Экзамен

① Математическое описание детерминированных сигналов

$\forall$ сигнал описывается (или может) во врем. области и частотной

$s(t, \vec{\lambda})$ — временная область, $\vec{\lambda}$ — параметры сигнала (далее писать не буду)

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = |\dot{S}(\omega)| e^{j \arg \dot{S}(\omega)}$$

Радиосигнал: ω_0 — (несущая) центральная частота

$$\omega_0 = \frac{\int_0^{\infty} \omega |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^{\infty} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega}$$

Ширину спектра можно определить:

1) $$\Delta\omega_p = \left[\int_0^{\infty} (\omega - \omega_0)^2 |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega \Big/ \int |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega \right]^2$$ что, если рассматривать $\frac{|\dot{S}(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^{\infty} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega}$ как ПВ СП, как СКО

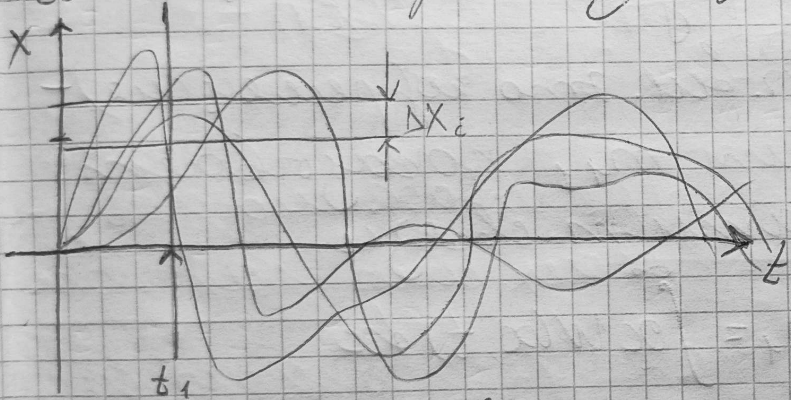
2) $$\Delta\omega_{эфф} = \frac{1}{|\dot{S}(\omega_{max})|^2} \int_0^{\infty} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega, \quad |\dot{S}(\omega_{max})| = \max \dot{S}$$

3) $\omega_{ск}$ – ω сред. квадр.-ое $= \left[\int_0^\infty \omega |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega \Big/ \int_0^\infty |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2}$

(Аналогично для времени)

② Математическое описание СП. Плотность вер-ти, ф-ия распред., моментные ф-ии.

Случайный процесс полностью описывается ансамблем реализаций



ΔX_i – «окно», берется для каждого врем. сеч. свое

ПВ описывает вер-ть, что значение процесса для каждого сечения будет лежать в ΔX_i

В сечении t_1 есть окно Δx_1, в окно попало n_1 реализаций, тогда $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{n_1}{N} = W(x, t_1)\Delta X_1$

Для k сечений $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{n_k}{N} = W(x_1, \dots x_k, t_1, \dots, t_k)\Delta X_1 \dots \Delta X_k$

n-мерная ПВ позволяет судить о связи между вероятными значениями СВ в n произвольных моментов времени

Функция распределения – вероятность того, что в каждом сечении (ниже) меньше x_i:
$$F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = P(x(t_1) \le x_1, \dots, x(t_n) \le x_n)$$

Моментные функции

<u>Начальный момент</u> $m_{k_1 k_2 \dots k_n}$
$$m_{k_1 k_2 \dots k_n} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} W(x_1, \dots x_n; t_1 \dots t_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

Порядок момента определяется $\sum_{i=1}^{n} k_i$

Ковариация (C_0' у случ. вел. это корреляция) – начальный момент m_{11} показывает меру линейной статист. связи

Матожидание $m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x W(x, t)\, dx$

