецензенты: кафедра радиосистем Новгородского государственного университета им. Ярослава Мудрого; д-р. техн. наук О. И. Саута (АО «Навигатор»).

Утверждено  
редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного пособия

ISBN 978-5-7629

© СПбГЭТУ "ЛЭТИ", 2023

## Список сокращений и условных обозначений

АБГШ	– аддитивный белый гауссовский (нормальный) шум
АКФ	– автокорреляционная функция
АЧХ	– амплитудно-частотная характеристика
БШ	– белый шум
ВС	– временной селектор
ЛЗ	– линия задержки
МП	– максимум правдоподобия
ОП	– отношение правдоподобия
ПВ	– плотность вероятности
ПУ	– пороговое устройство
РЛС	– радиолокационная станция
РС	– решающая схема
СВ	– случайная величина
СП	– случайный процесс
СПМ	– спектральная плотность мощности
СФ	– согласованный фильтр
ФМ	– фазовая модуляция (манипуляция)
ФНЧ	– фильтр нижних частот
ФП	– функция правдоподобия
ФПВ	– функционал плотности вероятности
$P(A)$	– вероятность осуществления случайного события $A$
$P_{л.т}$	– вероятность ложной тревоги
$P_{п.с}$	– вероятность пропуска сигнала
$P_{п.о}$	– вероятность правильного обнаружения сигнала

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \quad \text{– интеграл вероятности}$$

$$\overline{x(t)} = M\{x(t)\} \quad \text{– статистическое усреднение (по ансамблю рализаций)} \\ \text{случайного процесса } x(t)$$

$$w(x(t)) = k \exp\left(-\frac{1}{N_0} \int_0^T x^2(t) dt\right) \quad \text{– функционал плотности вероятности бе-} \\ \text{лого гауссовского шума}$$

## **ПРЕДИСЛОВИЕ**

Настоящее издание представляет собой попытку собрать воедино многочисленные задания, предлагавшиеся участникам региональных студенческих олимпиад Санкт-Петербурга и Всероссийской олимпиады «Радиотехнические и телекоммуникационные системы» за период с 2000 г. по 2022 г.

Задачи объединены в тематические блоки, хотя соответствующее разбиение в достаточной мере условно, поскольку большинство задач носит многоплановый характер и предполагает комплексный подход к решению. Ряд из них сформулирован в нетривиальной постановке с тем, чтобы пробудить у студентов воображение и увлечь их процессом поиска решения.

Авторы признательны за тщательное рецензирование рукописи, замечания и полезные советы, способствовавшие ее улучшению, и благодарны коллегам из других вузов, а также преподавателям кафедры радиотехнических систем СПбГЭТУ «ЛЭТИ» за содействие и конструктивную критику.

## ВВЕДЕНИЕ

История проведения региональных студенческих олимпиад по радиотехнике насчитывает более четырех десятилетий. Начиная с 2000 г. базовой площадкой для проведения олимпиад стал Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ». В 2017 г. параллельно с олимпиадой по радиотехнике стала проводиться Всероссийская олимпиада «Радиотехнические и телекоммуникационные системы», что тут же расширило круг участников олимпиады. В 2021 г. олимпиада приобрела международный статус, и участие в ней приняли не только университеты Российской Федерации, но и вузы Белоруссии и Казахстана. Всероссийская олимпиада «Радиотехнические и телекоммуникационные системы» была включена в перечень мероприятий для предоставления грантов Президента Российской Федерации лицам, обучающимся в магистратуре.

Студенческие олимпиады являются одним из важнейших средств формирования высококвалифицированных специалистов, увлеченных своей работой. Это утверждение базируется на следующих положениях. Во-первых, при отборе участников выявляются наиболее активные и способные студенты, для которых учеба в университете не скучный формальный акт, а живое творческое дело, определяющее дальнейшую профессиональную карьеру. Во-вторых, подготовка к олимпиадам, связанная с решением нестандартных задач, не только способствует углубленной подготовке в данной предметной области, но и формирует творческий тип мышления, умение по-иному взглянуть на, казалось бы, стандартную задачу, найти для нее изящное и красивое решение. В-третьих, лично-командный характер межвузовских олимпиад формирует у студентов-участников команды на стадии подготовки к олимпиаде умение работать в коллективе, активно участвовать в дискуссиях, связанных с решением задач. Наконец, подготовка к олимпиаде и ее результаты позволяют выявить наиболее способных студентов для привлечения к работе на кафедрах с перспективой последующего включения в кадровый резерв.

В 2021 г., уже второй раз за всю историю проведения олимпиад, мероприятие было реализовано в дистанционном формате на платформе ZOOM. В условиях объективного сокращения возможности участия обучающихся в учебно-научных мероприятиях состязательного характера эти региональные олимпиады позволяют студентам проявить свои способности и заинтересованность в профессиональном самосовершенствовании.

Тематическая направленность олимпиады по радиотехнике связана с задачами оптимизации структур радиотехнических и телекоммуникационных систем и алгоритмов обработки сигналов. Математической базой предлагаемых задач являются теория вероятностей, теория случайных процессов, основы функционального анализа и математическая статистика. Для решения конкурсных задач необходимо умение творчески использовать знания и навыки, полученные при освоении таких обязательных для подготовки радиоспециалистов дисциплин, как высшая математика, теоретические основы электротехники, радиотехнические цепи и сигналы, математический аппарат радиотехники, статистическая радиотехника.

В проводимых олимпиадах по радиотехническим и телекоммуникационным системам традиционно принимают участие ведущие вузы Санкт-Петербурга: Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Военно-космическая академия имени А. Ф. Можайского, Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций. Олимпиада носит лично-командный характер. В 2021 г. каждый вуз-участник имел право выставить не более одной команды численностью 6 человек, причем в командный зачет шли результаты четырех лучших конкурсантов. При оценке работ учитывались 2 фактора: качество решения и сложность задачи. Последний критерий был формализован в виде коэффициента, зависящего от соотношения между средним баллом участников по итогам решения задачи и максимально возможной оценкой.

Проверка заданий осуществлялась жюри из представителей вузов-участников. При этом работы кандидатов в победители олимпиады дополнительно обсуждались всеми членами жюри.

Весьма важным элементом подготовки олимпиады является этап отбора задач из пакетов заданий, подготовленных методическими комиссиями вузов-участников. Сопутствовавшие этому конструктивные дискуссии позволили сблизить позиции различных научно-педагогических школ в области радиотехнических и телекоммуникационных систем, обменяться наиболее удачными методическими находками и освоить опыт коллег по организации преподавания профильных курсов.

## 1. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

**1.1.** Процесс  $x(t)$  представляет собой стационарную случайную последовательность неперекрывающихся между собой равнобедренных треугольных видеоимпульсов с амплитудой  $U_1$ , прямоугольных видеоимпульсов с амплитудой  $U_2$  и пауз между ними. Треугольные импульсы занимают 30 % всего времени, прямоугольные импульсы – 20 %, паузы – 50 %. Найти одномерную плотность вероятности, среднее значение и дисперсию процесса  $x(t)$ .

Решение. Отсчет, взятый из случайного процесса (СП)  $x(t)$ , может оказаться равным нулю, если он берется в момент паузы,  $U_2$ , если попадает в пределы прямоугольников, и равновероятно принять значения от 0 до  $U_1$ , оказываясь на боковых сторонах равнобедренных треугольных импульсов. Поэтому плотность вероятности отсчета, взятого из процесса:

$$w(x) = 0,5\delta(x) + 0,2\delta(x - U_2) + 0,3w_0(x), \text{ где } w_0(x) = \begin{cases} 1/U_1, x \in [0, U_1], \\ 0, x \notin [0, U_1]. \end{cases}$$

Среднее значение процесса

$$m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} xw(x)dx = 0,2U_2 + 0,3 \int_0^{U_1} x/U_1 dx = 0,2U_2 + 0,15U_1.$$

Второй начальный момент (средний квадрат) равен

$$m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2w(x)dx = 0,2U_2^2 + 0,3 \int_0^{U_1} x^2/U_1 dx = 0,2U_2^2 + 0,1U_1^2.$$

Дисперсия отсчета

$$M_2 = \sigma^2 = m_2 - m_1^2 = 0,2U_2^2 + 0,1U_1^2 - [0,2U_2 + 0,15U_1]^2.$$

**1.2.** Найти вероятность того, что из  $N$  независимых отсчетов стационарного нормального СП со средним значением  $a$  и дисперсией  $\sigma^2$  сумма первых  $N - 1$  отсчетов будет больше значения  $N$ -го отсчета.

Решение. В силу нормальности и независимости отсчетов сумма первых

$N - 1$  из них  $S_{N-1} = \sum_{i=1}^{N-1} x_i$  является нормальной случайной величиной (СВ) со

средним значением  $(N - 1)a$  и дисперсией  $(N - 1)\sigma^2$ . Введем новую СВ  $\xi$ , являющуюся разностью  $\xi = S_{N-1} - x_N$ , которая вновь оказывается гауссовской

с математическим ожиданием  $(N-2)a$  и дисперсией  $N\sigma^2$ . Тогда искомая ве-

роятность  $P(S_{N-1} > x_N) = P(\xi > 0) = \Phi\left(\frac{(N-2)a}{\sqrt{N}\sigma}\right)$ , где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx - \text{интеграл вероятности.}$$

Если  $a = 0$ , то  $P(S_{N-1} > x_N) = 0,5$  и не зависит от  $N$  и  $\sigma^2$ .

**1.3.** Нормальный белый шум (БШ) с нулевым средним и спектральной плотностью мощности (СПМ)  $N_0/2$  наблюдается на интервале  $[0, T]$ . Расположить 3 реализации, изображенные на рис.1.1 (одна из них (2) равна нулю), в порядке убывания «частот» их появления. Решение обосновать.

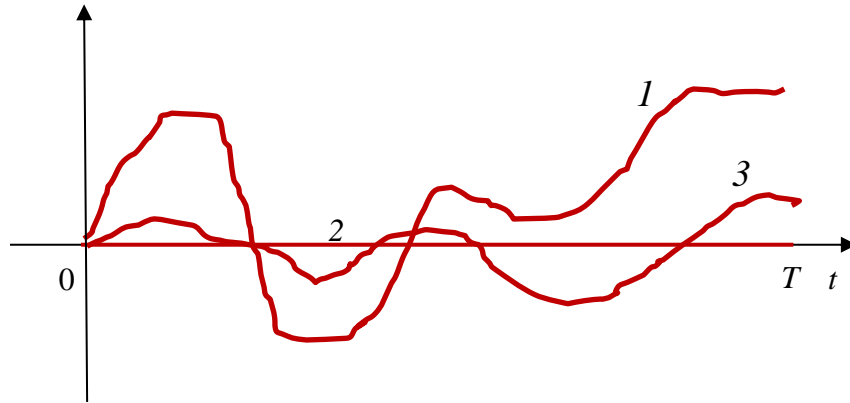


Рис. 1.1

Решение. Статистически полным описанием нормального БШ является функционал плотности вероятности (ПВ)  $w(x(t)) = k \exp(-\frac{1}{N_0} \int_0^T x^2(t) dt)$ , где

$\frac{N_0}{2}$  – СПМ БШ. Таким образом, реализации с большей энергией в пределах интервала наблюдений будут встречаться реже. Следовательно, реализация 1 будет появляться реже, а реализация 2 – чаще в сравнении с 3.

**1.4.** Найти совместную плотность вероятности СВ  $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$  и  $\eta_2 = \xi_1 - \xi_2$ , если  $\xi_1 = \int_0^T n(t) dt$ ,  $\xi_2 = \int_0^{2T} n(t) dt$ ,  $n(t)$  – нормальный БШ с нулевым средним и СПМ  $N_0/2$ .



Решение. СВ  $\eta_1$  и  $\eta_2$  являются совместно нормальными с плотностью вероятности  $w_{\eta_1\eta_2}(x_1, x_2)$ , зависящей от их средних значений, дисперсий и коэффициента корреляции. Так как математическое ожидание СП  $\overline{n(t)} = 0$ , то и средние СВ  $\overline{\xi_1} = \overline{\xi_2} = \overline{\eta_1} = \overline{\eta_2} = 0$ . Дисперсии СВ  $\eta_1$  и  $\eta_2$  равны  $\sigma_{\eta_1}^2 = \sigma_{\xi_1}^2 + \sigma_{\xi_2}^2 + 2\overline{\xi_1\xi_2}$  и  $\sigma_{\eta_2}^2 = \sigma_{\xi_1}^2 + \sigma_{\xi_2}^2 - 2\overline{\xi_1\xi_2}$ . Дисперсии СВ  $\xi_1$  и  $\xi_2$  соответственно равны  $\sigma_{\xi_1}^2 = \frac{N_0T}{2}$  и  $\sigma_{\xi_2}^2 = N_0T$ , их корреляционный момент  $\overline{\xi_1\xi_2} = \int_0^T \int_0^T \overline{n(t_1)n(t_2)} dt_1 dt_2 = \frac{N_0T}{2}$ , а коэффициент корреляции  $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Следовательно,  $\sigma_{\eta_1}^2 = \frac{5N_0T}{2}$ ,  $\sigma_{\eta_2}^2 = \frac{N_0T}{2}$ ,

$$w_{\eta_1\eta_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\eta_1}\sigma_{\eta_2}\sqrt{1-r^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{x_1^2}{\sigma_{\eta_1}^2} - \frac{2rx_1x_2}{\sigma_{\eta_1}\sigma_{\eta_2}} + \frac{x_2^2}{\sigma_{\eta_2}^2}\right]\right).$$

**1.5.** Найти коэффициент корреляции СВ  $y_1 = \int_0^T x(t)s_1(t)dt$  и  $y_2 = \int_0^T x(t)s_2(t)dt$ , где  $x(t)$  – аддитивный белый гауссовский шум (АБГШ) с СПМ  $N_0/2$ ;  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  – детерминированные сигналы одинаковой энергии  $E$ .

Решение. Коэффициент корреляции двух случайных величин есть их корреляционный момент, нормированный к среднему геометрическому дисперсий:

$$r_{y_1y_2} = \frac{R_{y_1y_2}}{\sqrt{\sigma_{y_1}^2 \sigma_{y_2}^2}}.$$

Полагая (без потери общности), что среднее процесса  $x(t)$  равно нулю

$$R_{y_1y_2} = \overline{y_1y_2} = \int_0^T \int_0^T \overline{x(t_1)x(t_2)s_1(t_1)s_2(t_2)} dt_1 dt_2 =$$

$$= \int_0^T \int_0^T \frac{N_0}{2} \delta(t_1 - t_2) s_1(t_1) s_2(t_2) dt_1 dt_2 = \frac{N_0}{2} \int_0^T s_1(t) s_2(t) dt =$$

$$= \frac{N_0}{2} R_{s_1 s_2} = \frac{N_0 E}{2} r_{s_1 s_2} = \sigma_x^2 r_{s_1 s_2},$$

где  $r_{s_1 s_2} = \frac{1}{E} \int_0^T s_1(t) s_2(t) dt$  – коэффициент корреляции сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ ;

$\sigma_x^2$  – дисперсия процесса  $x(t)$ , подвергнувшегося корреляционной обработке.

**1.6.** Элементы матрицы  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  образуются двоичным квантова-

нием по нулевому уровню независимых отсчетов (переводя значения отсчетов в числа  $\pm 1$ ) стационарного нормального СП со средним значением  $b$  и дисперсией  $\sigma^2$ . Найти дисперсию определителя матрицы  $\mathbf{A}$ .

Решение. Элементы матрицы являются случайными числами, поэтому и ее определитель  $\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$  случаен. Дисперсия определителя  $\sigma_{\mathbf{A}}^2 = \overline{\det^2 \mathbf{A}} - (\overline{\det \mathbf{A}})^2$ . Средние значения элементов матрицы  $\overline{a_{11}} = \overline{a_{22}} = \overline{a_{12}} = \overline{a_{21}} = (-1)(1-p) + 1 \cdot p = 2p - 1$ , где  $p = P(a_{ij} = 1) = \Phi(q)$ ,  $q = b / \sigma$ . Среднее значение определителя  $\overline{\det \mathbf{A}} = \overline{a_{11}a_{22}} - \overline{a_{12}a_{21}} = 0$  в силу независимости. Средний квадрат  $\overline{\det^2 \mathbf{A}} = \overline{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2} = \overline{(a_{11}a_{22})^2} + \overline{(a_{12}a_{21})^2} - 2\overline{a_{11}a_{22}a_{12}a_{21}} = \overline{a_{11}^2} \overline{a_{22}^2} + \overline{a_{12}^2} \overline{a_{21}^2} - 2\overline{a_{11}} \overline{a_{22}} \overline{a_{12}} \overline{a_{21}}$ . Учитывая, что  $\overline{a_{ij}^2} = (-1)^2(1-p) + 1^2 p = 1$ , получим:  $\overline{\det^2 \mathbf{A}} = 2 - 2(2p-1)^4$ . Окончательно  $\sigma_{\mathbf{A}}^2 = 2 - 2(2p-1)^4$ . При  $q = 0$   $\sigma_{\mathbf{A}}^2 = 2$ , при  $q \rightarrow \infty$   $\sigma_{\mathbf{A}}^2 = 0$ .

**1.7.** Элементы матрицы  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  образуются двоичным квантова-

нием независимых отсчетов с выхода согласованного фильтра, т. е. принимают значения 0 или 1 в зависимости от знака отсчета. Найти вероятность того, что матрица  $\mathbf{A}$  будет невырожденной, для случаев:  $q = 0$  и  $q = 3$ , где  $q$  – отношение сигнал/шум на выходе согласованного фильтра.

Решение. Матрица называется вырожденной, если ее определитель обращается в нуль:  $\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ .

Пусть  $p$  – вероятность получения нуля при квантовании. Условие вырожденности будет выполнено в следующих случаях:

- все 4 элемента равны 0. Это будет происходить с вероятностью  $p^4$ ;
- 3 элемента равны 0, чему соответствует вероятность  $4p^3(1-p)$ ;
- 2 элемента равны 0, но из шести возможных комбинаций элементов удовлетворяют ситуации получения вырожденной матрицы только 4, поэтому вероятность равна  $4p^2(1-p)^2$ ;
- все 4 элемента равны 1. Это будет происходить с вероятностью  $(1-p)^4$ .

Матрица окажется невырожденной с вероятностью  $P_{\text{нв}} = 1 - p^4 - 4p^3(1-p) - 4p^2(1-p)^2 - (1-p)^4$ .

Для  $q = 0$   $p = 0,5$ ,  $P_{\text{нв}} = 0,375$ .

Для  $q = 3$   $p = 1 - \Phi(q) \approx 0,9986$ ,  $P_{\text{нв}} \approx 0,00059$ .

**1.8.** Суммируются 2 независимых обобщенных телеграфных сигнала с корреляционными функциями  $R_1(\tau) = \exp(-\lambda_1 |\tau|)$  и  $R_2(\tau) = \exp(-\lambda_2 |\tau|)$ . Найти ПВ отсчетов суммарного сигнала и его корреляционную функцию.

**Примечание.** Случайным обобщенным телеграфным сигналом называется стационарный случайный процесс, принимающий с вероятностью 0,5 значения  $\pm u$ . Число перемен знака в единицу времени подчиняется распределению Пуассона с параметром  $\lambda$ , имеющим смысл среднего числа перемен знака в единицу времени.

Решение. Отсчеты, взятые из каждого СП, могут принять значения  $\pm u$  равновероятно, следовательно, сумма двух отсчетов может оказаться равной  $2u$  и  $-2u$  с вероятностями 0,25 или 0 с вероятностью 0,5. Плотность вероятности отсчета, полученного из суммарного колебания,  $w(x) = 0,25\delta(x + 2u) + 0,5\delta(x) + 0,25\delta(x - 2u)$ .

При суммировании независимых СП их корреляционные функции складываются:  $R(\tau) = \exp(-\lambda_1 |\tau|) + \exp(-\lambda_2 |\tau|)$ .

**1.9.** Найти одномерную ПВ случайного процесса, у которого 30 % времени занимает реализация гармонического колебания с амплитудой  $U_1$  и

начальной фазой, равномерно распределенной в интервале  $[-\pi, \pi]$ , 40 % – реализации телеграфного сигнала с амплитудой  $U_2$  и 30 % составляют паузы.

**Решение.** Очевидно, ПВ процесса будет являться взвешенной суммой плотностей вероятности отсчетов, взятых из гармонического колебания, телеграфного сигнала и нулевых отсчетов, принадлежащих паузам, где в роли весов выступают вероятности этих трех составляющих. Следовательно,  $w(x) = 0,3w_1(x) + 0,4w_2(x) + 0,3w_3(x)$ , где  $w_i(x)$  – ПВ составляющих процесса. ПВ отсчета, взятого из гармонического колебания с равномерно распределенной фазой, – это закон арксинуса:  $w_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{U_1^2 - x^2}}, & |x| \leq U_1; \\ 0, & |x| > U_1 \end{cases}$ . Плотность вероят-

ности отсчета из телеграфного сигнала, равновероятно принимающего значения  $\pm U_2$ :  $w_2(x) = 0,5\delta(x - U_2) + 0,5\delta(x + U_2)$ , наконец, для нулевого отсчета  $w_3(x) = \delta(x)$ .

**1.10.** Реализации СП имеют вид гармонического колебания  $x(t) = A\cos(2\pi ft + \varphi)$ , амплитуда  $A$  и несущая частота  $f_0$  которого – фиксированные константы, а случайная начальная фаза  $\varphi$  с равной вероятностью принимает значения из множества  $\{0, 2\pi/n, \dots, 2\pi(n-1)/n\}$ , где  $n$  – натуральное. При каком минимальном значении объема ансамбля  $n$  данный процесс стационарен в широком смысле?

**Решение.** Для среднего значения процесса имеем:

$$\overline{x(t)} = \frac{A}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \cos\left(2\pi f_0 t + i \frac{2\pi}{n}\right) = \frac{A}{n} \operatorname{Re} \left[ \exp(j2\pi f_0 t) \sum_{i=0}^{n-1} \exp\left(j \frac{i2\pi}{n}\right) \right].$$

Сумма корней  $n$ -й степени из единицы в последнем выражении равна нулю при любом  $n \geq 2$ . Тем самым среднее значение процесса не зависит от времени для всех  $n \geq 2$ .

Автокорреляционная функция (АКФ) рассматриваемого процесса

$$R(t, t + \tau) = \overline{x(t)x(t + \tau)} = \frac{A^2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \cos\left(2\pi f_0 t + i \frac{2\pi}{n}\right) \cos\left(2\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau + i \frac{2\pi}{n}\right) =$$

$$= R(t, t + \tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) + \frac{A^2}{2n} \sum_{i=0}^{n-1} \cos\left(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau + 2i \frac{2\pi}{n}\right).$$

Для суммы во втором слагаемом получается

$$\sum_{i=0}^{n-1} \cos\left(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau + 2i \frac{2\pi}{n}\right) = \operatorname{Re} \left[ \exp(j4\pi f_0 t + j2\pi f_0 \tau) \sum_{i=0}^{n-1} \exp\left(j \frac{4i\pi}{n}\right) \right].$$

При  $n > 2$  
$$\sum_{i=0}^{n-1} \exp\left(j \frac{4i\pi}{n}\right) = \frac{1 - \exp(j4\pi)}{1 - \exp\left(j \frac{4\pi}{n}\right)}.$$

Последняя дробь обращается в нуль для любого  $n \geq 3$ , гарантируя зависимость АКФ только от сдвига  $\tau$  (но не от времени  $t$ ). Таким образом, исследуемый процесс стационарен в широком смысле при любом объеме ансамбля, не меньшем трех.

**1.11.** Процесс  $y_1(t) = x(t + \Delta) - x(t)$ , а процесс  $y_2(t) = x(t + \Delta) + x(t)$ , где  $x(t)$  – нормальный стационарный процесс с нулевым средним значением. Найти вероятность того, что в совпадающие моменты времени ( $t_1 = t_2 = t$ )  $y_2(t) \geq y_1(t)$ .

Решение. Очевидно, что в совпадающие моменты времени  $P\{y_2(t) \geq y_1(t)\} = P\{y_2(t) - y_1(t) \geq 0\} = P\{2x(t) \geq 0\}$ .

Разностный процесс  $x(t)$  является гауссовским с нулевым средним значением, поэтому искомая вероятность

$$P\{y_2(t) \geq y_1(t)\} = \Phi(0) = 0,5.$$

**1.12.** Случайная величина  $x$  подчиняется распределению 
$$W(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi(1+x^2)}, & 0 \leq x < \infty; \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$
 Каково отличие наиболее вероятного значения

величины  $x$  от ее среднего?

Решение. Наиболее вероятное значение (мода) величины  $x$ , очевидно, равно нулю, тогда как среднее  $\bar{x} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{dy}{y} = \ln y \Big|_1^{\infty} = \infty$ . Тем самым, отличие среднего от моды бесконечно велико.

**1.13.** Декартовы компоненты двумерного случайного вектора **a** – независимые гауссовские СВ с нулевыми средними и единичными дисперсиями. Каждая из компонент независимо от другой подвергается жесткому ограничению, обнуляющему отрицательные значения. Чему равен коэффициент корреляции полярных координат результирующего вектора **b**?

Решение. Безынерционное преобразование независимых величин зависимости не вносит, поэтому декартовы компоненты  $x, y$  вектора **b** остаются независимыми, причем их ПВ

$$W(u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right), & u \geq 0, \\ 0, & u < 0, \end{cases}$$

где  $u = x$  или  $y$ . Поэтому совместная ПВ  $x, y$

$$W(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right), & 0 \leq x, y < \infty; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тем самым совместная ПВ полярных координат  $\rho, \varphi$  вектора **b**

$$W(\rho, \varphi) = \begin{cases} \frac{2\rho}{\pi} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2}\right), & 0 \leq \rho < \infty, 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Безусловные ПВ координат  $\rho, \varphi$ :

$$W(\rho) = \int_0^{\pi/2} W(\rho, \varphi) d\varphi = \begin{cases} \rho \exp\left(-\frac{\rho^2}{2}\right), & \rho \geq 0; \\ 0, & \rho < 0, \end{cases}$$

$$W(\varphi) = \int_0^{\infty} W(\rho, \varphi) d\rho = \begin{cases} \frac{2}{\pi}, & \varphi \in [0, \pi/2); \\ 0, & \varphi \notin [0, \pi/2). \end{cases}$$

Как видно,  $W(\rho, \varphi) = W(\rho)W(\varphi)$ , что свидетельствует о независимости величин  $\rho$  и  $\varphi$ , т. е. о равенстве нулю их коэффициента корреляции.

**1.14.** СПМ некоторого гауссовского процесса  $x(t)$  равна нулю вне отрезка  $[-F, F]$ . Пусть вектор  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  составлен из отсчетов процесса  $x(t)$ ,

взятых с шагом  $\Delta = 1/(2F)$ . Для каких из следующих СПМ  $G(f)$  верно соот-

ношение  $W(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n W(x_i)$ :

$$G_1(f) = \frac{N_0}{2}, |f| \leq F;$$

$$G_2(f) = N_0 \left( 1 - \frac{|f|}{F} \right), |f| \leq F;$$

$$G_3(f) = \frac{N_0}{2} \left[ 1 + \cos \left( \frac{\pi f}{F} \right) \right], |f| \leq F?$$

Решение. Значения АКФ  $R(\tau)$  процесса  $x(t)$  в отсчетных точках

$$R(i\Delta) = \int_{-F}^F G(f) \exp \left( \frac{j\pi i f}{F} \right) df, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{Для СПМ } G_1(f) \quad R(i\Delta) = N_0 F \frac{\sin(i\pi)}{i\pi} = \begin{cases} N_0 F, & i = 0; \\ 0, & i \neq 0. \end{cases} \quad \text{Как видно, несовпада-$$

ющие отсчеты не коррелированы, а так как для гауссовских величин некоррелированность равносильна независимости, совместная ПВ отсчетов равна произведению одномерных ПВ.

СПМ  $G_2(f)$  есть свертка прямоугольника с основанием  $F$  с самим собой, поэтому АКФ процесса  $x(t)$  пропорциональна квадрату обратного преобразо-

$$\text{вания Фурье от такого прямоугольника: } R(i\Delta) = N_0 F \frac{\sin \left( \frac{i\pi}{2} \right)}{\frac{i\pi}{2}}.$$

При любом нечетном  $i$  эта величина отлична от нуля, так что соответствующие отсчеты зависимы, а значит, совместная ПВ отсчетов не может быть выражена как произведение одномерных ПВ.

Обратное преобразование Фурье СПМ  $G_3(f)$  состоит из двух слагаемых, первое из которых совпадает с АКФ  $G_1(f)$ , т. е. обращается в нуль при любом  $i \neq 0$ . Для второго слагаемого при  $i = 1$  имеем

$$\frac{N_0}{2} \int_{-F}^F \cos \left( \frac{\pi f}{F} \right) \exp \left( \frac{j\pi f}{F} \right) df = N_0 \int_0^F \cos^2 \left( \frac{\pi f}{F} \right) df \neq 0.$$

В итоге отсчеты, отстоящие друг от друга на один шаг, зависимы, и ПВ вектора  $\mathbf{X}$  не совпадает с произведением одномерных ПВ.

**1.15.** Случайная последовательность  $y_0, y_1, \dots$  образована по правилу  $y_i = \alpha y_{i-1} + \beta v_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), где  $\alpha \in (0, 1)$  и  $\beta > 0$  – заданные константы, а  $v_i$  – некоррелированные случайные величины с нулевым средним и единичной дисперсией. При начальном условии  $y_0 = 0$ :

1. Найти среднее  $\overline{y_i}$  и дисперсию  $\sigma_i^2$  элемента  $y_i$ ,  $i \geq 1$ .
2. Определить установившееся значение дисперсии в последовательности.
3. На каком шаге дисперсия достигнет  $127/128$  установившегося значения, если  $\alpha = 1/\sqrt{2}$ ,  $\beta = 1$ ?

Решение. 1. Математическое ожидание элемента  $y_i$

$$\overline{y_i} = \alpha \overline{y_{i-1}} + \beta \overline{v_i} = \alpha \overline{y_{i-1}}, i = 1, 2, \dots$$

Поскольку  $y_0 = 0$ , по индукции  $\overline{y_i} = 0$ ,  $i = 0, 1, \dots$ . Для дисперсии имеем

$$\sigma_i^2 = \overline{y_i^2} = \alpha^2 \overline{y_{i-1}^2} + 2\alpha\beta \overline{y_{i-1}v_i} + \beta^2 \overline{v_i^2} = \alpha^2 \sigma_{i-1}^2 + \beta^2, \text{ откуда рекурсией получается}$$

$$\sigma_1^2 = \beta^2, \sigma_2^2 = \alpha^2 \beta^2 + \beta^2, \dots, \sigma_i^2 = \beta^2 \sum_{k=0}^{i-1} \alpha^{2k} = \beta^2 \frac{1 - \alpha^{2i}}{1 - \alpha^2}.$$

$$2. \text{ Из последнего результата } \sigma_\infty^2 = \lim_{i \rightarrow \infty} \sigma_i^2 = \frac{\beta^2}{1 - \alpha^2}.$$

$$3. \text{ При указанных } \alpha, \beta \quad \sigma_i^2 = \frac{2^i - 1}{2^{i-1}}, \sigma_\infty^2 = 2, \text{ и из } \frac{2^i - 1}{2^{i-1}} = 2 \cdot \frac{127}{128} \text{ получим } i = 7.$$

**1.16.** Видеосигнал с ограниченным спектром наблюдается в смеси с АБГШ. Энергопотенциал линии, т. е. отношение средней мощности сигнала  $P$  к односторонней спектральной плотности шума  $N_0$ , составляет 40 дБ Гц. При этом накопление  $n = 5000$  отсчетов по Котельникову доводит отношение сигнал/шум  $q$  до 20 дБ. Чему равна ширина спектра сигнала?

Решение. Поскольку шаг дискретизации выбран по Котельникову, накопленное отношение сигнал/шум можно рассчитать так, будто никакой дискретизации вообще нет. Отсюда  $q^2 = \frac{2E}{N_0} = \frac{2PT}{N_0}$ , а длительность сигнала



$T = \frac{q^2}{2(P/N_0)}$ , что для заданных условий составляет  $T = \frac{100}{2 \cdot 10^4} = 5 \cdot 10^{-3}$  с. При

этом шаг дискретизации  $t_d = \frac{T}{n} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{5000} = 1$  мкс, так что ширина (верхняя граничная частота) спектра сигнала  $F = 1/(2t_d) = 500$  кГц.

**1.17.** Экспериментатору для компьютерного моделирования необходима программа, генерирующая случайные числа с двойной экспоненциальной (лапласовской) ПВ  $W_y(y) = \frac{1}{2} \exp(-|y|)$ , в то время как в его распоряжении имеется лишь файл, формирующий случайные числа, равномерно распределенные на отрезке  $[-1, 1]$ . Чем его следует дополнить, чтобы реализовать требуемый датчик?

Решение. Будем искать необходимое преобразование в классе нечетных монотонных функций. ПВ  $W_x(x)$  исходной величины  $x$  пересчитывается в ПВ преобразованной  $y$  как  $W_y(y) = W_x(x(y)) \left| \frac{dx}{dy} \right|$ , откуда

$$\left| \frac{dx}{dy} \right| = \frac{W_y(y)}{W_x(x(y))} = \frac{\frac{1}{2} \exp(-|y|)}{\frac{1}{2}} = \begin{cases} \exp(-y), & y \geq 0; \\ \exp(y), & y < 0. \end{cases}$$

Интегрирование на полуоси  $y \geq 0$  дает  $x = C - \exp(-y)$ , где  $C = 1$ , так как из условия нечетности  $x = 0$  при  $y = 0$ . После интегрирования по отрицательной полуоси для всей зависимости  $x = f(y)$  получим  $x = \begin{cases} 1 - \exp(-y), & y \geq 0; \\ -1 + \exp(y), & y < 0. \end{cases}$

Обращение этой зависимости приводит к искомой функции, преобразующей случайную величину с равномерной ПВ в лапласовскую:

$$y = f^{-1}(x) = \begin{cases} -\ln(1-x), & 0 \leq x \leq 1; \\ \ln(1+x), & -1 \leq x < 0, \end{cases}$$

что можно записать и одной строкой:  $y = -\text{sign}(x) \ln(1 - |x|)$ ,  $x \in [-1, 1]$ .

**1.18.** Белый гауссовский шум с нулевым средним наблюдается на временном отрезке протяженностью  $T$ . Расположить в порядке убывания «частот» появления следующие 5 реализаций такого шума:

$$x_1(t) = A \cos \frac{2\pi t}{T}, \quad x_2(t) = A, \quad x_3(t) = 0, \quad x_4(t) = \begin{cases} \sqrt{2}A, & 0 \leq t < T/2; \\ -A, & T/2 \leq t < T, \end{cases} \quad x_5(t) = A \cos \frac{4\pi t}{T},$$

где  $A > 0$  – фиксированная константа.

**1.19.** СП имеет вид стационарной случайной последовательности непрерывных импульсов в форме равнобедренных трапеций как положительной, так и отрицательной полярности (рис.1.2). Импульсы положительной полярности занимают 45 % времени, отрицательной – 30 %, паузы (отсутствие импульсов) – оставшиеся 25 %. Найти ПВ отсчета процесса.

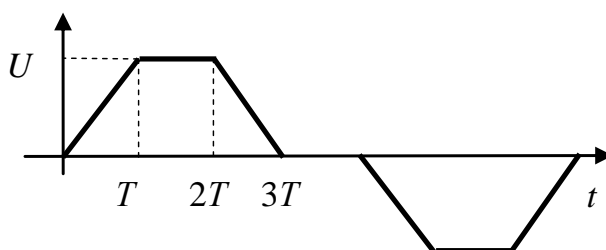


Рис. 1.2

**1.20.** На фильтр, согласованный с сигналом  $s(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, T); \\ 2U, & t \in [T, 2T); \\ 0, & t \notin [0, 2T], \end{cases}$  действует АБГШ с СПМ  $N_0/2$ . На выходе фильтра берутся 2 отсчета с интервалом  $\Delta$  между ними. Записать выражение для ПВ суммы отсчетов как функцию интервала  $\Delta$ .

**1.21.** На вход фильтра, согласованного с сигналом  $s(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, T); \\ 2U, & t \in [T, 2T); \\ U, & t \in [2T, 3T); \\ 0, & t \notin [0, 3T], \end{cases}$  подается АБГШ с СПМ  $N_0/2$ . Записать корреляционную матрицу для пяти отсчетов, разделенных интервалом  $T$ , считая, что первый отсчет берется в момент времени  $t = 0$ .

**1.22.** СП  $z(t) = \sum_{i=1}^{100} x_i(t) + y(t)$ , где  $x_i(t)$  – независимые случайные синхронные телеграфные сигналы с корреляционной функцией

$$R(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|/T, & |\tau| \leq T; \\ 0, & |\tau| > T \end{cases}, \text{ а } y(t) - \text{независимый гауссовский случайный процесс}$$

с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2 = 0,01$ . Найти вероятность превышения отсчетом процесса  $z(t)$  порога  $z_{\text{п}} = 100$ . Качественно изобразить ПВ отсчетов

процесса  $z(t)$  и процесса  $\sum_{i=1}^{100} x_i(t)$ .

**Примечание.** Случайным телеграфным сигналом называется процесс, принимающий с вероятностью 0,5 бинарные значения.

**1.23.** Независимые случайные величины  $x_1$  и  $x_2$  равномерно распределены в интервале  $[-a, a]$ . Найти плотность вероятности случайной величины  $y = |x_1| + |x_2|$ . Определить среднее значение и дисперсию. Каким будет резуль-

тат для среднего и дисперсии, если  $y = \sum_{i=1}^N |x_i|$  ?

**1.24.** Стационарные узкополосные независимые случайные процессы с нулевым средним и центральной частотой  $f_0$  суммируются. Найти вероятность превышения порога  $Z_{\text{п}}$  отсчетом суммарного процесса, если первый из них – гауссовский случайный процесс с дисперсией  $\sigma^2$ , а второй имеет рэле-евское распределение огибающей с дисперсией  $\sigma^2$  и равномерно распределенную начальную фазу в интервале  $[-\pi, \pi]$ .

**1.25.** Случайный процесс  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ , где  $x_1(t) = \text{sign}(\sin(\Omega t + \varphi))$ ;  $\varphi$  – случайная величина, равномерно распределенная в интервале  $[-\pi, \pi]$ ;  $x_2(t)$  – стационарный нормальный случайный процесс со средним значением  $a$ , дисперсией  $\sigma^2$  и корреляционной функцией  $R(\tau) = \sigma^2 \exp(-\lambda|\tau|)$ . Процессы  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  независимы. Найти плотность вероятности отсчета процесса  $x(t)$ , его среднее значение, дисперсию и корреляционную функцию. Чему равна вероятность превышения отсчетом уровня  $U = 2$ , если  $a = 1$  и  $\sigma^2 = 0,1$ ?

**1.26.** Как с помощью датчика независимых случайных величин, имеющих равномерное распределение на интервале  $[0, 1]$ , получить последовательность

независимых случайных величин, подчиняющихся закону Лапласа  $w(x) = 0,5\lambda \exp(-\lambda |x|)$  ?

**1.27.** Найти совместную ПВ случайных величин  $\xi_1 = \int_0^T n(t)dt$  и  $\xi_2 = \int_0^{2T} n(t)dt$ , где  $n(t)$  – гауссовский белый шум со спектральной плотностью мощности  $N_0/2$ .

**1.28.** Найти коэффициент корреляции  $r$  случайных величин  $\xi = \int_0^{T_1} n(t)dt$  и  $\eta = \int_{T_1}^{T_2+T_1} n(t)dt$ ,  $T_2 > T_1$ . Построить зависимость  $r(T_2)$  при  $T_1 = \text{const}$ ;  $n(t)$  – гауссовский БШ с СПМ  $N_0/2$ .

**1.29.** Независимые нормальные случайные величины  $X$  и  $Y$  с нулевыми средними значениями и одинаковыми дисперсиями  $\sigma^2$  возводятся в квадрат и складываются. Найти вероятность превышения порога  $Z_{\text{п}}$  случайной величиной  $Z = X^2 + Y^2$ . Как изменится результат, если средние значения  $X$  и  $Y$  равны  $a$  и  $b$  соответственно. Дать графическую иллюстрацию решения задачи.

**1.30.** Найти коэффициент корреляции СВ  $\xi$  и  $\xi^3$ , если  $\xi$  – гауссовская СВ с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$ .

**1.31.** Момент прихода сигнала  $T$  – случайная величина с плотностью вероятности  $w_T(t)$ ,  $t \in [0, \tau]$ . В некоторый момент времени  $t_0$  сигнал еще не появился. Найти вероятность того, что сигнал появится в течение интервала времени  $(t_0, \tau]$ .

**1.32.** Суммируются 2 независимых случайных телеграфных сигнала (описание этих сигналов приведено в задаче 1.8) с параметрами  $u_1$ ,  $\lambda_1$  и  $u_2$ ,  $\lambda_2$ . Найти плотность вероятности, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию, корреляционную функцию и спектральную плотность мощности суммарного процесса. Что будет, если  $u_1 = u_2$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2$ ?

**1.33.** Случайная величина  $\eta = |\xi_1| + |\xi_2|$ , где  $\xi_1$  и  $\xi_2$  – независимые нормальные случайные величины с нулевыми средними значениями и одинаковыми дисперсиями  $\sigma^2$ . Найти плотность вероятности случайной величины  $\eta$ , ее математическое ожидание и дисперсию.

**1.34.** Стационарный случайный процесс имеет вид последовательности неперекрывающихся импульсов в форме равнобедренных треугольников с высотой  $U$  и основанием  $T$  положительной и отрицательной полярностей (рис. 1.3). Импульсы положительной полярности занимают 20 % временной оси, отрицательной – 40 %, а паузы (отсутствие импульсов) – 40 %. Найти одномерную плотность вероятности и функцию распределения данного процесса, вычислить математическое ожидание и дисперсию.

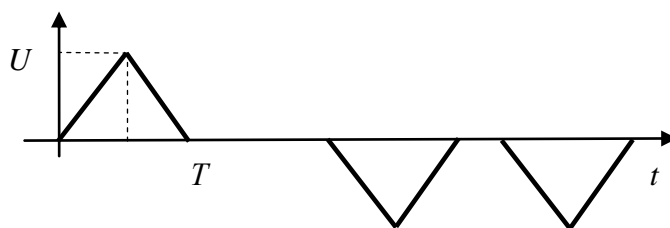


Рис. 1.3

**1.35.** К стационарному гауссовскому СП с нулевым средним значением и дисперсией  $\sigma^2$  добавляется СП вида  $\xi(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ , где  $A$  и  $f_0$  – детерминированные величины;  $\varphi$  – случайная величина, равномерно распределенная на интервале  $[0, 2\pi]$ . Качественно построить одномерную плотность вероятности отсчетов суммарного процесса при различных значениях параметра  $A$ . Как изменится ответ, если  $\varphi$  может равновероятно принять 2 значения – 0 или  $\pi$ ?

**1.36.** Случайный процесс  $z(t)$  образован аддитивной смесью, состоящей из  $N$  некоррелированных случайных процессов  $x_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , причем отсчеты каждого из них распределены нормально с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$ . Найти одномерное распределение процесса  $z(t)$ , его математическое ожидание и дисперсию.

**1.37.** Доказать справедливость равенства  $G_y(f) = (j2\pi f)^2 G_x(f)$ , где  $G_x(f)$  – СПМ стационарного СП  $x(t)$ ;  $G_y(f)$  – СПМ производной процесса

$x(t)$ . Сформулировать условия существования производной СП  $x(t)$  по признакам, характеризующим  $G_x(f)$ . Найти корреляционную функцию производной процесса  $x(t)$ .

**1.38.** Случайная фаза имеет плотность вероятности  $W_\varphi(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, \varphi \in [-\pi, \pi]; \\ 0, \varphi \notin [-\pi, \pi] \end{cases}$  и преобразуется по правилу  $y = f(\varphi) = (\varphi - \pi/4)^2$ .

Найти: плотность распределения вероятностей  $W_y(y)$  СВ  $y$ , полученной в результате преобразования; математические ожидания и дисперсии исходной и преобразованной величин.