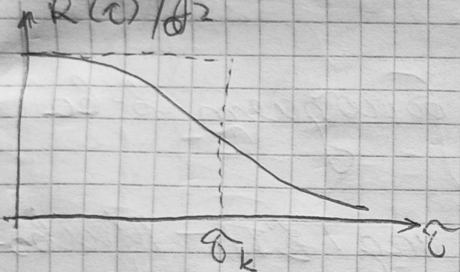
<u>Центральные моменты</u> $M_{k_1 k_2 \dots k_n}$
$$M_{k_1 k_2 k_n} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int (x_1 - \overline{x}_1)^{k_1} \cdots (x_n - \overline{x}_n)^{k_n} W(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

(3) —//— . Корреляционная функция и спектр. плотность мощности СП
$$K(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int (x_1 - \overline{x}_1)(x_2 - \overline{x}_2) W(x_1, x_2; t_1, t_2)\, dx_1 dx_2 =$$
$$= /\text{стац. в широком смысле}/ = K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int (x_1 - \overline{x}_1) \times$$

$\times (x_2 - \overline{x}_2) W(x_1, x_2; \tau)\, dx_1 dx_2$

$$K(\tau) = D = \sigma^2 = M\{x^2\} - M^2\{x\}$$

Время корреляции $\tau_k = \int\limits_0^{\infty} |R(\tau)| / \sigma^2 \, d\tau$ или геометрически



Спектральная плотность мощности (СПМ)

$$G(f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j 2\pi f \tau} d\tau \quad \text{Св-ва: } \sigma^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(f)\, df$$

$$\Delta f_э = \frac{1}{G(0)} \int\limits_0^{\infty} G(f)\, df \qquad G(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\, d\tau$$

$$G(f) \geq 0$$

По СПМ нельзя восстановить реализацию случайного процесса, т.к. в СПМ не содержится информация о фазе

4) Гауссовские случайные процессы

Это такой процесс, что набор отсчетов в произвольном временном сечении подчиняется нормальному распределению

$$W(x, t) = \frac{1}{\sigma(t)\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x - m(t)}{2\sigma^2(t)}\right)$$

$$F(x,t)=\int\limits_0^x W(x,t)\,dx=\Phi(a),\quad a=\frac{x-m(t)}{\sigma(t)}$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2/2}\,dt$$

Свойства ГСП

1) n-мерная плотность определяется конечным кол-вом R_{ij}

2) $\forall$ линейная комбинация обладает св-ва ГСП

3) $\forall$ линейное преобразование над ГСП — приводит к ГСП

4) независимость = некоррелированность

5) стационарности в обоих смыслах совпадают

$$W(x_1,\dots,x_n)=W(\vec{x})=K\exp\left(-\frac{1}{2}Q\right)$$

$$K=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\det R}},\quad R=\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ R_{n1} & - & - & R_{nn}\end{pmatrix}$$ — корреляц. матрица

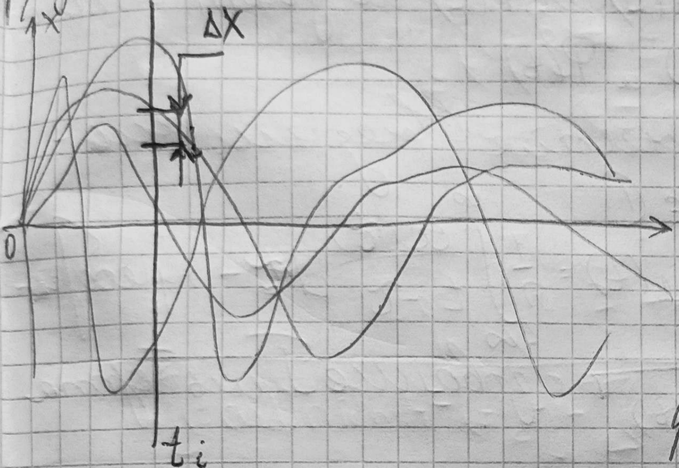
$$R_{ij}=\overline{[x(t_i)-\overline{x(t_i)}][x(t_j)-\overline{x(t_j)}]}$$ — усреднение по сечению

$$Q=(\vec{x}-\overline{\vec{x}})R^{-1}(\vec{x}-\overline{\vec{x}})^T,\quad RR^{-1}=E$$

$$Q\ (\text{в явном виде})=\sum_{(i)}\sum_{(j)}(x(t_i)-\overline{x(t_i)})R^{-1}_{ij}\cdot(x(t_j)-\overline{x(t_j)})$$

(5) Функционал ПВ гауссовского СП.

Функционал — отображение множества функций на множество чисел



Берем сечения t_i и t_{i+1} так, что $|t_i - t_{i+1}| \to 0$, тогда нижняя граница Δx_i будет образовывать непрерывную ф-ию $x(t)$. Ширину окна можно положить dx.

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ |\Delta t|\to 0}} W(x_1,\dots,x_n;\ t_1,\dots,t_n) = W(x(t))$$ — функционал ПВ

Теперь конкретно для гауссовского:

$$W(x(t)) = K\exp\left(-\frac{1}{2}\iint_0^T x(t_1) R^{-1}_{12}\, x(t_2)\, dt_1 dt_2\right) \quad |\overline{x(t)}=0|$$

$R^{-1}_{12} = R^{-1}(t_1,t_2)$ определяется из $\int R(t_1,t) R^{-1}(t,t_2)\,dt = \delta(t_2-t_1)$

$$R^{-1} = \frac{2}{N_0}\delta(t_2-t_1)$$

Тогда $W(x(t)) = K\exp\left(-\frac{1}{2}\iint_0^T x(t_1)\frac{2}{N_0}\delta(t_2-t_1)\, x_2(t_2)\, dt_1 dt_2\right) =$

$$= K\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{2}{N_0}\int_0^T x^2(t)\,dt\right)$$

Т.е. ~~...~~ вероятность получения реализации с большой энергией мала

⑥ Узкополосные случайные процессы

Процесс узкополосный, если $\Delta f \ll f_0$

Представление $x(t) = A(t)\cos\Phi(t)$ не дает четкости в определении $A(t)$ и $\Phi(t)$

Для четкого определения введем аналитический сигнал $\in \mathbb{C}$

$\dot{x}(t) = x(t) + j x_1(t)$, $x_1(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau}\,d\tau$ – преобразование Гильберта

Из такого $A(t) = \sqrt{x^2(t) + x_1^2(t)}$

$tg\Phi(t) = x_1(t) / x(t)$

⑦ ПВ огибающей и фазы узкополосного нормального СП

$\exists$ $x(t)$ – ГСП, тогда и $x_1(t)$ – ГСП, т.к. преобразование Гильберта линейно.

$\overline{x_1(t)} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{x(\tau)}}{t-\tau}\,d\tau = \int 0 = 0$ Из-за линейности $\int$ и усреднения их можно менять местами

Определим зависимость $x(t)$ и $x_1(t)$

$R_{xx_1} = \overline{x(t)x_1(t)} = \overline{x(t)\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau}\,d\tau} =$

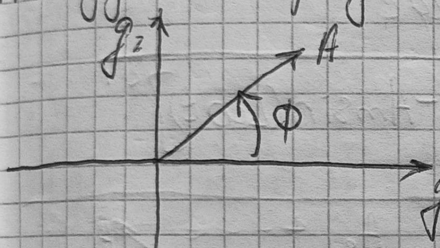
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{x(t)\,x(\tau)}}{t-\tau}\, d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{x(t)\,x(\tau)}}{t-\tau}\, d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R(t-\tau)}{t-\tau}\, d\tau =$$

$= /$т.к. $R(t-\tau)$ – АКФ$/ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{чет}}{\text{нечет}} = 0 \Rightarrow$ они независимы

$W(x, x_\perp) = W(x)\,W(x_\perp)$ а т.к. они нормальные,

то $W(x, x_\perp) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + x_\perp^2}{2\sigma^2}\right)$ /Дисперсия не меняется при преобразовании Гильберта/

ПВ будем определять:



$$\begin{cases} g_1 = A\cos\Phi \sim x(t) \\ g_2 = A\sin\Phi \sim x_\perp(t) \end{cases}$$

У нас есть $W_{xx}(x, x_\perp)$, надо получить $W(A)$ и $W(\Phi)$

Пересчет ПВ $\quad W_y(y) = |J|\, W_x(g)$, $|J|$ – модуль якобиана преобразования