**1.39.** Случайный процесс  $y(t) = \prod_{i=1}^{100} x_i(t)$ , где  $x_i(t)$  – независимые стационарные процессы, имеющие нулевые средние значения и одинаковые корреляционные функции  $K_{x_i}(\tau) = \sigma^2 \frac{\sin(\Omega\tau)}{\Omega\tau}$ . Найти СПМ процесса  $y(t)$ .

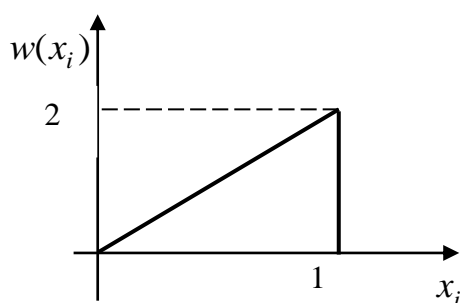


Рис.1.4

**1.40.** При обработке сигнала формируется СВ  $y$ , равная произведению  $N$  независимых одинаково распределенных СВ  $x_i$ , плотность вероятности которых  $w(x_i)$  приведена на рис.1.4. Считая  $N$  большим числом, например  $N = 100$ , найти плотность вероятности случайной величины  $y$ .

**1.41.** Декартовы координаты точки на плоскости – независимые гауссовские СВ с нулевым математическим ожиданием и одинаковыми дисперсиями. Найти плотность вероятности расстояния точки от начала координат.

**1.42.** Случайный процесс  $\xi(t) = x(t)y(t)$ , где  $x(t)$  и  $y(t)$  – независимые стационарные процессы с корреляционными функциями  $K_x(\tau) = \sigma_x^2 \frac{\sin(\Omega_1\tau)}{\Omega_1\tau}$

и  $K_y(\tau) = \sigma_y^2 \frac{\sin(\Omega_2 \tau)}{\Omega_2 \tau}$ , причем  $\Omega_2 = 3\Omega_1$ . Найти спектральную плотность мощности процесса  $\xi(t)$ .

**1.43.** При подаче на вход нелинейной безынерционной цепи с характеристикой  $y = g(x) = (cx)^3$ , где  $c$  – известная константа, случайного стационарного процесса  $x(t)$  на ее выходе получаем нормальный центрированный стационарный процесс  $y(t)$ . Найти одномерную ПВ случайного процесса  $x(t)$ .

**1.44.** Случайный процесс  $\xi(t)$  принимает значения  $\xi_i$  в моменты времени  $t_i$ , образующие пуассоновский поток с параметром  $\lambda$  ( $\lambda$  – среднее число смен значений процесса  $t_i$  в единицу времени) и сохраняет их неизменными до следующего момента времени  $t_i$ ;  $\xi_i$  – независимые СВ с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$ . Найти корреляционную функцию процесса  $\xi(t)$ . Сравнить полученный результат со случаем, когда  $\xi_i$  – независимые случайные величины, равновероятно принимающие значения  $A$  и  $-A$ . Объяснить результат.

**1.45.** Белый гауссовский шум наблюдается на отрезке  $[0, T]$ . Расположить следующие его реализации в порядке убывания их вероятности:

- а) неизменная на интервале наблюдения константа  $A$ ;
- б) случайная бинарная последовательность, символы которой принимают значения  $\pm A$ ;
- в) гармоническое колебание с амплитудой  $\sqrt{2}A$  и частотой  $f_0 \gg 1/T$ ;
- г) колебание, линейно нарастающее от нуля до  $\sqrt{3}A$ .

**1.46.** Ансамбль реализаций СП содержит гармонические колебания вида  $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ , где  $A$  и  $f_0$  – фиксированные амплитуда и несущая частота, а  $\varphi$  – не зависящая от времени случайная начальная фаза, принимающая с равной вероятностью значения  $0, \pi/2, \pi$  и  $-\pi/2$ .

1. Стационарен ли этот процесс в широком смысле?
2. Стационарен ли он в узком смысле?
3. Можно ли по единственной реализации определить его среднее?
4. Можно ли по единственной реализации определить его автокорреляционную функцию?
5. Что можно сказать об эргодичности этого процесса?

## 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

**2.1.** На схему (рис. 2.1), начиная с момента  $t = 0$ , подается белый шум  $n(t)$ . Как будет зависеть дисперсия случайного процесса  $\eta(t)$  на выходе от времени? Полученные результаты подтвердить расчетами.

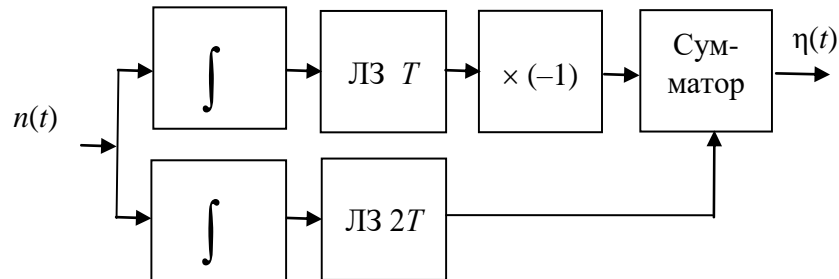


Рис. 2.1

Решение. Приведенная схема эквивалентна структуре согласованного фильтра (СФ) для прямоугольного импульса длительностью  $T$  отрицательной полярности с включенной вслед за ней линией задержки (ЛЗ) на  $T$  (рис. 2.2).

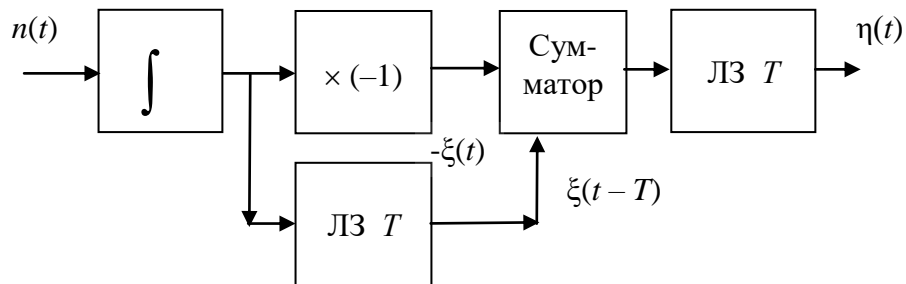


Рис. 2.2

Импульсная характеристика такого фильтра (вместе с включенной после него ЛЗ)  $h(t) = \begin{cases} -1, & t \in [T, 2T]; \\ 0, & t \notin [T, 2T]. \end{cases}$  Тогда дисперсия СП на выходе системы

$$D_{\eta}(t) = \int_0^t \int_0^t h(t_1) h(t_2) \frac{N_0}{2} \delta(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 = \int_0^t h^2(t) \frac{N_0}{2} dt.$$

Отсюда окончательно получим:



$$D_{\eta}(t) = \begin{cases} 0, & t < T; \\ \frac{N_0}{2}(t-T), & T \leq t < 2T; \\ \frac{N_0 T}{2}, & t \geq 2T. \end{cases}$$

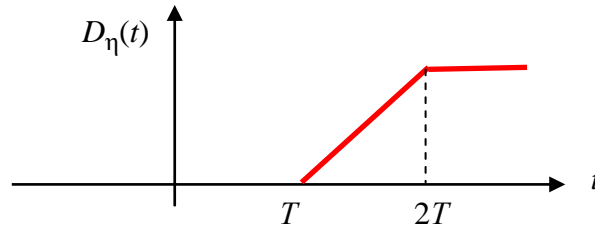


Рис. 2.3

График зависимости дисперсии процесса  $\eta(t)$  на выходе системы от времени приведен на рис. 2.3.

**2.2.** Белый шум с СПМ  $N_0/2$  интегрируется, задерживается на время  $T_3 = T$ , усиливается в  $1/T$  раз и, наконец, пропускается через дифференцирующую  $RC$ -цепь с постоянной времени  $T$ . Записать для установившегося режима совместную ПВ отсчетов выходного процесса, разделенных интервалом времени  $T$ .

Решение. Комплексный коэффициент передачи системы

$$K(j\omega) = \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega T} \frac{1}{T} \frac{j\omega T}{1 + j\omega T} = \frac{e^{-j\omega T}}{1 + j\omega T}.$$

В установившемся режиме отсчеты выходного СП являются гауссовскими СВ с нулевыми средними значениями и корреляционной функцией

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} \frac{e^{-j\omega\tau}}{1 + (j\omega T)^2} d\omega = \frac{N_0}{4T} e^{-\frac{|\tau|}{T}}.$$

В момент времени  $t = T$  коэффициент корреляции между отсчетами равен  $e^{-1}$ . Совместная ПВ для двух отсчетов, смещенных друг относительно друга на значение  $T$ , в установившемся режиме равна:

$$w(x_1, x_2; \tau) = \frac{1}{2\pi \frac{N_0}{4T} \sqrt{(1 - e^{-2})}} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2e^{-1} x_1 x_2}{\frac{N_0}{T} (1 - e^{-2})}\right).$$

**2.3.** На интегрирующую  $RC$ -цепь с постоянной времени  $T$  в момент времени  $t = 0$  поступает сумма сигнала  $s(t) = U \cdot 1(t)$ , где  $1(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0; \\ 0, t < 0, \end{cases}$  и БШ с СПМ  $N_0 / 2$ . Построить зависимость отношения сигнал/шум на выходе фильтра от времени. Как выглядела бы эта зависимость при использовании согласованной фильтрации для отрезка  $[0, t]$  функции единичного скачка?

Решение. Сигнал на выходе  $RC$ -цепи  $s_1(t) = U(1 - \exp(-t / T))$ .

Дисперсия шума на выходе  $RC$ -цепи  $D(t) = \frac{N_0}{4T}(1 - \exp(-2t / T))$ .

Отношение сигнал/шум  $q = \frac{2U\sqrt{T}(1 - \exp(-t / T))}{\sqrt{N_0(1 - \exp(-2t / T))}}$ .

При согласованной фильтрации:

$$q = \sqrt{\frac{2E(t)}{N_0}} = \sqrt{\frac{2U^2 t}{N_0}} = \frac{2U\sqrt{T}}{\sqrt{N_0}} \sqrt{\frac{t}{2T}}.$$

Графики зависимости отношения сигнал/шум от времени на выходе  $RC$ -цепи (1) и СФ (2) приведены на рис. 2.4.

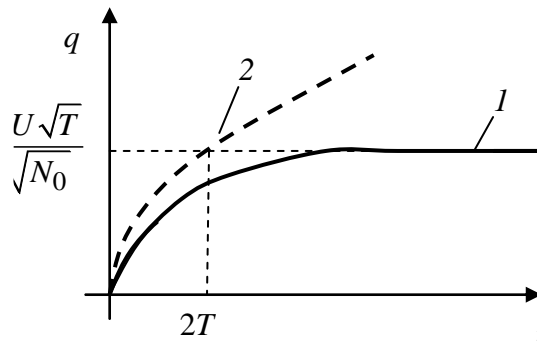


Рис. 2.4

**2.4.** Оценить время корреляции  $\tau_k$ , дисперсию и характер изменения корреляционной функции стационарного СП  $x(t)$  с нулевым средним значением, имея в своем распоряжении линию задержки с отводами, у которой максимальная задержка превышает время корреляции процесса, вычитающее устройство и осциллограф с большим послесвечением.

Решение. Образовав с помощью линии задержки и вычитающего устройства разность  $x(t) - x(t - \tau)$ , подадим ее на вертикальные отклоняющие

пластины осциллографа при выключенной развертке. Длина вертикальной линии пропорциональна среднеквадратическому отклонению СП  $\sigma_{\Delta}$ :

$$l_1 = k\sigma_{\Delta} = k\sqrt{(x(t) - x(t - \tau))^2} = k\sqrt{2\sigma^2(1 - r(\tau))}.$$

Установив значение задержки  $\tau > \tau_k$ , о чем можно судить по факту окончания изменения длины светящейся линии, получим  $l_2 = \sqrt{2\sigma^2}$ . При этом

$$1 - r(\tau) = \frac{l_1^2}{l_2^2}, \text{ или } r(\tau) = 1 - \frac{l_1^2}{l_2^2}.$$

**2.5.** Умножением на квадратурные гармоники частоты  $f_0$  стационарный СП  $x(t)$  с АКФ  $R_x(\tau)$  преобразуется в 2 процесса:  $u(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$  и  $v(t) = x(t)\sin(2\pi f_0 t + \varphi)$ , общая начальная фаза  $\varphi$  которых случайна, равномерно распределена на отрезке  $[-\pi, \pi]$  и независима с  $x(t)$ . Выяснить:

1. Стационарны ли процессы  $u(t)$  и  $v(t)$  в широком смысле?
2. Являются ли они стационарно связанными?
3. Обладает ли их функция взаимной корреляции какой-либо симметрией?
4. Верно ли утверждение «АКФ суммы произвольных стационарных процессов равна сумме их АКФ тогда и только тогда, когда эти процессы некоррелированы»?
5. Каково необходимое условие равенства АКФ суммы процессов сумме их АКФ?

Решение. 1. Математическое ожидание процесса  $u(t)$ , очевидно, равно нулю, т. е. от времени не зависит. АКФ этого процесса

$$\begin{aligned} R_u(t, t + \tau) &= \overline{u(t)u(t + \tau)} = \frac{1}{2} \overline{x(t)x(t + \tau)} [\cos(2\pi f_0 \tau) + \overline{\cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau + 2\varphi)}] = \\ &= R_x(\tau) \cos(2\pi f_0 \tau) \end{aligned}$$

зависит только от  $\tau$ , но не от  $t$ . Таким образом, процесс  $u(t)$  стационарен в широком смысле. Аналогично доказывается стационарность процесса  $v(t)$ .

2. Функция взаимной корреляции процессов  $u(t)$  и  $v(t)$

$$R_{uv}(t, t + \tau) = \overline{u(t)v(t + \tau)} = \frac{1}{2} \overline{x(t)x(t + \tau)} [\sin(2\pi f_0 \tau) + \overline{\sin(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau + 2\varphi)}] =$$

$$= R_x(\tau) \sin(2\pi f_0 \tau)$$

зависит только от  $\tau$ , но не от  $t$ , что говорит об их стационарной связанности.

3. Функция взаимной корреляции процессов  $u(t)$  и  $v(t)$  нечетна.

4. АКФ суммы произвольных стационарных процессов  $y(t)$  и  $z(t)$

$$R_{y+z}(t, t + \tau) = \overline{[y(t) + z(t)][y(t + \tau) + z(t + \tau)]} = R_y(\tau) + R_z(\tau) + R_{yz}(\tau) + R_{yz}(-\tau).$$

Процессы  $u(t)$  и  $v(t)$  некоррелированными не являются, однако для них сумма двух последних слагаемых обратится в нуль, так что АКФ суммы  $u(t) + v(t)$  окажется равной сумме  $R_u(\tau)$  и  $R_v(\tau)$ . Таким образом, сформулированное утверждение неверно.

5. Как видно из предыдущего пункта, достаточным условием является нечетность взаимной корреляционной функции.

**2.6.** Помеха  $z(t)$  образуется как произведение двух независимых стационарных случайных процессов с корреляционными функциями

$$R_1(\tau) = R_2(\tau) = \sigma^2 \frac{\sin(\pi F \tau)}{\pi F \tau} \text{ и нулевыми средними значениями. Построить за-}$$

висимость дисперсии на выходе идеального фильтра нижних частот (ФНЧ) от его полосы пропускания  $F_0$ .

Решение. Корреляционная функция произведения двух указанных СП является произведением их корреляционных функций

$$R_z(\tau) = R_1(\tau)R_2(\tau) = \sigma^4 \frac{\sin^2 \pi F \tau}{(\pi F \tau)^2}.$$

Используя теорему Винера–Хинчина, найдем СПМ процесса  $z(t)$ :

$$\begin{aligned} G_z(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_z(\tau) \exp(-j2\pi f \tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^4 \frac{\sin^2 \pi F \tau}{(\pi F \tau)^2} \exp(-j2\pi f \tau) d\tau = \begin{cases} \frac{\sigma^4}{F} (1 - |f|/F), & |f| \leq F; \\ 0, & |f| > F. \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда дисперсия шума на выходе ФНЧ с полосой  $F_0$

$$\sigma_{F_0}^2 = \int_{-F_0}^{F_0} G_z(f) df = \begin{cases} \sigma^4 \left( 2 - \frac{F_0}{F} \right) \frac{F_0}{F}, & F_0 \leq F; \\ \sigma^4, & F_0 > F. \end{cases}$$

**2.7.** БШ с СПМ  $N_0/2$  подается на фильтр, согласованный с сигналом  $s(t) = \begin{cases} U, t \in [0, T]; \\ 0, t \notin [0, T], \end{cases}$  а затем на фильтр с коэффициентом передачи  $K(j\omega) = 1 - \exp(-j\omega T)$ . Найти корреляционную функцию процесса и построить ее график.

Решение. Корреляционная функция белого шума на выходе СФ с точностью до постоянного множителя повторяет корреляционную функцию прямоугольного импульса  $R(\tau) = \begin{cases} \frac{N_0 E}{2} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right), |\tau| \leq T; \\ 0, |\tau| > T. \end{cases}$  Фильтр с коэффициентом пе-

редачи  $K(j\omega) = 1 - \exp(-j\omega T)$ , включенный на выходе СФ, реализует функцию вычитания из процесса с выхода СФ процесса, задержанного на  $T$ . Корреляционная функция на выходе этого звена имеет вид  $R_{\text{вых}}(\tau) = 2R(\tau) - R(\tau + T) - R(\tau - T)$ . В итоге корреляционная функция на выходе системы имеет вид, приведенный на рис. 2.5.

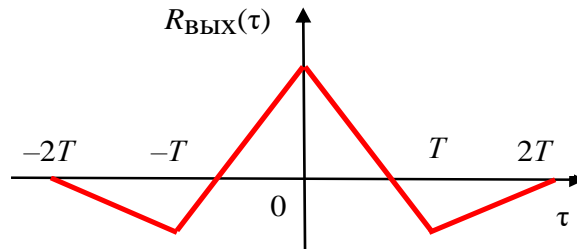


Рис. 2.5

**2.8.** На фильтр, согласованный с сигналом  $s(t) = \begin{cases} U, t \in [0, T]; \\ 0, t \notin [0, T], \end{cases}$  подается АБГШ с СПМ  $N_0 / 2$ . Записать двумерную плотность вероятности отсчетов на выходе СФ, разделенных интервалом  $T/2$ . Режим – установившийся.

Решение. Процесс на выходе будет гауссовским. Среднее значение отсчетов равно нулю, а дисперсия  $\sigma^2 = \frac{N_0 E}{2}$ . Так как корреляционная функция

выходного процесса СФ  $R(\tau) = \begin{cases} \frac{N_0 E}{2} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right), & |\tau| \leq T; \\ 0, & |\tau| > T, \end{cases}$  то коэффициент корреля-

ции  $r$  отсчетов, разделенных промежутком  $\tau = T/2$ , будет равен 0,5. Поэтому двумерная плотность вероятности отсчетов

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-r^2}} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2rx_1x_2}{2\sigma^2(1-r^2)}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}\pi \frac{N_0 E}{2}} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2}{\frac{3}{4}N_0 E}\right). \end{aligned}$$

**2.9.** Из случайного синхронного телеграфного сигнала с нулевым средним и корреляционной функцией  $R(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T}, & |\tau| \leq T; \\ 0, & |\tau| > T \end{cases}$  берутся 2 отсчета, раз-

деленных интервалом времени  $2T$ . Чему равна вероятность того, что сумма этих отсчетов превысит значение  $1/\pi$ ?

Решение. Случайный синхронный телеграфный сигнал представляет собой квазислучайный процесс, принимающий значения  $\pm 1$ , а отсчеты, взятые из этого процесса и разнесенные по времени на интервал больший  $T$ , оказываются независимыми. Сумма двух отсчетов такого процесса, прошедшего через фильтр, может оказаться равной  $\{-2, 0, 2\}$  соответственно с вероятностями  $\{1/4, 1/2, 1/4\}$ . Поэтому ответ очевиден: вероятность того, что сумма двух отсчетов выходного процесса, разделенных интервалом времени  $2T$ , превысит значение  $1/\pi$ , равна  $1/4$ .

**2.10.** Стационарный узкополосный нормальный случайный процесс  $\xi(t)$  складывается с процессом вида  $\eta(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ , где  $A$  и  $\varphi$  – случайные величины с совместной плотностью вероятности

$$w(A, \varphi) = \begin{cases} \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp(-\frac{A^2}{2\sigma^2}), & A \geq 0, \varphi \in [-\pi, \pi]; \\ 0, & A < 0, \varphi \notin [-\pi, \pi]. \end{cases} \quad \text{Процессы } \xi(t) \text{ и } \eta(t) \text{ независимы.}$$

Найти корреляционную функцию суммарного процесса  $\mu(t) = \xi(t) + \eta(t)$  и одномерную плотность вероятности отсчета его огибающей.

Решение. Из условия задачи следует, что процесс  $\eta(t)$  является гауссовским с нулевым средним значением и дисперсией  $\sigma^2$ . Поэтому суммарный процесс вновь окажется гауссовским с нулевым средним и дисперсией  $2\sigma^2$ .

Корреляционная функция суммы двух независимых СП есть сумма корреляционных функций слагаемых.

Суммарный процесс вновь является гауссовским и узкополосным, поэтому отсчет, взятый из огибающей такого СП, есть рэлеевская СВ.

**2.11.** На вход схемы, состоящей из последовательно соединенных интегрирующей  $RC$ -цепочки и преобразователя с идеальной релейной характеристикой

$$U_{\text{вых}} = \begin{cases} b, & u_{\text{вх}} \geq 0; \\ -b, & u_{\text{вх}} < 0, \end{cases} \quad \text{поступает гауссовский шум с корреляционной}$$

функцией  $R(\tau) = \sigma^2 \exp(-\beta |\tau|)$ , где константа  $\beta > 0$ , и постоянной составляющей  $m$ . Найти установившиеся значения среднего и дисперсии выходного процесса.

Решение. Процесс на выходе интегрирующей  $RC$ -цепи будет гауссовским со средним значением в установившемся режиме равным  $m$ . Вид корреляционной функции входного процесса никак не повлияет на одномерное распределение мгновенных отсчетов процесса на выходе идеального реле:  $w(x) = (1-p)\delta(x+b) + p\delta(x-b)$ , где  $p$  – вероятность превышения нулевого порога реле;

$$p = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}) dx = \Phi(\frac{m}{\sigma}).$$

Среднее значение отсчета на выходе  $m_1 = bp - b(1-p) = b(2p-1)$ , средний квадрат значения на выходе системы  $M_2 = b^2$ , дисперсия выходного процесса  $\sigma^2 = M_2 - m_1^2 = 4b^2 p(1-p)$ .

**2.12.** На фильтр, согласованный с сигналом  $s(t) = \begin{cases} U, \tau \leq T; \\ 0, \tau > T, \end{cases}$  действует

АБГШ с СПМ  $N_0/2$ . Режим установившийся. На выходе фильтра берутся 2 отсчета  $x(T)$  и  $x(T - \Delta)$ . Записать как функцию интервала  $\Delta$  выражение для ПВ суммы  $y(T) = x(T) + x(T - \Delta)$ .

Решение. Суммарная величина  $y(T)$  как сумма двух гауссовских случайных величин с нулевыми средними значениями будет подчиняться нормальному закону с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_y^2(\Delta) = 2\sigma^2(1 + r(\Delta))$ , где

$\sigma^2 = \frac{N_0 U^2 T}{2}$  – дисперсия на выходе согласованного фильтра, а

$r(\Delta) = \begin{cases} 1 - |\Delta|/T, & |\Delta| \leq T; \\ 0, & |\Delta| > T \end{cases}$  – коэффициент корреляции между отсчетами.

В итоге  $w_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2(\Delta)}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2(\Delta)}\right)$ .

**2.13.** Случайный процесс  $\xi(t) = x(t)y(t)$ , где  $x(t)$  и  $y(t)$  – независимые стационарные процессы с нулевыми средними и корреляционными функциями  $R_x(\tau) = \sigma_x^2 \frac{\sin(2\pi F_1 \tau)}{2\pi F_1 \tau}$  и  $R_y(\tau) = \sigma_y^2 \frac{\sin(2\pi F_2 \tau)}{2\pi F_2 \tau}$ , причем  $F_2 = 3F_1$ . Найти спектральную плотность мощности процесса  $\xi(t)$ .

Решение. СПМ процессов  $x(t)$  и  $y(t)$  соответственно равны

$$G_x(f) = \begin{cases} \frac{\sigma_x^2}{2F_1}, & |f| \leq F_1; \\ 0, & |f| > F_1 \end{cases} \text{ и } G_y(f) = \begin{cases} \frac{\sigma_y^2}{2F_2}, & |f| \leq F_2; \\ 0, & |f| > F_2 \end{cases} \text{ (рис. 2.6).}$$

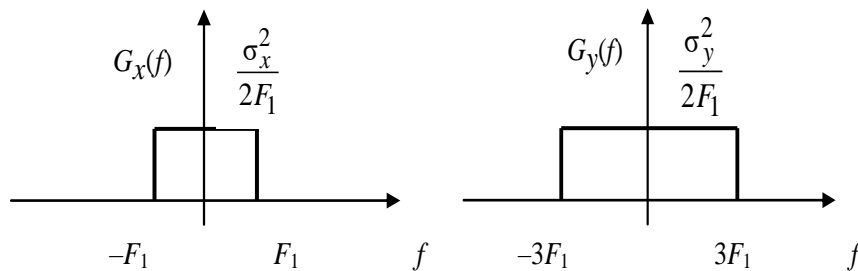


Рис. 2.6



СПМ  $G_{\xi}(f)$  есть свертка  $G_x(f)$  и  $G_y(f)$  (рис. 2.7).

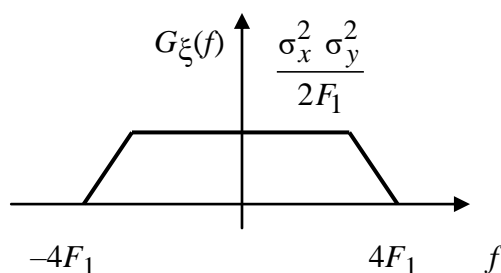


Рис. 2.7

**2.14.** Импульс в виде равнобедренного треугольника с основанием  $T$  в аддитивной смеси с белым шумом поступает на вход коррелятора, опорным колебанием в котором служит прямоугольный импульс. При какой длительности  $\Delta$  опорного колебания отношение сигнал/шум на выходе коррелятора окажется максимальным?

Решение. Не ограничивая общности, можно принять высоту опорного прямоугольника равной единице. Далее заметим, что при  $\Delta > T$  опорный сигнал охватит участок временной оси, где присутствует только шум. Очевидно, при этом отношение сигнал/шум будет меньше, чем в случае, когда опорный сигнал полностью охватывает входной сигнал, не простираясь за его пределы. Поэтому возможные значения длительности опорного сигнала следует ограничить областью  $\Delta \leq T$ . Кроме того, полезный эффект на выходе коррелятора максимален, когда середина опоры приходится на момент максимума входного сигнала, поскольку при сдвиге опоры относительно этого положения площадь сигнала в пределах длительности опоры  $\Delta$  уменьшается. При симметричном же расположении опоры упомянутая площадь пропорциональна произведению  $(2 - \Delta / T)\Delta$ . В то же время действующее значение шума на выходе коррелятора, очевидно, пропорционально  $\sqrt{\Delta}$ . Это означает, что максимизация выходного отношения сигнал/шум равносильна максимизации величины  $2\sqrt{\Delta} - \Delta\sqrt{\Delta} / T$ . Отсюда нетрудно получить искомую оптимальную длительность опоры  $\Delta_{\text{opt}} = 2T / 3$ .

**2.15.** Импульс в виде равнобедренного треугольника с основанием  $T$  в аддитивной смеси с белым шумом поступает на вход коррелятора, опорным колебанием в котором служит прямоугольный импульс длительностью  $\Delta = 2T / 3$ . Очевидно, подобная обработка проигрывает в отношении

сигнал/шум коррелятору с оптимальным опорным колебанием. Оценить названный проигрыш.

Решение. Отношение сигнал/шум по мощности на выходе коррелятора с оптимальной опорой  $q_0^2 = 2E / N_0$ , где  $E$  – энергия сигнала;  $N_0$  – односторонняя СПМ белого шума. Энергия треугольного импульса амплитуды  $U$

$$E = 2U^2 \int_0^{T/2} \left(1 - \frac{2t}{T}\right)^2 dt = \frac{U^2 T}{3}, \text{ откуда } q_0^2 = 2U^2 T / (3N_0).$$

Для коррелятора с прямоугольной опорой амплитуда сигнала  $U_1$  на выходе

$$U_1 = 2U \int_0^{T/3} \left(1 - \frac{2t}{T}\right) dt = \frac{4UT}{9},$$

а дисперсия выходного шума  $\sigma_1^2 = N_0 \Delta / 2 = N_0 T / 3$ , так что выходное отношение сигнал/шум  $q_1^2 = \frac{U_1^2}{\sigma_1^2} = \frac{48U^2 T}{81N_0}$ .

В итоге потери  $\gamma$  коррелятора с прямоугольной опорой относительно оптимального составят  $\gamma = \frac{q_0^2}{q_1^2} = \frac{9}{8} = 1,125$  (0,51 дБ).

**2.16.** Через конденсатор емкостью  $C = 1$  мкФ протекает случайный ток с действующим значением  $\sigma_i = 1$  мА. Известно, что АКФ  $R_u(\tau)$  напряжения на конденсаторе имеет колоколообразную форму:  $R_u(\tau) = \sigma_u^2 \exp(-\beta\tau^2)$ , где  $\beta = 10^6 \text{ с}^{-2}$ . Чему равно действующее значение напряжения на конденсаторе?

Решение. Ток через конденсатор  $i$  и напряжение на нем  $u$  связаны как  $i = C \frac{du}{dt}$ , откуда согласно правилу вычисления АКФ производной случайного процесса

$$\sigma_i^2 = -C^2 \frac{d^2 R(\tau)}{d\tau^2} \Big|_{\tau=0} = -C^2 \sigma_u^2 \exp(-\beta\tau^2) [(2\beta\tau)^2 - 2\beta] \Big|_{\tau=0} = 2\beta C^2 \sigma_u^2$$

$$\text{и } \sigma_u = \frac{\sigma_i}{C\sqrt{2\beta}} = \frac{10^{-3}}{10^{-6}\sqrt{2 \cdot 10^6}} \approx 0,707 \text{ В.}$$

**2.17.** В числе элементов последовательной цепи присутствуют катушка с индуктивностью  $L$  и конденсатор с емкостью  $C$ . Напряжение на конденсаторе – стационарный случайный процесс с автокорреляционной функцией  $R_C(\tau) = \sigma_C^2 \frac{\sin(\pi W \tau)}{\pi W \tau}$ , где  $\sigma_C^2$  и  $W$  – положительные константы. Найти дисперсию  $\sigma_L^2$  напряжения на катушке индуктивности.

Решение. Поскольку ток через конденсатор  $i(t)$  связан с напряжением на нем  $u(t)$  как  $i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$ , где  $C$  – емкость конденсатора, АКФ тока

$$R_i(\tau) = -C^2 \frac{d^2 R(\tau)}{d\tau^2}.$$

В свою очередь, напряжение на индуктивности  $u_L = L \frac{di}{dt}$ , а его дисперсия

$$\sigma_L^2 = R_L(0) = -L^2 \left. \frac{d^2 R_i(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=0} = (LC)^2 \left. \frac{d^4 R_C(\tau)}{d\tau^4} \right|_{\tau=0}.$$

Для упрощения дальнейших вычислений целесообразно перейти в частотную область. Спектр, соответствующий заданной АКФ  $R_C(\tau)$ , есть прямоугольник с основанием  $W$  и высотой  $\sigma_C^2 / W$ . Дифференцированию в частотной области отвечает умножение на  $j2\pi f$ . Таким образом, на основании равенства Парсеваля

$$\sigma_L^2 = \frac{(LC)^2 \sigma_C^2}{W} \int_{-W/2}^{W/2} (2\pi f)^4 df = \frac{\pi^4 (LC)^2 \sigma_C^2 W^4}{5}.$$

**2.18.** В число элементов последовательной цепи входят катушка с индуктивностью  $L$  и резистор номинала  $R$ . Суммарное напряжение  $u(t)$  на катушке и резисторе – стационарный СП с АКФ  $R_u(\tau) = \sigma_u^2 \frac{\sin(\pi W \tau)}{\pi W \tau}$ , где  $W > 0$ . Найти дисперсию  $\sigma_R^2$  напряжения на резисторе.

Решение. Суммарное напряжение на катушке и резисторе  $u(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = \frac{L}{R} u'_R(t) + u_R(t)$ , где  $i(t)$  – ток в цепи, а  $u_R(t)$  – напряжение на резисторе. Отсюда

$$R_u(\tau) = \left(\frac{L}{R}\right)^2 \overline{u'_R(t)u'_R(t+\tau)} + \frac{L}{R} \overline{u'_R(t)u_R(t+\tau)} + \frac{L}{R} \overline{u_R(t)u'_R(t+\tau)} + \overline{u_R(t)u_R(t+\tau)}.$$

В силу нечетности взаимной корреляции процесса и его производной

$$R_u(\tau) = \left(\frac{L}{R}\right)^2 \overline{u'_R(t)u'_R(t+\tau)} + \overline{u_R(t)u_R(t+\tau)}.$$

Переходя к преобразованиям Фурье, т. е. спектральным плотностям мощности, и учитывая связь автокорреляционных функций процесса и его производной, получим:

$$G_u(f) = \left(\frac{L}{R}\right)^2 (2\pi f)^2 G_R(f) + G_R(f),$$

где  $G_R(f)$  – СПМ напряжения на резисторе. Из последнего равенства

$$G_R(f) = \frac{G_u(f)}{1 + (2\pi f)^2 (L/R)^2},$$

и поскольку преобразование Фурье от  $R_u(\tau)$  есть прямоугольник с основанием  $W$  и высотой  $\sigma_u^2 / W$ ,

$$\sigma_R^2 = 2 \frac{\sigma_u^2}{W} \int_0^{W/2} \frac{df}{1 + (2\pi f)^2 (L/R)^2} = \frac{\sigma_u^2}{\pi W (L/R)} \arctg \frac{\pi W L}{R}.$$

**2.19.** СП  $x(t)$  подвергается безынерционному преобразованию. Совместная ПВ отсчетов преобразованного процесса  $y(t)$  и исходного в совпадающие моменты времени  $W(x, y) = \frac{a}{2} \exp(-a|x|) \delta(y - |x|)$ , где  $a > 0$ , а  $\delta(\cdot)$  – дельта-функция. Чему равен коэффициент корреляции этих отсчетов? Что можно сказать об их зависимости?

Решение. Легко видеть, что сомножитель  $\frac{a}{2} \exp(-a|x|)$  есть безусловная плотность вероятности  $W(x)$  отсчета  $x$ . При этом дельта-функция есть условная плотность вероятности отсчета  $y$ . С учетом этого безынерционное

преобразование, фигурирующее в условии, есть  $y(t) = |x(t)|$ . Корреляционный момент отсчетов  $x$  и  $y$  равен среднему произведению  $\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}$ , где горизонтальная черта сверху соответствует математическому ожиданию. В силу четности  $W(x)$   $\bar{x} = 0$ . По той же причине  $\overline{xy} = \overline{x|x|} = \int_{-\infty}^{\infty} x|x|W(x)dx = 0$ , так что искомый коэффициент корреляции равен нулю. Несмотря на это, значение  $y$  однозначно определяется значением  $x$ , что свидетельствует об их стопроцентной зависимости.

**2.20.** СПМ узкополосного процесса  $x(t)$  целиком сосредоточена в пределах полосы шириной  $W$ . По какому минимальному числу отсчетов на выходе амплитудного детектора можно однозначно восстановить огибающую процесса на интервале наблюдения  $T$  ( $T \gg 1/W$ )?

Решение. Комплексная огибающая такого процесса есть низкочастотное колебание с верхней граничной частотой спектра  $W/2$ . Это означает, что дискретизация, допускающая ее однозначное восстановление из последовательности отсчетов, должна осуществляться с шагом не более  $1/W$ . В итоге на временном отрезке  $T$  потребуется взять  $WT$  отсчетов. Обойтись таким числом отсчетов после детектора не удастся, так как нелинейное преобразование расширяет спектр за счет образования комбинационных составляющих, другими словами – биений. Максимальная частота биений, очевидно, равна  $W$ , так что верхняя граничная частота спектра после детектирования равна именно этому значению. В итоге шаг дискретизации после детектора следует выбрать равным  $1/(2W)$ , что соответствует числу отсчетов на отрезке наблюдения, равному  $2WT$ . Этот результат никоим образом не противоречит полученному выше для комплексной огибающей, так как отсчет последней – комплексный, т. е. объединяет 2 действительных отсчета.

**2.21.** На идеальный интегратор в момент времени  $t = 0$  подается сигнал  $s(t) = U \cdot 1(t)$ , где  $1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0, \end{cases}$  и АБГШ с СПМ  $N_0/2$ . Построить график отнесения сигнал/шум на выходе в зависимости от времени. Как будет выглядеть эта зависимость, если идеальный интегратор заменить на интегрирующую  $RC$ -цепь?

**2.22.** Случайный процесс, образованный перемножением двух независимых центрированных процессов с одинаковыми корреляционными функциями, подается на идеальный ФНЧ с полосой  $F$ . Построить зависимость дисперсии процесса на выходе ФНЧ от  $F$ .

**2.23.** Сигнал  $s(t) = \begin{cases} U \cos(2\pi f_0 t), & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T], \end{cases}$   $T = 3 / f_0$ , и АБГШ обра-

батываются в фильтре, согласованном с сигналом  $s(t)$ . На выходе фильтра берутся 2 отсчета  $y_1$  и  $y_2$  соответственно в моменты времени  $t_1 = T$  и  $t_2 = T + 1 / f_0$ . Найти вероятность того, что  $y_1 > y_2$ .

**2.24.** На фильтр, согласованный с сигналом  $s(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T], \end{cases}$  подается

АБГШ с СПМ  $N_0 / 2$ . Записать двумерную плотность вероятности отсчетов на выходе СФ, разделенных промежутком  $T/2$ .

**2.25.** На вход 100 одинаковых последовательно включенных интегрирующих  $RC$ -цепей подается сигнал  $s(t) = U \exp(-\alpha t^2)$  и белый шум с СПМ  $N_0 / 2$ . Какой должна быть постоянная времени  $RC$ -цепи  $T$ , чтобы обеспечить максимальное отношение сигнал/шум на выходе? Каким оно будет?

**2.26.** Сигнал  $s(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases}$  и белый шум со спектральной плотностью

мощности  $N_0 / 2$  подаются на фильтр с импульсной характеристикой

$h(t) = \begin{cases} H_0, & t \in [0, T_\Phi]; \\ 0, & t \notin [0, T_\Phi] \end{cases}$ . Построить зависимость отношения сигнал/шум на вы-

ходе фильтра от параметра  $T_\Phi$ .

**2.27.** На вход двух интегрирующих  $RC$ -цепей с постоянными времени  $T$  и  $100T$  подается белый гауссовский шум с СПМ  $N_0 / 2$ . Качественно в одном и том же масштабе по осям нарисовать реализации процессов на выходе цепей. Рисунок обосновать.

**2.28.** Дифференцируемый случайный процесс с СПМ  $G_x(f)$  поступает на идеальное дифференцирующее устройство. Найти СПМ выходного процесса  $G_y(f)$ .

**2.29.** На фильтр с АЧХ

$$K(f) = \begin{cases} 1, & f \in [-f_0 - \Delta F, -f_0 + \Delta F] \cup [f_0 - \Delta F, f_0 + \Delta F]; \\ 0, & f \notin [-f_0 - \Delta F, -f_0 + \Delta F] \cup [f_0 - \Delta F, f_0 + \Delta F] \end{cases} \text{ подается БШ с СПМ}$$

$N_0 / 2$ . Построить зависимость дисперсии на выходе фильтра от параметра  $f_0 \in [0, \infty)$ .

**2.30.** Случайный телеграфный сигнал, принимающий на интервалах длительностью  $T$  значения  $a_i$ , где  $a_i$  – независимые случайные величины, равные  $\pm 1$ , подается на идеальный ФНЧ с полосой пропускания  $F$ . Построить зависимость дисперсии на выходе фильтра в установившемся режиме от параметра  $F$ .

**2.31.** На вход последовательно включенных идеального ФНЧ с полосой пропускания  $F_0$  и интегрирующей  $RC$ -цепи с постоянной времени  $T$  подается белый шум с СПМ  $N_0 / 2$ . Найти и построить зависимость дисперсии на выходе от  $F_0$ .

**2.32.** Построить корреляционную функцию СП на выходе интегрирующей  $RC$ -цепи, если на ее входе действует стационарный СП с финитным спектром, отсчеты которого, взятые в моменты времени, разделенные интервалом  $\Delta t = (2k + 1)/(2F_B)$ , где  $k = 0, 1, \dots$  и  $F_B$  – верхняя частота СПМ, имеют коэффициент корреляции, равный  $-1$ . Одномерная плотность вероятности отсчета, взятого из процесса, имеет вид  $w(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ .

$$w(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}.$$

**2.33.** На вход идеального полосового фильтра с центральной частотой  $\omega_0$  и полосой пропускания  $\Delta\omega$  поступает нестационарный СП  $x(t)$  с корреляционной функцией  $R_x(t, \tau) = \sigma^2 \frac{\sin(\Delta\omega k t \tau)}{\Delta\omega k t \tau} \cos(\omega_0 \tau)$ , где  $k \ll 1$ ;  $0 \leq t \leq \infty$ . Определить СПМ  $S(t, \omega)$  случайного процесса  $y(t)$  на выходе фильтра. (Переходными процессами в фильтре при  $k \ll 1$  можно пренебречь.)

**2.34.** На входе фильтра с амплитудно-частотной характеристикой  $K(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq F; \\ 0, & |f| > F \end{cases}$  действует шум с корреляционной функцией  $R(\tau) = \sigma^2 \frac{\sin(\pi F_0 \tau)}{\pi F_0 \tau}$ . Построить график дисперсии на выходе фильтра в зависимости от полосы пропускания фильтра  $F$ .

**2.35.** На вход линейной цепи с импульсной характеристикой  $h(t) = k \cos(2\pi f_1 t) \frac{\sin(\pi f_0 t)}{\pi f_0 t}$ , где  $k$  – известная константа, поступает случайный процесс  $x(t) = s(t) + n(t)$ , где  $n(t)$  – белый шум с СПМ  $N_0$ ;  $s(t)$  – периодическая последовательность видеоимпульсов прямоугольной формы с частотой следования  $f_0$ , длительностью  $t_{\text{и}} = 0,5f_0$  и амплитудой  $A$ . Найти СПМ и полную среднюю мощность процесса на выходе линейной цепи для двух случаев: а)  $f_1 = f_0$ , б)  $f_1 = 2f_0$ .

**2.36.** На вход линейной системы с импульсной характеристикой  $h(t)$  подается процесс  $x(t)$ , имеющий корреляционную функцию  $R_x(\tau)$ . На выходе формируется сигнал  $y(t)$ . Найти выражение взаимно корреляционной функции  $R_{yx}(\tau)$  выходного и входного процессов.

**2.37.** Постоянная времени  $T$  интегрирующей RC-цепи является случайной величиной, равномерно распределенной на интервале  $[T_{\min}, T_{\max}]$ . На вход цепи подается стационарный СП с корреляционной функцией  $R(\tau) = \sigma^2 \exp(-\lambda|\tau|)$ , причем  $\lambda \gg 1/T_{\min}$ . Найти распределение дисперсии процесса на выходе цепи.

**2.38.** На последовательность независимо включенных линейных фильтров с импульсными характеристиками вида  $h_k(t) = \begin{cases} \frac{k^2}{T}, & t \in [0, \frac{T}{k^2}]; \\ 0, & t \notin [0, \frac{T}{k^2}], \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$  подается сумма нормального белого шума с двусторонней спектральной



плотностью мощности  $N_0/2$  и сигнала  $s(t) = U_m \exp(-at^2)$ , где  $a = 540/(\pi^4 T^2)$ .

Найти отношение сигнал/шум на выходе. Справка:  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$ .