$W(A,\Phi) = |J|\, W_{xx_\perp}(g_1(A,\Phi), g_2(A,\Phi))$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial A} & \frac{\partial g_1}{\partial \Phi} \\ \frac{\partial g_2}{\partial A} & \frac{\partial g_2}{\partial \Phi} \end{vmatrix} = A,$$ т.к. мы перешли в полярную систему координат

$$W(A,\Phi) = \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(A\cos\Phi)^2 + (A\sin\Phi)^2}{2\sigma^2}\right) =$$

$$= \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right)$$

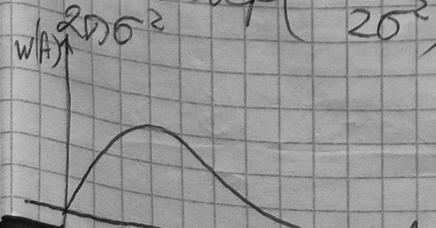
$\to W(A) = \int_{-\pi}^{\pi} W(A,\Phi)\, d\Phi = \frac{A}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right)$, $A \geq 0$

$\to W(\Phi) = \frac{1}{2\pi}$

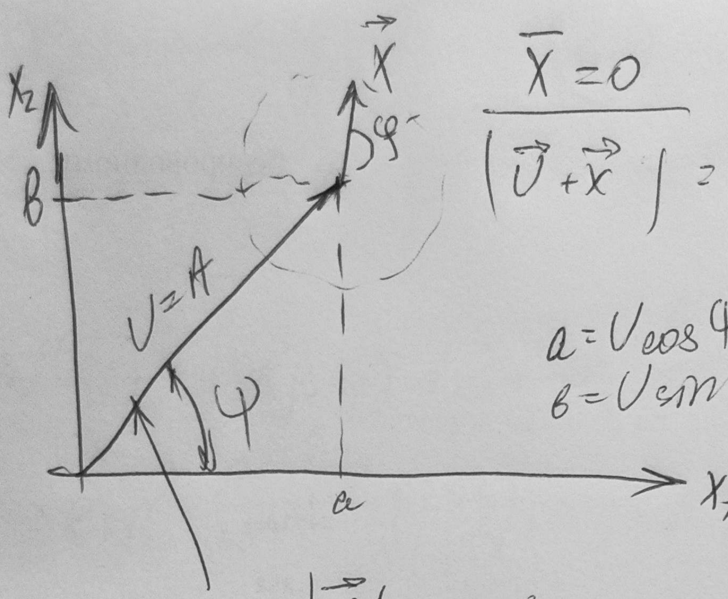
$\overline{A} = \int_0^\infty A\, W(A)\, dA = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$D\{A\} = (2 - \pi/2)\,\sigma^2$

A – по определению ≥ 0



К вопросу 8

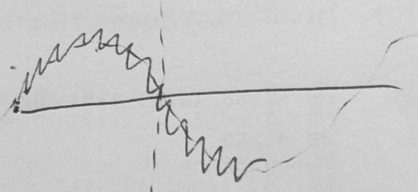


$\overline{X}=0$

$|\vec{U}+\vec{X}| = |\overline{U}|$

1

$a = V\cos\psi$
$b = V\sin\psi$



ампл $|\vec{U}| = const$
$|\arg\vec{U}| = const$

Считаем что x_1 и x_2 независимы и одинаковые б, тогда

$$W(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp-\frac{(x_1-a)^2+(x_2-b)^2}{2\sigma^2}$$ переходя в полярную систему координат

$$W(\rho,\varphi) = \frac{\rho}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{\rho^2+A^2-2\rho A\cos(\varphi-\psi)}{2\sigma^2}\right),$$ A-амплиту детерм сигнала

Если $A=0$, то $W(\rho,\varphi) = \frac{\rho}{2\pi\sigma^2}\exp\frac{-\rho^2}{2\sigma^2}$, т.е. φ и ρ независимы