**2.39.** На вход последовательно включенных  $N$  фильтров с коэффициентами передачи  $K_l(\omega) = K_0 \exp(-\frac{l\omega^2}{\alpha N})$ ,  $l = 1, 2, \dots, N$  поступает аддитивная смесь белого шума с СПМ  $N_0/2$  и сигнала  $s(t) = U \exp(-\alpha t^2 / 2)$ . Считая  $N \gg 1$ , найти отношение сигнал/шум на выходе системы фильтров.

**2.40.** Доказать, что АКФ дискретного СП, полученного запоминанием на время  $T$  мгновенных значений стационарного нормального СП с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2 = N_0 U^2 T / 2$  в моменты времени  $kT$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  ( $T \gg \tau_k$ , где  $\tau_k$  – время корреляции исходного СП), совпадает с корреляционной функцией процесса на выходе СФ для сигнала  $s(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T], \end{cases}$  на вход которого подается АБГШ с СПМ  $N_0 / 2$ .

**2.41.** Отсчеты, взятые из независимых стационарных нормальных случайных процессов  $x(t)$  и  $y(t)$  с нулевыми средними значениями и одинаковыми дисперсиями  $\sigma^2$ , возводятся в квадрат и складываются. Найти вероятность превышения порога  $Z_{\text{п}}$  случайной величиной  $Z = x^2(t) + y^2(t)$ . Как изменится результат, если средние значения  $x(t)$  и  $y(t)$  равны  $a$  и  $b$  соответственно? Дать графическую иллюстрацию решения задачи.

**2.42.** На вход безынерционного ограничителя с характеристикой  $\eta = \begin{cases} 0, & \xi < 0; \\ \xi, & 0 \leq \xi \leq \alpha; \\ \alpha, & \xi > \alpha \end{cases}$  воздействует стационарный нормальный СП  $\xi(t)$  с плотностью вероятности  $w_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2})$ , где  $m < \alpha$ . Определить и

изобразить (качественно) одномерную плотность вероятности отсчета процесса  $\eta(t)$  на выходе ограничителя.

**2.43.** Стационарный гауссовский СП  $x(t)$  с нулевым средним значением и СПМ, ограниченной по частоте значением  $F$ , подвергается преобразованию

$$y(t) = \begin{cases} 1, & x(t) \geq 0; \\ -1, & x(t) < 0. \end{cases}$$

Отсчеты процесса на выходе преобразователя накаплива-

ются с шагом  $\Delta t \gg 1/F$ . Найти ПВ суммы  $N$  отсчетов.

### 3. СОГЛАСОВАННЫЕ И КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЕ ФИЛЬТРЫ

**3.1.** На фильтр, согласованный с сигналом  $s(t)$ , подается сигнал  $s(kt)$  и АБГШ с СПМ  $N_0/2$ . Для прямоугольного видеоимпульса длительностью  $T$  и амплитудой  $U$  построить зависимость максимально достижимого отношения сигнал/шум на выходе от параметра  $k$ .

Решение. Любые ситуации, за исключением случая  $k = 1$ , ведут к рассогласованности обработки, поэтому при  $k = 1$  будет достигнуто максимально возможное для  $s(t)$  отношение сигнал/шум  $q_0 = \sqrt{\frac{2E}{N_0}} = \sqrt{\frac{2U^2T}{N_0}}$ . В ситуации рассогласованной обработки отношение сигнал/шум на выходе следует определять как  $q = U_m / \sigma$ , где  $U_m$  – максимальная амплитуда сигнала;  $\sigma$  – действующее значение шума.

Если  $k < 1$ , сигнал на выходе СФ будет достигать максимального значения  $U^2T$ , дисперсия шума  $\sigma^2 = \frac{N_0U^2T}{2}$ , а отношение сигнал/шум  $q = \sqrt{\frac{2U^2T}{N_0}} = q_0$ .

При  $k > 1$  максимальное значение сигнальной составляющей –  $U^2T / k$ , дисперсия шума в режиме установившегося шумового воздействия  $\sigma^2 = \frac{N_0U^2T}{2}$ . Отношение сигнал/шум  $q = q_0/k$ .

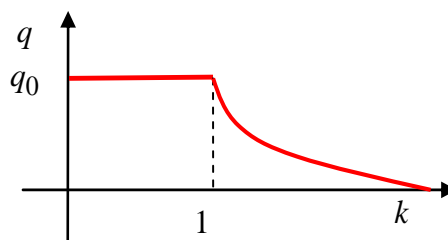


Рис. 3.1

На рис. 3.1 приведена зависимость достижимого отношения сигнал/шум при обработке сигнала  $s(kt)$  фильтром, согласованным с сигналом  $s(t)$ .

**3.2.** На выходе фильтра, согласованного с прямоугольным видеоимпульсом длительностью  $6\tau$  и амплитудой  $U_m$ , момент взятия отсчета выбирается с помощью игрального кубика и может равновероятно принимать одно из

значений  $k\tau$  ( $k=1,2,\dots,6$ ). Найти среднее значение отношения сигнал/шум на выходе. Помеха – АБГШ с СПМ  $N_0/2$ .

Решение. Отношение сигнал/шум в точках взятия отсчетов  $q_i = q_0 \frac{i}{6}$ , где

$$q_0 = \sqrt{\frac{2U^2 6\tau}{N_0}} = \sqrt{\frac{12U^2 \tau}{N_0}}; i = 1, 2, \dots, 6. \text{ С учетом равновероятности этих значений}$$

$$\text{среднее } \bar{q} = \frac{q_0}{6} \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 k = \frac{7}{12} q_0.$$

**3.3.** Как с помощью трех фильтров, согласованных с прямоугольными импульсами, длительность которых можно изменять, и сумматора построить фильтр, согласованный с сигналом  $s(t)$ , приведенным на рис.3.2.

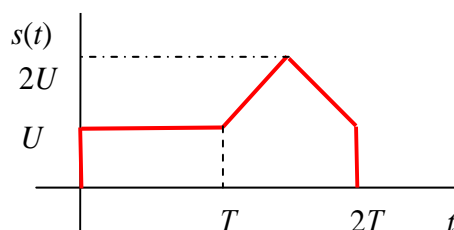


Рис. 3.2

Решение. Импульсная характеристика искомого СФ  $h(t) = s(2T - t)$  и показана на рис. 3.3.

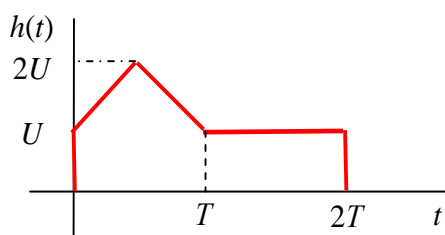


Рис. 3.3

Отсюда несложно понять механизм реализации СФ для сигнала  $s(t)$ : для получения «прямоугольной подставки» необходимо взять СФ для прямоугольного импульса длительностью  $2T$ , для формирования «треугольной надстройки» можно последовательно включить 2 СФ, предназначенных для обработки импульса длительностью  $T/2$  (рис. 3.4).

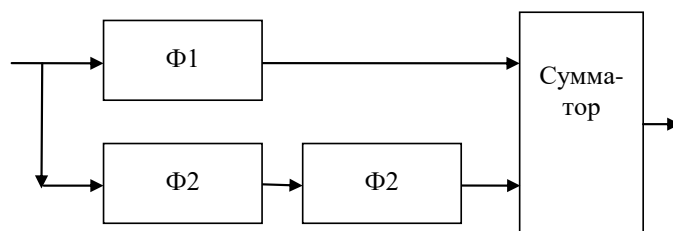


Рис. 3.4

На рис. 3.4 обозначено:  $\Phi 1$  – СФ для прямоугольного импульса длительностью  $2T$ ,  $\Phi 2$  – СФ для импульса длительностью  $T/2$ .

**3.4.** Спроектированный для прямоугольного импульса

$s_0(t) = \begin{cases} U, t \in [0, \tau]; \\ 0, t \notin [0, \tau] \end{cases}$  согласованный фильтр имеет реакцию на сигнал

$s(t) = \begin{cases} U, t \in [0, T]; \\ 0, t \notin [0, T], \end{cases}$  приведенную на рис. 3.5. Определить, каким при этом бу-

дет отношение сигнал/шум на выходе фильтра в моменты времени  $T$  и  $2T$ ? Помеха – АБГШ с СПМ  $N_0/2$ ,  $q_0$  – отношение сигнал/шум, достижимое при оптимальной обработке  $s_0(t)$ .

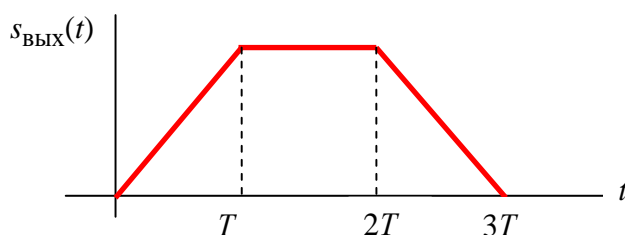


Рис. 3.5

Решение. В штатной ситуации (при действии на входе фильтра сигнала  $s_0(t)$ ) амплитуда сигнала на выходе  $U_0 = cU^2\tau$ , дисперсия шума  $\sigma_0^2 = c^2 \frac{N_0 U^2 \tau}{2}$ , а отношение сигнал/шум  $q_0 = \sqrt{\frac{2U^2 \tau}{N_0}}$ , где  $c = 1$  – коэффициент, необходимый для сохранения размерностей правой и левой частей равенств.

Задача имеет 2 варианта решения. В первом случае фильтр будет согласован с сигналом  $s_1(t) = \begin{cases} U, t \in [0, T_1]; \\ 0, t \notin [0, T_1], \end{cases}$  имеющим длительность  $T_1 = \tau/2$ , в 2 раза меньшую длительности сигнала  $s_0(t)$ . Во втором случае – с сигналом

$s_2(t) = \begin{cases} U, t \in [0, T_2]; \\ 0, t \notin [0, T_2], \end{cases} \quad T_2 = 2\tau.$  В обеих ситуациях отклик фильтра будет соответствовать рис. 3.5.

В первом случае указанное на рис. 3.5 значение  $T = T_1 = \tau/2$ , максимальное значение сигнальной составляющей  $U_{m1} = U_0/2$ , дисперсия шума в моменты времени  $T$  и  $2T$   $\sigma_1^2(T) = \sigma_1^2(2T) = c^2 \frac{N_0 U^2 \tau}{4} = \sigma_0^2 / 2$ , а отношение сигнал/шум  $q(T) = q(2T) = q_0 / \sqrt{2}$ .

Во втором случае указанное на рис. 3.5 значение  $T = T_2 = 2\tau$ , максимальное значение сигнальной составляющей  $U_{m2} = U_0$ , дисперсия шума в моменты времени  $T$  и  $2T$  соответственно равна  $\sigma_2^2(T) = c^2 \frac{N_0 U^2 \tau}{2} = \sigma_0^2$  и  $\sigma_2^2(2T) = c^2 N_0 U^2 \tau = 2\sigma_0^2$  (см. решение задачи 2.1), а отношение сигнал/шум  $q(T) = q_0$ ,  $q(2T) = q_0 / \sqrt{2}$ .

**3.5.** На фильтр, согласованный с узкополосным сигналом  $s_1(t) = \begin{cases} U \sin(2\pi f_0 t), t \in [0, T]; \\ 0, t \notin [0, T], \end{cases}$  подается сигнал

$s_1(t) = \begin{cases} U \text{sign}[\sin(2\pi f_0 t)], t \in [0, T]; \\ 0, t \notin [0, T], \end{cases}$  где  $\text{sign}(x) = \begin{cases} +1, x \geq 0; \\ -1, x < 0. \end{cases}$  Каким будет отношение сигнал/шум на выходе фильтра по сравнению с оптимальной фильтрацией сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ ?

Решение. Потенциально достижимое отношение сигнал/шум при обработке сигнала  $s_1(t)$   $q_1 = \sqrt{\frac{2E_1}{N_0}} = \sqrt{\frac{U^2 T}{N_0}}$ .

При подаче на фильтр сигнала  $s_2(t)$  выходной эффект за четверть периода несущей составит  $U^2 \int_0^{1/(4f_0)} \cos(2\pi f_0 t) dt = U^2 / (2\pi f_0)$ , что при накоплении за длительность сигнала даст амплитуду полезного выходного сигнала  $[U^2 / (2\pi f_0)] 4f_0 T = (2/\pi) U^2 T$ . После деления этой величины на

среднеквадратическое отклонение выходного шума  $\sqrt{N_0 U^2 T} / 2$  для выходного отношения сигнал/шум получится  $q_2 = (4/\pi) \sqrt{U^2 T / N_0} = (4/\pi) q_1$ . Достижимое же отношение сигнал/шум при оптимальной обработке сигнала  $s_2(t)$

$$q_3 = \sqrt{\frac{2U^2 T}{N_0}} = \sqrt{2} q_1.$$

Возможно и другое решение. Сигнал  $s_2(t)$ , подаваемый на вход согласованного фильтра, представляет собой двухполярный меандр. Ряд Фурье меандра частоты  $f_0$  имеет вид

$$\begin{aligned} s_2(t) &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin[2\pi(2k-1)f_0 t]}{2k-1} = \\ &= \frac{4}{\pi} \left[ \sin(2\pi f_0 t) + \frac{\sin(6\pi f_0 t)}{3} + \frac{\sin(10\pi f_0 t)}{5} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, реакция на сигнал  $s_2(t)$  эквивалентна отклику фильтра на сигнал  $s_1(t)$  с амплитудой  $\frac{4U}{\pi}$  (составляющие частоты  $3f_0$  и выше через фильтр не пройдут). Поэтому отношение сигнал/шум при обработке сигнала  $s_2(t)$  СФ будет  $q_2 = \frac{4}{\pi} q_1$ . При оптимальной обработке сигнала может быть

достигнуто отношение сигнал/шум  $q_3 = \sqrt{\frac{2U^2 T}{N_0}} = \sqrt{2} q_1$ .

В итоге:  $q_3 \approx 1,41 q_1 > q_2 \approx 1,27 q_1 > q_1$ .

**3.6.** Для обработки сигнала  $s(t) = \begin{cases} U, t \in [0, T]; \\ 0, t \notin [0, T] \end{cases}$  на фоне АБГШ с СПМ

$N_0 / 2$  в качестве эквивалента СФ используется коррелятор. Построить зависимость отношения сигнал/шум от длительности времени обработки на интервале  $[0, t]$ ,  $t \in [0, T]$ .

Решение. При обработке с помощью коррелятора сигнальная составляющая на выходе возрастает линейно ( $U(t) = Ut$ ) в пределах длительности сигнала. Дисперсия белого шума на выходе также растет линейно:

$$D_{\eta}(t) = \overline{z(t_1)z(t_2)} \Big|_{t_1=t_2=t} = \int_0^t \int_0^t U^2 \frac{N_0}{2} \delta(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 \Big|_{t_1=t_2=t} = \frac{U^2 N_0}{2} t, \text{ где } z(t)$$

– процесс на выходе интегратора.

Отношение сигнал/шум меняется по закону  $q = \frac{Ut}{\sqrt{D(t)}} = q_0 \sqrt{\frac{t}{T}}, t \in [0, T]$ .

**3.7.** Как с помощью операций сдвига и суммирования из приведенных на рис. 3.6 трех функций  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  и  $f_3(t)$  сформировать сигнал  $s(t)$ , для которого при согласованной фильтрации на фоне БШ с СПМ  $N_0/2$  будет достигнуто максимально возможное отношение сигнал/шум? Найти структуру согласованного фильтра и определить отношение сигнал/шум на выходе.

Решение. Для максимизации отношения сигнал/шум при обработке его на фоне БШ необходимо максимизировать энергию сигнала.

Для этого достаточно так «сфазировать» функции  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  и  $f_3(t)$ , чтобы они синхронно складывались. Для этого функцию  $f_2(t)$  следует задержать на время  $T/4$ , а  $f_3(t)$  – на  $3T/8$ . Полученный сигнал показан на рис. 3.7.

Сигнал можно представить в виде

$$s(t) = \sum_{i=0}^7 a_i s_0(t - iT_0), \quad \text{где}$$

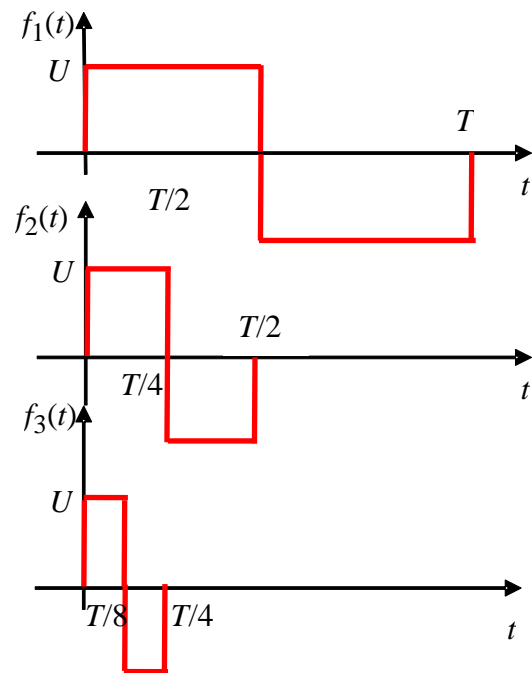


Рис. 3.6

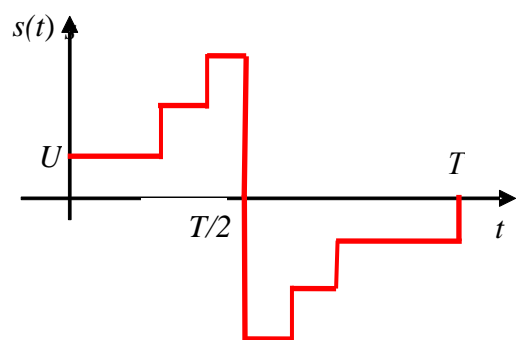


Рис. 3.7



$$s_0(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, T_0]; \\ 0, & t \notin [0, T_0], \end{cases} \quad T_0 = T/8; \quad a_i \in \{1, 1, 2, 3, -3, -2, -1, -1\} \text{ — амплитуды каждого}$$

элементарного импульса.

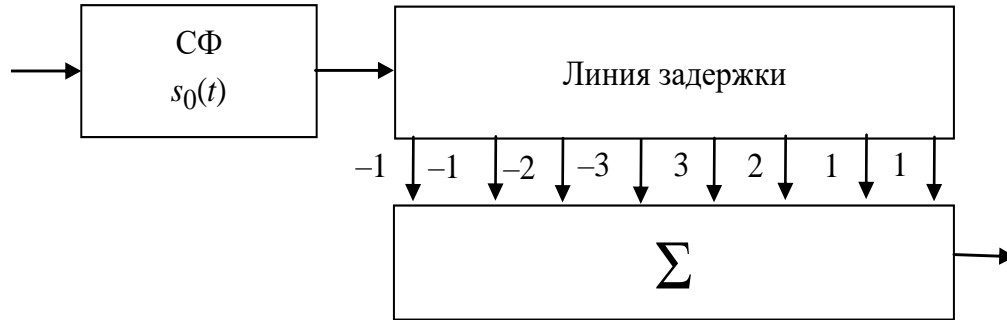


Рис. 3.8

СФ для сигнала  $s(t)$  представляет последовательное включение СФ для  $s_0(t)$  и блока, осуществляющего весовую обработку задержанных импульсов (рис. 3.8). При этом последовательность весов является зеркальной копией последовательности  $a_i$ .

Отношение сигнал/шум, получаемое при обработке такого сигнала:

$$q = \sqrt{\frac{2E}{N_0}}, \text{ где } E = \sum_{i=0}^7 a_i^2 \frac{U^2 T}{8} = \frac{30U^2 T}{8}.$$

**3.8.** Студент предложил для увеличения отношения сигнал/шум при обработке пакетов импульсов радиотехнической системы суммировать отсчеты, взятые в моменты максимумов главного и первого бокового лепестков выходного сигнала фильтра, согласованного с пакетом. К каким результатам приведет это «изобретение» для трехэлементного сигнала Баркера  $\{1, 1, -1\}$  и сигнала вида  $\{1, 1, 1\}$ ? Дать количественную оценку по сравнению с оптимальным алгоритмом.

Решение. Рассматриваемые в задаче сигналы могут трактоваться как дискретные вида  $s(t) = \sum_{i=0}^2 a_i s_0(t - iT_0)$ , где  $s_0(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, T_0]; \\ 0, & t \notin [0, T_0], \end{cases}$  а коэффициенты  $a_i \in \{1, 1, -1\}$  для первого сигнала и  $a_i \in \{1, 1, 1\}$  для второго.

Для решения задачи может оказаться полезным взглянуть на корреляционные функции рассматриваемых сигналов (поскольку они отличаются от колебания, получаемого на выходе СФ, только временным сдвигом, и при этом

корреляционная функция шума на выходе СФ будет их повторять с точностью до постоянного множителя) (рис. 3.9).

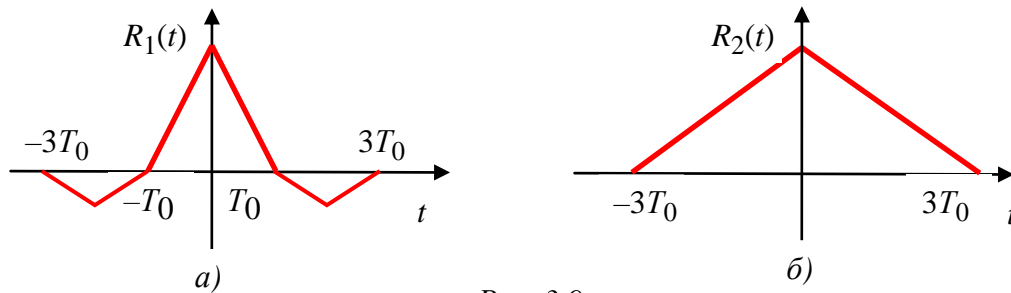


Рис. 3.9

Под отсчетом, взятым из бокового лепестка, будем подразумевать отсчет, смещенный на длительность элементарного импульса  $T_0$  дискретного сигнала. Тогда для сигнала, построенного на базе кода Баркера, значение сигнальной составляющей будет  $E + 0 = E$ , а дисперсия суммы будет равна сумме дисперсий отсчетов  $\frac{N_0 E}{2} + \frac{N_0 E}{2} = N_0 E$ , так как коэффициент корреляции между от-

счетами равен нулю. Достижимое при этом отношение сигнал/шум  $q = \sqrt{\frac{E}{N_0}}$ .

При обработке второго сигнала сигнальная составляющая  $-E + 2/3E = 5/3E$ , а дисперсия (с учетом коррелированности шумовых отсчетов)

$N_0 E \left(1 + \frac{2}{3}\right) = \frac{5N_0 E}{3}$ . Отношение сигнал/шум при накоплении двух отсчетов

$q = \sqrt{\frac{5E}{3N_0}}$ . При оптимальной обработке можно достичь  $q = \sqrt{\frac{2E}{N_0}}$ . В итоге по-

тери от действий студента составят 3 дБ при обработке первого сигнала и 1,58 дБ при обработке второго.

**3.9.** При попытке собрать согласованный фильтр для прямоугольного импульса длительностью  $T$  инженер обнаружил в комплектации лишь ЛЗ на  $0,5T$  и  $1,5T$ . Какую из них следует предпочесть?

Решение. Положим без ограничения общности амплитуды входного импульса и импульсной характеристики фильтра равными единице. Тогда амплитуда реакции фильтра на входной импульс окажется равной  $0,5T$  для первой ЛЗ и  $T$  – для второй. Дисперсия БШ с СПМ  $N_0/2$  после фильтра составит

$N_0T/4$  и  $1,5N_0T/2$  для двух имеющихся ЛЗ соответственно. В итоге отношения сигнал/шум по мощности составят:

$$q_1^2 = \frac{(0,5T)^2}{N_0T/4} = \frac{T}{N_0} \text{ для первой ЛЗ и } q_1^2 = \frac{T^2}{1,5N_0T/2} = \frac{4T}{3N_0} \text{ для второй. Таким}$$

образом, предпочтительна вторая линия задержки.

Тем не менее, при имеющейся комплектации возможно реализовать устройство, позволяющее достичь максимума отношения сигнал/шум.

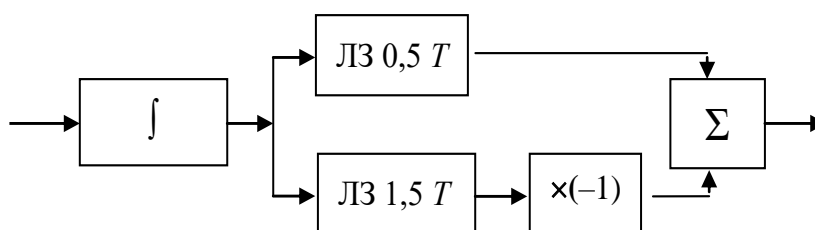


Рис. 3.10

Схема такого устройства (рис. 3.10) представляет собой СФ для прямоугольного видеоимпульса, задержанного на  $0,5T$ . Максимальное отношение сигнал/шум по мощности на выходе схемы  $\frac{2T}{N_0}$  будет достигнуто в момент времени  $1,5T$ .

**3.10.** Выходные сигналы фильтров, согласованных с сигналами  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ , имеющими энергии  $E_1$  и  $E_2$  соответственно, суммируются с весовыми коэффициентами  $a_1$  и  $a_2$ . Полезные сигналы сфазированы так, что их максимальные значения на выходах СФ достигаются в совпадающие моменты времени. Шумы на входах СФ независимые белые с СПМ  $N_{01}/2$  и  $N_{02}/2$ . Найти весовые коэффициенты, обеспечивающие максимальное отношение сигнал/шум на выходе сумматора.

Решение. Так как абсолютные значения  $a_1$  и  $a_2$  роли не играют, то можно рассматривать один коэффициент, положив его равным  $a$ , а второй считать равным 1 и искать при этом  $a_{\text{opt}}$ .

Отношение сигнал/шум  $q = \frac{aE_1 + E_2}{\sqrt{a^2 \frac{N_{01}E_1}{2} + \frac{N_{02}E_2}{2}}}$ , т. е. необходимо исследовать на экстремум выражение вида  $\frac{kx+b}{\sqrt{dx^2+c}}$ , где  $k = E_1$ ;  $b = E_2$ ;  $d = \frac{N_{01}E_1}{2}$ ;

$$c = \frac{N_{02}E_2}{2}. \text{ Результат } - x_{\text{opt}} = \frac{kc}{bd}. \text{ В итоге } - a_{\text{opt}} = \frac{E_1 \frac{N_{02}E_2}{2}}{E_2 \frac{N_{01}E_1}{2}} = \frac{N_{02}}{N_{01}}.$$

**3.11.** Импульсный сигнал в виде полуволны косинусоиды  $s(t) = \begin{cases} U \cos \frac{\pi t}{T}, & |t| \leq \frac{T}{2}; \\ 0, & |t| > \frac{T}{2}, \end{cases}$  где  $U$  и  $T$  – соответственно амплитуда и длительность сигнала, в аддитивной смеси с белым шумом подается на фильтр с прямоугольным импульсным откликом длительностью  $\Delta = 2T/3$ . Оценить выигрыш названного фильтра согласованному в выходном отношении сигнал/шум.

Решение. Реакция фильтра на произвольный сигнал есть взаимная корреляционная функция последнего с зеркальным импульсным откликом фильтра. В рассматриваемом случае имеется в виду взаимная корреляция полуволны косинусоиды длительностью  $T$  с прямоугольником длительностью  $\Delta$ . Очевидно, максимум сигнального эффекта на выходе фильтра будет соответствовать взаимной корреляции входного сигнала с прямоугольником, расположенным симметрично относительно нуля шкалы времени. При этом амплитуда  $U_1$  полезного сигнала на выходе фильтра

$$U_1 = 2U \int_0^{\Delta/2} \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) dt = \frac{2UT}{\pi} \sin \frac{\pi \Delta}{2T},$$

что при оговоренной длительности импульсного отклика даст  $U_1 = \sqrt{3}UT / \pi$ .

Дисперсию шума  $\sigma_1^2$  на выходе фильтра с импульсным откликом  $h(t)$  можно найти как

$$\sigma_1^2 = \frac{N_0}{2} \int_0^\infty h^2(t) dt,$$

что для условий задачи даст  $\sigma_1^2 = N_0 T / 3$ . Таким образом, отношение сигнал/шум по мощности на выходе фильтра с прямоугольным импульсным откликом

$$q_1^2 = \frac{U_1^2}{\sigma_1^2} = \frac{9U^2 T}{\pi^2}.$$

Поскольку энергия сигнала  $E = U^2 T / 2$ , отношение сигнал/шум на выходе СФ  $q_0^2 = \frac{2E}{N_0} = \frac{U^2 T}{N_0}$ , то потери в отношении сигнал/шум

$$\gamma = \frac{q_0^2}{q_1^2} = \frac{\pi^2}{9} \approx 1,097 \text{ (0,4 дБ)}.$$

**3.12.** Взаимная корреляционная функция шума на выходе фильтра и белого шума на входе имеет форму равнобедренного треугольника с основанием  $2T$ . Что собой представляет фильтр?

Решение. При подаче на вход фильтра белого шума взаимная корреляционная функция входного и выходного сигналов фильтра повторяет по форме импульсный отклик фильтра. Таким образом, необходимо построить фильтр с треугольным импульсным откликом. Структура подобного фильтра показана на рис. 3.11.

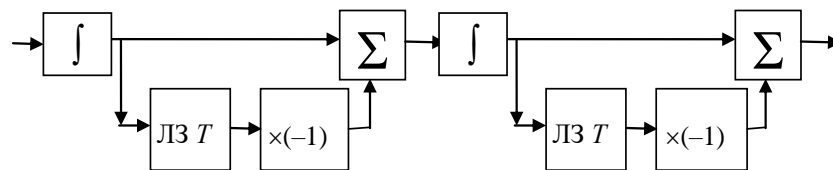


Рис. 3.11

**3.13.** АКФ белого шума, пропущенного через фильтр, в точности совпадает с взаимной корреляционной функцией шумов на входе и выходе фильтра. Для какого класса фильтров справедливо подобное утверждение?

Решение. АКФ шума на выходе  $R_{22}(\tau)$  фильтра и взаимная корреляционная функция шумов на входе и выходе  $R_{12}(\tau)$  определены соотношениями

$$R_{22}(\tau) = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h(t)h(t+\tau)dt, \quad R_{12}(\tau) = \frac{N_0}{2} h(\tau),$$

в которых  $h(\tau)$  – импульсная реакция фильтра. Приравнявая преобразования Фурье от правых частей этих равенств, для коэффициента передачи  $K(jf)$  фильтра имеем  $K(jf) = |K(jf)|^2$ . Как видно, коэффициент передачи на любой частоте есть неотрицательное действительное число, не меняющееся при возведении в квадрат. Подобным свойством обладают только нуль и единица. Таким образом, искомый класс исчерпывается всеми фильтрами, коэффициент передачи которых принимает лишь значения нуль и единица. В частности, в него входят идеальный фильтр нижних частот, идеальный полосовой фильтр и др.

**3.14.** Прямоугольный видеоимпульс длительностью  $T$  в смеси с белым шумом поступает на СФ. Ошибка петли синхронизации приводит к сдвигу селекторного импульса, опрашивающего СФ, относительно максимума выходного сигнала вплоть до  $\pm T/5$ . Оценить максимальные энергетические потери (в децибелах), обусловленные названной ошибкой.

Решение. В отсутствие ошибки полезный отселектированный отсчет на выходе СФ

$$U_0 = A^2 T \left( 1 - \frac{|t-T|}{T} \right)_{t=T} = A^2 T,$$

где  $A$  – амплитуда принятого сигнала. С учетом ошибки синхронизации  $\tau$  та же величина составит:

$$U_\tau = A^2 T \left( 1 - \frac{|t-T|}{T} \right)_{t=T-\tau} = A^2 T \left( 1 - \frac{|\tau|}{T} \right).$$

Таким образом, энергетический проигрыш из-за ошибки  $\tau$

$$\gamma = \left( \frac{U_0}{U_\tau} \right)^2 = \frac{1}{1 - \frac{|\tau|}{T}}.$$

Максимальное значение этой величины  $\gamma_{\max}$  соответствует  $\tau = \pm T/5$ :  $\gamma_{\max} = 5/4$  или 0,97 дБ.

**3.15.** При записи выражения для коэффициента передачи согласованного фильтра  $K(jf) = c \frac{S^*(jf)}{G(f)} e^{-j2\pi fT}$  студент ошибся и упустил знак комплексного сопряжения для спектра сигнала. Для каких сигналов указанная ошибка не будет иметь последствий?

**3.16.** Для какого из сигналов  $s_{\text{ч}}(t)$  или  $s_{\text{нч}}(t)$  ( $s_{\text{ч}}(t)$  и  $s_{\text{нч}}(t)$  – четная и нечетная составляющие сигнала  $s(t)$  соответственно) можно с помощью согласованной фильтрации получить большее значение отношения сигнал/шум. Привести доказательство.

**3.17.** Фильтр, согласованный с сигналом  $s(t) = \sum_{i=0}^3 a_i s_0(t - iT_{\Pi})$ , где  $a_i \in \{1, 1, 1, 1\}$ ;  $s_0(t) = \begin{cases} U \cos(2\pi f_0 t), & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T]; \end{cases}$   $T = T_{\Pi} / 2$ ;  $T \gg 1/f_0$ , используется для обнаружения сигнала  $s(t) = \sum_{i=0}^3 b_i s_0(t - iT_{\Pi})$ ,  $b_i \in \{-1, -1, 1, -1\}$ . В ка-

кой момент следует взять отсчет на выходе фильтра, чтобы получить наилучший результат обнаружения.

**3.18.** Как из двух фильтров, согласованных с прямоугольными видеоимпульсами, реализовать фильтр, согласованный с сигналом  $s(t)$  (рис. 3.12). Каков будет выигрыш, если использовать только один фильтр, согласованный с прямоугольным видеоимпульсом? Параметры фильтров можно изменять.

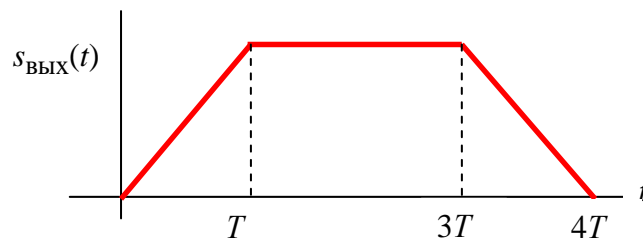


Рис. 3.12

**3.19.** На вход фильтра, согласованного с прямоугольным импульсом, имеющим энергию  $E_0$ , амплитуду  $U_0$  и длительность  $T_0$ , подается прямоугольный импульс с энергией  $E_0$ . Построить зависимость отношения сигнал/шум на

выходе СФ в момент времени  $T_0$  от длительности входного импульса  $T$  при фиксированной энергии сигнала  $E_0$ .

**3.20.** На вход фильтра, согласованного с прямоугольным видеоимпульсом длительностью  $T$  и единичной амплитудой, подается сумма указанного импульса с амплитудой  $U$  и помехи в виде «меандра» с амплитудой  $U_{\text{п}}$ , периодом  $2T$  и смещенным моментом перехода через 0, равномерно распределенным в интервале  $[0, 2T]$ . Найти отношение сигнал/помеха на выходе в момент окончания импульса. Каким будет алгоритм оптимальной фильтрации и какое отношение сигнал/помеха при этом можно получить? Записать выражение для СПМ помехи.

**3.21.** На фильтр, согласованный с сигналом  $s_1(t) = \begin{cases} U(1 - t/T), & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T], \end{cases}$

подается АБГШ с СПМ  $N_0/2$  и сигнал  $s_2(t) = \begin{cases} a_1 U, & t \in [0, T/2]; \\ a_2 U, & t \in [T/2, T]; \\ 0, & t \notin [0, T]. \end{cases}$  Энергия сигнала  $s_2(t)$  фиксирована и равна  $E$ . Как выбрать коэффициенты  $a_1$  и  $a_2$ , чтобы отношение сигнал/шум в момент времени  $t_0 = T$  было максимальным? Каким оно будет? Каков проигрыш по сравнению с согласованной фильтрацией сигнала  $s_2(t)$ ? Как изменится результат, если момент  $t_0$  можно выбирать?

**3.22.** На фильтр, согласованный с сигналом  $s(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T], \end{cases}$  помимо

БШ с СПМ  $N_0/2$  подается гармоническая помеха  $x(t) = U_x \cos(2\pi Ft + \varphi)$ , где  $\varphi$  – случайная величина, равномерно распределенная в интервале  $[-\pi, \pi]$ . Построить зависимость отношения сигнал/(помеха + шум) в момент времени  $t_0 = T$  от значения частоты помехи  $F$ .

**3.23.** На фильтр, согласованный с сигналом  $s(t)$ , кроме БШ с СПМ  $N_0/2$  подается помеха с СПМ  $G(\omega) = G_0 \omega^2$ . Какой фильтр нужно включить после согласованного (в расчете на БШ), чтобы обеспечить максимальное отношение сигнал/шум. Будет ли он физически реализуемым? Каким будет



отношение сигнал/шум для указанной суммарной помехи и сигнала

$$s(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T]; \end{cases} ?$$

Для справки:  $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 ax}{x^2(b^2 + x^2)} dx = \frac{\pi}{4b^2} [2a - \frac{1}{b} (1 - \exp(-2ab))], \quad a > 0, \quad b > 0.$

**3.24.** На фильтр, согласованный с сигналом  $s(t) = \sum_{i=0}^6 a_i s_0(t - iT)$ , где

$$a_0 = a_1 = a_2 = a_5 = 1; \quad a_3 = a_4 = a_6 = -1; \quad s_0(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T], \end{cases} \text{ подается сигнал}$$

$$s_1(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, 7T]; \\ 0, & t \notin [0, 7T]. \end{cases} \text{ Как нужно выбрать момент взятия отсчета } t_0 \text{ на выходе}$$

фильтра, чтобы получить максимальное отношение сигнал/шум? Каким оно будет?

**3.25.** Для фильтрации прямоугольного радиоимпульса

$$s(t) = \begin{cases} U \cos(\omega_0 t), & t \in [0, \tau]; \\ 0, & t \notin [0, \tau] \end{cases} \text{ на фоне белого шума с СПМ } N_0 / 2 \text{ используется}$$

фильтр, согласованный с прямоугольным видеоимпульсом. Какой должна быть длительность этого импульса, чтобы получить при фильтрации сигнала  $s(t)$  максимальное отношение сигнал/шум? Каким оно будет? Как изменится

результат, если  $s(t) = \begin{cases} U \sin(\omega_0 t), & t \in [0, \tau]; \\ 0, & t \notin [0, \tau]; \end{cases}$

**3.26.** При каком значении параметра  $T \in (-\infty, \infty)$  для сигнала  $s(t)$ , (рис. 3.13) можно получить наибольшее отношение сигнал/шум? Каким оно будет? Помехой является АБГШ с СПМ  $N_0 / 2$ .

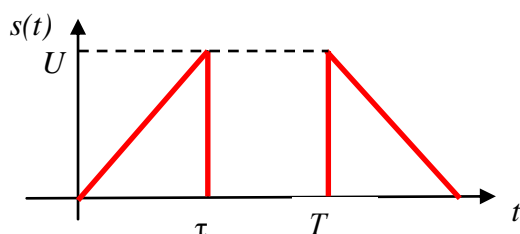


Рис. 3.13

**3.27.** На входе фильтра, согласованного с сигналом

$$s(t) = \sum_{k=0}^1 a_k s_0(t - kT), \text{ где } s_0(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, T], \\ 0, & t \notin [0, T]; \end{cases} \quad a_0 = 1, a_1 = -1, \text{ действует белый гауссовский шум с СПМ } N_0/2.$$

На выходе фильтра суммируются 2 отсчета, разнесенных по времени на интервал  $\Delta$ . Построить зависимость дисперсии шума от параметра  $\Delta$ .

**3.28.** Сигнал  $s(t) = \sum_{k=0}^3 2^k s_0(t - kT)$ , где  $s_0(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, \tau]; \\ 0, & t \notin [0, \tau]; \end{cases} \quad T = 4\tau$ , и БШ

с СПМ  $N_0/2$  подаются на СФ, реализованный в виде последовательного включения фильтра, согласованного с одиночным импульсом (СФОИ)  $s_0(t)$ , и линии задержки с отводами и весовым суммированием сигналов с отводов. Обрыв какого отвода приведет к наибольшему уменьшению отношения сигнал/шум на выходе? Каким оно будет, если момент взятия отсчета  $t_0 = 3T + \tau$ ? В какой момент времени надо брать отсчет, чтобы при наличии обрыва получить максимально возможное отношение сигнал/шум? Нарисовать качественно вид выходного сигнала при наличии и отсутствии обрыва.

**3.29.** Для какого из трех приведенных на рис. 3.14 сигналов, имеющих одинаковую энергию, можно обеспечить большее отношение сигнал/шум с помощью интегрирующей RC-цепи с постоянной времени  $T = \tau_{\text{и}}$  на фоне БШ с СПМ  $N_0/2$ ?

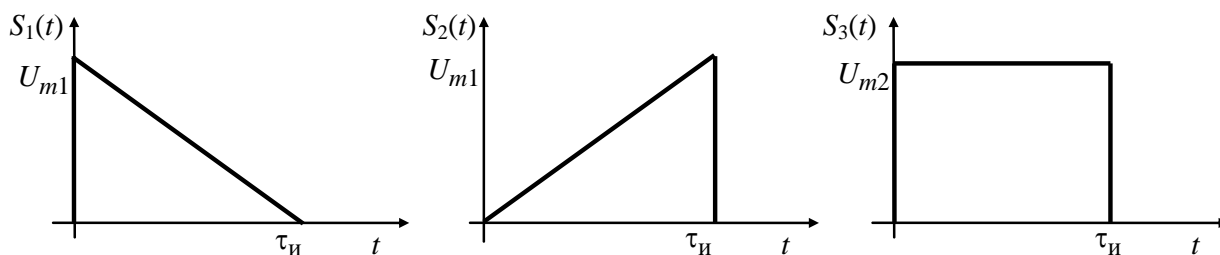


Рис. 3.14

**3.30.** При обработке периодически повторяющегося сигнала

$$S(t) = \sum_{i=0}^3 a_i s_0(t - iT), \text{ где } s_0(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T]; \end{cases} \quad a_i \in \{1, 1, -1, 1\}, \text{ отсчеты с вы-}$$

хода согласованного фильтра берутся в моменты времени  $4T, 8T, \dots, 16T$  и накапливаются. Какой выигрыш (потери) будет достигнут за счет этого по сравнению с обработкой одиночного отсчета, взятого в момент времени  $4T$ ?

**3.31.** Из двух сигналов, изображенных на рис. 3.15, с помощью операций взаимного перемещения, зеркального отражения относительно оси ординат и сложения получить сигнал, который на фоне БШ с СПМ  $N_0/2$  обеспечит максимальное отношение сигнал/шум. Каким оно будет? Изобразить форму сигнала на выходе согласованного фильтра.

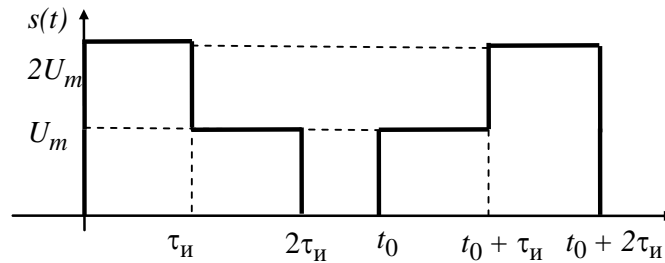


Рис. 3.15

3.32. Для фильтрации сигнала  $s(t) = \begin{cases} U/2, & t \in [0, T]; \\ U, & t \in [T, 2T]; \\ 0, & t \notin [0, 2T] \end{cases}$  на фоне БШ студент

решил использовать фильтр с коэффициентом передачи  $K(jf) = cS(jf)\exp(-j2\pi fT)$ , где  $S(jf)$  – спектр сигнала  $s(t)$ . Какое отношение сигнал/шум он получит в момент времени, отвечающий окончанию входного сигнала? Как следует изменить момент взятия отсчета, чтобы получить максимальное отношение сигнал/шум?

**3.33.** Для фильтрации сигнала  $s(t) = \sum_{i=0}^6 a_i s_0(t - iT)$ , где

$s_0(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T], \end{cases}$   $a_i \in \{1, -1, 1, 1, 1, -1, 1\}$ , используется фильтр, согласо-

ванный с прямоугольным видеоимпульсом. Как следует выбрать параметры этого фильтра (время задержки, момент взятия отсчета), чтобы получить максимальное отношение сигнал/шум на выходе? Каков будет проигрыш по отношению к случаю оптимальной обработки сигнала  $s(t)$ ?

**3.34.** Сигнал  $s(t) = U \frac{\sin[2\pi(F_1 + F_2)t]}{2\pi(F_1 + F_2)t}$  и аддитивный шум, который яв-

ляется произведением двух независимых центрированных случайных процессов  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  с корреляционными функциями  $R_1(\tau) = \sigma_1^2 \frac{\sin(2\pi F_1 \tau)}{2\pi F_1 \tau}$  и

$R_2(\tau) = \sigma_2^2 \frac{\sin(2\pi F_2 \tau)}{2\pi F_2 \tau}$  соответственно, подвергаются фильтрации. Найти коэффициент передачи фильтра, обеспечивающего максимальное отношение сигнал/шум на выходе и определить значение этого отношения.

**3.35.** Сигнал  $s(t)$  (рис. 3.16) подается на фильтр, согласованный с сигналом  $s'(t)$ . Найти максимальное значение отношения сигнал/шум на выходе и сравнить его со случаем согласованной фильтрации сигнала  $s(t)$ . Помеха – БШ с СПМ  $N_0/2$ .

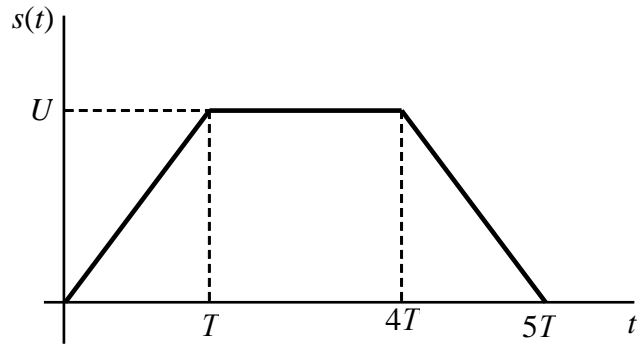


Рис. 3.16

**3.36.** Как нужно изменить структуру фильтра, согласованного с сигналом  $s(t)$ , чтобы он стал согласованным с сигналом  $s'(t)$ ? Каким будет отношение сигнал/шум на выходе? Найти отношение сигнал/шум и форму полезного сигнала на выходе, если  $s(t) = \begin{cases} U(1 - |t|/\tau_H), & t \in [-\tau_H, \tau_H]; \\ 0, & t \notin [-\tau_H, \tau_H]. \end{cases}$

**3.37.** Какие изменения необходимо внести в фильтр, согласованный с сигналом  $s(t)$ , чтобы он оказался согласованным для сигнала  $s_1(t) = \frac{ds(t)}{dt}$ ? Какое условие должно быть выполнено для спектра сигнала, чтобы отношение сигнал/шум на выходе фильтра для  $s(t)$  было меньше, чем на выходе фильтра для  $s_1(t)$ ?

**3.38.** Шумовое воздействие формируется как произведение двух независимых центрированных стационарных СП  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , СПМ которых приведены на рис. 3.17. Там же показан вид амплитудно-частотного спектра сигнала  $|S_c(f)|$ . Какую амплитудно-частотную характеристику будет иметь фильтр, максимизирующий отношение сигнал/шум на выходе?

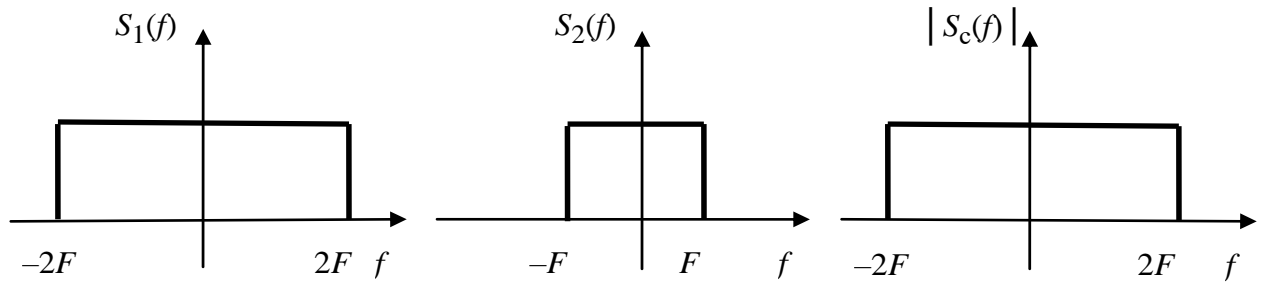


Рис. 3.17

**3.39.** Найти комплексную частотную характеристику фильтра, максимизирующего отношение сигнал/шум на выходе для сигнала  $s(t) = U \frac{\sin(2\pi Ft)}{2\pi Ft}$  и шума, спектральная плотность мощности которого  $G(f) = \begin{cases} N_0(1 - |f|/F), & f \in [-F, F]; \\ 0, & f \notin [-F, F]. \end{cases}$  Вычислить максимальное значение отношения сигнал/шум на выходе. Как оно изменится, если на вход фильтра поступит сигнал  $s_1(t) = U \frac{\sin[2\pi(F - \Delta F)t]}{2\pi(F - \Delta F)t}$ , где  $F \gg \Delta F$ ? Как следует выбирать частотную характеристику фильтра, если  $0 \leq \Delta F \leq \Delta F_{\max}$ , где  $\Delta F_{\max}$  – максимальное значение сдвига спектра сигнала?

**3.40.** Для фильтрации сигнала  $s(t) = U_m \frac{\sin(2\pi F_c t)}{2\pi F_c t}$  используется идеальный ФНЧ с частотной характеристикой  $K(jf) = \begin{cases} 1, & |f| \leq F_\Phi; \\ 0, & |f| > F_\Phi. \end{cases}$  Шум имеет СПМ равномерную в полосе  $[-F_\Pi, F_\Pi]$ . Как зависит отношение сигнал/шум на выходе фильтра от его полосы  $F_\Phi$ ? Оценить потери по отношению к случаю оптимальной (по критерию максимума отношения сигнал/шум) обработки.

**3.41.** На вход фильтра, согласованного с прямоугольным видеоимпульсом амплитудой  $U_m$  и длительностью  $\tau_{и}$ , подается случайный процесс  $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_0(t - t_k)$ , где  $t_k = kT_\Pi + \Delta_k$ ;  $x_0(t)$  – прямоугольный видеоимпульс единичной площади длительностью  $\tau_{и0} \ll \tau_{и}$ ;  $\Delta_k$  – независимые

равномерно распределенные в интервале  $[-\Delta, \Delta]$  случайные величины;  $\Delta \ll T_{\Pi}$ . Найти корреляционную функцию (построить графически) процесса на выходе фильтра.

**3.42.** Сигнал (рис. 3.18) и БШ подаются на интегрирующую  $RC$ -цепь, постоянная времени которой выбирается из условия получения на выходе полезного сигнала конечной длительности. Определить максимальное отношение сигнал/шум на выходе  $RC$ -цепи и сопоставить с результатом согласованной фильтрации.

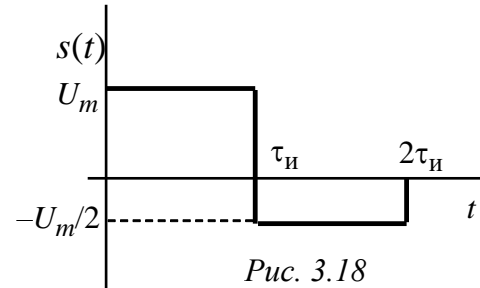


Рис. 3.18

**3.43.** Построить зависимость максимально достижимого отношения сигнал/шум для сигнала  $s(t) = U_m \frac{\sin(\pi F_0 t)}{\pi F_0 t}$  и аддитивного шума с корреляционной функцией  $R(\tau) = U_m \frac{\sin(\pi F \tau)}{\pi F \tau}$  от отношения  $F/F_0$ .

**3.44.** Найти структуру фильтра, максимизирующего отношение сигнал/шум для сигнала  $s(t) = U_m \frac{\sin(\pi F_0 t)}{\pi F_0 t}$  и аддитивного шума, представляющего собой сумму двух независимых СП с корреляционными функциями  $R(\tau) = \sigma^2 \frac{\sin(\pi F_0 \tau)}{\pi F_0 \tau}$  и  $R(\tau) = \sigma^2 \frac{\sin(0,5\pi F_0 \tau)}{0,5\pi F_0 \tau}$ . Определить полученное при этом отношение сигнал/шум.

**3.45.** При записи выражения для импульсной характеристики согласованного фильтра студент ошибся и написал  $h(t) = s(t)$ . Момент измерения отношения сигнал/шум он определил как момент окончания сигнала  $s(t)$ . К какому проигрышу по сравнению с правильным решением это приведет для сигнала

$$s(t) = \begin{cases} \frac{U}{T}, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T]; \end{cases} \quad \text{Помеха – аддитивный белый шум с СПМ } N_0/2. \text{ Для ка-}$$

ких сигналов эта ошибка не приведет к проигрышу?

**3.46.** При построении фильтра, согласованного с прямоугольным видеоимпульсом, студент поменял местами знаки на входе сумматора (минус после интегратора и плюс после линии задержки). К каким последствиям это приведет?

**3.47.** Сигнал  $S(t)$  и БШ с СПМ  $\frac{N_{01}}{2}$  проходит через канал с коэффициентом передачи  $K(jf)$ . На выходе канала к полному выходному сигналу добав-

ляется БШ с СПМ  $\frac{N_{01}}{2}$ . Считая сигнал  $s(t) = \begin{cases} U_m, |t| \leq \frac{\tau}{2}; \\ 0, |t| > \frac{\tau}{2}, \end{cases}$  а  $K(jf) = \tilde{S}(jf)$ ,

где  $\tilde{S}(jf)$  – спектральная плотность сигнала  $s(t)$ , найти сигнал на выходе фильтра, максимизирующего отношение сигнал/шум для описанной выше модели сигнала и помехи для двух крайних случаев:  $\frac{N_{01}}{N_{02}} \ll 1$ , и  $\frac{N_{01}}{N_{02}} \gg 1$ .

**3.48.** Фильтр согласован с сигналом  $s(t) = \begin{cases} U_m, |t| \leq T/2; \\ 0, |t| > T/2. \end{cases}$  Каким будет

отношение сигнал/(шум + помеха) на выходе фильтра, если на его входе кроме белого шума с СПМ  $N_0/2$  действует синусоидальная помеха  $U_m \sin(\omega_0 t - \varphi)$ , где  $\varphi$  – СВ с равномерной ПВ в интервале  $[-\pi, \pi]$ ?

**3.49.** На вход фильтра, согласованного с прямоугольным видеоимпульсом длительностью  $T$ , подается сигнал  $s(t) = \begin{cases} U_m, t \in [0, 4T); \\ U_m/2, t \in [4T, 10T]; \\ 0, t \notin [0, 10T] \end{cases}$  в смеси с

белым шумом с СПМ  $N_0/2$ . Какой линейный фильтр следует включить после указанного выше фильтра, чтобы обеспечить для сигнала  $s(t)$  максимальное отношение сигнал/шум? Каким будет отношение сигнал/шум после первого и второго фильтров?

**3.50.** Сигнал  $s(t)$  (рис. 3.19), состоящий из двух полупериодов синусоид, имеет нулевую постоянную составляющую за счет выбора момента  $t_2$ , причем  $t_2 > 2t_1$ . Найти аналитическое выражение для отношения сигнал/шум на выходе фильтра, согласованного с этим сигналом в присутствии аддитивного БШ с

СПМ  $N_0/2$ . Каким будет отношение сигнал/шум на выходе в момент времени  $t_2$ , если данный сигнал подать на фильтр, согласованный с сигналом

$$s_1(t) = \begin{cases} A, & t \in [0, t_1]; \\ -A, & t \in [t_1, t_2]; \\ 0, & t \notin [0, t_2] \end{cases}$$

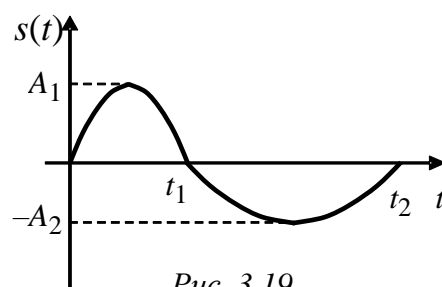


Рис. 3.19

**3.51.** Для обнаружения сигнала  $s(t)$  могут использоваться 2 СФ. Один из них предусмотрен для обработки на фоне аддитивного шума с равномерной (прямоугольной) СПМ, второй – на фоне аддитивного шума с треугольной СПМ. Дисперсии шумов равные. Что будет, если при обработке сигнала использовать СФ, рассчитанный на другую СПМ? В каком случае отношение сигнал/шум будет меньше, если спектр сигнала целиком расположен в пределах ширины спектра шума?

**3.52.** Реакция линейного фильтра на прямоугольный видеоимпульс  $s(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases}$  показана на рис. 3.20. Каким

будет отношение сигнал/шум на выходе фильтра для этого сигнала, если на входе действует белый шум со спектральной плотностью мощности  $N_0/2$ ? Каким будет проигрыш по сравнению со случаем согласованной фильтрации сигнала  $s(t)$ ? С каким сигналом на самом деле согласован данный фильтр?

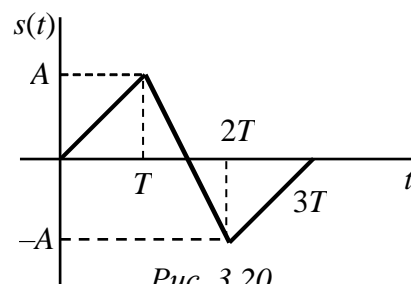


Рис. 3.20

**3.53.** В фильтре, согласованном с сигналом  $s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} s_0(t - kT)$ , где  $T$  –

период следования импульсов;  $s_0(t) = \begin{cases} U_m, & t \in [0, T_0], \\ 0, & t \notin [0, T_0]; \end{cases}$   $T = 3T_0$ , вероятность

обрыва отвода ЛЗ в СФ равна  $p$ . Обрывы отводов являются независимыми событиями. Найти выражение для среднего значения отношения сигнал/шум на выходе СФ.



**3.54.** Как следует выбрать параметр  $F$  у сигнала  $s(t) = U \frac{\sin(2\pi Ft)}{2\pi Ft}$ , чтобы обеспечить максимальное отношение сигнал/помеха для трех моделей помехи:

- а) белый шум;
- б) белый шум, пропущенный через интегрирующую  $RC$ -цепь;
- в) белый шум, пропущенный через дифференцирующую  $RC$ -цепь.

**3.55.** Прямоугольный видеоимпульс  $s(t) = \begin{cases} U_m, & |t| \leq \tau/2; \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}$  и АБГШ с СПМ

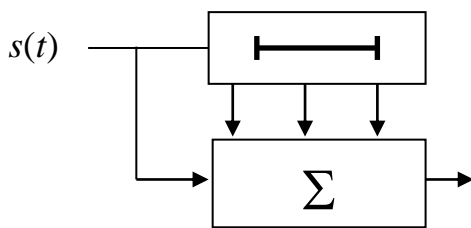


Рис. 3.21

$N_0/2$  подаются на устройство, структурная схема которого приведена на рис. 3.21. Какой фильтр нужно поставить на выходе устройства для получения максимального отношения сигнал/шум? Каким оно будет? Задержка

между отводами –  $3\tau$ .

**3.56.** Сигнал  $s(t)$  и БШ  $n(t)$  с СПМ  $N_0/2$  подаются на линейную систему (рис. 3.22), где  $n_1(t)$  – БШ с СПМ  $N_{01}/2$ . Найти  $K_1(jf)$  и  $K_2(jf)$ , обеспечивающие максимизацию отношения сигнал/шум на выходе. Каким оно будет?

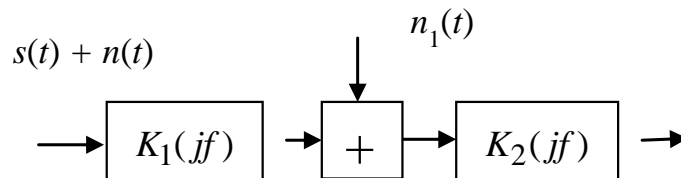


Рис. 3.22

**3.57.** Необходимо выделить сигнал вида  $s(t) = U_m \left( \frac{\sin(\pi F_0 t)}{\pi F_0 t} \right)^2$  на фоне белого шума с СПМ  $N_0/2$ , не изменив его форму. Каким должен быть фильтр? Каким будет отношение сигнал/шум на выходе?

**3.58.** Сигнал  $s_1(t) = \sum_{k=0}^{N-1} S_0(t - kT)$  и белый шум с СПМ  $N_0/2$  подаются на

фильтр, согласованный с сигналом  $s_2(t) = \sum_{k=0}^{N-1} S_0(t - 2kT)$ . Каким будет макси-

мальное отношение сигнал/шум на выходе этого фильтра?

## 4. ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛОВ РАДИОТЕХНИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

**4.1.** Две гипотезы проверяются на основании наблюдения, состоящего из двух отсчетов:  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ . Согласно гипотезе  $H_0$  отсчеты являются некоррелированными нормальными случайными величинами с нулевым средним и единичной дисперсией. Альтернатива  $H_1$  предполагает, что отсчеты по-прежнему нормальны, имеют нулевое среднее и единичную дисперсию, но их коэффициент корреляции равен фиксированному ненулевому значению  $\rho$ . Составить оптимальное правило проверки гипотез.

Решение. Плотности вероятности наблюдения  $\mathbf{y}$  при обеих гипотезах:

$$W(\mathbf{y}|H_0) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{y_1^2 + y_2^2}{2}\right), \quad W(\mathbf{y}|H_1) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{y_1^2 - 2\rho y_1 y_2 + y_2^2}{2(1-\rho^2)}\right),$$

так что отношение правдоподобия (ОП)

$$\Lambda = \frac{W(\mathbf{y}|H_1)}{W(\mathbf{y}|H_0)} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[\frac{2\rho y_1 y_2 - \rho^2(y_1^2 + y_2^2)}{2(1-\rho^2)}\right].$$

От наблюдений здесь зависит только числитель дроби под знаком экспоненты, т. е. для принятия решения именно эту величину (достаточную статистику) следует сравнивать с порогом. Таким образом, правило принятия решения имеет вид

$$\left(\frac{y_1 y_2}{\frac{y_1^2 + y_2^2}{2}}\right) \underset{\hat{H}_0}{\overset{\hat{H}_1}{>}} \rho + \frac{l}{y_1^2 + y_2^2},$$

где  $l$  – константа, определяемая избранным критерием. Полученное правило легко объяснимо: левая его часть есть выборочная оценка коэффициента корреляции, и решение принимается в зависимости от того, сколь велико ее значение.

**4.2.** В наблюдении  $y(t)$  присутствует шум с экспоненциальной ПВ  $W(x) = \begin{cases} a \exp(-ax), & x \geq 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases}$  где параметр  $a > 0$ , и, возможно, полезный сигнал в виде аддитивной константы  $U > 0$ . Наблюдение  $y(t)$  представлено  $n$  независимыми отсчетами, образующими вектор  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ . Синтезировать

правило оптимального обнаружения сигнала и найти вероятности правильного обнаружения и ложной тревоги.

Решение. В силу независимости компонент вектора  $y$  ОП может быть выражено как  $\Lambda = \frac{W(y|H_1)}{W(y|H_0)} = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ , где  $\lambda_i = \frac{W(x_i - U)}{W(x_i)} = \begin{cases} 0, & 0 \leq x_i < U; \\ \exp(aU), & x_i \geq U. \end{cases}$

Таким образом, ОП принимает всего 2 значения: нуль в случае, если хотя бы один отсчет наблюдения меньше  $U$ , и  $\exp(naU)$ , если все компоненты вектора наблюдения не меньше  $U$ . В итоге оптимальное правило обнаружения состоит в принятии решения об отсутствии сигнала, если среди компонент вектора  $y$  имеются меньшие  $U$ , и о наличии сигнала – в противном случае. Поскольку в присутствии сигнала все компоненты  $y$  не меньше  $U$ , вероятность правильного обнаружения равна единице. Для того чтобы произошла ложная тревога, необходимо в отсутствие сигнала выполнение  $n$  неравенств  $x_i \geq U$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , поэтому вероятность ложной тревоги

$$P_{\text{л.т}} = \left[ \int_U^{\infty} W(x) dx \right]^n = \exp(-naU)^{-naU}.$$

**4.3.** В канале с неаддитивным шумом наблюдается последовательность  $n$  независимых отсчетов  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Плотность вероятности шумового отсчета равномерна в пределах отрезка  $[-U, U]$  (рис. 4.1, а). Полезный сигнал «обостряет» плотность вероятности отсчета (рис. 4.1, б).

Построить оптимальное правило обнаружения сигнала. Записать вероятностные распределения решающей статистики для гипотез  $H_0$  и  $H_1$ .

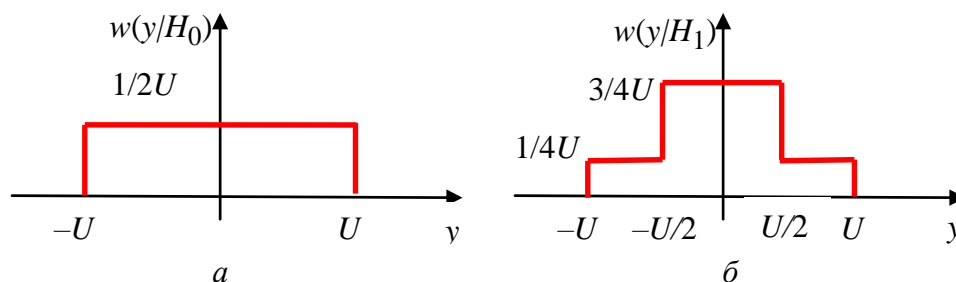


Рис. 4.1

Решение. Нетрудно построить правило обнаружения, не прибегая к выкладкам, однако формальный вывод также поучителен. Отношение правдоподобия  $\Lambda$  в силу независимости наблюдений  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) имеет вид

$$\Lambda = \prod_{i=0}^n \frac{w(y_i | H_1)}{w(y_i | H_0)}.$$

Логарифмируя произведение, получим  $\ln \Lambda = \sum_{i=0}^N z_i$ ,

$$\text{где } z_i = \ln \frac{w(y_i | H_1)}{w(y_i | H_0)} = \begin{cases} \ln \frac{3}{2}, & |y_i| \leq \frac{U}{2}; \\ -\ln 2, & |y_i| > \frac{U}{2}. \end{cases}$$

Пусть  $m$  – число тех из  $N$  наблюдаемых отсчетов, которые попадают в окно  $[-U/2, U/2]$ . Тогда  $\ln \Lambda = m \ln \frac{3}{2} - (n - m) \ln 2 = m \ln 3 - n \ln 2$ .

В оптимальном обнаружителе решение о наличии или отсутствии сигнала должно приниматься по результатам сравнения статистики  $\ln \Lambda$  с порогом, зависящим от избранного критерия обнаружения (Неймана–Пирсона, идеального наблюдателя и пр.). В последнем равенстве от наблюдения зависит лишь число  $n$ , являющееся тем самым достаточной статистикой.

Итак, оптимальное правило обнаружения в данном случае сводится к подсчету числа отсчетов  $m$ , попадающих в окно  $[-U/2, U/2]$ , и сравнению его с порогом.

При гипотезе  $H_0$  вероятность попадания отсчета в окно  $[-U/2, U/2]$  равна  $1/2$  (см. рис. 4.1, а). Из независимости отсчетов следует, что статистика  $m$  распределена по биномиальному закону:

$$P(m | H_0) = C_n^m \left( \frac{1}{2} \right)^n.$$

При гипотезе  $H_1$  меняется только вероятность попадания отсчета в окно  $[-U, U]$ , которая становится равной  $3/4$  (рис. 4.1, б), поэтому

$$P(m | H_0) = C_n^m \frac{3^m}{4^n}.$$

**4.4.** Наблюдаемая выборка  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  содержит независимые отсчеты наблюдения  $y(t)$ , в котором наряду с аддитивным гауссовским шумом, имеющим дисперсию  $\sigma_{\text{ш}}^2$ , может присутствовать сигнал в виде гауссовского СП с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_s^2$ . Синтезировать оптимальное правило

обнаружения сигнала и привести физическую трактовку полученного результата.

Решение. В силу независимости наблюдаемых отсчетов плотности вероятности  $y$  при гипотезах  $H_0$  и  $H_1$  имеют вид:

$$W(y|H_0) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\text{ш}}} \exp\left(-\frac{y_i^2}{2\sigma_{\text{ш}}^2}\right), \quad W(y|H_1) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_{\text{ш}}^2 + \sigma_s^2)}} \exp\left(-\frac{y_i^2}{2(\sigma_{\text{ш}}^2 + \sigma_s^2)}\right),$$

так что отношение правдоподобия

$$\Lambda = \frac{W(y|H_1)}{W(y|H_0)} = \left(\frac{\sigma_{\text{ш}}^2}{\sigma_{\text{ш}}^2 + \sigma_s^2}\right)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n \exp\left[\frac{\sigma_s^2 y_i^2}{2\sigma_{\text{ш}}^2(\sigma_{\text{ш}}^2 + \sigma_s^2)}\right].$$

Логарифмируя, имеем  $\ln \Lambda = \frac{n}{2} \ln \frac{\sigma_{\text{ш}}^2}{\sigma_{\text{ш}}^2 + \sigma_s^2} + \frac{\sigma_s^2}{\sigma_{\text{ш}}^2 + \sigma_s^2} \sum_{i=1}^n y_i^2$ .

От наблюдений здесь зависит только последняя сумма. Переноса остальные операнды в порог  $l$ , придем к правилу

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 \underset{\hat{H}_0}{\overset{\hat{H}_1}{>}} l.$$

Физическая интерпретация правила сводится к тому, что наблюдение  $y(t)$  в присутствии сигнала отличается от такового в его отсутствие только значением дисперсии. Левая часть полученного правила как раз и есть величина, пропорциональная выборочной дисперсии.

**4.5.** Оптимальное правило обнаружения на фоне АБГШ сигнала, единственным случайным параметром которого является начальная фаза, равномерно

распределенная на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , имеет вид  $Z \underset{\hat{H}_0}{\overset{\hat{H}_1}{>}} Z_0$ , где  $Z$  – отсчет

огibaющей на выходе СФ в момент окончания сигнала. Как трансформируется это правило, если у сигнала помимо фазы случайна и амплитуда  $A$ , распределенная по закону  $W(A)$ ?

Решение. В присутствии на входе приемника сигнала с фиксированным значением амплитуды  $A$  ПВ огibaющей  $Z$  на выходе СФ подчиняется закону Рэлея–Райса

$$W(Z|H_1, A) = \frac{Z}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{Z^2 + A^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{AZ}{\sigma^2}\right),$$

где  $\sigma^2$  – дисперсия шума на выходе СФ, а значение амплитуды сигнала на выходе СФ при  $A=1$  без ограничения общности принято равным единице. При флуктуациях амплитуды с известным распределением  $W(A)$  безусловная по отношению к амплитуде ПВ огибающей на выходе СФ при гипотезе  $H_1$

$$W(Z|H_1) = \int_0^\infty W(A)W(Z|H_1, A)dA = \int_0^\infty W(A) \frac{Z}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{Z^2 + A^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{AZ}{\sigma^2}\right) dA,$$

так что ОП  $\Lambda = \frac{W(Z|H_1)}{W(Z|H_0)} = \int_0^\infty W(A) \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{AZ}{\sigma^2}\right) dA.$

Оптимальное правило обнаружения предполагает сравнение этой величины с некоторым порогом  $\Lambda_0$ , зависящим от избранного критерия. Однако, как легко видеть, подынтегральное выражение в последнем равенстве монотонно возрастает с ростом  $Z$ , т. е. само ОП – монотонно возрастающая функция  $Z$ . Последняя величина, таким образом, является достаточной статистикой, а значит, вместо сравнения с порогом ОП можно сравнивать с соответственно пересчитанным порогом значение  $Z$ . В итоге исходное правило остается без изменений (оказывается равномерно наиболее мощным) вне зависимости от детерминированности или случайности амплитуды сигнала.

**4.6.** На отрезке  $[0, T]$  принимается бигармонический сигнал вида  $s(t) = U \cos(2\pi f_0 t) + U \cos[2\pi(f_0 + \frac{1}{2T})t + \varphi]$ , где частота  $f_0 \gg 1/T$ . При каких значениях начальной фазы  $\varphi$  надежность обнаружения этого сигнала в АБГШ-канале соответственно максимальна и минимальна?

Решение. Надежность обнаружения на фоне АБГШ целиком определяется энергией сигнала

$$E(\varphi) = \int_0^T s^2(t) dt = U^2 T + U^2 \int_0^T \cos\left(\frac{\pi t}{T} + \varphi\right) dt = U^2 T \left(1 - \frac{2 \sin \varphi}{\pi}\right).$$

Как легко видеть, наивысшее качество обнаружения наблюдается при  $\varphi = -\pi/2$ , тогда как при  $\varphi = \pi/2$  надежность обнаружения минимальна.

**4.7.** Обнаружение детерминированного сигнала  $s(t)$  с энергией  $E$  происходит на фоне смеси АБГШ с СПМ  $N_0/2$  и известной помехи  $J(t)$ , реализации которой равновероятно изменяют свой знак. Синтезировать оптимальный (по максимуму правдоподобия) алгоритм работы обнаружителя.

Решение. В условиях задачи гипотезы  $H_0$  и  $H_1$  являются сложными параметрическими, поскольку каждой из них будет отвечать не одно распределение, а множество в соответствии с различными реализациями помехи  $J(t)$ :

$$W(y(t)|H_0, J(t)) = k \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T (y(t) - J(t))^2 dt \right\},$$

$$W(y(t)|H_1, J(t)) = k \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T (y(t) - s(t) - J(t))^2 dt \right\}.$$

Неизвестный параметр принимаемой реализации (помеха) может трактоваться как случайный процесс с известной ПВ отсчета  $w_J(x, t) = \frac{1}{2} \delta(x - J(t)) + \frac{1}{2} \delta(x + J(t))$ , где  $J(t)$  – любое детерминированное колебание (не обязательно константа). В этом случае в результате усреднения функционала плотности вероятности (ФПВ) по полярности помехи проверка сложной гипотезы  $H_1$  относительно ее альтернативы  $H_0$  может быть сведена к проверке простых гипотез:

$$W(y(t)|H_1) = \frac{k}{2} \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [y(t) - s(t) - J(t)]^2 dt \right\} + \\ + \frac{k}{2} \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [y(t) - s(t) + J(t)]^2 dt \right\}.$$

Далее

$$W(y(t)|H_1) = k \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [y(t) - s(t)]^2 dt \right\} \exp \left( -\frac{E_J}{N_0} \right) \text{ch} \left[ \frac{2(z_J - z_{sJ})}{N_0} \right],$$

где  $E_J$  – энергия колебания  $J(t)$ ;  $z_J$  – корреляция между наблюдением  $y(t)$  и колебанием  $J(t)$ ;  $z_{sJ}$  – корреляция между сигналом  $s(t)$  и колебанием  $J(t)$ ; гиперболический косинус  $\text{ch}(x) = (\exp(x) + \exp(-x)) / 2$ . Продолжая, имеем



$$W(y(t)|H_1) = k_1 \exp\left(-\frac{E}{N_0}\right) \exp\left(\frac{2z_s}{N_0}\right) \text{ch}\left[\frac{2(z_J - z_{sJ})}{N_0}\right],$$

где  $k_1 = k \exp\left(-\frac{E_y + E_J}{N_0}\right)$ ;  $E_y$  и  $E$  – соответственно энергии наблюдаемой реализации и обнаруживаемого сигнала, а  $z_s$  – корреляция обнаруживаемого сигнала с наблюдением. Теперь, так как  $W(y(t)|H_0) = k_1 \text{ch}\left(\frac{2z_J}{N_0}\right)$ , решающее правило принимает вид

$$\frac{\exp\left(\frac{2z_s - E}{N_0}\right) \text{ch}\left[\frac{2(z_J - z_{sJ})}{N_0}\right]}{\text{ch}\left(\frac{2z_J}{N_0}\right)} \underset{\hat{H}_0}{\overset{\hat{H}_1}{>}} 1$$

или  $z_s \underset{\hat{H}_0}{\overset{\hat{H}_1}{>}} \frac{1}{2} \left\{ N_0 \ln \frac{\text{ch}\left(\frac{2z_J}{N_0}\right)}{\text{ch}\left[\frac{2(z_J - z_{sJ})}{N_0}\right]} + E \right\}.$

**4.8.** На обнаружитель, рассчитанный на оптимальное обнаружение полностью известного когерентного пакета с начальными фазами импульсов  $\varphi_0$ ; на фоне АБГШ с СПМ  $N_0/2$ , подается пакет, у которого начальные фазы чипов  $\varphi_i$  являются независимыми равномерно распределенными случайными величинами в интервалах  $[\varphi_{i0} + \Delta, \varphi_{i0} - \Delta]$ . Как изменятся качественные показатели (вероятности ложной тревоги  $P_{л.т}$  и пропуска  $P_{п.с}$ ) обнаружителя в сравнении со штатной ситуацией?

Решение. Очевидно, что вероятность ложной тревоги не изменится. При гипотезе  $H_1$  распределение решающей статистики – гауссовское со средним

значением  $\overline{z(H_1)} = \sum_{i=0}^{N-1} \overline{E_i \cos(\varphi_i - \varphi_{i0})}$ , где  $E_i$  – энергия чипа пакета;

$$\overline{\cos(\varphi_i - \varphi_{i0})} = \frac{1}{2\Delta} \int_{\varphi_{i0}-\Delta}^{\varphi_{i0}+\Delta} \cos(\varphi_i - \varphi_{i0}) d\varphi_i = \frac{\sin \Delta}{\Delta}. \text{ Тогда}$$

$$\overline{z(H_1)} = \frac{\sin \Delta}{\Delta} \sum_{i=0}^{N-1} E_i.$$

Дисперсия решающей статистики не изменится, поэтому ухудшение  $P_{\text{п.о}}$  будет связано с уменьшением параметра обнаружения  $q = q_0 \frac{\sin \Delta}{\Delta}$ .

**4.9.** На обнаружитель сигнала  $s_0(t)$ , представляющего собой отрезок гармонического колебания длительностью  $T$ , имеющего амплитуду  $U_m$ , частоту  $f_0 = 1/T_0$  ( $T \gg T_0$ ) и начальную фазу  $\varphi$ , равномерно распределенную на интервале  $[-\pi, \pi]$ , подается сигнал  $s_1(t)$  с огибающей в виде прямоугольного импульса и заполнением в виде меандра той же длительности  $T$  с такими же значениями  $U_m$  и  $T_0$  и моментами изменения знака меандра, равномерно распределенными на промежутке  $[0, T_0]$ . Помеха – АБГШ с СПМ  $N_0/2$ . Для гармонического сигнала обнаружитель имел  $P_{\text{л.т}} = 10^{-5}$  и  $P_{\text{п.о}} = 0,999$ . Какой будет вероятность обнаружения  $P_{\text{по}}$  нового сигнала при прежнем значении вероятности ложной тревоги?

Решение. Качество решения задачи обнаружения целиком и полностью (в условиях соответствия модели сигнала структуре обнаружителя) определяется параметром обнаружения – отношением сигнал/шум. В обоих случаях используется модель сигнала со случайной равномерно распределенной фазой, однако отношение сигнал/шум, получаемое при обработке сигнала  $s_1(t)$ :  $q_1 = (4/\pi) \sqrt{U_m^2 T / N_0} = (4/\pi) q_0$  (см. решение задачи 3.5), где  $q_0$  – отношение, достижимое при обработке  $s_0(t)$ .

Вероятность правильного обнаружения такого сигнала  $P_{\text{п.о}} = 1 - Q(\sqrt{-2 \ln P_{\text{л.т}}}, q_1)$ , где  $Q(x, y) = \int_0^x t \exp(-\frac{t^2 + y^2}{2}) I_0(yt) dt$  – табулированная функция Маркума (функция распределения Рэлея–Райса). Однако, учитывая достаточно высокие требования, предъявляемые к качеству обнаружения в этом примере, ответ можно найти проще:  $P_{\text{п.о}} = \Phi(q_1 - \Phi^{-1}(1 - P_{\text{л.т}}))$ .

**4.10.** Отсчеты СП при отсутствии сигнала подчиняются распределению  $w(x_i | H_0) = \begin{cases} 1/4, & x_i \in [-2, 2]; \\ 0, & x_i \notin [-2, 2]. \end{cases}$  Аддитивный отсчет сигнала принимает значение 2. Обнаружитель выносит решение, сравнивая сумму двух независимых отсчетов с порогом, определяемым по критерию максимума правдоподобия. Чему при этом равна вероятность ложной тревоги  $P_{л.т}$ ? Какое решение примет обнаружитель, если получит в распоряжение выборку  $\{x_1 = -1, x_2 = 2,5\}$ ? Каков оптимальный алгоритм принятия решения по двум отсчетам?

Решение. Решающая статистика по условию задачи  $y = x_1 + x_2$ . Ее ПВ представляет собой свертку ПВ слагаемых (рис. 4.2):

$$W(y | H_0) = \begin{cases} y/16 + 1/4, & -4 \leq y < 0; \\ -y/16 + 1/4, & 0 \leq y < 4; \\ 0, & y \notin [-4, 4], \end{cases} \quad W(y | H_1) = \begin{cases} y/16, & 0 \leq y < 4; \\ -y/16 + 1/2, & 4 \leq y < 8; \\ 0, & y \notin [0, 8]. \end{cases}$$

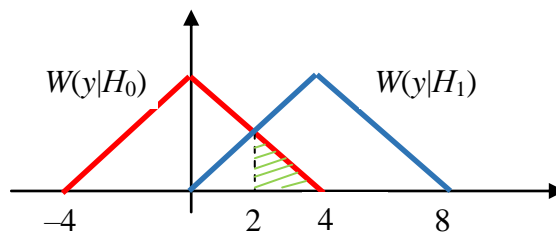


Рис. 4.2

По условию порог, с которым сравнивается решающая статистика, равен 2, так что  $P_{л.т} = 1/8$ . При получении выборки  $\{x_1 = -1, x_2 = 2,5\}$   $y = 1,5$ , и решение будет вынесено в пользу гипотезы об отсутствии сигнала. При этом  $P_{л.т} = 1/8$ .

Оптимальный алгоритм  $\frac{w(x_1, x_2 | H_1)}{w(x_1, x_2 | H_0)} \underset{\hat{H}_0}{\overset{\hat{H}_1}{>}} 1$  в силу независимости отсчетов

совпадает с предложенным в задаче.

**4.11.** В обнаружителе детерминированного сигнала  $s(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases}$  на фоне АБГШ, реализованном на основе коррелятора, в качестве опорного

сигнала используется  $s_{\text{оп}}(t) = \begin{cases} U, t \in [0, kT]; \\ 0, t \notin [0, kT]. \end{cases}$  Как изменятся значения вероят-

ностей ложной тревоги и пропуска сигнала по отношению к случаю оптимальной обработки в зависимости от  $k$ ? (Оценить количественно.)

Решение. Величина  $z = \int_0^{\tau} y(t)s_{\text{оп}}(t)dt$ , сравниваемая с порогом  $z_{\text{п}}$ , где

$\tau = kT$  – время наблюдения, подчиняется нормальному закону со средними

$\bar{z} = 0$  при гипотезе  $H_0$  и  $\bar{z} = \begin{cases} U^2 kT, k \leq 1; \\ U^2 T, k > 1 \end{cases}$  при гипотезе  $H_1$  и дисперсией

$\sigma^2 = \frac{N_0 U^2 kT}{2}$  при обеих гипотезах. Тогда вероятность ложной тревоги

$$P_{\text{л.т}} = \int_{z_{\text{п}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{2}z_{\text{п}}}{U\sqrt{N_0 kT}}\right) = 1 - \Phi(h),$$

где  $h = \frac{\sqrt{2}z_{\text{п}}}{U\sqrt{N_0 kT}}$  – нормированный порог, а вероятность пропуска сигнала

$$P_{\text{п.с}} = \int_{-\infty}^{z_{\text{п}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\bar{z})^2}{2\sigma^2}\right) dx = \begin{cases} \Phi\left(\frac{\sqrt{2}(z_{\text{п}} - U^2 kT)}{U\sqrt{N_0 kT}}\right), k \leq 1; \\ \Phi\left(\frac{\sqrt{2}(z_{\text{п}} - U^2 T)}{U\sqrt{N_0 kT}}\right), k > 1 \end{cases} = \begin{cases} \Phi\left(h - \frac{\sqrt{2kTU}}{\sqrt{N_0}}\right), k \leq 1; \\ \Phi\left(h - \frac{\sqrt{2TU}}{\sqrt{N_0 k}}\right), k > 1. \end{cases}$$

Выражая величину  $h$  через вероятность ложной тревоги  $P_{\text{л.т}}$ , получим окончательно

$$P_{\text{п.с}} = \begin{cases} \Phi\left(\Phi^{-1}(1 - P_{\text{л.т}}) - \frac{\sqrt{2kTU}}{\sqrt{N_0}}\right), k \leq 1; \\ \Phi\left(\Phi^{-1}(1 - P_{\text{л.т}}) - \frac{\sqrt{2TU}}{\sqrt{N_0 k}}\right), k > 1 \end{cases} = \begin{cases} \Phi\left(\Phi^{-1}(1 - P_{\text{л.т}}) - q\sqrt{k}\right), k \leq 1; \\ \Phi\left(\Phi^{-1}(1 - P_{\text{л.т}}) - q/\sqrt{k}\right), k > 1, \end{cases}$$

где  $q = \sqrt{\frac{2U^2 T}{N_0}} = \sqrt{\frac{2E}{N_0}}$  – отношение сигнал/шум, достижимое при обработке сигнала  $s(t)$ .

**4.12.** Сигнал  $s(t) = S(t)\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ , где  $S(t)$  и  $f_0$  – известные огибающая и несущая частота, а  $\varphi$  – случайная начальная фаза, принимающая равновероятно значения 0 и  $\pi$  в одном случае или 0 и  $\pi/2$  в другом, подается на обнаружитель детерминированного сигнала  $s(t) = S(t)\cos(2\pi f_0 t)$ . Для какого случая при одинаковых значениях вероятности ложной тревоги  $P_{л.т}$  среднее значение вероятности пропуска  $P_{п.с}$  будет меньше? Решение обосновать. Для первого случая найти оптимальный алгоритм обнаружения.

Решение. Данный пример представляет собой задачу анализа поведения обнаружителя детерминированного сигнала (рис. 4.3) при воздействии на его вход шума и сигнала со случайной начальной фазой, распределение которой в одном случае  $w(\varphi) = \frac{1}{2}\delta(\varphi) + \frac{1}{2}\delta(\varphi - \pi)$  (случай А), а в другом –  $w(\varphi) = \frac{1}{2}\delta(\varphi) + \frac{1}{2}\delta(\varphi - \pi/2)$  (случай Б).

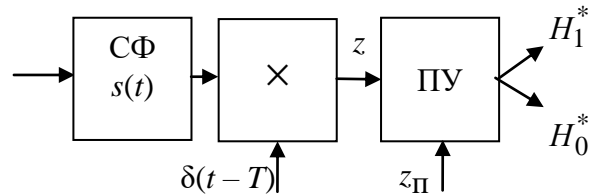


Рис. 4.3

Распределение решающей статистики  $z$  при истинности гипотезы  $H_0$  в обоих случаях остается прежним. При истинности гипотезы  $H_1$  распределение  $z$  представляет собой взвешенную сумму (с весами по 1/2) гауссовских ПВ со средними  $\bar{z} = -E$  и  $\bar{z} = E$  (случай А) и  $\bar{z} = -E$  и  $\bar{z} = 0$  (случай Б). Тогда вероятность пропуска сигнала для случаев А и Б будут равны соответственно:

$$P_{п.с} = \int_{-\infty}^{z_{\Pi}} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma} [\exp(-\frac{(x-E)^2}{2\sigma^2}) + \exp(-\frac{(x+E)^2}{2\sigma^2})] dx = \frac{1}{2} [\Phi(h-q) + \Phi(h+q)],$$

$$P_{п.с} = \int_{-\infty}^{z_{\Pi}} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma} [\exp(-\frac{(x-E)^2}{2\sigma^2}) + \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})] dx = \frac{1}{2} [\Phi(h-q) + \Phi(h)].$$

В итоге, в случае Б будет достигнуто меньшее значение вероятности пропуска сигнала, однако в обоих случаях энергетические потери по отношению к ситуации обнаружения сигнала с известной фазой будут бесконечно большими.