Если $A\neq0$, то ρ, φ - зависимы (невозможно представить $W(\rho,\varphi)=W(\rho)W(\varphi)$)

$$W(\rho) = \int_{-\pi}^{\pi}W(\rho,\varphi)d\varphi = \frac{\rho}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{\rho^2+A^2}{2\sigma^2}\right)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left(\frac{A\rho\cos(\varphi-\psi)}{\sigma^2}\right)d\varphi =$$

$$= —//— I_0\left(\frac{A\rho}{\sigma^2}\right)$$

$$F(\rho) = \int_{-\infty}^{\rho}W(\rho)d\rho = Q\left(\frac{\rho}{\sigma},\frac{A}{\sigma}\right),\quad Q(u,v) = \int_0^u t e^{-\frac{t^2+v^2}{2}} I_0(vt)\,dt$$

$$\overline{\rho} = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\left(1+\frac{A^2}{2\sigma^2}\right)I_0\left(\frac{A^2}{4\sigma^2}\right)+\frac{A^2}{2\sigma^2}I_1\left(\frac{A^2}{4\sigma^2}\right)\right]e^{-\frac{A^2}{4\sigma^2}}$$

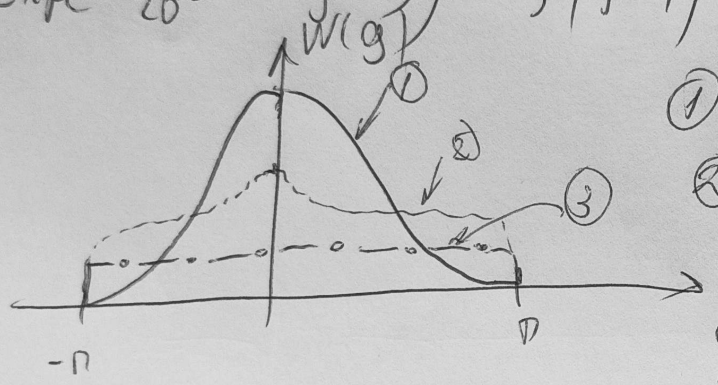
$\alpha = (z > z_n | H_0)$

К вопросу 8 ②

$D\{\rho\} = 2\sigma^2 + A^2 - \overline{\rho}^2$

$$W(\varphi) = \int_0^\infty W(\rho, \varphi)\, d\rho = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}} + \frac{A\cos(\varphi-\psi)}{\sigma\sqrt{2\pi}} \Phi\left(\frac{A}{\sigma}\cos(\varphi-\psi)\right) \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\sin^2(\varphi-\psi)\right) \quad , |\varphi-\psi| \le \pi$$