При синтезе оптимального алгоритма обнаружения необходимо учитывать, что гипотеза  $H_1$  является сложной. Для сведения ее к простой необходимо функционал ПВ при этой гипотезе усреднить по возможным значениям начальной фазы. Обозначив  $s(t, \varphi = 0)$  как  $s(t)$ , имеем

$$\begin{aligned} W(y(t) | H_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} W(y(t) | H_1, \varphi) w(\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{k}{2} \left\{ \exp \left[ -\frac{1}{N_0} \int_0^T (y(t) - s(t))^2 dt \right] + \exp \left[ -\frac{1}{N_0} \int_0^T (y(t) + s(t))^2 dt \right] \right\} = \\ &= k_1 \operatorname{ch} \left( \frac{2z}{N_0} \right) \exp \left[ -\frac{1}{N_0} \int_0^T y^2(t) dt \right], \end{aligned}$$

где  $k_1$  не зависит от наблюдения, а  $z$  – корреляция сигнала  $s(t)$  с наблюдением  $y(t)$ . Деля это на ФПВ при гипотезе  $H_0$

$$W(y(t) | H_0) = k \exp \left[ -\frac{1}{N_0} \int_0^T y^2(t) dt \right],$$

логарифмируя полученное отношение правдоподобия и принимая во внимание четность гиперболического косинуса, приходим к оптимальному решающему правилу

$$\begin{array}{c} \hat{H}_1 \\ |z| > z_{\Pi}, \\ \hat{H}_0 \end{array}$$

состоящему в сравнении с порогом  $z_{\Pi}$  абсолютного значения корреляции  $z$ .

**4.13.** На вход обнаружителя сигнала  $s_1(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases}$  поступает сигнал  $s_2(t) = \begin{cases} U \cos(2\pi f_0 t), & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T], \end{cases}$   $f_0 T = 10^6$ . Помеха – АБГШ с СПМ  $N_0/2$ .

Найти вероятности ложной тревоги  $P_{л.т}$  и пропуска сигнала  $P_{п.с}$ .

Решение. Сигналы  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  ортогональны, поскольку их спектры не перекрываются. В силу ортогональности при действии на входе обнаружителя (см. рис. 4.3) сигнала  $s_2(t)$  среднее значение решающей статистики  $z$  будет

равно нулю при обеих гипотезах. Вероятность ложной тревоги останется неизменной, а вероятность пропуска  $P_{\text{п.с}} = 1 - P_{\text{л.т}}$ .

**4.14.** Сигнал  $s_1(t) = \begin{cases} U \cos(2\pi Ft), & |t| \leq 1/(2F); \\ 0, & |t| > 1/(2F) \end{cases}$  – один период косинусо-

иды, обнаруживается на фоне АБГШ с СПМ  $N_0/2$  с помощью схемы (рис. 4.4). Когда и на какое время должен замыкаться ключ для достижения наилучшего качества обнаружения? Насколько достижимые при этом показатели близки к характеристикам оптимального обнаружителя? Какие изменения следует внести в приведенную схему для улучшения ее показателей?

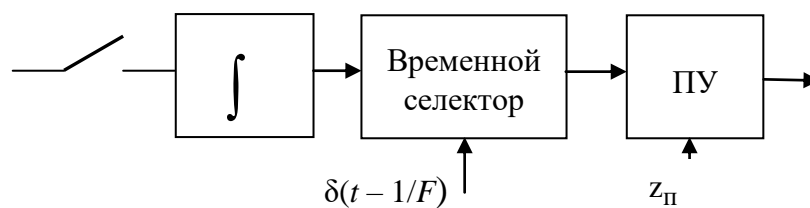


Рис. 4.4

Решение. При фиксированной длительности  $2\tau$  замкнутого состояния ключа максимальный эффект от присутствия сигнала на входе наблюдается, когда моменты замыкания и размыкания симметричны относительно нуля, поэтому значение сигнальной составляющей на входе порогового устройства ПУ

составит  $U \int_{-\tau}^{\tau} \cos(2\pi Ft) dt = \frac{U}{\pi F} \sin(2\pi F\tau)$ . Дисперсия шума в той же точке

схемы  $\sigma^2 = N_0\tau$ . Отношение сигнал/шум (параметр обнаружения)

$q = \frac{\sqrt{2}U}{\sqrt{\pi FN_0}} \frac{\sin(2\pi F\tau)}{\sqrt{2\pi F\tau}}$ . Качество обнаружения окажется наивысшим при мак-

симальном значении  $q$ . Вводя обозначение  $x = 2\pi F\tau$ , придем к уравнению для оптимального значения  $x$  вида  $\text{tg } x / x = 2$ , имеющему решение  $x \approx 1,165$ , что

соответствует  $\tau \approx 0,185 / F$  и отношению сигнал/шум  $q_0 \approx \frac{0,68U}{\sqrt{FN_0}}$ . Отношение

сигнал/шум при оптимальной обработке  $q_{\text{max}} = \frac{U}{\sqrt{FN_0}}$ , т. е. примерно в 1,47

раз (на 3,3 дБ) больше.

**4.15.** Помеха представляет собой сумму  $N$  независимых стационарных процессов, отсчеты которых распределены равномерно в интервале  $[-1 \text{ В}, 1 \text{ В}]$

, а СПМ имеет вид  $G(f) = \frac{G_0}{1 + (2\pi fT)^2}$ , где  $T$  – заданная величина, равная 1 с,

а  $G_0$  подлежит определению. Считая  $n = 100$ , предложить оптимальное правило обнаружения полностью известного видеоимпульса длительностью  $T$  и амплитудой 201 В. Каковы при этом вероятности ошибок?

Решение. Дисперсия каждого слагаемого помехи в силу равномерности распределения равна  $\frac{\Delta^2}{12} = \frac{1}{3}$ . С другой стороны, дисперсию можно найти и по

известной СПМ как  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_0}{1 + (2\pi fT)^2} df = \frac{G_0}{2T}$ , поэтому  $G_0 = 2T / 3$ .

Распределение отсчетов суммарной помехи локализовано в интервале  $[-n, n]$ , поэтому при гипотезе  $H_0$  никакой отсчет наблюдения не превысит порог, равный, например, 100,5 В. С другой стороны, при гипотезе  $H_1$  отсчет в момент максимума сигнала превысит тот же порог наверняка. Тем самым происходит безошибочное обнаружение, и правило сравнения с порогом отсчета в момент максимума сигнала оказывается оптимальным.

**4.16.** Постоянный сигнал амплитудой  $U$  обнаруживается по одному отсчету на фоне аддитивной помехи, представляющей собой сумму трех независимых обобщенных телеграфных сигналов с одинаковыми амплитудами  $X_{\Pi}$  (см. задачу 1.8). Построить зависимость вероятности правильного обнаружения  $P_{\Pi,о} = f(U)$ , если вероятность ложной тревоги  $P_{\Pi,т} = 0,125$ .

Решение. Распределение решающей статистики при истинности гипотезы  $H_0$ :  $w(z | H_0) = \frac{1}{8}[\delta(z + 3X_{\Pi}) + \delta(z - 3X_{\Pi})] + \frac{3}{8}[\delta(z + X_{\Pi}) + \delta(z - X_{\Pi})]$ , при гипотезе  $H_1$ :

$$w(z | H_1) = \frac{1}{8}[\delta(z + 3X_{\Pi} - U) + \delta(z - 3X_{\Pi} - U)] + \frac{3}{8}[\delta(z + X_{\Pi} - U) + \delta(z - X_{\Pi} - U)].$$



Для достижения  $P_{л.т} = 0,125$  порог в обнаружителе должен лежать в диапазоне  $X_{\Pi} \leq z_{\Pi} < 3X_{\Pi}$ . Вероятность правильного обнаружения при этом (рис.

$$4.5): P_{\Pi.о} = \int_{z_{\Pi}}^{\infty} w(z | H_1) dz = \begin{cases} 0,125, & 0 \leq U < z_{\Pi} - X_{\Pi}; \\ 0,5, & z_{\Pi} - X_{\Pi} \leq U < z_{\Pi} + X_{\Pi}; \\ 0,875, & z_{\Pi} + X_{\Pi} \leq U < z_{\Pi} + 3X_{\Pi}; \\ 1, & U \geq z_{\Pi} + 3X_{\Pi}. \end{cases}$$

Таким образом, если амплитуда полезного сигнала окажется больше  $z_{\Pi} + 3X_{\Pi}$ , правильное обнаружение происходит с вероятностью единица. Если же  $U \geq 6X_{\Pi}$ , то при выборе порога  $z_{\Pi} = 3X_{\Pi}$  обнаружение будет осуществляться вообще без ошибок.

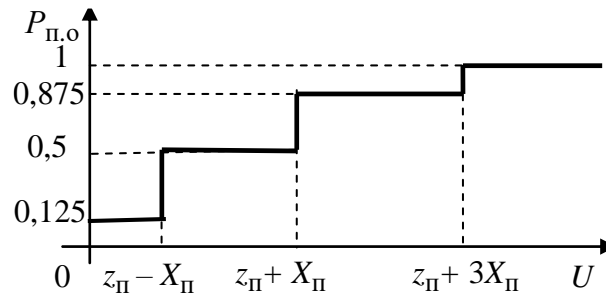


Рис. 4.5

**4.17.** Обнаружитель, рассчитанный на обработку сигнала  $s_1(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T], \end{cases}$  используется для обнаружения сигнала  $s_2(t) = \begin{cases} -U, & t \in [0, T]; \\ U, & t \in [T, 2T]; \\ 0, & t \notin [0, 2T]. \end{cases}$  Какими по сравнению с обнаружением  $s_1(t)$  будут ка-

чественные показатели обнаружения на фоне АБГШ? Как можно их улучшить без изменения фильтра, согласованного с  $s_1(t)$ ? Насколько близкими они окажутся к показателям оптимального обнаружения сигнала  $s_2(t)$  после улучшения?

Решение. Подадим сигнал  $s_2(t)$  (рис. 4.6, а) на фильтр, предназначенный для обработки сигнала  $s_1(t)$ . Реакция фильтра показана на рис. 4.6, б.

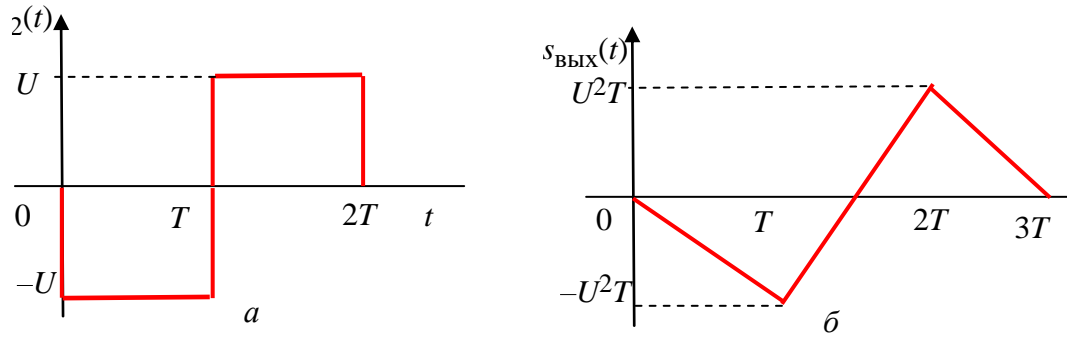


Рис. 4.6.

Независящая от входного сигнала вероятность ложной тревоги  $P_{л.т} = 1 - \Phi(h)$ , где  $h = z_{п} / \sigma$  – нормированный порог. При входном сигнале  $s_2(t)$  отсчет на выходе фильтра в момент  $t = T$  отрицателен, что означает падение вероятности правильного обнаружения ниже вероятности ложной тревоги:  $P_{п.о} = \Phi(-q - h) < P_{л.т}$ . Существует простой способ, не меняя структуры обнаружителя, вернуть качественные показатели на прежний уровень (обнаружения сигнала  $s(t)$ ) – для этого достаточно сместить момент взятия отсчета в точку  $2T$ .

В случае оптимальной обработки сигнала  $s_2(t)$  при том же значении вероятности ложной тревоги может быть достигнута большая вероятность правильного обнаружения, поскольку этот сигнал обладает в 2 раза большей энергией, чем  $s_1(t)$ .

**4.18.** Найти структуру обнаружителя сигнала  $s(t) = \begin{cases} U, & |t| \leq T; \\ 0, & |t| > T \end{cases}$  на фоне нестационарного АБГШ с СПМ  $G(f, t) = \begin{cases} N_{01} / 2, & t < 0; \\ N_{02} / 2, & t \geq 0. \end{cases}$  Какой будет структура обнаружителя при  $N_{02} / N_{01} \rightarrow \infty$ ?

Решение. В силу независимости шумов на непересекающихся интервалах времени отношение правдоподобия может быть записано в виде

$$\Lambda = \frac{\exp\left[-\frac{1}{N_{01}} \int_{-T}^0 (y(t) - s(t))^2 dt\right] \exp\left[-\frac{1}{N_{02}} \int_0^T (y(t) - s(t))^2 dt\right]}{\exp\left(-\frac{1}{N_{01}} \int_{-T}^0 y(t) dt\right) \exp\left(-\frac{1}{N_{02}} \int_0^T y(t) dt\right)}.$$

Осуществив монотонные преобразования и переходя к достаточной статистике, получим решающее правило

$$z = \frac{2z_1}{N_{01}} + \frac{2z_2}{N_{02}} \underset{\hat{H}_0}{\overset{\hat{H}_1}{>}} z_{\Pi},$$

где  $z_1 = \int_{-T}^0 y(t)s(t)dt$  и  $z_2 = \int_0^T y(t)s(t)dt$  – корреляции принятой реализации с опорным сигналом, вычисленные для интервалов наблюдения  $[-T, 0]$  и  $[0, T]$  соответственно. В случае  $N_{02} / N_{01} \rightarrow \infty$  решающее правило упростится и

$$\text{приобретет вид } z_1 = \int_{-T}^0 y(t)s(t)dt \underset{\hat{H}_0}{\overset{\hat{H}_1}{>}} z_{\Pi}.$$

**4.19.** Постоянный сигнал с амплитудой  $U$  необходимо обнаружить по одному отсчету на фоне помехи, в роли которой выступает аддитивная смесь независимых между собой гармонических колебаний амплитудой  $U$  с равномерно распределенной начальной фазой в интервале  $[-\pi, \pi]$ , и обобщенного телеграфного сигнала с амплитудой  $U$ . Как выбрать порог, чтобы получить нулевую вероятность ложной тревоги? Какой будет при этом вероятность правильного обнаружения? Каким должен быть уровень обнаруживаемого сигнала для безошибочного обнаружения?

Решение. В силу независимости случайных процессов, образующих помеху, ПВ отсчета помехи  $w(x | H_0)$  является сверткой ПВ отсчета, взятого из

гармонического сигнала  $w(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ , и ПВ отсчета из телеграфного сигнала

$w(y) = 0,5\delta(y-U) + 0,5\delta(y+U)$  и имеет вид

$$w(x | H_0) = 0,5 \frac{1}{\pi\sqrt{1-(x-U)^2}} + 0,5 \frac{1}{\pi\sqrt{1-(x+U)^2}} \quad (\text{рис. 4.7, а}).$$

При появлении сигнала ПВ сместится и приобретет вид, показанный на рис. 4.7, б.

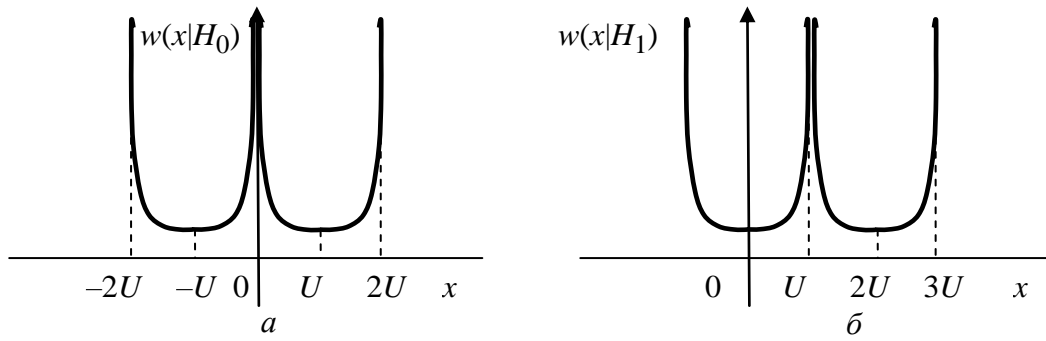


Рис. 4.7

Решение очевидно: для получения нулевого значения вероятности ложной тревоги порог в обнаружителе  $U_{\Pi}$  должен быть равен  $2U$ , при этом вероятность правильного обнаружения  $P_{\Pi,0}=0,25$ .

Для безошибочного обнаружения сигнала его амплитуда должна быть  $4U$ .

**4.20.** В обнаружителе сигнала со случайной начальной фазой, равномерно распределенной на интервале  $[-\pi, \pi]$ , на фоне АБГШ с СПМ  $N_0/2$  вышел из строя один из квадратурных каналов. Как изменится работа обнаружителя?

Решение. При обнаружении сигнала со случайной равномерно распределенной начальной фазой решающая статистика имеет вид  $Z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$ , где

$z_1 = \int_0^T y(t)s(t)dt$  и  $z_2 = \int_0^T y(t)s_{\perp}(t)dt$ ;  $s_{\perp}(t)$  – трансформанта Гильберта сигнала  $s(t)$ .

Предположим, что вышел из строя второй канал, т. е.  $z_2 = 0$ . Тогда реша-

ющая статистика  $Z$  приобретет вид  $Z = \sqrt{z_1^2} = |z_1|$  и получаем простейший модульный обнаружитель. Распределение  $Z$  при гипотезе  $H_0$

$w(Z | H_0) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{Z^2}{2\sigma^2})$ ,  $Z \geq 0$ , где  $\sigma^2 = \frac{N_0 E}{2}$ , а при гипотезе  $H_1$  распре-

деление решающей статистики есть распределение модуля нормальной СВ

$w(z | H_1, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{(z - E \cos \varphi)^2}{2\sigma^2})$  со средним  $\bar{Z} = E \cos \varphi$  и дисперсией

$\sigma^2$ . В указанных условиях вероятности ложной тревоги и пропуска увеличатся, при этом последняя будет зависеть от значения, принимаемого начальной фазой сигнала, и должна быть усреднена по  $\varphi$ .

**4.21.** Обнаруживается сигнал  $s(t) = U \cdot 1(t)$  ( $1(t)$  – функция единичного скачка) на фоне АБГШ с СПМ  $N_0/2$  с помощью интегрирующей  $RC$ -цепи, временного селектора, формирующего отсчет выходного сигнала в момент времени  $t = T$ , и порогового устройства. Рассмотреть 2 случая: А) АБГШ включается в момент  $t = 0$  и Б) установившийся режим  $t \rightarrow -\infty$ . Построить зависимость параметра обнаружения (отношения сигнал/шум на выходе цепи) от момента  $T$  для этих двух режимов. Сравнить со случаем оптимальной обработки.

Решение. В случае А: постоянная составляющая на выходе цепи  $u_{\text{выхА}}(T) = U(1 - \exp(-\alpha T))$ ,  $\alpha = 1/T_0 = 1/(RC)$ ,  $T_0$  – постоянная времени  $RC$ -цепи, дисперсия шума  $\sigma_A^2 = \frac{N_0\alpha}{4}(1 - \exp(-2\alpha T))$ . Отношение сигнал/шум

$$\text{на выходе } q_A = \frac{u_{\text{выхА}}}{\sigma_A} = \frac{2U}{\sqrt{N_0\alpha}} \sqrt{\frac{1 - \exp(-\alpha T)}{1 + \exp(-2\alpha T)}}.$$

В случае Б:  $u_{\text{выхБ}}(T) = U(1 - \exp(-\alpha T))$ ,  $\sigma_B^2 = \frac{N_0\alpha}{4}$  и  $q_B = \frac{2U}{\sqrt{N_0\alpha}} \sqrt{1 - \exp(-\alpha T)}$ .

При оптимальной обработке  $q_0 = \sqrt{\frac{2E}{N_0}} = \sqrt{\frac{2U^2 T}{N_0}} = \frac{2U}{\sqrt{N_0\alpha}} \sqrt{\frac{\alpha T}{2}}$ .

Графики зависимости параметра обнаружения от  $T$  приведены на рис. 4.8.

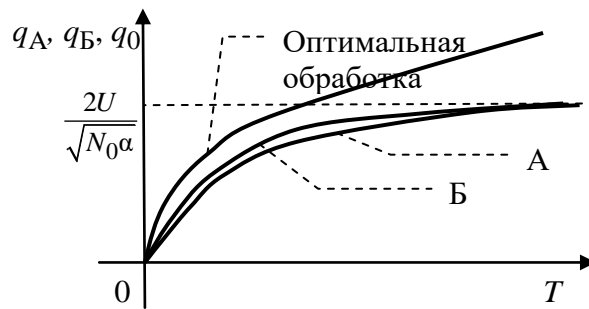


Рис. 4.8

**4.22.** В последовательности из  $N$  примыкающих друг к другу прямоугольных радиоимпульсов (чипов)  $s_0(t)$ , повторяющихся с периодом  $T$  на несущей частоте  $f_0$  ( $T \gg 1/f_0$ ),  $l$  первых импульсов ( $l < N$ ) имеют нулевую начальную фазу, а начальные фазы остальных чипов – независимые СВ, равномерно распределенные в интервале  $[-\pi, \pi]$ . Обнаружение производится на фоне АБГШ с

СПМ  $N_0/2$ , причем отношение сигнал/шум на выходе согласованного фильтра для чипа  $q_0 \ll 1$ . Найти структуру обнаружителя и объяснить характер зависимости качества обнаружения от параметра  $l$ .

Решение. Учитывая, что отсчеты шума, разделенные интервалом  $kT$ , при натуральном  $k$  независимы, ОП может быть записано в виде  $\Lambda = \Lambda_l \Lambda_m$ , где  $\Lambda_l$  и  $\Lambda_m$  – значения ОП при обработке  $l$  первых и  $m$  оставшихся импульсов соответственно:

$$\Lambda_l = \frac{k \exp \left[ -\frac{1}{N_0} \int_0^{lT} (y(t) - \sum_{i=0}^{l-1} s_0(t-iT))^2 dt \right]}{k \exp \left( -\frac{1}{N_0} \int_0^{lT} y^2(t) dt \right)},$$

$$\Lambda_m = \Lambda_m(\varphi_{l+1}, \dots, \varphi_N) = \frac{k \exp \left[ -\frac{1}{N_0} \int_{lT}^{NT} (y(t) - \sum_{i=l+1}^{N-1} s_0(t-iT, \varphi_i))^2 dt \right]}{k \exp \left( -\frac{1}{N_0} \int_{lT}^{NT} y^2(t) dt \right)}.$$

Усреднив по значениям случайных начальных фаз ОП  $\Lambda_m$ , проведя монотонные преобразования  $\Lambda$  и переходя к достаточной статистике, получим решающее правило

$$Z = \sum_{i=1}^l z_i + \sum_{i=l+1}^n Z_i \underset{\hat{H}_0}{\overset{\hat{H}_1}{>}} Z_{\Pi},$$

где  $z_i = \int_{(i-1)T}^{iT} y(t) s_0(t-iT) dt$ ;  $Z_i = \ln(I_0(\frac{2V_i}{N_0}))$ ;  $I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[x \cos(\varphi - \theta)] d\varphi$  –

модифицированная функция Бесселя нулевого порядка;  $V_i = \sqrt{z_{1i}^2 + z_{2i}^2}$ ;

$z_{1i} = \int_{(i-1)T}^{iT} y(t) s_0(t-iT) dt$  и  $z_{2i} = \int_{(i-1)T}^{iT} y(t) s_{0\perp}(t-iT) dt$  – квадратурные корреляции принятой реализации  $y(t)$  с  $i$ -м чипом сигнала  $s_0(t)$  и его трансформантой Гильберта  $s_{0\perp}(t)$ .

Структурная схема обнаружителя показана на рис. 4.9.

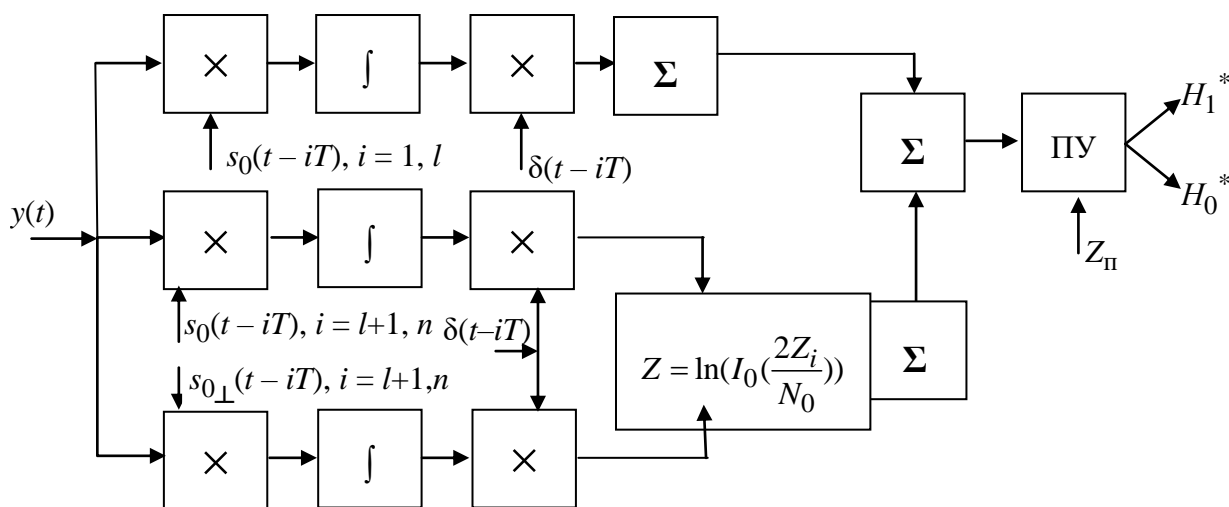


Рис. 4.9

Обработка  $l$  первых импульсов пакета строится по когерентной схеме, а  $m$  оставшихся – по некогерентной.

Качественные показатели работы обнаружителя будут определяться соотношением между  $l$  и  $m$ . В случае  $l \gg m$  существенной будет когерентная обработка, и процедуру обнаружения можно завершить по окончании первой части пакета, а вероятности ложной тревоги и правильного обнаружения определяются из соотношений, используемых при анализе обнаружителя детерминированного сигнала. В ситуации  $l \ll m$  достоверного обнаружения можно достичь за счет некогерентного накопления.

**4.23.** Для обнаружения сигнала  $s(t)$  на фоне стационарной гауссовской помехи с нулевым средним используются 2 некоррелированных отсчета наблюдаемого колебания  $y(t)$ , взятые в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ . Решение принимается по критерию минимума среднего риска. Априорная вероятность отсутствия сигнала равна  $w$ . Потери, связанные с ложной тревогой и пропуском, равны соответственно  $\Pi_0$  и  $\Pi_1$ . Построить области  $Y_0$  и  $Y_1$ , соответствующие принятию решений в пользу гипотез  $H_0$  (сигнала нет) и  $H_1$  (сигнал есть); исследовать зависимость этих областей от  $w$ ,  $\Pi_0$  и  $\Pi_1$ . Как будут меняться области, если при условии постоянства  $w$ ,  $\Pi_0$ ,  $\Pi_1$  и  $s(t_1) + s(t_2)$  будет увеличиваться отсчет сигнала  $s(t_1)$ ? Определить  $P_{\text{л.т.}}$ ,  $P_{\text{п.с}}$  и значение параметра обнаружения  $q$ .

**4.24.** Обнаружитель детерминированного сигнала  $s(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases}$  на

фоне АБГШ с СПМ  $N_0/2$  реализован в виде структуры с использованием СФ для этого сигнала. Обнаружитель обрабатывает принятую реализацию в течение отрезка времени  $[0, 2T]$ . Как изменятся вероятности ложной тревоги  $P_{л.т}$  и пропуска сигнала  $P_{п.с}$ , если отсчет с выхода СФ будет браться не в момент времени  $T$ , а в момент  $T - T/3$  (случай А) или  $T + T/3$  (случай Б) при прочих равных условиях? Привести выражения. Шум – АБГШ с СПМ  $N_0/2$ .

**4.25.** Случайный процесс имеет вид последовательности неперекрывающихся импульсов со случайным временным положением в форме равнобедренных треугольников с высотой  $U$  и основанием  $T$  положительной и отрицательной полярности (рис. 4.10). Импульсы положительной полярности занимают 20 % временной оси, отрицательной – 40 %, а паузы (отсутствие импульсов) – 40 %. Этот процесс должен быть обнаружен на фоне АБГШ с СПМ  $N_0/2$ . Предложить структуру обнаружителя и обосновать свое решение.

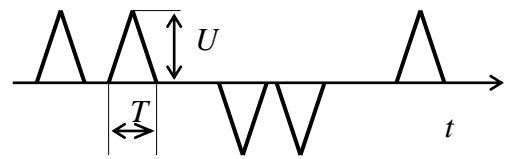


Рис. 4.10

**4.26.** На оптимальный обнаружитель полностью известного прямоугольного видеоимпульса длительностью  $T$  с амплитудой  $U_m$ , спроектированный в расчете на нормальный БШ, в качестве помехи подается случайное напряжение

вида  $x(t) = \sum_{k=1}^n A_k \cos(\omega_0 t - \varphi_k)$ , где  $n$  – заданное значение ( $n \gg 1$ );  $A_k$  и  $\varphi_k$

– независимые СВ, имеющие законы распределения

$$w(A_k) = \begin{cases} \frac{A_k}{\sigma_A^2} \exp\left(-\frac{A_k^2}{2\sigma_A^2}\right), & A_k \geq 0; \\ 0, & A_k < 0, \end{cases} \quad w(\varphi_k) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & \varphi_k \in [-\pi, \pi]; \\ 0, & \varphi_k \notin [-\pi, \pi]. \end{cases}$$

Амплитуды  $A_k$  и

фазы  $\varphi_j$  независимы при  $k \neq j$ . Определить качественные показатели (вероятности ложной тревоги и пропуска) процедуры обнаружения, если  $f_0 T = l$  – целое. Как эти характеристики будут зависеть от  $l$ ?



**4.27.** Для обнаружения 100 периодов гармонического колебания  $U \cos(2\pi Ft)$  на фоне АБГШ с СПМ  $N_0/2$  используется схема, состоящая из ключа, интегратора и порогового устройства. Как выбрать момент замыкания ключа и продолжительность замкнутого состояния, чтобы при заданном значении  $P_{л.т}$  получить максимальную вероятность правильного обнаружения  $P_{п.о}$ ? Какой она будет при заданном значении  $P_{л.т}$ ?

Для справки: решением уравнения  $2x = \operatorname{tg} x$  будет  $x \approx 1,16$ .

**4.28.** Обнаружитель, рассчитанный на сигнал  $s_1(t) = \begin{cases} -U, & t \in [0, T]; \\ U, & t \in [T, 2T]; \\ 0, & t \notin [0, 2T], \end{cases}$  ис-

пользуется для обнаружения сигнала  $s_2(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T]. \end{cases}$  Какими по сравне-

нию с обнаружением  $s_1(t)$  будут качественные показатели обнаружения? Как, не меняя фильтр, согласованный с  $s_1(t)$ , улучшить качественные показатели? Какими они будут по сравнению с оптимальным обнаружителем  $s_2(t)$ ?

**4.29.** Как с помощью СФ для прямоугольного импульса амплитудой  $U$  и длительностью  $T$  построить обнаружитель для сигнала

$s_1(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, T]; \\ -U, & t \in [2T, 4T]; \\ 0, & t \notin [0, T], t \notin [2T, 4T] \end{cases}$  на фоне АБГШ? Приведите структуру обнару-

жителя и выражения для вероятности ложной тревоги  $P_{л.т}$  и пропуска сигнала  $P_{п.с}$ , считая помеху АБГШ с СПМ  $N_0/2$ .

**4.30.** Постоянный сигнал уровня  $U$  обнаруживается на фоне случайного синхронного телеграфного сигнала с нулевым средним и корреляционной функцией  $R(\tau) = U^2(1 - |\tau|/T)$  посредством накопления отсчетов, следующих с периодом  $T$  (момент взятия отсчета не совпадает с моментами смены символов помехи). Каков оптимальный алгоритм обработки? Какое минимальное количество отсчетов необходимо для достижения вероятности ложной тревоги  $P_{л.т} < 10^{-3}$ ? Чему при этом равна вероятность правильного обнаружения?

**4.31.** На вход обнаружителя, предназначенного для обработки сигнала

$$s_1(t) = \begin{cases} -U, & t \in [0, T/2]; \\ U, & t \in [T/2, T]; \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases} \quad \text{на фоне АБГШ, поступает сигнал}$$

$$s_2(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, T/2]; \\ -U, & t \in [T/2, T]; \\ 0, & t \notin [0, T]. \end{cases} \quad \text{Как при этом изменятся значения вероятностей лож-$$

ной тревоги  $P_{\text{л.т}}$  и пропуска  $P_{\text{п.с}}$ ? Привести выражения для вероятностей ошибок.

**4.32.** Обнаружитель сигнала рассчитан на обработку сигнала  $s(t)$  на фоне АБГШ. На вход обнаружителя с вероятностью  $1/2$  приходит сигнал  $s(t)$  и с вероятностью  $1/2$  сигнал  $10s(t)$ . Как изменятся значения вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала по отношению к штатному режиму функционирования обнаружителя? Синтезировать структуру оптимального обнаружителя для описанной ситуации.

**4.33.** Сигнал на входе принимает вид  $s_1(t)$  либо  $s_2(t)$  с вероятностями  $p_1$  и  $p_2 = 1 - p_1$  соответственно. Помеха – АБГШ с СПМ  $N_0/2$ . Найти алгоритм оптимального обнаружения по Нейману–Пирсону. Конкретизировать его для случая  $s_1(t) = s(t)$ ,  $s_2(t) = -s(t)$  и  $p_1 = p_2 = 0,5$ . Определить для этого случая  $P_{\text{л.т}}$  и  $P_{\text{п.с}}$ .

**4.34.** Прямоугольный видеоимпульс амплитудой  $U$  и длительностью  $T$  может появиться с вероятностью  $0,4$  с нулевой задержкой, или с вероятностью  $0,1$  с задержкой  $T_3 > T$ , или не появиться вовсе. Найти алгоритм оптимального по критерию максимума апостериорной вероятности обнаружения сигнала на фоне АБГШ с СПМ  $N_0/2$  с одновременным указанием времени задержки сигнала. Вычислить вероятность ложной тревоги.

**4.35.** Обнаруживаемый на фоне АБГШ с СПМ  $N_0/2$  сигнал может равновероятно занимать одно из двух положений на временной оси:

$$s_1(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases} \quad \text{или} \quad s_2(t) = s_1(t - \Delta). \quad \text{Какую структуру имеет оптималь-$$

ный обнаружитель? Как зависит вероятность правильного обнаружения  $P_{\text{п.о}}$  при фиксированной вероятности ложной тревоги  $P_{\text{л.т}}$  от значения  $\Delta$ ?

**4.36.** Сколько импульсов должна содержать прямоугольная пачка прямоугольных импульсов с амплитудой 1 мВ и длительностью 1 мкс, чтобы ее можно было обнаружить на фоне АБГШ с СПМ  $N_0/2 = 10^{-12} \text{ В}^2/\text{Гц}$  с  $P_{\text{л.т}} = 10^{-4}$  и  $P_{\text{п.о}} = 0,9$ ?

**4.37.** Постоянный во времени сигнал, являющийся случайной величиной с плотностью вероятности  $W(s) = \begin{cases} 1/U, & s \in [0, U]; \\ 0, & s \notin [0, U], \end{cases}$  обнаруживается на фоне помехи, отсчеты которой подчинены распределению Симпсона

$$W(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 2U; \\ (x + 2U)/(4U^2), & -2U \leq x \leq 0; \\ (2U - x)/(4U^2), & 0 < x \leq 2U. \end{cases}$$

Обрабатывается  $n$  независимых отсчетов.

Найти оптимальный алгоритм обнаружения и определить, сколько необходимо обработать отсчетов, чтобы при вероятности ложной тревоги  $P_{\text{л.т}} = 0$  обеспечить требуемое значение вероятности правильного обнаружения  $P_{\text{п.о}}$ .

**4.38.** На обнаружитель полностью известного сигнала  $s(t) = \begin{cases} U \cos(2\pi f_0 t), & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases}$  на фоне АБГШ подается сигнал

$$s_1(t) = \begin{cases} U \cos(2\pi f_0 t + \varphi), & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T], \end{cases}$$

где  $\varphi$  – СВ, равномерно распределенная в интервале  $[-\Delta\varphi, \Delta\varphi]$ .

Как при заданном значении вероятности ложной тревоги  $P_{\text{л.т}}$  вероятность пропуска сигнала  $P_{\text{п.с}}$  будет зависеть от  $\Delta\varphi$ ?

**4.39.** Для обнаружения детерминированного сигнала  $s(t) = \begin{cases} U \cos(\omega_0 t), & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases}$  на фоне АБГШ с СПМ  $N_0/2$  используется обнаружитель, в котором с порогом сравнивается не корреляционный интеграл

$$z = \int_0^T y(t)s(t)dt, \text{ как это делается в оптимальной структуре, а его модуль } |z|. \text{ Каким}$$

будет проигрыш в пороговом отношении сигнал/шум по сравнению с

оптимальным обнаружителем при одинаковых значениях вероятности правильного обнаружения?

**4.40.** В обнаружителе сигнала  $s(t) = \begin{cases} U, t \in [0, T]; \\ 0, t \notin [0, T] \end{cases}$  на фоне АБГШ с СПМ

$N_0 / 2$ , реализованном на основе СФ, номинал линии задержки в СФ изменяется (увеличивается или уменьшается) в 2 раза. Как при этом изменятся значения вероятности ложной тревоги  $P_{л.т}$  и пропуска сигнала  $P_{п.с}$ , если момент взятия отсчета остается неизменным и равным  $T$ ?

**4.41.** На вход оптимального обнаружителя детерминированного сигнала  $s(t) = \begin{cases} \cos \frac{6\pi t}{T}, t \in [0, T]; \\ 0, t \notin [0, T] \end{cases}$  поступает сигнал  $s(t - \tau)$ , где  $\tau \in [0, 2T]$ . Построить

зависимость вероятности правильного обнаружения от значения  $\tau$ .

**4.42.** Синтезировать оптимальный алгоритм обнаружения сигнала  $s(t) = \text{Re} \dot{S}(t) \exp(j2\pi f_0 t)$  на фоне АБГШ с СПМ  $N_0 / 2$ , где  $\dot{S}(t) = a \text{Re} \dot{S}(t)$  – детерминированная комплексная огибающая;  $a$  – случайная величина, подчиняющаяся закону распределения  $W(a) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-a^2}}$ ;  $|a| \leq 1$ ;  $f_0$  – известная центральная частота.

**4.43.** Сколько импульсов должна содержать пачка  $s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} 2^k s_0(t - kT)$ ,

где  $s_0(t) = \begin{cases} U, t \in [0, \tau]; \\ 0, t \notin [0, \tau], \end{cases} T = 4\tau$ , чтобы ее можно было обнаружить на фоне

АБГШ с СПМ  $N_0 / 2$  с вероятностями ложной тревоги  $P_{л.т}$  и пропуска сигнала  $P_{п.с}$ ?

**4.44.** Для обнаружения сигнала  $s(t) = \sum_{i=0}^2 a_i s_0(t - iT_{\Pi})$ , где  $a_i = ai$ ;

$s_0(t) = \begin{cases} U, t \in [0, T]; \\ 0, t \notin [0, T]; \end{cases} T_{\Pi} = T$ , на фоне АБГШ с СПМ  $N_0 / 2$  используется СФ,

реализованный на основе фильтра, согласованного с  $s_0(t)$ , и линии задержки

с отводами, сигналы с которых с весами, определяемыми  $s(t)$ , подаются на сумматор. Обрыв какого отвода приведет к наибольшему ухудшению качества обнаружения? Как при этом изменятся качественные показатели обнаружения сигнала ( $P_{л.т}$  и  $P_{п.о}$ )? Изобразить сигнал на выходе СФ.

**4.45.** Корреляционная функция шума на выходе СФ в обнаружителе при действии на его входе БШ имеет вид  $R(\tau) = \begin{cases} \sigma^2(1-|\tau|/T), & |\tau| \leq T; \\ 0, & |\tau| > T. \end{cases}$  Построить

зависимости вероятностей ложной тревоги и правильного обнаружения от момента взятия отсчета с выхода СФ  $t_0$ ,  $t_0 \in [0, 2T]$ .

**4.46.** Построить зависимости вероятностей ложной тревоги и правильного обнаружения для прямоугольного импульса длительностью  $T$  на фоне АБГШ, если обнаружитель реализован на базе коррелятора, а время вычисления корреляционного интеграла варьируется от 0 до  $2T$ .

**4.47.** Сигнал  $s(t) = \begin{cases} U \cos(2\pi f_0 t), & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases}$  обрабатывается на фоне

АБГШ с СПМ  $N_0/2$ . К шуму добавляется помеха  $\xi(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$  с известными амплитудой  $A$ , частотой  $f_0$  и со случайной равномерно распределенной в интервале  $[-\pi, \pi]$  начальной фазой  $\varphi$ . Как при этом изменятся качественные показатели обнаружения сигнала ( $P_{л.т}$  и  $P_{п.о}$ )? Как изменится ответ, если будет использована оптимальная стратегия обнаружения сигнала на фоне суммы АБГШ и  $\xi(t)$ ?

**4.48.** За какое время можно обнаружить (с заданными качественными показателями  $P_{л.т}$  и  $P_{п.о}$ ) сигнал  $s(t) = U \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$  на фоне АБГШ с СПМ  $N_0/2$  для двух случаев:

- а) сигнал  $s(t)$  полностью известен;
- б) начальная фаза  $\varphi$  сигнала случайна и равномерно распределена на интервале  $[-\pi, \pi]$ .

Каким будет алгоритм оптимального обнаружения для этих случаев?

**4.49.** Помеха имеет вид  $x(t) = n(t) \cos^2(2\pi f_0 t)$ , где  $n(t)$  – гауссовский случайный процесс с СПМ  $G_n(f) = \begin{cases} N_0/2, & |f| \leq F; \\ 0, & |f| > F, \end{cases} \quad F = 10^{-3} f_0$ . Найти структуру (алгоритм работы) оптимального по критерию максимального правдоподобия обнаружителя сигнала  $s(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, 2T]; \\ 0, & t \notin [0, 2T] \end{cases}$  и определить вероятности ложной тревоги и пропуска сигнала.

**4.50.** Делается попытка обнаружить сигнал со случайной равномерно распределенной начальной фазой на фоне АБГШ с помощью обнаружителя детерминированного сигнала. Количественно оценить потери по сравнению со случаем оптимальной обработки такого сигнала.

**4.51.** Сигналы  $s_1(t) = U_1 \frac{\sin(2\pi F_1 t)}{2\pi F_1 t}$  и  $s_2(t) = U_2 \frac{\sin(2\pi F_2 t)}{2\pi F_2 t}$  должны быть обнаружены на фоне аддитивного гауссовского шума с корреляционной функцией  $R(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha |\tau|)$ . Амплитуды  $U_1$  и  $U_2$  выбраны так, чтобы энергии сигналов были одинаковы, а  $F_1 \gg F_2$ . Найти структуру обнаружителя, оптимального по критерию Неймана–Пирсона (для каждого сигнала), и сравнить значения  $P_{\text{л.о}}$  при одинаковых значениях  $P_{\text{л.т}}$ .