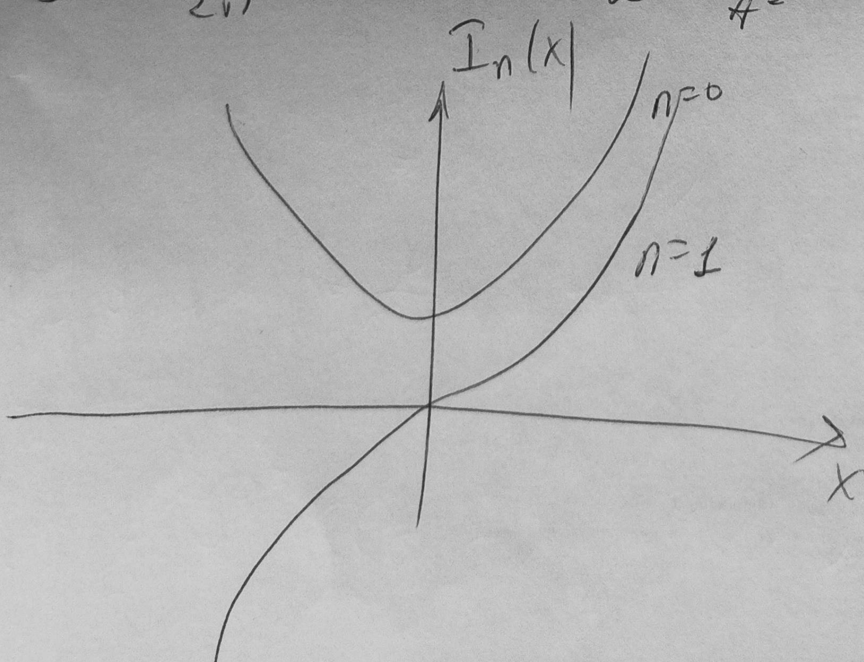
① $A/\sigma \gg 1$

② $A/\sigma \ll 1$

③ $A/\sigma = 0$

② $W(\varphi) \cong \frac{1}{2\pi}\left[1 + \frac{A}{\sigma}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos(\varphi-\psi)\right]$ $D(\varphi) = \frac{\pi^2}{3} - \frac{A\sqrt{2\pi}}{\sigma}$

① $W(\varphi) \cong \frac{A/\sigma}{2\pi} e^{-\frac{A^2(\varphi-\psi)^2}{2\sigma^2}}$ $D = \frac{\sigma^2}{A^2}$



9. Преобразование случайных процессов в линейных системах.

Хотим найти $W_{вых}$(ПВ), но в общем случае эта задача не решается (немногие гауссовские и марковские процессы)

$$\xi(t) \to \boxed{h(t)} \to \eta(t)$$

В момент времени $t=0$ на физ. реализуемую систему начинает действовать СВ(СП) $\xi(t)$

$$\eta(t)=\xi(t)\otimes h(t)=\int_0^t \xi(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

[Св-во свертки $\int_0^t h(\tau)x(t-\tau)d\tau=\int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

Начальный момент любого порядка определяется

$$M\{\eta(t_1)\cdot\ldots\cdot\eta(t_n)\}=\int_0^{t_1}\ldots\int_0^{t_n} h(\tau_1)\cdot\ldots\cdot h(\tau_n)\cdot M\{\xi(t_1-\tau_1)\cdot\ldots\cdot\xi(t_n-\tau_n)\}d\tau_1\ldots d\tau_n$$

Взаимная ковариация определяется

$$K_{\xi\eta}(t_1,t_2)=M\{\xi(t_1)\eta(t_2)\}=\int_0 h(\tau)M\{\xi(t_1)\xi(t_2-\tau)\}d\tau$$

Корреляционная функция выходного СП.

$$R_\eta(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} h(t_1-\tau_1)h(t_2-\tau_2)R_\xi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$$

Дисперсия выходного СП определяется в некий момент времени t (т.е. через t секунд после начала действия СП на вход линейной системы при нулевом сдвиге во времени между отсчетами выходного СП) $t_1=t_2=t$

$$D_\eta(t)=R_\eta(t,t)=\int_0^t\int_0^t h(t-\tau_1)h(t-\tau_2)R_\xi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$$

Наложив ограничения на $\xi(t)$: $\xi(t)$ - стационарен в широком смысле, т.е. $M\{\xi(t)\} \neq f(t)$ и $R(t_1, t_2) = R(t_2 - t_1)$, получим

$$M\{\eta(t)\} = \int_0^t M\{\xi(t)\} h(t-\tau)\,d\tau = M\{\xi\} \int_0^t h(\tau)\,d\tau$$

$$R_\eta(t_1, t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} h(\tau_1) h(\tau_2) R_\xi(t_2 - t_1 - \tau_2 + \tau_1)\,d\tau_1\,d\tau_2$$

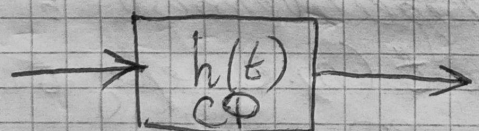
$$D_\eta(t) = \int_0^t\int_0^t h(\tau_1) h(\tau_2) R_\xi(\tau_1 - \tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2$$

Если система затухает с течением времени, то при $t \to \infty$ $\eta(t)$ будет стремиться к стационарному в широком смысле, т.е.

$$M\{\eta(t)\} = m_\eta = m_\xi \int_0^\infty h(t)\,dt = m_\xi K(j\omega)\big|_{\omega=0}$$

$$S_\eta(j\omega) = S_\xi(j\omega)|K(j\omega)|^2$$

(10) Согласованные фильтры



$h(t) = s(T-t)$, T - длительность сигнала

$\dot{S}_h(j\omega) = K(j\omega) = \dot{S}^*_s(j\omega)$

q - отношение сигнал-шум

$$q_{вых} = \frac{\left|\int \dot{S}(j\omega) K(j\omega) \exp(j2\pi f t_0)\,df\right|}{\sqrt{\int G(f)|K(j2\pi f)|^2\,df}} = \frac{|S(t_0)|}{\sigma}$$

При действии белого шума

$$q=\sqrt{\frac{2E}{N_0}} \qquad R_{шум}(\tau)=C R_s(\tau)\frac{N_0}{2},$$ C - коэффиц-т пропорциональности

$$\sigma^2=C^2\frac{N_0E}{2}$$

11 Постановка задачи обнаружения сигнала. Критерии обнаружения

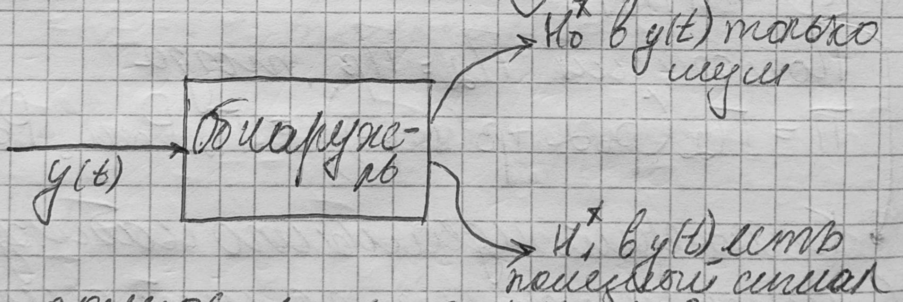
Обнаружение - анализ принятого сигнала $y(t)$ и вынесение решения - о наличии в нем сигнала $s(t)$ или нет.

Сигнал: $y(t)=x(t)+s(t)$

Изначально ставятся 2 гипотезы

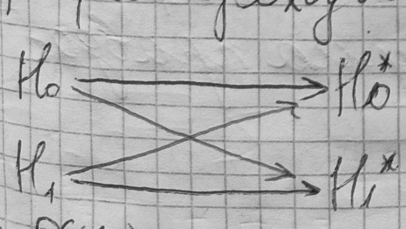
H_0: $y(t)=x(t)$

H_1: $y(t)=x(t)+s(t)$



!Шум полагаем полностью статистически описанным, т.е. нам известна его n-мерная ПВ или же функционал ПВ!

Граф переходов от H_0 и H_1 к H_0^* и H_1^*



1. $\hat{L}=P(H_0^*|H_0)$ - вер-ть правильного необнаружения
2. $D=P(H_1^*|H_1)$ - правильное обнаружение
3. $\alpha=P_{ЛТ}=P(H_1^*|H_0)$ - вер-ть ложной тревоги (ошибка I рода)
4. $\beta=P_{ПС}=P(H_0^*|H_1)$ - пропуск цели (ошибка II рода)

$p_0=P(H_0)$

$p_1=1-p_0=P(H_1)$

① + ③ = 1

② + ④ = 1

Критерии обнаружения

• Критерий Байеса (критерий минимума среднего риска)

Для этого критерия введем штрафы Π_α и Π_β

" $\Pi_{\alpha(\beta)}$ - штраф (сумма), который должен заплатить разработчик системы за ошибку, допущенную системой " @Наружников С

Величина штрафа определяется:

$\overline{\Pi} = \Pi_\alpha p_0 \alpha + \Pi_\beta p_1 \beta = \Pi_\alpha p_0 \alpha + \Pi_\beta (1-p_0)\beta$