**4.52.** Необходимо обнаружить сигнал  $s(t) = U \exp(-2\lambda |t|)$  на фоне аддитивной помехи, сформированной как сумма 100 независимых случайных телеграфных сигналов с параметрами  $u$  и  $\lambda$ . Найти структуру обнаружителя, оптимального по критерию Неймана–Пирсона и при заданном значении вероятности ложной тревоги построить зависимость вероятности правильного обнаружения от отношения  $U/u$ .

**4.53.** Для обнаружения сигнала  $s(t) = \sum_{i=0}^2 s_0(t - iT)$ ,  $s_0(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases}$  могут использоваться две схемы (рис. 4.11). Сопоставить качественные показатели (отношение сигнал/шум, значения вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала) при использовании обеих схем.

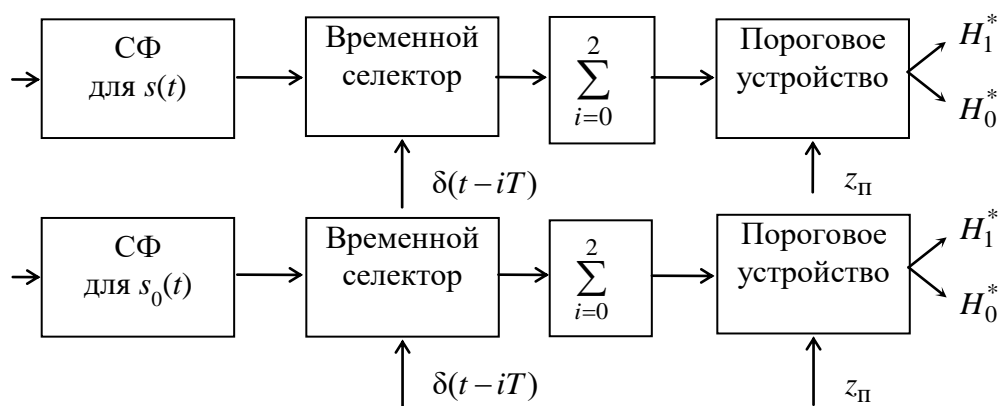


Рис. 4.11

**4.54.** Необходимо обнаружить сигнал  $s(t) = U \exp(-at^2)$ ,  $\alpha > 0$  на фоне гауссовской помехи с СПМ  $G(f) = S_0 \exp(-\beta f^2)$ ,  $\beta > 0$  с помощью коррелятора. Каким должен быть опорный сигнал коррелятора? Найти вероятность пропуска сигнала при заданном значении вероятности ложной тревоги.

**4.55.** Найти алгоритм оптимального обнаружения сигнала (рис. 4.12) на фоне АБГШ и определить вероятность правильного обнаружения при заданном значении вероятности ложной тревоги. Как изменится результат, если для обнаружения использовать фильтр, согласованный с одиночным прямоугольным видеоимпульсом, параметры которого можно выбирать?

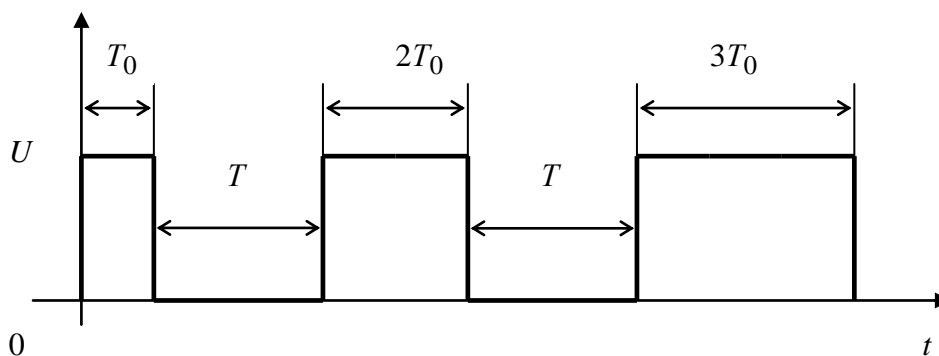


Рис. 4.12

**4.56.** В обнаружителе детерминированного сигнала  $s(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T], \end{cases}$  реализованном на основе коррелятора, в качестве опорного сигнала используется  $s_{\text{оп}}(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, 2T]; \\ 0, & t \notin [0, 2T]. \end{cases}$  Оценить количественно, как при этом

соотносятся вероятности ложной тревоги и пропуска с теми же показателями при оптимальной обработке?

**4.57.** Сигнал  $s(t) = U \exp(-at^2)$ ,  $a > 0$  обнаруживается на фоне аддитивного шума с СПМ  $G(f) = \exp(-bf^2)$ ,  $b > 0$ . Найти алгоритм оптимального обнаружения по критерию Неймана–Пирсона и для заданного значения вероятности ложной тревоги  $P_{л.т}$  определить значения вероятности пропуска  $P_{п.с}$  при разных соотношениях между  $a$  и  $b$ .

**4.58.** Необходимо на фоне АБГШ с СПМ  $N_0/2$  обнаружить (синтезировать структуру обнаружителя) прямоугольный радиоимпульс амплитудой  $U$ , длительностью  $T$ , частотой  $f_0$  ( $1/f_0 \ll T$ ), у которого в пределах первой половины (на интервале  $[0, T/2]$ ) начальная фаза детерминирована и равна 0, а на второй половине (на интервале  $(T/2, T]$ ) является случайной величиной, равномерно распределенной на промежутке  $[-\pi, \pi]$ . Определить зависимость вероятности ложной тревоги  $P_{л.т}$  и вероятности пропуска  $P_{п.с}$  от параметров сигнала и помехи.

**4.59.** Детерминированный сигнал  $s(t) = U \frac{\sin(\pi Ft)}{\pi Ft}$  обнаруживается на фоне нормального шума с СПМ  $G(f) = \begin{cases} N_0/2, & |f| \leq F_{\Pi}; \\ 0, & |f| > F_{\Pi}. \end{cases}$  Найти структуру оп-

тимального обнаружителя и построить зависимость вероятности правильного обнаружения от параметра  $F/F_{\Pi}$  при постоянном значении вероятности ложной тревоги.

**4.60.** На вход компаратора поступает последовательность из шести независимых отсчетов либо только шума с ПВ  $w(x|H_0)$ , либо смеси шума и сигнала, имеющей ПВ  $w(x|H_1)$ . Алгоритм обнаружения основан на подсчете числа превышений порога компаратора  $x_0$ , причем решение о наличии сигнала принимается всякий раз, когда из шести отсчетов 4 или более подряд превысят  $x_0$ . Записать выражения для вероятности правильного обнаружения сигнала  $P_{п.о}$  и вероятности ложной тревоги  $P_{л.т}$ .



**4.61.** Найти структуру оптимального по критерию Неймана–Пирсона обнаружителя сигнала  $s(t) = \begin{cases} U(1 - \frac{|t|}{T}), & |t| \leq T; \\ 0, & |t| > T \end{cases}$  на фоне гауссовской помехи с корреляционной функцией  $R(\tau) = \begin{cases} \sigma^2(1 - \frac{|\tau|}{T}), & |\tau| \leq T; \\ 0, & |\tau| > T. \end{cases}$  Определить вероятность пропуска сигнала  $P_{п.с}$  при заданном значении вероятности ложной тревоги  $P_{л.т}$ . Как при фиксированной энергии сигнала следует выбирать длительность импульса, чтобы при заданном значении  $P_{л.т}$  минимизировать  $P_{п.с}$ ?

**4.62.** Найти алгоритм оптимального обнаружения по критерию Неймана–Пирсона сигнала  $As(t)$  на фоне АБГШ, где  $s(t)$  – полностью известная функция времени, а  $A$  – случайный множитель с ПВ  $W(A) = \sum_{i=1}^N p_i \delta(A - A_i)$ ?

**4.63.** Найти структуру оптимального по критерию Неймана–Пирсона обнаружителя сигнала  $s(t)$  на фоне нестационарного СП с СПМ  $G(f, t)$  (рис. 4.13) и при заданном значении вероятности ложной тревоги  $P_{л.т}$  определить значение вероятности пропуска  $P_{п.с}$ . Рассмотреть отдельно случай  $N_{02} / N_{01} \rightarrow \infty$ .

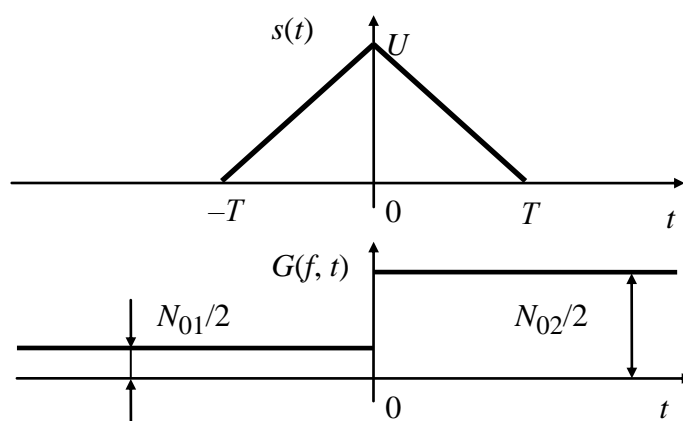


Рис. 4.13

**4.64.** Сигнал  $s(t)$  обнаруживается на фоне нестационарного нормального БШ, СПМ которого  $G(f, t)$  меняется во времени (рис. 4.14). Найти структуру

оптимального обнаружителя и при заданном значении вероятности ложной тревоги  $P_{л.т}$  определить вероятность правильного обнаружения  $P_{п.р}$ .

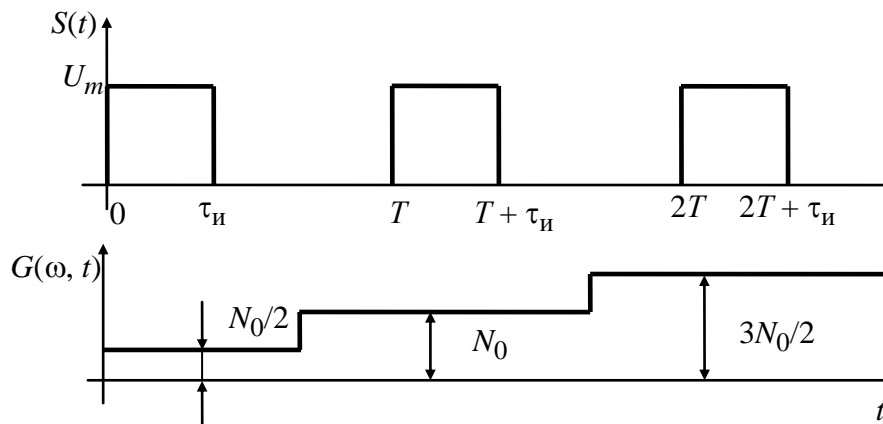


Рис. 4.14

**4.65.** Определить структуру обнаружителя и пороговый уровень при использовании критерия максимума правдоподобия для приема методом однократного отсчета постоянного сигнала амплитудой  $A = 2$  В на фоне аддитивной помехи с нормальным распределением, нулевым средним значением и дисперсией  $\sigma^2$ .

**4.66.** Обнаруживается прямоугольный радиоимпульс амплитудой  $U$  и длительностью  $T$  с помощью устройства, оптимизированного в расчете на АБГШ. Постановщик помехи стремится минимизировать отношение сигнал/(помеха + шум) на входе порогового устройства. При какой спектральной плотности помехи заданной мощности эта цель достигается?

**4.67.** На вход оптимального обнаружителя полностью известной псевдослучайной последовательности (ПСП) длиной  $N$ , рассчитанного на БШ, поступает в качестве помехи сумма большого числа ( $M \gg 1$ ) ПСП, каждая из которых имеет ту же длину и амплитуду, что и полезная ПСП, и дает отклик на выходе СФ в виде случайного процесса с нулевым средним и среднеквадратическим отклонением  $\sqrt{N}$ . Как следует выбрать  $N$ , чтобы при заданном  $M$  обеспечить требуемые характеристики обнаружения сигнала?

**4.68.** Найти структуру обнаружителя, оптимального по критерию идеального наблюдателя, предназначенного для обнаружения сигнала  $s(t)$  на фоне АБГШ  $n(t)$  с СПМ  $N_0$ . Обнаруживаемый сигнал  $s(t)$  представляет собой прямоугольный радиоимпульс с несущей частотой  $f_0$  и длительностью  $T$ . Амплитуда

импульса является случайной величиной, распределенной равномерно в интервале от  $A$  до  $2A$ . Определить полную вероятность ошибки, если априорная вероятность наличия сигнала равна 0,2.

**4.69.** На вход оптимального обнаружителя сигнала  $s_1(t) = \begin{cases} U, & |t| \leq T/2; \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases}$  на фоне АБГШ с СПМ  $N_0/2$  при истинности гипотезы  $H_1$  с вероятностью  $p$  приходит сигнал  $s_1(t)$ , а с вероятностью  $(1-p)$  сигнал  $s_2(t) = \begin{cases} U, & |t| \leq T/4; \\ 0, & |t| > T/4. \end{cases}$  Найти выражения для вероятностей ложной тревоги и пропуска сигнала.

**4.70.** На входе обнаружителя могут присутствовать либо независимые между собой отсчеты шума, подчиняющиеся распределению  $w(x_i) = \begin{cases} \alpha \exp(-\alpha x_i), & x_i \geq 0; \\ 0, & x_i < 0, \end{cases}$  либо сумма отсчетов шума и независимого с шумом случайного сигнала, отсчеты которого независимы между собой и могут принимать с вероятностью 0,5 значения 2 и 20. Предложить алгоритм работы обнаружителя и методику определения его качественных показателей. Какое решение примет обнаружитель, если на его вход поступит следующая последовательность отсчетов {17; 28; 35; 1; 29; 46; 17; 6}? Ответ обосновать.

**4.71.** Сигнал вида  $s(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^4 a_k \cos \omega_0 t, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T], \end{cases}$  где  $a_k$  – независимые

случайные величины, принимающие значения  $+U$  с вероятностью  $p$  и  $-U$  с вероятностью  $q = 1 - p$ , обнаруживается на фоне АБГШ с СПМ  $N_0/2$ . Какой будет структура оптимального обнаружителя? Какой будет при заданной вероятности ложной тревоги вероятность правильного обнаружения? При каких соотношениях между  $p$  и  $q$  вероятность правильного обнаружения будет максимальной?

**4.72.** Эргодический гауссовский процесс  $x(t)$  с корреляционной функцией  $R(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|)$  записывается со скоростью  $\nu$  и воспроизводится со

скоростью  $kv$ . Каким должно быть  $k$ , чтобы для сигнала  $s(t) = U \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t}$  создать наихудшие условия для его обнаружения?

**4.73.** Необходимо обнаружить частотно-манипулированный сигнал (рис. 4.15) на фоне нормального БШ с двусторонней СПМ  $N_0/2$ .

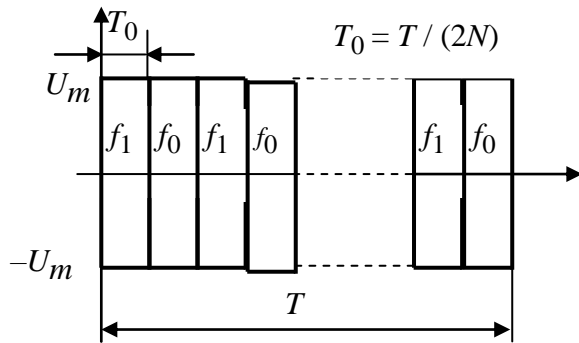


Рис. 4.15

Определить структуру обнаружителя, оптимального по критерию максимума правдоподобия, считая все параметры сигнала (время прихода, амплитуда  $U_m$ , длительность сигнала, длительность  $T$ , число элементов  $N$ ) известными, за исключением начальных фаз посылок. Рассмотреть 2 случая:

а) начальные фазы всех посылок случайны, независимы и равномерно распределены на интервале  $[0, 2\pi]$ ;

б) на каждой из частот начальная фаза всех посылок неизменна и равна  $\varphi_i$  для частоты  $f_i$  ( $i=0,1$ ), причем  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  случайны, независимы и равномерно распределены на интервале  $[0, 2\pi]$ .

Как будет зависеть вероятность правильного обнаружения при фиксированной вероятности ложной тревоги от  $N$  для обоих случаев. Ответ обосновать. Считать, что всегда выполняется условие  $T_0 \gg 1/|f_1 - f_0|$ .

**4.74.** При каких условиях, предъявляемых к спектру сигнала  $s(t)$ , сигнал  $k \frac{ds(t)}{dt}$ , где  $k = 1$  с, можно обнаружить с большей вероятностью правильного обнаружения, нежели сигнал  $s(t)$ . В обоих случаях используются оптимальные обнаружители; обнаружение осуществляется на фоне АБГШ с СПМ  $N_0/2$ , вероятности ложной тревоги одинаковые.

**4.75.** На вход обнаружителя детерминированного сигнала  $s(t) = \sum_{i=1}^4 a_i s_0(t - iT)$ , где  $s_0(t) = \begin{cases} U, & |t| \leq T/2; \\ 0, & |t| > T/2; \end{cases}$   $a_1 = +1; a_2 = +1; a_3 = -1; a_4 = +1$ , на фоне АБГШ подается сигнал с кодовой последовательностью  $a_1 = +1, a_2 = -1, a_3 = -1, a_4 = +1$ . Как следует изменить значение  $U$  для

получения тех же вероятностей ошибок, что и в штатной ситуации? В какой момент времени следует брать отсчет с выхода СФ для получения наилучших качественных показателей?

**4.76.** Сигнал  $s(t) = U_m \exp(-\alpha t^2)$  обнаруживается на фоне АБГШ с СПМ  $N_0/2$ . Как изменится вероятность правильного обнаружения при сохранении неизменным значения вероятности ложной тревоги, если вместо сигнала  $s(t)$  будет обнаруживаться  $s(\alpha t)$ ?

**4.77.** В сигнале вида  $s(t) = \begin{cases} U_m(1 - \frac{t}{T}), & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases}$  амплитуда  $U_m$  и длительность  $T$  связаны соотношением  $k_1 U_m^2 + k_2 T^2 = c^2$ , где  $k_1$  и  $k_2$  – единичные коэффициенты, обеспечивающие единство единиц измерения слагаемых;  $c^2$  – фиксированная константа. При каком соотношении между  $U_m$  и  $T$  вероятность правильного обнаружения данного сигнала на фоне АБГШ с СПМ  $N_0/2$  для заданного значения вероятности ложной тревоги будет максимальна?

**4.78.** Подлежащий обнаружению на фоне АБГШ с СПМ  $N_0/2$  сигнал имеет вид  $s(t) = \begin{cases} U \cos(2\pi f_0 t), & t \in [0, \alpha T]; \\ U \cos(2\pi f_0 t + \varphi), & t \in [\alpha T, T], \end{cases}$  где  $\alpha$  – случайная величина, равномерно принимающая значения 0,5, 0,75 и 1, а  $\varphi$  – случайная величина, равномерно распределенная в интервале  $[-\pi, \pi]$ . Найти решающее правило, оптимальное по критерию Неймана–Пирсона, и изобразить структуру обнаружителя.

**4.79.** Стационарный узкополосный нормальный случайный процесс  $\xi(t)$  с корреляционной функцией  $R_\xi(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha \tau^2) \cos(2\pi f_0 \tau)$  возводится в квадрат и в одном случае складывается с процессом  $\eta(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ , где  $\varphi$  – случайная величина, равномерно распределенная на интервале  $[-\pi, \pi]$ , а в другом – перемножается с процессом  $\eta(t)$ . Процессы  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  независимы. Найти СПМ результирующих процессов  $\mu_1(t) = \xi^2(t) + \eta(t)$  и  $\mu_2(t) = \xi^2(t)\eta(t)$ . Какой из них, выступая в роли помехи, будет более опасен при обнаружении сигнала вида  $s(t) = U \exp(-\beta t^2) \cos(6\pi f_0 t)$ ,  $\sqrt{\beta} \ll 3\omega_0$ ?

**4.80.** Сигнал  $s(t) = U$  обнаруживается на фоне гауссовской помехи, отсчеты которой независимы и имеют дисперсию  $\sigma^2$ . Постоянная составляющая помехи является случайной величиной, принимающей равновероятно значения  $\pm m$ . Синтезировать оптимальный алгоритм обработки и определить качественные показатели работы обнаружителя. Качественно построить зависимость  $P_{\text{п.о}} = f(q, P_{\text{л.т}} = \text{const})$ , если  $m = U$ .

**4.81.** Сколько импульсов должна содержать пачка  $s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} 2^k s_0(t - kT)$ ,

где  $s_0(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, \tau]; \\ 0, & t \notin [0, \tau]; \end{cases} \quad T = 4\tau$ , чтобы ее можно было обнаружить на фоне

АБГШ с СПМ  $N_0 / 2$  с вероятностями ложной тревоги  $P_{\text{л.т}}$  и пропуска сигнала  $P_{\text{п.с}}$ .

**4.82.** Найти значение минимального среднего риска (средние потери) для задачи обнаружения сигнала  $s(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases}$  на фоне АБГШ с СПМ  $N_0 / 2$

, если матрица рисков (потерь) имеет вид  $\Pi = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}$ , априорная вероят-

ность наличия сигнала в принятой реализации – 0,999;  $U = 10 \text{ В}$ ,  $T = 10^{-5} \text{ с}$ ;  $N_0 / 2 = 10^{-15} \text{ В}^2 / \text{Гц}$ .

**4.83.** Последовательность детерминированных импульсов, следующих с периодом  $T$ , обнаруживается с помощью схемы (рис. 4.16). ФНЧ имеет характеристику  $K(jf) = \begin{cases} 1, & |f| \leq F; \\ 0, & |f| > F, \end{cases}$  АЦП -  $U_{\text{вых}} = \begin{cases} 1, & U_{\text{вх}} \geq 0; \\ 0, & U_{\text{вх}} < 0. \end{cases}$  Чему равно значение

вероятности ложной тревоги, если на входе устройства действует шум с СПМ  $N_0/2$ , равномерной в полосе фильтра, и мгновенными значениями, распределенными по а) закону Гаусса с нулевым средним; б) равномерному в интервале  $[-\sqrt{4N_0F/3}, \sqrt{16N_0F/3}]$ ?

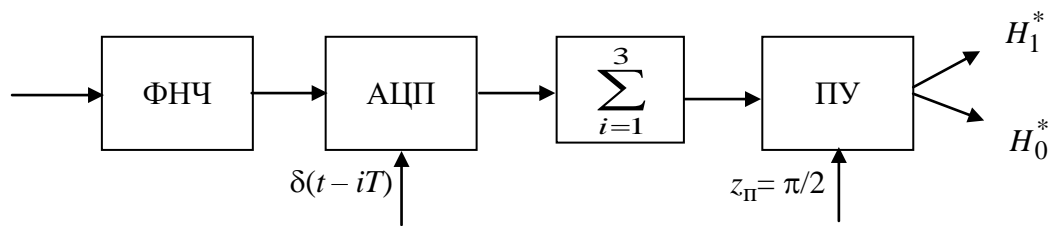


Рис. 4.16

Как изменится ответ, если при неизменном шуме полосу фильтра  $F$  уменьшить в 100 раз?

**4.84.** Полезный сигнал имеет форму равнобедренного треугольника с боковыми сторонами, равными  $a$ . При каком значении угла при основании вероятность правильного обнаружения для заданного значения вероятности ложной тревоги и шума с СПМ  $N_0/2$  будет максимальной?

## 5. РАЗЛИЧЕНИЕ СИГНАЛОВ

**5.1.** Найти максимально правдоподобный (МП) алгоритм различения сигналов  $s(t)$  и  $-2s(t)$  на фоне АБГШ с СПМ  $N_0/2$ . Определить вероятность ошибки различения.

Решение. Правило максимума правдоподобия (оптимальный алгоритм различения при минимизации суммы условных вероятностей ошибок) на фоне АБГШ сводится к сравнению между собой двух значений функции правдопо-

добия:  $w(y(t)|\hat{H}_1) > w(y(t)|\hat{H}_2)$ . С учетом того, что ФПВ БШ

$$w(y(t)) = k \exp\left(-\frac{1}{N_0} \int y^2(t) dt\right), \quad \text{МП-правило: } \int y(t)(s_1(t) - s_2(t)) dt > \frac{E_1 - E_2}{2}.$$

По условию задачи:  $3 \int y(t)s(t) dt > -\frac{3}{2}E$  или  $z > -E/2$ .

Вероятность ошибочного различения

$$P_{\text{ош}} = \int_{-\infty}^{-E/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{N_0 E}{2}}} \exp\left(-\frac{(z - E)^2}{2 \frac{N_0 E}{2}}\right) dz = 1 - \Phi\left(\frac{3q}{2}\right).$$

**5.2.** Ансамбль сигналов имеет вид  $a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t)$ , где  $a_1$  и  $a_2$  могут равновероятно принимать значения  $\pm 1$ ;  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$  – известные ортогональные сигналы, имеющие энергию  $E$ . Найти максимально правдоподобный алгоритм различения сигналов, входящих в описанный ансамбль, и определить вероятность ошибки, пользуясь аддитивной границей для  $P_{\text{ош}}$ .

Решение. В данной задаче речь идет о различении четырех равновероятных сигналов вида  $s_1(t) + s_2(t)$ ,  $-s_1(t) + s_2(t)$ ,  $s_1(t) - s_2(t)$ ,  $-s_1(t) - s_2(t)$ . Ввиду ортогональности  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  эти сигналы имеют одинаковые энергии, равные  $2E$ , поэтому МП-алгоритм различения данного ансамбля сигналов сводится к



вычислению двух корреляционных интегралов  $z_1 = \int_0^T y(t)s_1(t)dt$ ,

$z_2 = \int_0^T y(t)s_2(t)dt$ , формированию сигналов  $z_1 + z_2$ ,  $-z_1 + z_2$ ,  $z_1 - z_2$ ,  $-z_1 - z_2$  и

сравнению их между собой. Различаемые сигналы образуют ортогональный набор. Каждый из сигналов по отношению к двум является ортогональным (коэффициент корреляции  $\rho = 0$ ) и противоположным третьему ( $\rho = -1$ ). Учитывая равновероятность сигналов и используя аддитивную границу для  $P_{\text{ош}}$ , получ

$$P_{\text{ош}} \approx 2 \left[ 1 - \Phi \left( \frac{q}{2} \right) \right] + 1 - \Phi(q),$$

где отношение сигнал/шум  $q = 2 \sqrt{\frac{E}{N_0}}$ .

**5.3.** Для передачи данных используются сигналы  $s_1(t) = \begin{cases} U \cos(2\pi f_0 t), & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases}$  и  $s_2(t) = \begin{cases} U \cos(2\pi f_0 t + \pi/2), & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T]. \end{cases}$  Как сле-

дует выбрать третий сигнал (его амплитуду и начальную фазу), чтобы минимизировать полную вероятность ошибки при минимальной энергии этого сигнала? Помеха – АБГШ с СПМ  $N_0/2$ .

Решение. Для минимизации полной вероятности ошибки необходимо максимизировать квадрат евклидова расстояния между любой парой сигналов, образующих тройку. Обратимся к геометрической трактовке данной задачи (рис. 5.1). Задача сводится к выбору длины и ориентации на плоскости трех векторов так, чтобы их концы образовывали симплекс (равносторонний треугольник).

Сигналам  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  на рисунке отвечает пара ортогональных векторов, сигнальный вектор  $s_3(t)$  дополняет тройку так, чтобы линии, соединяющие их концы, давали правильный треугольник. Из геометрических построений ясно, что  $\alpha = \frac{3\pi}{4}$  ( $\alpha = 135^\circ$ ),  $\gamma = \frac{\pi}{6}$  ( $\gamma = 30^\circ$ ),  $\beta = \frac{\pi}{12}$  ( $\beta = 15^\circ$ ). Наконец, по теореме синусов

$U_3 / \sin \beta = U / \sin \gamma = 2U$ , поэтому  $U_3 = 2U \sin \frac{\pi}{12}$ . Сам третий сигнал может быть

представлен в виде  $s_3(t) = \begin{cases} U_3 \cos(2\pi f_0 t + 3\pi/4), t \in [0, T]; \\ 0, t \notin [0, T]. \end{cases}$

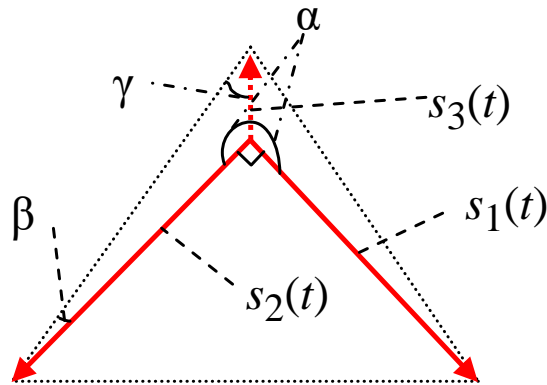


Рис. 5.1

**5.4.** По АБГШ-каналу необходимо передать 2 бита данных. Для этого можно воспользоваться четверкой сигналов в виде строк следующей матрицы:

$\begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & - & + & - \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \end{bmatrix}$ , в которой символами «+» и «-» обозначены полярности неп-

рекрывающихся элементарных импульсов (чипов). Пусть  $E_0$  – энергия чипа.

1. Что за сигнальное семейство они образуют?
2. Предложить простой способ преобразования этого семейства с сохранением  $P_{\text{ош}}$  в энергетически более эффективное. Какое семейство получится?
3. Каков энергетический выигрыш нового семейства относительно исходного?

Решение. 1. Квадрат расстояния между любой парой  $d^2 = 2 \times 4E_0 = 8E_0$ , скалярное произведение любых ортогональных векторов равно нулю, т. е. угол между ними – прямой.

По понятным основаниям это семейство называется ортогональным.

2. Если удалить в исходной матрице первый столбец, квадрат расстояния между полученными строками останется прежним, а энергии всех сигналов сократятся на четверть. Это значит, что прежней достоверности различения

сигналов удастся достичь при меньших энергозатратах. Полученное семейство является симплексным.

3. Поскольку энергия каждого из новых сигналов составляет  $3/4$  от прежней, энергетический выигрыш симплексного семейства относительно ортогонального равен  $4/3$ , или 1,2 дБ.

**5.5.** Найти структуру МП-различителя сигналов  $s_1(t) = \begin{cases} U_m \sin(\Omega t), & t \in [0, 2\pi/\Omega]; \\ 0, & t \notin [0, 2\pi/\Omega] \end{cases}$  и  $s_2(t) = |s_1(t)|$ . Определить  $P_{\text{ош}}$ , считая, что помехой является АБГШ с СПМ  $N_0/2$ .

Решение. Различаемые сигналы обладают одинаковыми энергиями  $E_1 = E_2 = E = \frac{\pi U_m^2}{2\Omega}$  и нулевой взаимной корреляцией  $r = 0$ . МП-алгоритм различения таких сигналов состоит в вычислении корреляции принятой реализации  $y(t)$  с разностным сигналом  $s_1(t) - s_2(t)$  и сравнении вычисленного значе-

ния с нулевым порогом  $\int y(t)(s_1(t) - s_2(t))dt \underset{\hat{H}_2}{\overset{\hat{H}_1}{>}} 0$ .

Вероятность ошибочного различения

$$P_{\text{ош}} = 1 - \Phi(q/\sqrt{2}), \quad q = \sqrt{\frac{2E}{N_0}}.$$

**5.6.** Для различения двух детерминированных сигналов  $s_1(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases}$  и  $s_2(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, T]; \\ -U, & t \in [T, 2T]; \\ 0, & t \notin [0, 2T] \end{cases}$  на фоне АБГШ разработчик

предлагает использовать схему (рис. 5.2). В чем ошибки разработчика и к каким последствиям они приведут? Изобразить схему оптимального различителя.

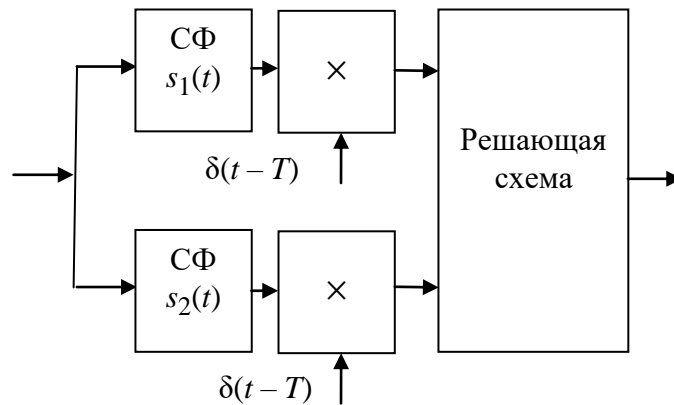


Рис. 5.2

Решение. Оптимальный по МП алгоритм различения сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  состоит в сравнении статистик  $z_1 - E_1 / 2 \overset{\hat{H}_1}{>} z_2 - E_2 / 2$ , где  $\overset{\hat{H}_2}{<}$

$z_i = \int_0^{iT} y(t)s_i(t)dt$  ( $i=1, 2$ );  $E_1 = U^2T$ ;  $E_2 = 2U^2T = 2E_1$ . Тем самым разработчик

допустил две ошибки: во-первых, не учел, что различаются сигналы разных энергий и, во-вторых, то, что сигналы имеют разные длительности (отсчет в нижнем канале схемы берется в момент времени  $T$ , а не в  $2T$ ). В итоге сигналы  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  окажутся неразличимыми (о чем свидетельствует рис. 5.3).

Схема оптимального различителя сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  показана на рис. 5.4.

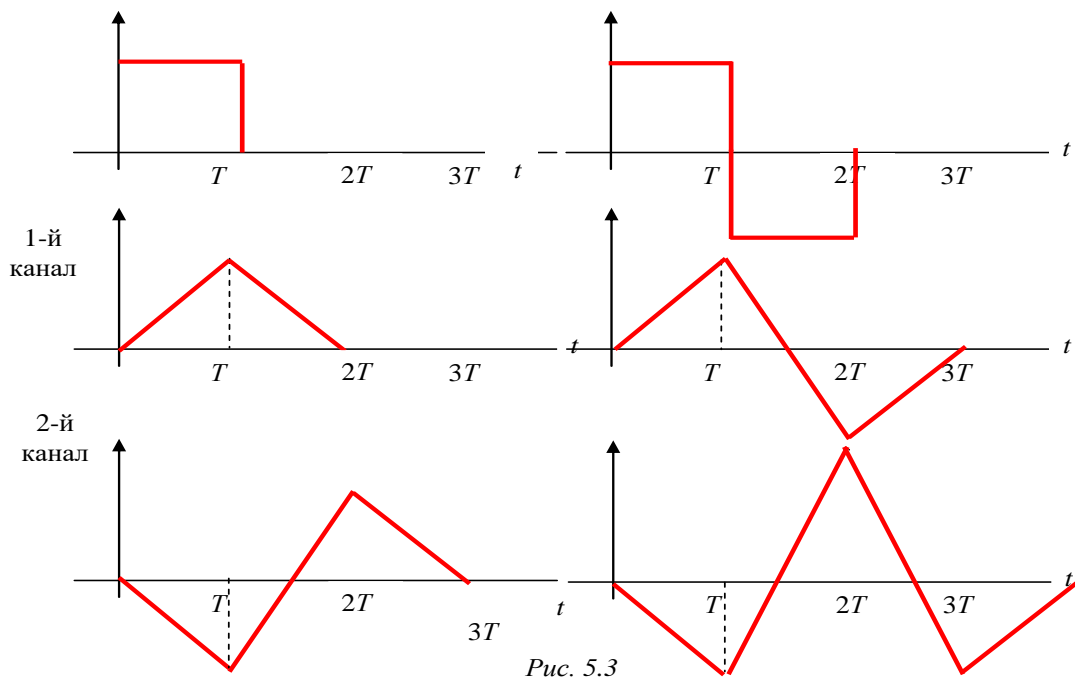


Рис. 5.3

**5.7.** Найти МП-алгоритм различения двух периодических сигналов, пери-

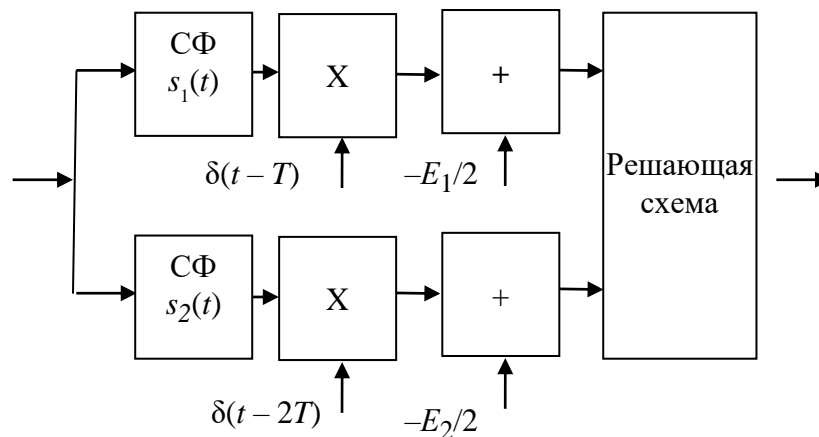


Рис. 5.4

оды которых сформированы на основе двух четырехэлементных кодов Баркера (1, 1, 1, -1) и (1, -1, 1, 1). Элементарные прямоугольные сигналы имеют амплитуду  $U$  и длительность  $\tau$ . Помеха – АБГШ с СПМ  $N_0/2$ . Сколько нужно обработать периодов различаемых сигналов  $N$ , чтобы получить требуемую вероятность ошибки?

Решение. Периодические сигналы окажутся ортогональными, поэтому вероятность ошибки различения  $P_{\text{ош}} = 1 - \Phi(q / \sqrt{2})$ , где  $q = \sqrt{\frac{2E}{N_0}}$ . Энергия

различаемых сигналов  $E = 4NU^2T$ . Отсюда необходимое число периодов различаемых сигналов должно быть не менее  $N = \frac{N_0[\Phi^{-1}(1 - P_{\text{ош}})]^2}{4U^2T}$ .

**5.8.** Различаемые на фоне АБГШ с СПМ  $N_0/2$  сигналы  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  являются четной и нечетной частями сигнала  $s(t) = \begin{cases} Ut/T, t \in [0, T]; \\ 0, t \notin [0, T]. \end{cases}$  Считая сигналы  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  равновероятными, определить вероятность ошибки.

Решение. Исходный сигнал  $s(t)$  и его четная  $s_1(t)$  и нечетная  $s_2(t)$  составляющие приведены на рис. 5.5. Как видно из рисунка, различаемые сигналы  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  ортогональны и имеют энергию  $E/2$ , где

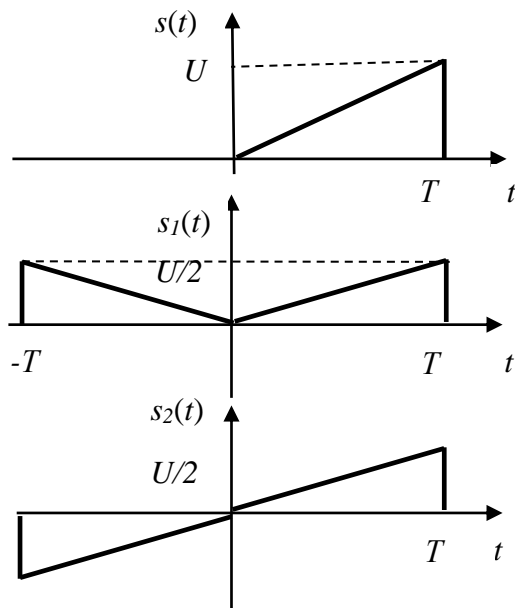


Рис. 5.5

имеют энергию  $E/2$ , где  $E = \int_0^T \left(\frac{Ut}{T}\right)^2 dt = \frac{U^2T}{3}$  – энергия исходного сигнала  $s(t)$ . Как уже отмечалось, вероятность ошибки  $P_{\text{ош}} = 1 - \Phi\left(\frac{q}{\sqrt{2}}\right)$ , где отношение сигнал/шум  $q = \sqrt{\frac{E}{N_0}}$ , а значение энергии  $E$  определено выше.

**5.9.** Для какой из приведенных ниже пар сигналов А или Б можно получить меньшую вероятность ошибки различения на фоне АБГШ с СПМ  $N_0/2$ :

$$\text{А: } s_1(t) = \begin{cases} U \sin^4(2\pi f_0 t), t \in [0, T]; \\ 0, t \notin [0, T], \end{cases} \quad s_2(t) = \begin{cases} U \cos^4(2\pi f_0 t), t \in [0, T]; \\ 0, t \notin [0, T]; \end{cases}$$

$$\text{Б: } s_1(t) = \begin{cases} U \sin^2(2\pi f_0 t), t \in [0, T]; \\ 0, t \notin [0, T], \end{cases} \quad s_2(t) = \begin{cases} U \cos^2(2\pi f_0 t), t \in [0, T]; \\ 0, t \notin [0, T], \end{cases} \quad T = 100 / f_0?$$

Решение. Так как  $\sin^4 x = \frac{1}{8}(\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3)$ ,  
 $\cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3)$ , то, вычитая общую часть  $\frac{1}{8}(\cos(4x) + 3)$ ,  
приходим к различению двух противоположных сигналов  $\frac{U}{2}\cos(2x)$  и  
 $-\frac{U}{2}\cos(2x)$ , имеющих равные энергии. К аналогичному результату приходим  
и для второй пары сигналов. Следовательно, вероятности ошибок для рассмат-  
риваемых пар сигналов одинаковы.

**5.10.** Найти алгоритм МП-различения сигналов  
 $s_1(t) = \begin{cases} U \cos(\omega_0 t), & t \in [0, T], \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases}$  и  $s_2(t) = \begin{cases} U \cos(\omega_0 t + \varphi), & t \in [0, T], \\ 0, & t \notin [0, T], \end{cases} \quad T \gg \frac{2\pi}{\omega_0}$  на  
фоне АБГШ с СПМ  $N_0/2$ . Построить зависимость  $P_{\text{ош}}$  от  $\varphi$ .

Решение. Сигналы  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  имеют одинаковую энергию и коэффици-  
ент корреляции  $r = \cos \varphi$ . МП-алгоритм различения:

$\xi = z_1 - z_2 = \int_0^T y(t)[s_1(t) - s_2(t)]dt \underset{\hat{H}_2}{\overset{\hat{H}_1}{>}} 0$ . Статистика  $\xi$  может быть сформирована

с помощью СФ для сигнала

$$s_1(t) - s_2(t) = \begin{cases} -2U \sin(\varphi/2) \sin(\omega_0 t + \varphi/2), & t \in [0, T] \\ 0, & t \notin [0, T]. \end{cases}$$

Вероятность ошибки различения  $P_{\text{ош}} = 1 - \Phi(q\sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}})$ .

**5.11.** В двоичной системе связи информационные нуль и единица переда-  
ются последовательностями  $N$  отсчетов, равных соответственно  $U$  и  $-U$ . От-  
счеты аддитивного шума  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) независимы и подчиняются распре-  
делению Лапласа  $w(x) = \frac{\alpha}{2} \exp(-\alpha |x|)$ ,  $\alpha > 0$ .

Синтезировать оптимальное по максимуму правдоподобия правило раз-  
личения принятых информационных символов.

Решение. Отношение правдоподобия

$$\Lambda = \prod_{i=1}^N \frac{w(y_i | H_0)}{w(y_i | H_1)} = \prod_{i=1}^N \exp\left[\frac{\alpha}{2}(|y_i + U| - |y_i - U|)\right].$$

После логарифмирования  $\ln \Lambda = \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^N [(|y_i + U| - |y_i - U|)]$ .

Полученную решающую статистику для вынесения решения следует сравнить с нулевым порогом:

$$\ln \Lambda \underset{\hat{H}_1}{\overset{\hat{H}_0}{>}} 0.$$

Пусть  $n_1$  – число наблюдаемых отсчетов, превышающих  $U$ . Каждый из них внесет в  $\ln \Lambda$  вклад  $\alpha U$ . Для отсчетов  $y_i$ , лежащих в окне  $[-U, U]$ , вклад окажется равным  $\alpha y_i$ . Вклад же каждого из остальных  $n_2$  отсчетов  $-\alpha U$ . Таким образом,  $\ln \Lambda = \alpha[(n_1 - n_2)U + \sum_{i \in I} y_i]$ , где  $I$  – множество индексов  $i$ , для кото-

рых  $-U < y_i \leq U$ . Поскольку  $\alpha$  – заданная константа, оптимальное правило можно переписать как

$$(n_1 - n_2)U + \sum_{i \in I} y_i \geq 0 \Rightarrow \hat{H}_0, \quad (n_1 - n_2)U + \sum_{i \in I} y_i < 0 \Rightarrow \hat{H}_1.$$

Как видно, для максимально правдоподобного различения двоичных символов следует:

- просуммировать все отсчеты, лежащие в окне  $[-U, U]$ ;
- прибавить к полученной сумме умноженную на  $U$  разность чисел отсчетов, соответственно превышающих  $U$  и лежащих ниже  $-U$ .

Если полярность полученного итога неотрицательна, считать принятый символ нулевым, в противном случае – единичным.

**5.12.** По АБГШ-каналу передаются четыре сигнала равной энергии  $E$ . Какое из сигнальных созвездий энергетически выгоднее: 4 ортогональных сигнала или симплексная тройка плюс четвертый сигнал, ортогональный этой тройке?

Решение. Для первого созвездия (ортогональной четверки) квадраты евклидовых расстояний между любой парой сигналов одинаковы и равны  $2E$ .



Для второго – квадрат расстояния от четвертого сигнала до любого сигнала симплексной тройки также равен  $2E$ , однако квадраты расстояний между остальными сигналами равны  $3E$ . Это означает, что вероятность перепутывания четвертого сигнала с остальными такая же, как вероятность перепутывания любой пары первого созвездия, тогда как вероятность перепутывания остальных сигналов второго созвездия между собой меньше. В итоге полная вероятность ошибки для второго созвездия меньше, т. е. оно энергетически эффективнее.

**5.13.** Пусть на отрезке  $[0, T]$  задано семейство  $M$  равноудаленных сигналов одинаковой энергии  $E$ , в котором коэффициент корреляции любой пары сигналов  $\rho > 0$ . Доказать, что вероятность ошибки при приеме таких сигналов на фоне АБГШ в точности равна вероятности ошибки для  $M$  ортогональных сигналов энергии  $E(1 - \rho)$ . (Подсказка: разбить отрезок  $[0, T]$  на два:  $[0, T] = [0, (1 - \rho)T] \cup [(1 - \rho)T, T]$ , заполнив первый из них  $M$  ортогональными сигналами энергии  $E(1 - \rho)$  и подобрав подходящее заполнение для второго.)

Решение. Дополним каждый из  $M$  ортогональных сигналов первого отрезка одним и тем же продолжением на втором отрезке:  $\sqrt{E/T}$ ,  $t \in [(1 - \rho)T, T]$ . Тогда энергия любого из полученных сигналов окажется равной  $E$ , а скалярное произведение для любой их пары определится только общим продолжением, т. е. составит  $E\rho$ , что соответствует коэффициенту корреляции  $\rho$  исходного семейства. В то же время общее продолжение никакого вклада в различение сигналов внести не может, а значит, вероятность ошибки определится только первыми (ортогональными) сегментами построенных сигналов, содержащими энергию  $E(1 - \rho)$ .

**5.14.** Требуется передать по АБГШ-каналу 5 сообщений сигналами одинаковой энергии  $E$ . Рассматриваются две альтернативы:

- использовать пятерку ортогональных сигналов;
- симплексную тройку расширить парой противоположных сигналов, ортогональной исходным трем.

Какая из этих опций лучше с точки зрения надежности передачи?

Решение. В гауссовском канале качество передачи полностью определено евклидовыми расстояниями между всеми сигналами используемого созвездия. Для первого из них расстояние между любой парой сигналов равно  $\sqrt{2E}$ . Во втором же созвездии пар с расстоянием, меньшим  $\sqrt{2E}$ , нет, зато есть более

удаленные пары. Именно: для противоположной пары расстояние равно  $2\sqrt{E}$ , а для любой пары из симплексной тройки –  $\sqrt{3E}$ . Поэтому в плане надежности связи вторая опция выгоднее.

**5.15.** Какой из двух видов манипуляции – многочастотная или многофазовая – может обеспечить меньшую вероятность ошибки при передаче 3 бит информации в течение одного символа и высокой достоверности приема. Результат объяснить. Шум – АБГШ с СПМ  $N_0/2$ .

Решение. При высокой достоверности приема для сравнения модуляционных форматов удобно воспользоваться аддитивной границей

$$P_{\text{ош}} \leq (M - 1) \left[ 1 - \Phi \left( q \sqrt{\frac{1-r}{2}} \right) \right], \text{ где } M - \text{объем ансамбля; } r - \text{коэффициент корреляции между сигналами.}$$

При одинаковых объемах ансамблей и энергетике все будет определяться величиной  $r$ : для многочастотной модуляции достижимо значение  $r = 0$ , для фазовой – максимальное значение  $r_{\text{max}} = \cos \varphi$ , где  $\varphi$  – разность фаз между ближайшими символами. В этом случае частотная модуляция представляется более предпочтительной.

**5.16.** Какова вероятность ошибки различения двух равновероятных сигналов, реализованных на основе бинарных последовательностей длины  $N$ , имеющих одинаковую энергию  $E$ , если бинарная последовательность второго сигнала получается из первой заменой  $n < N$  символов на противоположные. Помеха – АБГШ с СПМ  $N_0/2$ .

**5.17.** Символы  $a_1, a_2, a_3$ , поступающие от источника сообщений с вероятностями  $P(a_1) = P(a_2) = 0,4$  и  $P(a_3) = 0,2$ , передаются с помощью прямоугольных видеоимпульсов с длительностью  $T$  и амплитудой  $U$ . Для передачи отводится интервал времени  $[0, 2T]$ . Изменяя временное положение импульсов (но не выходя за пределы интервала  $[0, 2T]$ ) и полярность, сформировать набор сигналов, минимизирующих вероятность ошибки различения на фоне АБГШ со СПМ  $N_0/2$ . Пользуясь аддитивной границей, оценить вероятность ошибки. Считать, что  $\sqrt{2E/N_0} \gg 1$ . Как улучшить результат, если импульсы можно разделить по длительности на 2 половинки.

**5.18.** Символы  $a_1, a_2, a_3$  и  $a_4$ , поступающие от источника с вероятностями 0,1; 0,4; 0,4; 0,1 соответственно, передаются с помощью прямоугольного радиоимпульса амплитудой  $U$  и длительностью  $T$  с несущей частотой  $\omega_0$ , причем каждому символу соответствует свое значение начальной фазы. Помеха в канале – АБГШ с СПМ  $N_0/2$ . Выбрать значения начальных фаз  $\varphi_i$ , соответствующих сообщениям  $a_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Вычислить вероятность ошибки. Сопоставить ее со случаем использования симплексных сигналов.

**5.19.** В фильтре, согласованном с сигналом, представляющим собой пакет из трех прямоугольных видеоимпульсов с амплитудой  $U$ , длительностью  $\tau_{\text{и}}$  и периодом следования  $T > \tau_{\text{и}}$ , оборвался один отвод от ЛЗ. Как при подаче на вход дельта-импульса с помощью различителя определить, какой отвод оборван? На выход фильтра добавляется АБГШ с СПМ  $N_0/2$ . Считая, что выполняется условие  $U\sqrt{\tau_{\text{и}}/N_0} \gg 1$ , и пользуясь аддитивной границей, найти вероятность ошибки. Каким реальным сигналом можно заменить дельта-импульс?

**5.20.** Какой вид манипуляции (ФМ2, ЧМ2, АМ2 с активной паузой) при одинаковой средней энергии сигналов для передачи символов 1 и 0 следует выбрать, если вероятности передачи 1 и 0 ( $p$  и  $1 - p$  соответственно) различны? Привести количественные соотношения для  $P_{\text{ош}}$ .

**5.21.** В гауссовском двоичном канале связи для передачи равновероятных символов используются 2 сигнала:  $s_1(t) = \sum_{i=0}^2 a_i s_0(t - iT)$ ,  $a_i \in \{1, 1, -1\}$ , и

$s_2(t) = \sum_{i=0}^2 b_i s_0(t - iT)$ ,  $b_i \in \{-1, -1, 1\}$ , где  $s_0(t)$  – элементарные радиоимпульсы.

Из-за неисправности передатчика вместо сигнала  $s_1(t)$  стал излучаться сигнал

$s_3(t) = \sum_{i=0}^2 c_i s_0(t - iT)$ ,  $c_i \in \{-1, 1, -1\}$ . Сопоставить качественные показатели различения пар сигналов  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$  и  $s_2(t)$ ,  $s_3(t)$ .

**5.22.** Одиночная цель облучается узкополосными сигналами

$$s_1(t) = \begin{cases} U \cos(\omega_1 t), & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases} \text{ и } s_2(t) = \begin{cases} U \cos(\omega_2 t), & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T], \end{cases}, T \gg \max\left(\frac{2\pi}{\omega_1}, \frac{2\pi}{\omega_2}\right)$$

. За счет выбора частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и длительности  $T$  спектры сигналов не перекрываются. В зависимости от характера цели отраженный сигнал  $\xi(t)$  равен:  $\xi_1(t) = a_1 s_1(t - \tau)$ , или  $\xi_2(t) = a_2 s_2(t - \tau)$ , или  $\xi_3(t) = a_3 s_1(t - \tau) + a_4 s_2(t - \tau)$ . Цель неподвижная и находится на известном расстоянии. Коэффициенты  $a_1, a_2, a_3, a_4$  известны и удовлетворяют условию  $a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 + a_4^2$ . Предложить максимально правдоподобный алгоритм классификации (различения) цели и методику расчета качественных показателей. Помеха – АБГШ с СПМ  $N_0/2$ .

**5.23.** Белый гауссовский шум с СПМ  $N_0/2$  равновероятно проходит через фильтр, согласованный с прямоугольным видеоимпульсом длительностью либо  $T$ , либо  $2T$ . Предложить способ определения фильтра, через который прошел белый шум. Как оценить вероятность ошибки?

**5.24.** Подлежащие различению на фоне АБГШ с СПМ  $N_0/2$  сигналы  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  образуются из исходного прямоугольного видеоимпульса амплитудой  $U$  и длительностью  $T$  делением на две части (рис. 5.6) с сохранением временного положения частей. При каком значении параметра  $\tau$  вероятность ошибки будет минимальна?

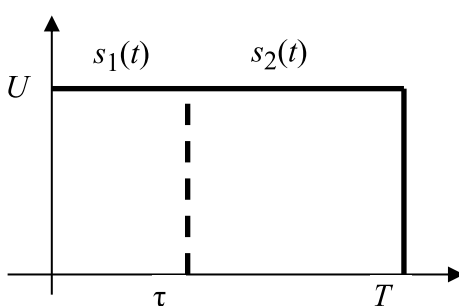


Рис. 5.6

**5.25.** Решается задача различения двух сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ . При этом  $s_1(t) = s(t)$ ,  $s_2(t) = s(-t)$ . Для какого  $s(t)$  различение будет наиболее эффективным, а для какого – наименее? Ответ обосновать.

**5.26.** Псевдослучайный процесс, представляющий собой цифровую двоичную  $M$ -последовательность длиной  $2^{100} - 1$  с алфавитом  $\{0, U\}$ , формируемый с тактовой частотой 100 МГц, используют для противодействия различению сигналов  $s_1(t) = \begin{cases} 100U, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases}$  и  $s_2(t) = -s_1(t)$ ,  $T = 1$  мс. Для различения

используется алгоритм, оптимальный для белого шума. Как изменится вероятность ошибки различения? Какие меры следует предпринять для ее уменьшения?

**5.27.** Равновероятные сигналы  $s_1(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases}$  и

$s_2(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, T/2]; \\ -2U, & t \in [T/2, T]; \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases}$  различаются на фоне АБГШ. Определить структур-

ную схему устройства различения и вычислить вероятность ошибки.

**5.28.** Сигнал  $s(t) = U \frac{\sin(2\pi Ft)}{2\pi Ft}$  поступает на вход устройства обработки

либо через ФНЧ с коэффициентом передачи  $K_1(f) = \begin{cases} K_1, & f \in [-F_1, F_1]; \\ 0, & f \notin [-F_1, F_1], \end{cases}$  либо

через ФНЧ с коэффициентом передачи  $K_2(f) = \begin{cases} K_2, & f \in [-F_2, F_2]; \\ 0, & f \notin [-F_2, F_2], \end{cases}$  на выходах

которых к сигналу добавляются независимые нормальные БШ с СПМ  $N_0/2$ . Значения  $K_1$  и  $K_2$  подобраны так, что энергии сигналов на выходе фильтров одинаковы. Предложить способ определения фильтра, через который передавался сигнал. Рассмотреть различные соотношения между  $F$ ,  $F_1$  и  $F_2$ .

**5.29.** Равновероятные символы 1 и 0 передаются с помощью прямоугольных фазоманипулированных (с градациями фазы 0 и  $\pi$ ) радиоимпульсов амплитудой  $U_1$  и длительностью  $\tau$  либо с помощью прямоугольного радиоимпульса амплитудой  $U_2$  и длительностью  $\tau$  и паузы (отсутствие сигнала).

Каким должно быть соотношение между  $U_1$  и  $U_2$ , чтобы полные вероятности ошибок при указанных способах передачи были бы одинаковы? Какими при этом будут соотношения между средними мощностями сигналов?

**5.30.** Найти структуру оптимального различителя по критерию максимального правдоподобия для сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ , являющихся четной и нечетной частями сигнала  $s(t) = \begin{cases} U_m, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T], \end{cases}$  и вычислить вероятность ошибки. Помеха – АБГШ.

**5.31.** Различаемые равновероятные сигналы  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  образуются смещением исходного четырехэлементного сигнала, определяемого кодом Баркера (1, 1, -1, 1), на расстояние  $k\tau_n$ , где  $\tau_n$  – длительность элемента, а  $k$  – целое число. При каком  $k$  вероятность ошибки различения будет минимальна?

**5.32.** Найти вероятность ошибочного различения сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ , если сигнал  $s_2(t)$  получается в результате прохождения  $s_1(t)$  через 2 последовательно включенных фильтра с импульсными характеристиками  $h_1(t) = 1/(\pi t)$  и  $h_2(t) = 2/(\pi t)$ .

**5.33.** Прямоугольный видеоимпульс  $s(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases}$  равновероятно проходит либо через канал с коэффициентом передачи  $K(j\omega) = 1$ , либо – с  $K(j\omega) = 1 - e^{-j\omega T_0}$ . Помеха в каналах – нормальный белый шум с СПМ  $N_0/2$ . При каком значении  $T_0$  будет достигнута минимальная вероятность ошибки при определении канала, через который прошел исходный сигнал  $s(t)$ . Привести оптимальную схему обработки и найти вероятность ошибки.

**5.34.** Сигналы  $s(t)$  и  $k \frac{ds(t)}{dt}$ , где  $k = 1$  с, равновероятны, имеют одинаковую энергию и  $s(\infty) = s(-\infty) = 0$ . Найти вероятность ошибки различения этих сигналов на фоне АБГШ с СПМ  $N_0/2$ .

**5.35.** Различение сигналов  $s_1(t) = U_m \frac{\sin(2\pi Ft)}{2\pi Ft}$  и

$$s_2(t) = U_m \frac{\sin[2\pi F(t - \Delta)]}{2\pi F(t - \Delta)}$$

происходит на фоне АБГШ с СПМ  $N_0/2$ . При каком значении  $\Delta$  достигаются наилучшие качественные показатели различения? Чему при этом равна вероятность ошибки?

**5.36.** По каналу в течение интервала времени  $[0, T]$  с априорными вероятностями  $p_1$  и  $p_2$  передаются 2 детерминированных сигнала  $s_1(t) \equiv 0$  и  $s_2(t) = A_0$ . В канале действует нормальный шум  $n(t)$ , дисперсия которого равна  $\sigma^2$ . Найти алгоритм работы приемника, оптимального по критерию минимума вероятности ошибки различения.

**5.37.** Найти структуру оптимального различителя сигналов  $s_1(t) = \begin{cases} U_m \sin^4(2\pi f_0 t), & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases}$  и  $s_2(t) = \begin{cases} U_m \cos^4(2\pi f_0 t), & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases}$  на фоне нормального БШ с СПМ  $N_0/2$  и вычислить вероятность ошибки, считая  $T \gg 1/f_0$ .

**5.38.** Найти вероятность ошибки различения на фоне нормального белого шума двух равновероятных сигналов с линейной частотной модуляцией

вида 
$$s_1(t) = \begin{cases} U_m \cos\left(\omega_0 t + \frac{\mu_1 t^2}{2}\right), & |t| \leq T/2; \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases}$$
 и

$$s_2(t) = \begin{cases} U_m \cos\left(\omega_0 t + \frac{\mu_2 t^2}{2}\right), & |t| \leq T/2; \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases}$$

при условиях  $\mu_1 T^2 \gg 1$ ,  $\mu_2 T^2 \gg 1$ ,  $\omega_0 \gg \mu T$  и  $\mu_1 / \mu_2 = 2$ .

**5.39.** Решается задача различения равновероятных сигналов  $s_1(t) = s_0(t) \cos(\omega_0 t)$  и  $s_2(t) = -s_1(t)$ , где  $s_0(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E}{T}}, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T], \end{cases}$  на фоне

нормального белого шума. К шуму добавилась помеха  $n(t) = \sqrt{E/T} \cos(\omega_0 t)$ . Как изменится вероятность перепутывания сигналов? Ответ обосновать.

**5.40.** Различаемые методом МП сигналы начинаются в момент времени  $t_0 = 0$  и имеют вид прямоугольных импульсов одинаковой энергии  $E$ . Как следует выбрать соотношение длительностей этих импульсов, чтобы получить минимальную ошибку их различения на фоне нормального белого шума с СПМ  $N_0/2$ ?

**5.41.** Дельта-импульс  $\delta(t)$  подается на вход одной из интегрирующих RC-цепей с постоянной времени  $T_1$  и  $T_2$ . На выходе цепи действует АБГШ с СПМ  $N_0/2$ . Определить с помощью различителя, на вход какой цепи был подан сигнал.

**5.42.** Различаются 2 сигнала  $s_1(t) = \sum_{i=0}^3 a_i s_0(t - iT)$ ,  $a_i \in \{1, 1, -1, -1\}$  и  $s_2(t) = \sum_{i=0}^3 b_i s_0(t - iT)$ ,  $b_i \in \{1, -1, -1, 1\}$ , где  $s_0(t)$  – прямоугольные радиоимпульсы. Из-за неисправности передатчика  $a_2$  стал равным нулю. Расположить сигналы во временной области так, чтобы их различение было наилучшим.

**5.43.** Передаваемый сигнал  $s(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, \tau]; \\ 0, & t \notin [0, \tau], \end{cases}$  где  $\tau$  равновероятно принимает значения  $T$  или  $2T$ . Найти максимально правдоподобный алгоритм определения длительности передаваемого сигнала. Определить вероятность ошибки. Помехой является АБГШ с СПМ  $N_0/2$ .

**5.44.** При каком значении  $T$  сигналы  $s_1(t) = U \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t}$  и  $s_2(t) = U \frac{\sin(\Omega(t - T))}{\Omega(t - T)}$  будут различаться на фоне нормального белого шума с СПМ  $N_0/2$  с наименьшей вероятностью ошибок? Какой будет эта вероятность? Во сколько раз при этом можно снизить мощность сигналов?

**5.45.** Для передачи одного бита информации используется 2 сигнала  $s_0(t)$  и  $s_1(t)$  (рис. 5.7). Во сколько раз можно было бы снизить мощность сигналов,



переходя к оптимальной паре сигналов, при условии сохранения неизменным значения вероятности ошибки?

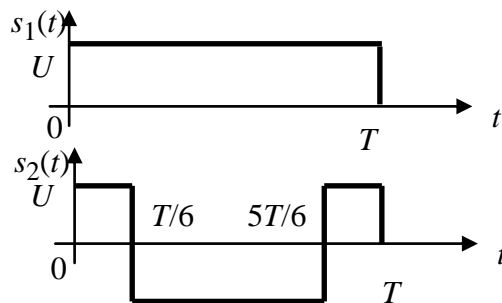


Рис. 5.7

**5.46.** Необходимо различить равновероятные сигналы  $s_1(t) = \begin{cases} a_1 + b_1 \sin \frac{\pi t}{T}, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases}$  и  $s_2(t) = \begin{cases} a_2 + b_2 \sin \frac{\pi t}{T}, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases}$  на фоне нормального белого шума с СПМ  $N_0/2$ . Значения  $a_1, b_1, a_2, b_2$  удовлетворяют условию  $a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = A$ . Как следует выбрать эти величины, чтобы вероятность ошибки различения была минимальна?

**5.47.** Финитный сигнал  $s(t)$  имеет энергию  $E$ . Найти максимальную вероятность правильного различения сигналов  $s(t)$  и  $s(-t)$  на фоне нормального белого шума с СПМ  $N_0/2$ .

**5.48.** Генератор гармонического колебания может работать на частоте 106 Гц или 107 Гц. Амплитуда сигнала – 1 мВ. СПМ нормального БШ, на фоне которого определяется частота генератора,  $N_0 / 2 = 10^{-4} \text{ В}^2/\text{Гц}$ . Сколько времени надо обрабатывать наблюдаемое колебание, чтобы вероятность ошибки в определении частоты не превысила  $10^{-2}$ ?

**5.49.** Определить вероятность ошибки при различении сигнала и его производной, считая их энергии одинаковыми и равными  $E$ , на фоне нормального белого шума с СПМ  $N_0 / 2$ .

**5.50.** Найти вероятность ошибки при различении двух сигналов (отдельно в случаях А и Б) на фоне АБГШ с СПМ  $N_0/2$ :

$$\text{A: } s_1(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T], \end{cases} \quad s_2(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, 2T]; \\ 0, & t \notin [0, 2T]; \end{cases}$$

$$\text{Б: } s_1(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T], \end{cases} \quad s_2(t) = \begin{cases} 2U, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T]. \end{cases}$$

## 6. ИЗМЕРЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ

**6.1.** Сопоставить между собой точность отдельного измерения запаздывания и частотного сдвига (при высокой точности измерений) радиотехнической системы, использующей сигналы вида

$$s(t) = \sum_{i=0}^3 a_i s_0(t - iT), \text{ где для сигнала } s_0(t) \text{ выполняются условия применимости границы Крамера–Рао, если}$$

*а)*  $\mathbf{a} = (1, 1, 1, 1)$ ; *б)*  $\mathbf{a} = (1, -1, 1, -1)$ ; *в)*  $\mathbf{a} = (1, 1, -1, 1)$ ; *г)*  $\mathbf{a} = (1, 0, 0, 0)$ . Шум – АБГШ с СПМ  $N_0/2$ .

Решение. Точность измерения неэнергетического параметра сигнала  $\lambda$  определяется дисперсией его оценки  $D_\lambda \geq -\frac{1}{q^2 \psi''(\lambda)|_{\lambda=0}}$ , где  $\psi''(\lambda)$  – вторая производная функции неопределенности по параметру;  $q$  – отношение сигнал/шум. На рис. 6.1 приведены функции неопределенности сигналов по запаздыванию.

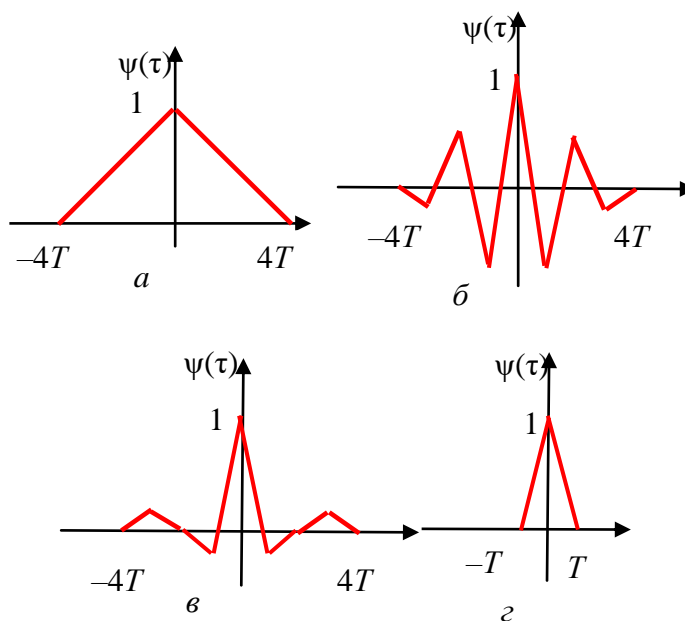


Рис. 6.1

Значение второй производной характеризует скорость изменения функции неопределенности в окрестности нуля, поэтому по убыванию точности измерения запаздывания сигналы следует расположить в порядке *б*, *в*, *а*, *г*.

Точность измерения частоты  $D_F \geq \frac{1}{q^2 T^2}$  определяется длительностью

сигнала и отношением сигнал/шум, потому сигналы  $a$ ,  $b$  и  $c$  эквивалентны, а наихудшие показатели у сигнала  $z$ .

**6.2.** Полезный сигнал неизменен и равен  $A$  в течение интервала наблюдения  $[0, T]$ , но флуктуирует от одного сеанса наблюдений к другому по экспоненциальному закону, т. е. априорная плотность вероятности

$$w(A) = \begin{cases} \alpha \exp(-\alpha A), & A \geq 0; \\ 0, & A < 0, \end{cases}$$

где  $\alpha > 0$  – известный параметр. Построить алгоритм оптимальной оценки текущего значения  $A$  по максимуму апостериорной вероятности (МАВ), если полезный сигнал принимается в аддитивной смеси с АБГШ.

Решение. Для принятого наблюдения  $y(t)$  апостериорное распределение искомой величины  $A$   $w(A | y(t)) = c w(A) w(y(t) | A)$ , где  $c$  – нормирующий множитель;  $w(y(t) | A)$  – функция правдоподобия, определяемая для АБГШ квадратом евклидова расстояния между наблюдением и полезным сигналом при значении измеряемого параметра, равном  $A$ :

$$w(y(t) | A) = k \exp\left\{-\frac{1}{N_0} \int_0^T [y(t) - A]^2 dt\right\},$$

где  $k$  – несущественный нормирующий коэффициент, а  $N_0$  – известная СПМ АБГШ. Тем самым для апостериорной плотности вероятности имеем

$$w(A | y(t)) = k_1 \exp\left(-\alpha A + 2 \frac{A}{N_0} z - \frac{A^2 T}{N_0}\right),$$

где в  $k_1$  собраны все сомножители, не зависящие от  $A$ , а

$$z = \int_0^T y(t) dt.$$

Ветви квадратного трехчлена в показателе экспоненты последнего выражения направлены вниз, и одним из его корней является  $A_1 = 0$ , тогда как второй

$$A_2 = \frac{2z - \alpha N_0}{T}.$$

Если  $A_2 \geq 0$ , максимум трехчлена и всей экспоненты приходится на точку

$$\frac{A_2}{2} = \frac{z - \alpha N_0 / 2}{T}.$$

В случае же  $A_2 < 0$  максимум трехчлена окажется в заведомо запрещенной области отрицательных значений  $A$ , так что максимум экспоненты придется на точку  $A_1 = 0$ . В итоге правило МАВ-оценки параметра  $A$  принимает вид

$$\hat{A} = \begin{cases} \frac{z - \alpha N_0 / 2}{T}, & A_2 \geq 0; \\ 0, & A_2 < 0. \end{cases}$$

**6.3.** Синтезировать правило максимально правдоподобной оценки амплитуды  $A$  сигнала  $s(t, A) = As(t)$  ( $s(t)$  – эталонный сигнал единичной амплитуды), наблюдаемого на фоне АБГШ, приняв во внимание неотрицательность амплитуды.

Решение. Квадрат евклидова расстояния между наблюдением  $y(t)$  и сигналом амплитуды  $A$

$$d^2 = \int_0^T [y(t) - As(t)]^2 dt = \int_0^T y^2(t) dt - 2Az + A^2 E,$$

где  $z = \int_0^T y(t)s(t)dt$  – корреляция наблюдения с эталонным сигналом;  $E$  – энергия эталонного сигнала. Как видно, оценка максимального правдоподобия есть значение  $A$ , обращающее в максимум квадратный двучлен  $A(2z - AE)$ , имеющий корни  $A = 0$  и  $A = 2z / E$ . Поскольку ветви двучлена обращены вниз, его максимум лежит между корнями, и, если корреляция  $z \geq 0$ , точка максимума и является искомой оценкой. При отрицательной же корреляции наибольшего (нулевого) значения двучлен достигает в крайней левой точке области допустимых значений  $A$ . В итоге максимально правдоподобная оценка  $\hat{A}$  определяется правилом

$$\hat{A} = \begin{cases} \frac{z}{E}, & z \geq 0; \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

**6.4.** Найти алгоритм оценивания количества импульсов  $M$  в пакете

$$\sum_{k=0}^{M-1} s(t-kT), \text{ где } s(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, T/2]; \\ 0, & t \notin [0, T/2], \end{cases} \text{ оптимальный по критерию максимума апостериорной вероятности, если максимально возможное количество импульсов } N, \text{ а априорное распределение их количества } M \text{ описывается биномиальным распределением с параметрами } p \text{ и } N.$$

максимума апостериорной вероятности, если максимально возможное количество импульсов  $N$ , а априорное распределение их количества  $M$  описывается биномиальным распределением с параметрами  $p$  и  $N$ .

Решение. Функция правдоподобия для данной задачи имеет вид

$$K \exp \left[ \frac{2}{N_0} \left( \sum_{k=0}^{M-1} z_k - \frac{ME_0}{N_0} \right) \right], \text{ где } z_k = \int_{kT}^{(k+1)T} y(t)s_0(t-kT)dt; \quad E_0 = \int_0^T s_0^2(t)dt.$$

Апостериорное распределение числа импульсов  $M$  с точностью до множителя, не зависящего от  $M$ :

$$W(M | y(t)) = K_1 \exp \left[ \frac{2}{N_0} \left( \sum_{k=0}^{M-1} z_k - \frac{ME_0}{2} \right) \right] C_N^M p^M (1-p)^{N-M}.$$

Максимально правдоподобная оценка числа импульсов  $\hat{M}_{МП}$  находится как  $\arg \max_{M \leq N} W(M | y(t))$ .

**6.5.** Найти МП-оценку величины постоянного сигнала  $U$  на основе наблюдения  $N$  независимых отсчетов аддитивной смеси сигнала и помехи, подчиняющихся распределению

$$w(x) = \begin{cases} \alpha \exp(-\alpha x), & x \geq 0, \alpha > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad \text{Найти смещение}$$

оценки и ее дисперсию. Какой результат выдаст измеритель после обработки выборки: {3; 0,8; 4,2; 0,2; 5; 10}?

Решение. Функция правдоподобия (ФП) имеет вид

$$\begin{cases} \prod_{i=1}^N \alpha^N \exp \left( -\alpha \sum_{i=1}^N (y_i - U) \right), & U < \min y_i; \\ 0, & U \geq \min y_i. \end{cases} \quad \text{Максимум ФП с учетом условия}$$

$U < \min y_i$  достигается при  $\hat{U}_{МП} = \min y_i$ , поэтому по полученной выборке

измеритель выдаст  $\hat{U}_{МП} = 0,2$ .

Распределение минимального элемента в выборке объемом  $N$   
 $W_{\min}(x) = N[1 - F(x)]^{N-1}W(x)$ . В данном случае  $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases}$  а

$$W(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Тогда  $M\left\{\hat{U}_{\text{МП}}\right\} = \int_U^{\infty} x N \alpha \exp[-N \alpha(x - U)] dx = U - \frac{1}{N \alpha}$ . Другими сло-

вами, смещение оценки равно  $\frac{1}{N \alpha}$ . Аналогично находится дисперсия  $\hat{U}_{\text{МП}}$ .

**6.6.** Как с помощью коррелятора и генератора шума с корреляционной функцией  $K(\tau) = \sigma^2 \frac{\sin(\pi F \tau)}{\pi F \tau}$  оценить постоянную времени интегрирующей  $RC$ -цепи?

Решение. Необходимо подать на исследуемую  $RC$ -цепь напряжение, формируемое генератором шума, и измерить с помощью коррелятора значение корреляционной функции на выходе при  $\tau = 0$  (дискретно). Так как

$$K(\tau) = \sigma^2 \frac{\sin(\pi F \tau)}{\pi F \tau} \text{ соответствует СП вида } S(f) = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{F}, & |f| \leq \frac{F}{2}; \\ 0, & |f| > \frac{F}{2}, \end{cases} \text{ то дисперсия}$$

на выходе интегрирующей  $RC$ -цепи

$$K(0) = D_{\text{вых}} = \int_{-F/2}^{F/2} \frac{\sigma^2}{F} \frac{df}{1 + (2\pi f T)^2} = \frac{\sigma^2}{FT} \operatorname{arctg}(\pi F T), \text{ откуда можно, зная } K(0)$$

и  $F$ , найти  $T$ .

$$\mathbf{6.7.} \text{ Для сигнала } s(t) = \begin{cases} Ut / T_1, & t \in [0, T_1]; \\ U \left( 1 - \frac{t - T_1}{T - T_1} \right), & t \in [T_1, T]; \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases} \text{ определить, как должны}$$

быть связаны параметры  $U$ ,  $T_1$ ,  $T$ , чтобы точность измерения временного

положения на фоне АБГШ с СПМ  $N_0/2$  оставалась неизменной при их изменении?

Решение. Дисперсия МП-оценки временного положения

$$D\{\hat{\tau} | \tau\} = \frac{N_0}{2 \int_{-\infty}^{\infty} [s'(t)]^2 dt}. \text{ Для данного сигнала } s'(t) = \begin{cases} U/T_1, t \in [0, T_1]; \\ -\frac{U}{T-T_1}, t \in [T_1, T]; \\ 0, t \notin [0, T], \end{cases}$$

этому связь параметров  $U$ ,  $T_1$ , и  $T$ , обеспечивающая неизменность  $D\{\hat{\tau} | \tau\}$ ,

$$\text{имеет вид } \int_0^T [s'(t)]^2 dt = \frac{U^2 T}{T_1(T-T_1)} = \text{const}.$$

**6.8.** Выборка  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  содержит независимые отсчеты стационарного случайного процесса, имеющего плотность вероятности

$$W(x) = \frac{a}{2} \exp(-a|x|),$$

где  $a$  – положительная константа, подлежащая измерению. Синтезировать правило максимально правдоподобной оценки параметра  $a$  по выборке  $\mathbf{x}$ .

Решение. В силу независимости отсчетов функция правдоподобия, т. е. плотность вероятности вектора  $\mathbf{x}$  при фиксированном значении измеряемого параметра  $a$ ,

$$W(\mathbf{x}|a) = \left(\frac{a}{2}\right)^n \prod_{i=1}^n \exp(-a|x_i|).$$

Логарифмирование этого выражения и отбрасывание слагаемого, не зависящего от  $a$ , дают достаточную статистику

$$z = n \ln a - a \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

максимизация которой по  $a$  дает искомое правило максимально правдоподобной оценки этого значения:

$$\hat{a} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n |x_i|}.$$



**6.9.** Обнаружить и оценить амплитудные множители  $a_i$  сигнала

$$s(t) = \sum_{i=1}^N a_i s_i(t) \text{ на фоне АБГШ с СПМ } N_0/2, \text{ если } s_i(t) - \text{полностью известные}$$

взаимно ортогональные сигналы единичной энергии. Считая  $N \gg 1$ , определить качественные показатели обнаружителя.

**6.10.** Генератор гармонических колебаний равновероятно работает либо на частоте  $f_0$ , либо на частоте  $f_1 = f_0 + \Delta f$ . Амплитуда генерируемых гармонических сигналов –  $U$ , мешающее воздействие – АБГШ с СПМ  $N_0/2$ . В течение какого времени необходимо обрабатывать сигнал, чтобы измерить частоту генерируемого колебания с заданной вероятностью ошибки  $P_{\text{ош}}$ ?

**6.11.** На вход интегрирующей  $RC$ -цепи подается белый шум с известной СПМ. Как имея в распоряжении квадратор (устройство, предназначенное для возведения в квадрат) и вольтметр постоянного напряжения, показания которого определяются величиной  $\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$  ( $x(t)$  – входной процесс,  $T$  – параметр

вольтметра), оценить постоянную времени цепи  $T_{RC}$ ? От чего будет зависеть точность измерения.

**6.12.** Оценить дисперсию узкополосного нормального шума на основе обработки  $n$  независимых отсчетов огибающей этого процесса.

$$6.13. \text{ Сигнал } s_1(t) = \begin{cases} a_1, & t \in [0, T]; \\ a_1 + a_2, & t \in [T, 2T]; \\ 0, & t \notin [0, 2T], \end{cases} \text{ помеха – АБГШ с СПМ } N_0/2.$$

Найти оценки по максимуму правдоподобия параметров  $a_1, a_2$ , определить их средние значения и дисперсии.

**6.14.** Оценить отклонение  $\Delta f$  частоты генератора гармонического колебания от номинала  $f_0$  на фоне АБГШ с СПМ  $N_0/2 = 10^{-12}$  Вт/Гц с относительной ошибкой  $\frac{\sqrt{D(\hat{\Delta f})}}{f_0} \leq 10^{-2}$ . Амплитуда гармонического колебания  $U = 10^{-5}$  В.

Сколько времени потребуется на эту операцию?

**6.15.** Сигнал вида  $s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} s_0(t-kT)$  наблюдается на фоне АБГШ с

СПМ  $N_0/2$ . Найти максимально правдоподобную оценку количества импульсов в пакете.

**6.16.** Передаваемый сигнал  $s(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, \tau]; \\ 0, & t \notin [0, \tau], \end{cases}$  где  $\tau$  равновероятно принимает значения  $T$  или  $2T$ . Найти максимально правдоподобный алгоритм

определения длительности передаваемого сигнала. Определить вероятность ошибки. Помехой является АБГШ с СПМ  $N_0/2$ .

**6.17.** Сигнал  $s(t) = s_0(t-kT)$ , где  $k$  равновероятно принимает значения  $0, 1, \dots, M-1$ , передается с вероятностью 0,5 по каналу с АБГШ с СПМ  $N_0/2$ . Определить максимально правдоподобный алгоритм обнаружения факта передачи сигнала и оценки его временного сдвига  $kT$ . Сигнал  $s_0(t) = \begin{cases} U, & t \in [0, \tau]; \\ 0, & t \notin [0, \tau], \end{cases}$

$T = 4\tau$ , выполняется условие  $\sqrt{\frac{2U^2\tau}{N_0}} \gg 1$ . Определить вероятности ложной тревоги  $P_{л.т}$  и пропуска сигнала  $P_{п.с}$ , пользуясь аддитивной границей, оценить вероятность ошибки при определении временного сдвига передаваемого сигнала.

**6.18.** В передаваемом сигнале  $s(t) = \sum_{k=0}^1 a_k s_0(t-kT)$ , наблюдаемом на

фоне АБГШ с СПМ  $N_0/2$ , коэффициенты  $a_k$  – независимые случайные величины, равновероятно принимающие значения  $\pm 1$ . Найти максимально правдоподобную оценку коэффициентов  $a_k$ . Считая, что отношение сигнал/шум, приходящееся на одиночный импульс,  $q_0 \gg 1$ , определить вероятность ошибки, используя аддитивную границу.

**6.19.** Сигнал  $s(t)$  поступает на приемную сторону с задержкой на время  $T_1$  или  $T_2$  на фоне АБГШ с СПМ  $N_0/2$ . Необходимо определить время задержки сигнала. Как следует выбрать сигнал  $s(t)$ , если наложены ограничения на длительность сигнала, пиковую мощность и эффективную ширину спектра?

**6.20.** На вход интегрирующей  $RC$ -цепи подается белый шум с известной спектральной плотностью мощности  $N_0 / 2$ . Как измерить постоянную времени цепи? От чего и как будет зависеть точность измерения?

**6.21.** Комплексная огибающая сигнала локационной системы имеет вид  $\dot{S}(t) = \sum_{i=0}^3 \dot{S}_{0i}(t - iT)$ , где  $\dot{S}_{0i}(t) = \begin{cases} U \exp(j2\pi b_i \Delta F), & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T]; \end{cases}$   $\Delta F = 1/T$ ;  $b_i$  – коэффициенты, принимающие целочисленные значения. Как следует выбрать последовательность  $\{b_i\}$  ( $i = 0, 1, \dots, 4$ ) для обеспечения наилучшего разрешения сигналов одновременно по дальности и скорости? Какими параметрами сигнала определяется качество разрешения по дальности и по скорости?

**6.22.** Сопоставить потенциальную точность измерения запаздывания сигналов  $s_1(t) = U \exp(-t^2 / T^2)$  и  $s_2(t) = U \exp(-t^2 / T^2) \cos(2\pi f_0 t)$  ( $T \gg 1/f_0$ ) при их обработке на фоне АБГШ с СПМ  $N_0 / 2$ .

**6.23.** Необходимо измерить задержку между сигналами  $U_1 s(t - \tau_1)$  и  $U_2 s(t - \tau_2)$ , наблюдаемыми на интервале  $[0, T]$  на фоне АБГШ с СПМ  $N_0 / 2$ . Найти структуру измерителя, оптимального по критерию максимума правдоподобия, и вычислить СКО измерений. Сигнал  $s(t)$  имеет вид  $s(t) = U \cos(2\pi f_0 t + \mu t^2 / 2)$ ,  $t \in [0, T]$ .

**6.24.** Задержка наблюдаемого сигнала представляет собой дискретную величину, принимающую значения  $\tau = k\Delta t$ , ( $k = 1, 2, 3$ ). Сигнал имеет форму прямоугольного видеоимпульса амплитудой  $U$  и длительностью  $T$ . Найти вероятность безошибочной оценки времени задержки  $\tau$  для двух случаев:  $\Delta t > T$  и  $\Delta t = T/2$ .

**6.25.** Решить задачу обнаружения и оценивания амплитуды и времени запаздывания прямоугольного видеоимпульса длительностью  $T$  на фоне АБГШ с СПМ  $N_0 / 2$ . Априорные распределения времени запаздывания  $\tau$  и амплитудного множителя  $A$  – равномерные на интервалах  $[\tau_{\min}, \tau_{\max}]$  и  $[A_{\min}, A_{\max}]$  соответственно. Найти структуру устройства, решающего поставленную задачу, и оценить ее качественные показатели.

**6.26.** Генератор может работать на одной из частот  $f_k = f_0 + k\Delta f$  ( $k = 0, 1, \dots, N-1$ ). Какое время  $T$  потребуется для определения с вероятностью  $P_{\text{ош}}$  частоты работы генератора? Наблюдение ведется на фоне АБГШ с СПМ  $N_0/2$ . Амплитуда сигнала  $U$  и СПМ  $N_0/2$  таковы, что при заданном значении  $P_{\text{ош}}$  должно выполняться условие  $1/T \ll \Delta f$ .

**6.27.** Скорость сближения двух автомобилей, едущих навстречу друг другу по прямой, измеряется доплеровским методом. Частота ультразвукового излучателя  $f_0 = 40$  кГц, амплитуда сигнала на выходе преобразователя – 1 мВ, СПМ АБГШ  $N_0/2 = 10^{-10}$  В<sup>2</sup>/Гц. Определить требуемое время измерения, при котором среднеквадратическая ошибка измерения скорости не превысит 0,1 м/с. Скорость звука в воздухе принять равной 340 м/с.

**6.28.** Сигнал  $s(t) = \begin{cases} U_1, & t \in [0, T/2]; \\ U_2, & t \in [T/2, T]; \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases}$  наблюдается на фоне АБГШ с СПМ

$N_0/2$ . Найти алгоритм МП-оценки амплитуд  $U_1$  и  $U_2$ . Какой должна быть длительность сигнала  $T$ , чтобы при  $N_0/2 = 10^{-8}$  В<sup>2</sup>/Гц получить среднеквадратическую ошибку измерения амплитуд 1 мВ?

**6.29.** Определить (с обоснованием) потенциальную точность оценки фазы радиосигнала  $S(t, \varphi_0) = a \sin\left(\frac{t}{T}\pi\right) \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$  ( $0 \leq t \leq T$ ,  $\frac{2\pi}{\omega_0} \ll T$ ), наблюдаемого на фоне белого гауссовского шума с СПМ  $N_0/2$ .

**6.30.** Определить дисперсию оценки разности  $\tau = \tau_1 - \tau_2$  временного положения двух неперекрывающихся радиоимпульсов  $s(t - \tau_1) = A s_0(t - \tau_1) \cos(\omega t + \varphi_1)$  и  $s(t - \tau_2) = A s_0(t - \tau_2) \cos(\omega t + \varphi_2)$  с огибающей  $s_0(t) = \exp\left(-\frac{2,8t^2}{\tau_{\text{и}}^2}\right)$  и случайными независимыми и равномерно распределенными на интервале  $[-\pi, \pi]$  начальными фазами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , принятых на фоне белого шума  $n(t)$  в интервале времени  $(0, T)$  при высокой достоверности проводимых измерений.

**6.31.** Сигнал (рис. 6.2) с вероятностью 0,5 пропускается через нелинейный элемент, называемый ограничителем, с характеристикой

$$f(x) = \begin{cases} -U_m / 2, & x \in (-\infty, -U_m / 2); \\ x, & x \in [-U_m / 2, U_m / 2]; \\ U_m / 2, & x \in (U_m / 2, \infty). \end{cases}$$

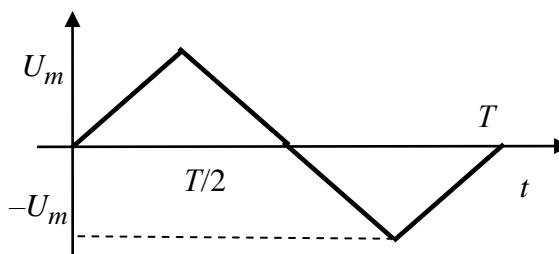


Рис. 6.2

Найти максимально правдоподобный алгоритм определения, был ли сигнал  $s(t)$  пропущен через данное устройство. Помеха – АБГШ с СПМ  $N_0/2$ . Найти вероятность ошибки.

**6.32.** У сигнала  $s(t) = U_m \exp(-A|t|)$  изменяется параметр  $A$ . Как следует при этом менять  $U_m$ , чтобы точность измерения временного положения данного сигнала на фоне АБГШ оставалась неизменной? Считать  $q = \sqrt{2E/N_0} \gg 1$  (аномальными ошибками можно пренебречь).

**6.33.** Для оценки постоянной времени интегрирующей  $RC$ -цепи используется  $N$  практически независимых отсчетов выходного сигнала. Входной сигнал – нормальный БШ с СПМ  $N_0/2$ . Найти максимально правдоподобную оценку постоянной времени цепи.

**6.34.** Случайная величина  $\xi$  имеет плотность вероятности  $W(\xi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi - m}{\sigma}\right)^2\right\}$  с неизвестными средним значением  $m$  и дисперсией  $\sigma^2$ . В результате наблюдений получены  $n$  независимых значений  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  случайной величины  $\xi$ . Доказать, что максимально правдоподобное значение оценки величины  $m$  есть среднее арифметическое величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ .

**6.35.** Найти алгоритм формирования МП-оценки длительности прямоугольного видеоимпульса амплитудой  $U_m$  с началом в момент  $t = 0$ . Помеха – АБГШ с СПМ  $N_0/2$ .

**6.36.** Определить потенциальную точность оценки постоянной скорости сближения  $v$  передатчика, излучающего гармоническое колебание с постоянной амплитудой и известной частотой  $f_0$ , и неподвижного приемника, полученной на основе использования эффекта Доплера. Амплитуда принимаемого колебания  $U_m$ , помеха – нормальный белый шум с СПМ  $N_0/2$ . Время излучения  $T$  и амплитуда сигнала  $U_m$  обеспечивают выполнение условия  $q = \sqrt{\frac{2E}{N_0}} \gg 1$ , где  $E$  – энергия обрабатываемого полезного сигнала.

**6.37.** Оценить методом МП временное положение сигнала  $s(t) = U \frac{\sin(\Omega(t - \tau))}{\Omega(t - \tau)}$ , принимаемого на фоне нормального белого шума с СПМ  $N_0/2$ . Параметры сигнала  $U$ ,  $\Omega$  известны. Найти структуру максимально правдоподобного измерителя и среднеквадратическую ошибку оценки  $\tau$ .

**6.38.** В пачке, состоящей из двух одинаковых прямоугольных видеоимпульсов с амплитудой  $U_m$  и длительностью  $\tau_{\text{и}}$ , второй импульс может отстоять от начала первого, время прихода которого известно, на  $K\tau_{\text{и}}$ , где  $K$  принимает значения от 1 до  $N$ . Необходимо определить методом максимального правдоподобия  $K$ . Помеха – АБГШ с СПМ  $N_0/2$ .

**6.39.** Найти байесовскую по критерию минимума среднеквадратической ошибки оценку некоторого параметра  $Q$ , если апостериорная плотность распределения  $w(Q|y)$  параметра  $Q$  представляет собой взвешенную сумму разнесенных на расстояние  $2b$  гауссовских плотностей:

$$w(Q|y) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}\sigma_Q} \exp\left(-\frac{(Q - y + b)^2}{2\sigma_Q^2}\right) + \frac{1-a}{\sqrt{2\pi}\sigma_Q} \exp\left(-\frac{(Q - y - b)^2}{2\sigma_Q^2}\right),$$

где  $a$  – коэффициент ( $0 \leq a \leq 1$ ).

**6.40.** Вычислить дисперсию МП-оценки временного положения  $\tau_0$  гаус-

совского импульса  $s(t, \tau_0) = a \exp\left[-\frac{2,8(t - \tau_0)^2}{\tau_{\text{и}}^2}\right]$  при оптимальном приеме

на фоне коррелированного шума, корреляционная функция которого  $R(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha\tau^2)$ . Предполагается, что практически весь импульс находится внутри интервала наблюдения  $[0, T_{\text{н}}]$ .

**6.41.** Необходимо измерить временной интервал между двумя сигналами

$s_1(t) = U_{m1} \frac{\sin(\Omega_1(t - \tau_1))}{\Omega_1(t - \tau_1)}$  и  $s_2(t) = U_{m2} \frac{\sin(\Omega_2(t - \tau_2))}{\Omega_2(t - \tau_2)}$  на фоне нормального

белого шума, т. е. оценить величину  $\Delta t = \tau_2 - \tau_1$ . Амплитуды  $U_{m1}$  и  $U_{m2}$

должны удовлетворять условию  $U_{m1}^2 + U_{m2}^2 = U_m^2$ .

Как выбрать  $U_{m1}$  и  $U_{m2}$ , чтобы среднеквадратическая ошибка была минимальна, и найти ее значение. Считать, что минимальная задержка между сигналами  $\Delta t_{\text{min}} \gg \max\{2\pi/\Omega_1, 2\pi/\Omega_2\}$ , спектры сигналов не перекрываются и отношение сигнал/шум на выходе фильтров, согласованных с сигналами, много больше единицы.

**6.42.** Необходимо измерить разность фаз колебаний  $U_{m1} \sin(\omega_0 t - \varphi_1)$  и  $U_{m2} \sin(\omega_0 t - \varphi_2)$ , принимаемых по двум каналам в течение времени  $T$ . Помехи в каналах независимы и являются нормальным белым шумом. Найти алгоритм оценивания и определить его точность.

**6.43.** Излучаемый сигнал может содержать 1 или 2 прямоугольных импульса, все параметры которых в точке приема известны. Возможно отсутствие излучения. Определить факт получения и оценить количество излучаемых в этом случае сигналов. Предложить структурную схему и для заданного значения вероятности ложной тревоги определить вероятность ошибки при определении числа импульсов, считая амплитуду импульсов равной  $U_m$ , а длительность —  $\tau$ .

**6.44.** Обработываемое колебание представляет собой последовательность отсчетов, взятых из принятой реализации  $y_i = x_i + s_i$  ( $i = \overline{1, N}$ ), где  $x_i$  — независимые отсчеты шумовой составляющей, каждый из которых имеет нулевое

среднее и дисперсию  $\sigma^2$ ;  $s_i$  – отсчеты сигнальной компоненты, представляющей собой случайный синхронный телеграфный сигнал

$$s(t) = \sum_{k=1}^N a_k s_0(t - (k-1)T); \quad a_k \in \{\pm 1\} \text{ – псевдослучайная последовательность;}$$

$$s_0(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T]. \end{cases} \text{ Считая, что на длительности } T \text{ укладывается несколько}$$

отсчетов, предложить алгоритм определения отношения сигнал/шум в принятой реализации.

**6.45.** На интервале наблюдения  $[0, T]$  обнаружить, определить количество и оценить временное положение группы неперекрывающихся треугольных импульсов амплитудой  $U$  и длительностью  $\tau = T/100$ , случайным образом расположенных на интервале наблюдения. Помеха – АБГШ с СПМ  $N_0/2$ . Предложить и обосновать алгоритм решения данной задачи и привести основные расчетные соотношения. Считать, что отношение сигнал/шум на выходе СФ много больше единицы.

**6.46.** Аддитивная гауссовская помеха имеет спектральную плотность мощности  $G(f)$  (рис. 6.3). Как следует выбрать параметр  $\mu$  у импульса  $s(t) = U \cos(2\pi f_0 t + \mu t^2 / 2 + \varphi)$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $\varphi$  – случайная начальная фаза с  $w(\varphi) = 1/(2\pi)$  при решении задачи обнаружения? При оценке времени запаздывания?

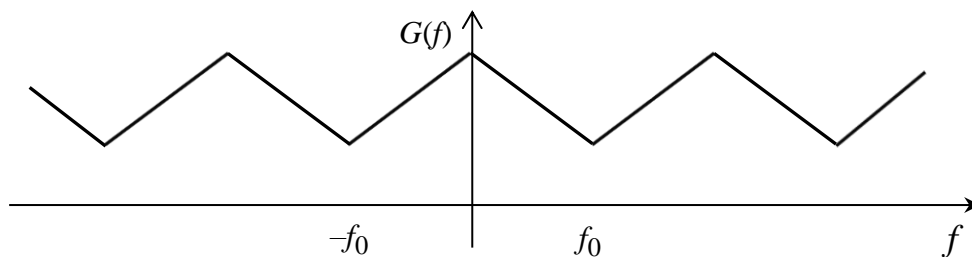


Рис. 6.3

**6.47.** Построить оптимальный байесовский (при простой функции потерь  $P(\lambda, \hat{\lambda}) = 1 - \delta(\lambda - \hat{\lambda})$ ) алгоритм оценивания на фоне нормального белого шума с амплитудой  $A$  сигнала  $s(t) = \begin{cases} A \cos(\omega_0 t + \varphi), & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T], \end{cases}$  если фаза  $\varphi$



равновероятно принимает значения 0 или  $\pi$ . Считать амплитуду  $A$  рэлеевской случайной величиной.

**6.48.** Определить минимальную (потенциально достижимую) дисперсию ошибки оценки фазы радиосигнала  $s(t, \varphi_0) = a \sin(\frac{t}{T} \pi) \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , наблюдаемого на фоне белого гауссовского шума со спектральной плотностью  $N_0/2$ .

**6.49.** Необходимо оценить начальную фазу гармонического колебания  $U \cos(\omega_0 t + \varphi)$  на фоне нормального белого шума с СПМ  $N_0/2$ . Каким должен быть интервал наблюдения  $[0, T]$ , чтобы выполнилось условие  $\sigma_{\varphi}^2 \leq \sigma^2$ ?

**6.50.** При использовании границы Крамера–Рао для дисперсии оценки временного запаздывания прямоугольного импульса при любом конечном значении спектральной плотности мощности аддитивного белого гауссовского шума  $N_0/2$  получаем нулевое значение (т. е. бесконечно высокую точность измерения). Объяснить данный парадокс.

**6.51.** Сигнал вида  $s(t) = U \frac{\sin(\Omega(t - \tau))}{\Omega(t - \tau)}$  может появиться на входе обнаружителя равновероятно с запаздыванием  $\tau = k\Delta t$ , где  $k = 1, 2, \dots, N$ , а  $\Delta t = \pi / \Omega$ . Какой должна быть амплитуда сигнала, чтобы на фоне аддитивного белого гауссовского шума со спектральной плотностью мощности  $N_0/2$  обеспечить вероятности ложной тревоги  $\alpha = 10^{-6}$  и пропуска  $\beta = 10^{-4}$ , а также среднеквадратическую ошибку оценивания  $\tau$ , равную  $\sigma_\tau$ ? Параметр  $\Omega$  считается заданным,  $N = 100$ .

**6.52.** Измеряемая методом максимального правдоподобия частота гармонического колебания  $U_m \cos(\Omega t)$  лежит в диапазоне  $[\Omega_{\min}, \Omega_{\max}]$ . Какое минимальное число периодов необходимо обработать, чтобы измерить частоту с относительной ошибкой  $\sigma_{\Omega} / \Omega = 1\%$ ? Измерения проводятся на фоне нормального белого шума со спектральной плотностью мощности  $N_0/2$ .

**6.53.** Какое максимальное число периодов гармонического колебания  $A \cos(\omega_0 t + \varphi)$  необходимо обработать, чтобы измерить методом

максимального правдоподобия амплитуду  $A$  с относительной ошибкой  $\sigma_{\hat{A}} / A = 1\%$  и фазу с точностью  $\sigma_{\hat{\varphi}} = 0,1^\circ$ ? Значение амплитуды лежит в диапазоне  $[A_{\min}, A_{\max}]$ , а фазы – в диапазоне  $[0, 2\pi]$ . Частота  $\omega_0$  известна. Измерения проводятся на фоне нормального белого шума со спектральной плотностью мощности  $N_0/2$ .

## 7. РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ

**7.1.** Рассматривается система, спектр полезного сигнала которой равномерен в полосе от нуля до  $W$ . Принятое колебание  $y(t)$  обрабатывается СФ, рассчитанным на белый шум. Пока  $y(t)$  содержит только полезный сигнал в смеси с аддитивным белым шумом, отношение сигнал/шум  $q$  после СФ составляет 13 дБ. Злоумышленник пытается вывести систему из строя, создавая шумовую помеху с равномерным спектром в полосе  $W_j \leq W$ . Во сколько раз мощность помехи должна превосходить мощность белого шума в полосе СФ, если для достижения своей цели злоумышленнику требуется снизить отношение мощностей сигнала и совокупной помехи (помеха + шум) после СФ до 3 дБ?

Решение. Пусть  $E$  – энергия принятого сигнала. Тогда амплитудно-частотный спектр последнего в пределах занимаемой полосы  $|\tilde{s}(f)| = \sqrt{\frac{E}{2W}}$ .

СФ с амплитудно-частотной характеристикой в полосе сигнала, равной единице, просуммирует все гармоники сигнала синфазно, так что полезная мощность на его выходе  $P_s = [2W|\tilde{s}(f)|]^2 = 2WE$ .

Белый шум с односторонней СПМ  $N_0$  создаст на выходе СФ мощность  $N_0W$ , помеха же пройдет через фильтр, не изменив своей мощности  $P_j$ . В итоге отношение сигнал/(помеха + шум) по мощности после СФ

$$q_j^2 = \frac{P_s}{N_0W + P_j} = \frac{2E}{N_0 \left(1 + \frac{P_j}{N_0W}\right)} = \frac{q^2}{1 + \frac{P_j}{N_0W}},$$

откуда  $\frac{P_j}{N_0W} = \frac{q^2}{q_j^2} - 1$ .

При  $q^2 = 20$  (13 дБ),  $q_j^2 = 2$  (3 дБ) мощность помехи для достижения поставленной задачи должна превосходить мощность белого шума в  $\frac{P_j}{N_0W} = 9$  раз.

**7.2.** Радиолокационная станция (РЛС) кругового обзора фиксирует присутствие цели на данном направлении, если в ответ на  $n$  зондирований получено не менее  $k \leq n$  отметок от цели. Каковы вероятности правильного обнаружения и ложной тревоги при условии, что истинная отметка подавляется шумом с вероятностью  $q$ , а ложная отметка создается шумом с вероятностью  $p$ ? Конкретизировать результаты для  $n = 5$ ,  $k = 3$ ,  $q = 0,1$  и  $p = 0,01$ .

Решение. Правильное обнаружение наблюдается, когда шумом подавляется  $i \leq n - k$  истинных (т. е. полученных от реально присутствующей цели) отметок, поэтому вероятность правильного обнаружения

$$P_{\text{п.о}} = \sum_{i=0}^{n-k-1} C_n^i q^i (1-q)^{n-i} ..$$

Подобным же образом для осуществления ложной тревоги необходимо получение РЛС  $i \geq k$  ложных отметок. Отсюда вероятность ложной тревоги

$$P_{\text{л.т}} = \sum_{i=k}^n C_n^i p^i (1-p)^{n-i} ..$$

Для значений, определенных заданием,

$$P_{\text{п.о}} = 0,9^5 + 5 \cdot 0,1 \cdot 0,9^4 + 10 \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^3 \approx 0,9914,$$

$$P_{\text{л.т}} = 10 \cdot 0,01^3 \cdot 0,99^2 + 5 \cdot 0,01^4 \cdot 0,99 + 0,01^5 \approx 9,851 \cdot 10^{-6}.$$

**7.3.** Прямоугольный радиоимпульс с несущей частотой  $f_0$  и длительностью  $T$  ( $f_0 T \gg 1$ ) в аддитивной смеси с белым шумом поступает на коррелятор. Из-за погрешностей петли синхронизации опорный радиоимпульс может иметь фазовый сдвиг относительно принимаемого вплоть до  $\pm \pi / 6$ . Оценить максимальные энергетические потери (в децибелах), обусловленные подобной ошибкой.

Решение. В отсутствие фазовой ошибки полезный сигнал на выходе коррелятора

$$U_0 = \int_0^T A \cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0 t) dt = \frac{AT}{2},$$

где  $A$  – амплитуда принятого сигнала. При фазовом сдвиге опоры  $\varphi$  выход коррелятора становится равным

$$U_{\varphi} = \int_0^T A \cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi) dt = \frac{AT}{2} \cos \varphi.$$

Таким образом, энергетический проигрыш из-за фазовой ошибки

$$\gamma = \left( \frac{U_0}{U_{\varphi}} \right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \varphi}.$$

Наибольшее значение этой величины  $\gamma_{\max}$  будет при  $\varphi = \pm \pi/6$ :  $\gamma_{\max} = 4/3$ , или 1,25 дБ.

**7.4.** На вход двоичного канала нулевой символ поступает с вероятностью  $w_0$ . Канал симметричен, т. е. преобразует любой из двух возможных символов на входе в противоположный символ на выходе с одной и той же вероятностью  $p$ . Имеет ли смысл использовать такой канал в режиме посимвольного приема, т. е. когда решение о том, какой символ передан, принимается по каждому выходному символу индивидуально, если  $w_0 = 3/4$ , а  $p = 4/15$ ?

Решение. Обозначив выходной символ как  $y$ , из формулы Байеса для апостериорной вероятности входного символа  $x$  имеем:

$$p(x = y | y) = \begin{cases} \frac{w_0(1-p)}{w_0(1-p) + (1-w_0)p}, & y = 0; \\ \frac{(1-w_0)(1-p)}{(1-w_0)(1-p) + w_0p}, & y = 1. \end{cases}$$

Подставив сюда указанные в задании значения вероятностей, получим

$$p(x=0|y=0) = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{11}{15}}{\frac{3}{4} \cdot \frac{11}{15} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{15}} = \frac{33}{37}, \quad p(x=1|y=1) = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{11}{15}}{\frac{1}{4} \cdot \frac{11}{15} + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{15}} = \frac{11}{23}.$$

Отсюда следует, что по правилу максимума апостериорной вероятности при любом значении выходного символа придется принять решение о том, что был передан нулевой символ, а это значит, что никакой передачи информации от входа к выходу не происходит.

**7.5.** Вероятности подачи на вход троичного канала связи символов  $-1, 0, 1$  равны соответственно  $1/4, 1/2, 1/4$ . Вероятности принятия на выходе нулевого входного символа за каждый из ненулевых равны  $0,2$ ; вероятность принятия ненулевого символа за противоположный составляет  $0,05$ , а за нулевой –  $0,1$ .

На выходе зафиксирован символ 1. Какова при этом вероятность передачи каждого из трех возможных символов?

Решение. Пусть  $a$  и  $b$  – соответственно входной и выходной символы. Безусловная вероятность  $P(b = 1)$ :

$$P(b = 1) = P(a = -1)P(b = 1 | a = -1) + P(a = 0)P(b = 1 | a = 0) + P(a = 1)P(b = 1 | a = 1) = 0,25 \cdot 0,05 + 0,5 \cdot 0,2 + 0,25 \cdot 0,85 = 0,2350.$$

По формуле Байеса вероятности  $P(a|b)$  передачи символов  $-1, 0, 1$  при условии фиксации на выходе символа  $b = 1$  найдутся как

$$P(a = -1 | b = 1) = \frac{P(a = -1) \cdot P(b = 1 | a = -1)}{P(b = 1)} = \frac{0,25 \cdot 0,05}{0,2350} \approx 0,0532,$$

$$P(a = 0 | b = 1) = \frac{P(a = 0) \cdot P(b = 1 | a = 0)}{P(b = 1)} = \frac{0,5 \cdot 0,2}{0,2350} \approx 0,0425,$$

$$P(a = 1 | b = 1) = \frac{P(a = 1) \cdot P(b = 1 | a = 1)}{P(b = 1)} = \frac{0,25 \cdot 0,85}{0,2350} \approx 0,9043.$$

**7.6.** Какое из двух «плоских» сигнальных созвездий (рис. 7.1) энергетически выгоднее для передачи  $M = 6$  сообщений при достаточно большом отношении сигнал/шум? Каков энергетический выигрыш лучшего созвездия по отношению к менее выгодному?

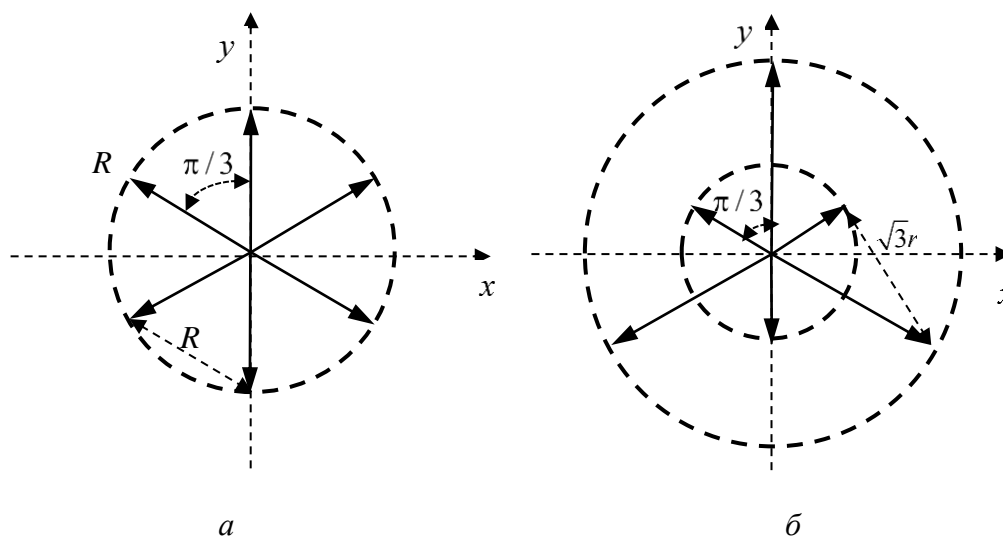


Рис. 7.1

Решение. При большом отношении сигнал/шум перепутывание истинного сигнала практически всегда происходит с соседним, поэтому адекватно сравнение методов передачи по минимальному евклидову расстоянию между

сигнальными векторами при фиксированной средней энергии обоих созвездий. Для созвездия (а) квадрат минимального расстояния  $d_a^2 = R^2 = E$ , где  $E$  – энергия любого из сигналов. Для созвездия (б) квадрат минимального расстояния между внутренними векторами

$$d_{61}^2 = 2r^2 \left( 1 - 2 \cos \frac{2\pi}{3} \right) = 3r^2,$$

равен аналогичному расстоянию между внутренним и внешним векторами:

$$d_{62}^2 = 4r^2 + r^2 - 2 \cdot 2r^2 \cos \frac{\pi}{3} = 3r^2.$$

Тем самым квадрат минимального расстояния для второго семейства  $d_6^2 = 3r^2$ . Среднюю энергию  $\bar{E}_6 = \frac{1}{6}(3 \cdot 4r^2 + 3r^2) = \frac{5}{2}r^2$  для второго созвездия следует приравнять таковой для первого, т. е.  $E$ , откуда  $r^2 = 2E/5$  и  $d_6^2 = 6E/5$ . Как видно,  $d_6^2 > d_a^2$ , значит, второе созвездие предпочтительнее первого с точки зрения надежности передачи. Соответственно, энергетический выигрыш второго созвездия относительно первого  $G = \frac{d_6^2}{d_a^2} = \frac{6}{5}$  (0,7 дБ).

Это означает, что при использовании второго семейства энергозатраты окажутся на 0,7 дБ ниже, чем первого, при той же вероятности ошибки.

**7.7.** Система радиопротиводействия, пытаясь подавить сигнал со спектральной плотностью (рис. 7.2, а), где  $S_1$  и  $S_2$  – заданные константы, излучает шумовую помеху со спектром мощности, показанным на рис. 7.2, б). Смысл обозначений ясен из рисунка. При каком соотношении между  $G_1$  и  $G_2$  эффективность противодействия максимальна, если полная мощность помехи  $P_{\Pi}$  ограничена?

Решение. Отношение сигнал/шум по мощности  $q^2$  после фильтра, согласованного с сигналом для данного шума:

$$q^2 = \frac{W}{2} \left( \frac{S_1^2}{G_1} + \frac{S_2^2}{G_2} \right).$$

При фиксированной мощности помехи  $\frac{W}{2}(G_1 + G_2) = P_{\Pi}$ .

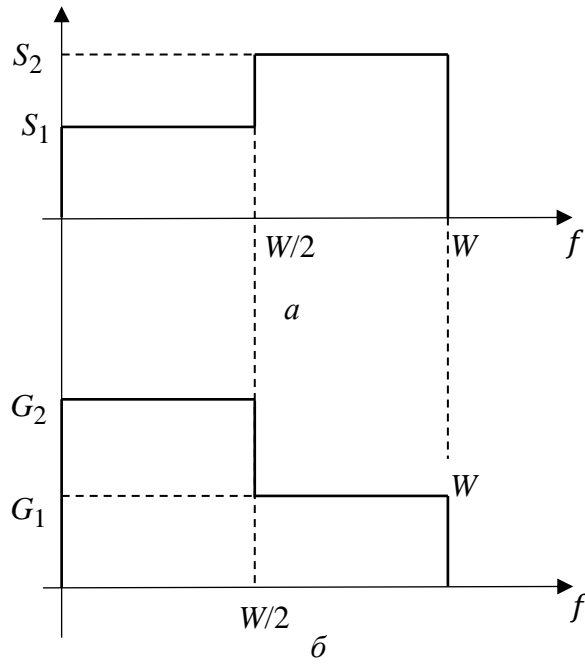


Рис. 7.2

Отсюда  $G_2 = \frac{2P_{\Pi}}{W} - G_1$ , и

$$q^2 = \frac{W}{2} \left( \frac{S_1^2}{G_1} + \frac{S_2^2}{\frac{2P_{\Pi}}{W} - G_1} \right).$$

Дифференцируя по  $G_1$  выражение в скобках и приравнявая нулю, получим

$$S_1^2 \left( \frac{2P_{\Pi}}{W} - G_1 \right)^2 - S_2^2 G_1^2 = 0,$$

откуда  $\frac{\frac{2P_{\Pi}}{W} - G_1}{G_1} = \frac{S_2}{S_1}$ , т. е.  $\frac{G_2}{G_1} = \frac{S_2}{S_1}$ .

Как видно, значения СПМ наиболее эффективной помехи пропорциональны значениям амплитудного спектра сигнала.

**7.8.** Амплитудный спектр сигнала  $|s(f)|$  неравномерен в занимаемой полосе  $W$ . Эксперты по радиопротиводействию А и Б полемизируют о том, какая из помех более эффективна с точки зрения подавления этого сигнала:



А утверждает, что лучше помеха со спектром, воспроизводящим по форме энергетический спектр сигнала, тогда как Б отдает предпочтение помехе, спектр которой повторяет амплитудный спектр сигнала. Кто из них прав?

Решение. Отношение сигнал/помеха по мощности на выходе согласованного фильтра приемника дается равенством

$$q^2 = \int_{-W/2}^{W/2} \frac{|s(f)|^2}{G(f)} df,$$

где  $G(f)$  – спектр мощности помехи. Пусть  $P_{\Pi}$  – полная мощность помехи, которую для корректности сравнения следует положить фиксированной. Тогда для варианта А

$$G(f) = k |s(f)|^2,$$

где  $k$  – масштабный коэффициент. Таким образом, в этом случае отношение сигнал/помеха  $q_A^2 = \frac{W}{k}$ .

Поскольку полная мощность помехи может быть определена как  $\int_{-W/2}^{W/2} G(f) df = \int_{-W/2}^{W/2} |s(f)|^2 df = P_{\Pi}$ , то масштабный коэффициент  $k = P_{\Pi} / E$ ,

где  $E$  – энергия сигнала, а отношение сигнал/шум –  $q_A^2 = \frac{WE}{P_{\Pi}}$ .

В варианте Б СПМ помехи пропорциональна модулю спектра сигнала  $G(f) = k |s(f)|$ . Поэтому мощность помехи может быть найдена как

$\int_{-W/2}^{W/2} G(f) df = k \int_{-W/2}^{W/2} |s(f)| df = P_{\Pi}$ , а масштабный коэффициент

$k = P_{\Pi} / \int_{-W/2}^{W/2} |s(f)| df$ , так что отношение сигнал/помеха для этого сценария

$$q_B^2 = \frac{\left[ \int_{-W/2}^{W/2} |s(f)| df \right]^2}{P_{\Pi}}.$$

Согласно неравенству Буняковского–Шварца

$$\left[ \int_{-W/2}^{W/2} |s(f)| df \right]^2 \leq W \int_{-W/2}^{W/2} |s(f)|^2 df = WE,$$

где равенство достигается только при равномерном спектре. Тем самым  $q_A^2 < q_B^2$ , что доказывает правоту эксперта Б.

**7.9.** Целью модернизации импульсной РЛС является четырехкратное снижение пиковой мощности при одновременном уменьшении среднеквадратических погрешностей оценок дальности и скорости соответственно в 2 и 4 раза. Какие параметры импульса и в каких пропорциях следует изменить?

Решение. Среднеквадратическая погрешность  $\sigma_\tau$  измерения запаздывания эхо-сигнала (эквивалентно дальности до цели) обратно пропорциональна отношению сигнал/шум  $q$  и ширине спектра импульса  $W$ :

$$\sigma_\tau \approx \frac{a}{qW} = \frac{b}{\sqrt{PTW}},$$

где  $a, b$  – известные константы;  $P$  и  $T$  – соответственно мощность и длительность импульса. Среднеквадратическая погрешность  $\sigma_f$  измерения частоты отраженного сигнала (эквивалентно скорости цели) обратно пропорциональна отношению сигнал/шум и длительности импульса:

$$\sigma_f \approx \frac{c}{qT} = \frac{d}{\sqrt{PT^3}},$$

где  $c$  и  $d$  – константы. Маркируя индексами 1 и 2 соответственно параметры РЛС до и после модернизации, имеем:

$$\frac{\sigma_{\tau 1}}{\sigma_{\tau 2}} = \sqrt{\frac{P_2 T_2}{P_1 T_1}} \frac{W_2}{W_1} = \sqrt{\frac{T_2}{4 T_1}} \frac{W_2}{W_1} = 2, \quad \frac{\sigma_{f 1}}{\sigma_{f 2}} = \sqrt{\frac{P_2}{P_1}} \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^3 = \sqrt{\frac{1}{4}} \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^3 = 4.$$

В итоге  $\frac{T_2}{T_1} = 4$ ,  $\frac{W_2}{W_1} = 2$ , т. е. полосу сигнала следует удвоить, а длитель-

ность увеличить в 4 раза.

**7.10.** На рис. 7.3 показаны комплексные огибающие трех импульсных фазоманипулированных сигналов одной и той же амплитуды и длительности  $T$ , использованных в радиолокационной станции. Какой из них предпочтителен а) для измерения расстояния;

б) измерения скорости объекта?

Решение. Точность измерения расстояния (запаздывания сигнала) опре-

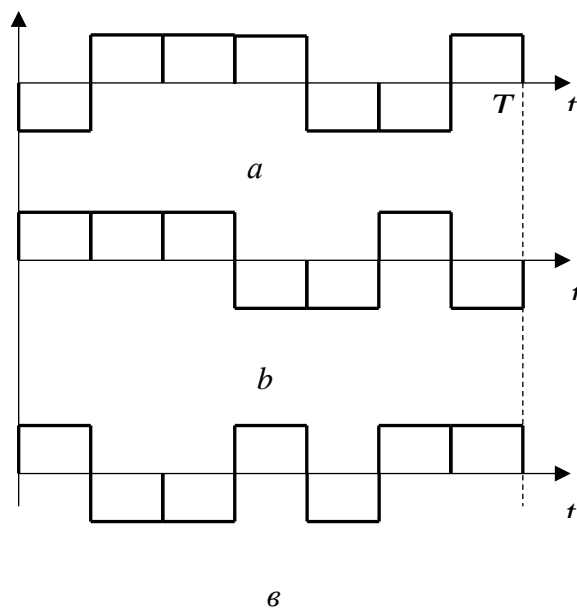


Рис. 7.3

деляется видом корреляционной функции сигнала и отношением сигнал/шум. На рис. 7.4 – 7.6 приведены корреляционные функции сигналов, представленных на рис. 7.3, *a* – *в* соответственно.

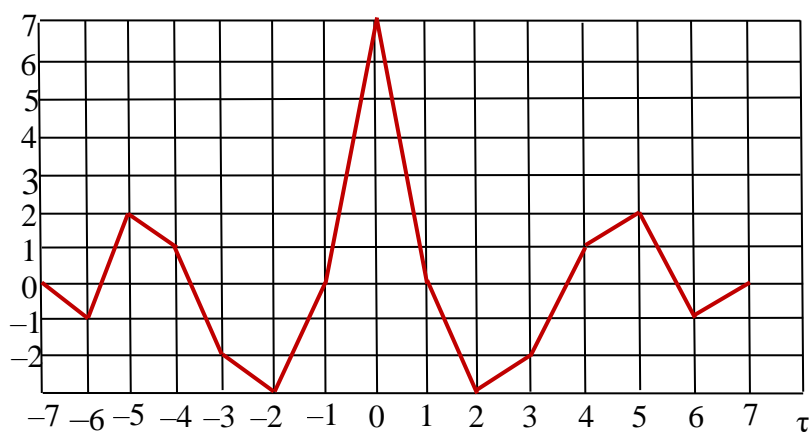


Рис. 7.4

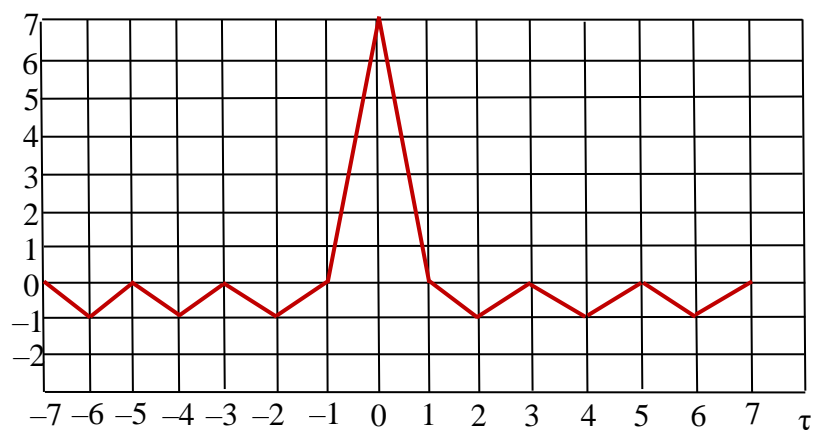


Рис. 7.5

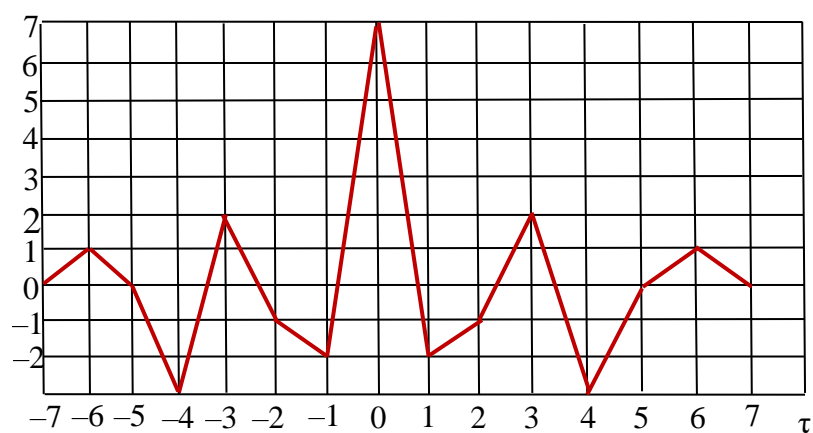


Рис. 7.6

Учитывая, что все сигналы обладают одинаковыми энергиями, а следовательно, обеспечивают и одинаковое отношение сигнал/шум при высокой достоверности измерений запаздывания (в случае отсутствия аномальных ошибок), точность измерения запаздывания будет определяться остротой основного лепестка корреляционной функции. Очевидно, что наибольшая точность будет достигнута при применении сигнала на рис. 7.3, *в*, а колебания на рис. 7.3, *а* и *б* обеспечат равные показатели.

В ситуациях, когда влиянием аномальных ошибок пренебречь нельзя, следует обратить внимание на боковые лепестки корреляционной функции. Можно видеть, что максимальные боковые лепестки АКФ сигналов на рис. 7.3, *а* и *в* имеют уровень  $3/7$  относительно главного пика, тогда как для сигнала на рис. 7.3, *б* этот показатель равен  $1/7$ . Чем выше боковые лепестки, тем вероятнее аномальные ошибки измерения времени прихода сигнала, т. е. расстояния. В связи с этим для измерения расстояния лучшим является сигнал на рис. 7.3, *б*.

Точность измерения частоты помимо энергии сигнала зависит только от его длительности. Энергии и длительности всех рассматриваемых сигналов одинаковы, поэтому все они равноценны с точки зрения измерения скорости объекта.

**7.11.** Постановщик помех имеет ограниченную среднюю мощность передатчика  $P$ . Сравнить эффективность радиопротиводействия для системы, использующей сигнал  $s(t) = U \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t} \cos(\omega_0 t)$ , и применяющей согласованный фильтр, для двух случаев:

1. Постановщик помех знает значения частот  $\omega_0$  и  $\Omega$ .
2. Постановщику помех известен лишь диапазон, в котором находится несущая частота  $\omega_0$   $[\omega_{0 \min}, \omega_{0 \max}]$  и значение частоты  $\Omega$ .

Эффективность оценивается значением отношения сигнал/шум на выходе фильтра.

**7.12.** Псевдослучайный процесс, представляющий собой цифровую двоичную  $M$ -последовательность длины  $2^{100} - 1$  и амплитуды  $U$ , формируемый с тактовой частотой 100 МГц, используют для противодействия различению сигналов  $s_1(t) = \begin{cases} 100U, & t \in [0, T]; \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases}$  и  $s_2(t) = -s_1(t)$ ,  $T = 1$  мс. Для различения используется алгоритм, оптимальный для белого шума. Как изменится вероятность ошибки различения? Какие меры следует предпринять для ее уменьшения?

**7.13.** Летательный аппарат двигался прямо на РЛС, измеряющую его скорость, а затем изменил направление движения. Доплеровская частота отраженного сигнала изменилась при этом в 1,5 раза. На какой угол изменилось направление движения летательного аппарата?

**7.14.** Какой должна быть несущая частота  $f_0$  радиоимпульса  $U_m \frac{\sin(2\pi F(t - \tau))}{2\pi F(t - \tau)} \cos(2\pi f_0(t - \tau))$ , чтобы оценить методом максимального правдоподобия время запаздывания  $\tau$  с заданной вероятностью устранения многозначности? Все остальные параметры сигнала (кроме  $\tau$ ) считаются

известными. Помеха – нормальный белый шум с СПМ  $N_0 / 2$ . Выполняется условие  $\sqrt{\frac{2E}{N_0}} \gg 1$ , где  $E$  – энергия сигнала.

**7.15.** Временное запаздывание  $\tau$  измеряется фазовым методом с помощью двух радиоимпульсов, все параметры которых за исключением  $\tau$  известны. Сигналы  $s_1(t, \tau) = S_1(t - \tau)\cos(\omega_1(t - \tau))$  и  $s_2(t, \tau) = S_2(t - \tau)\cos(\omega_2(t - \tau))$  поступают по двум каналам. Помехой являются собственные шумы приемников, которые предполагаются независимыми между собой нормальными белыми шумами с одинаковыми СПМ  $N_0 / 2$ . Энергии сигналов равны соответственно  $E_1$  и  $E_2$ . Устранение многозначности фазовых отсчетов осуществляется безошибочно. Найти алгоритм формирования оптимальной оценки  $\hat{\tau}$  на основе метода максимального правдоподобия и получить выражение для дисперсии оценки.

**7.16.** Над Санкт-Петербургом пролетают самолет и полярноорбитальный космический аппарат в северном направлении, оборудованные однотипными 4-лучевыми радиолокаторами с сохранением достаточной энергетики доплеровских измерительных каналов. Существует ли различие в составе измеряемых параметров движения и если да, то обосновать ответ.

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Радиотехнические системы: учебник для вузов / под ред. Ю. М. Казаринова. М.: Академия, 2008. 592 с.
2. Ипатов В. П., Маругин А. С., Ульяницкий Ю. Д. Сборник задач по статистической радиотехнике/ СПбГЭТУ (ЛЭТИ). СПб., 1998. 64 с.
3. Статистическая теория связи в вопросах и задачах: учеб. пособие / О. М. Заславская, В. П. Ипатов, А. С. Маругин и др. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2004. 154 с.
4. Сборник задач по математическому аппарату радиотехники и статистической теории радиотехнических систем: в 2 ч. Ч. 1/ под общ. ред. проф. Ю. Д. Ульяницкого. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2009. 120 с.
5. Сборник задач по математическому аппарату радиотехники и статистической теории радиотехнических систем: в 2 ч. Ч. 2/ под общ. ред. проф. Ю. Д. Ульяницкого. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2010. 89 с.
6. Статистическая теория радиотехнических и телекоммуникационных систем: учеб. пособие: в 3 ч. Ч. 1/ под общ. ред. В. П. Ипатова и Ю. Д. Ульяницкого. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2015. 143 с.
7. Статистическая теория радиотехнических и телекоммуникационных систем: учеб. пособие: в 3 ч. Ч. 2/ под общ. ред. В. П. Ипатова и Ю. Д. Ульяницкого. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2016. 158 с.
8. Статистическая теория радиотехнических и телекоммуникационных систем: учеб. пособие: в 3 ч. Ч. 3/ под общ. ред. В. П. Ипатова и Ю. Д. Ульяницкого. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2017. 166 с.
9. Сборник региональных предметных студенческих олимпиад образовательных организаций высшего образования, расположенных на территории Санкт-Петербурга. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2018.

## Оглавление

Список сокращений и условных обозначений	3
Предисловие	4
Введение	5
1. Случайные величины и случайные процессы	7
2. Преобразования случайных процессов	24
3. Согласованные и квазиоптимальные фильтры	42
4. Обнаружение сигналов радиотехническими системами	66
5. Различение сигналов	103
6. Измерение параметров сигналов	122
7. Радиотехнические и телекоммуникационные системы	138
Список рекомендованной литературы	151



Ипатов Валерий Павлович  
Маругин Алексей Сергеевич  
Орлов Владимир Константинович  
Полетаев Александр Михайлович  
Рыжов Михаил Викторович  
Ульяницкий Юрий Дмитриевич

**Сборник задач студенческих олимпиад по радиотехническим и  
телекоммуникационным системам**

Учебное пособие

Редактор Э. К. Долгатов

---

Подписано в печать \_\_ \_\_ \_\_. Формат 60×84 1/16.  
Бумага офсетная. Печать цифровая. Печ. л. 9,63.  
Гарнитура «Times New Roman». Тираж 96 экз. Заказ \_\_\_\_

---

Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»  
197022, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5Ф