и эту величину нужно минимизировать, т.е. $\min \overline{\Pi}$

Положим $\Pi_\alpha = \Pi_\beta$, тогда

$\Pi = \Pi_\alpha (p_0\alpha + \beta(1-p_0)) = \Pi_\alpha P_{ош}$, $P_{ош}$ - полная вер-ть ошибки

• Критерий идеального наблюдателя (минимизация полной ошибки)

$p_0\alpha + \beta(1-p_0) \to \min$

• Критерий минимума Σ условных вер-ей ошибки (критерий максимума правдоподобия)

$p_0 = p_1 \Rightarrow p_0 = 1/2$

Тогда остается минимизировать

$\alpha + \beta \to \min$

• Критерий Неймана-Пирсона

Задаемся α (ложная тревога) и минимизируем β, что эквивалентно максимизации D

Теперь чуть более формально

Пусть на вход обнаружителя поступает $\vec{y}$ или $y(t)$ (далее писать буду для $y(t)$)

Функцию $y(t)$ можно отнести к области Y_1 (в которую попадают все $y(t)$, в которых мы считаем, что есть $s(t)$) или к области Y_0 (—//— нет $s(t)$, т.е. только шум $x(t)$)

Т.е. $Y_1 \cap Y_0 = \emptyset$ и $Y_1 \cup Y_0$ - полная группа

Запишем α и β

$$\alpha = P(H_1^*|H_0) = P(y(t) \in Y_1 | Y_0) = \int\limits_{(Y_1)} W(y(t)|H_0)\,dy(t)$$

$$\beta = P(H_0^*|H_1) = P(y(t) \in Y_0 | Y_1) = \int\limits_{(Y_0)} W(y(t)|H_1)\,dy(t) =$$

$$= 1 - \int\limits_{(Y_1)} W(y(t)|H_1)\,dy(t)$$

Запишем средний риск $\overline{\Pi}$

$$\overline{\Pi} = \Pi_\alpha p_0 \int\limits_{(Y_1)} W(y(t)|H_0)\,dy(t) + \Pi_\beta(1-p_0) - \Pi_\beta(1-p_0)\int\limits_{(Y_1)} W(y(t)|H_1)\,dy(t) =$$

$=$ / объединим $\int$ по области Y_1 в один / $=$

$$= \Pi_\beta(1-p_0) - \int_{(Y_1)} \left[\Pi_\beta(1-p_0)\, W(y(t)|H_1) - \Pi_\alpha p_0 W(y(t)|H_0)\right] dy(t)$$

Чтобы $\overline{\Pi} = \min$, нужно $\int_{(Y_1)} \dots dy(t) = \max$ (это должно быть хотя бы ≥ 0)

$$\Pi_\beta(1-p_0)\, W(y(t)|H_1) - \Pi_\alpha p_0 W(y(t)|H_0) \geq 0$$

$$\frac{W(y(t)|H_1)}{W(y(t)|H_0)} \underset{H_0^*}{\overset{H_1^*}{\gtrless}} \frac{\Pi_\alpha p_0}{\Pi_\beta(1-p_0)}$$ ← отношение правдоподобие

Величину $L_\Pi = \frac{\Pi_\alpha p_0}{\Pi_\beta(1-p_0)}$ [(?) назовем порогом правдоподобие (?)]

По Байесу $L_\Pi = \frac{\Pi_\alpha p_0}{\Pi_\beta(1-p_0)}$.

По идеальному наблюдателю ($\Pi_\alpha = \Pi_\beta$) $L_\Pi = \frac{p_0}{1-p_0}$

По max правдоподобию $L_\Pi = 1$

Достаточной статистикой называется величина Z, полученная путем применения некого (любого) монотонного преобразования к порогу, т.е.

$$\frac{W(y(t)|H_1)}{W(y(t)|H_0)} \underset{H_0^*}{\overset{H_1^*}{\gtrless}} L_\Pi \Longleftrightarrow \mathcal{F}\left\{\frac{W(y(t)|H_1)}{W(y(t)|H_0)}\right\} \underset{H_0^*}{\overset{H_1^*}{\gtrless}} \mathcal{F}\{L_\Pi\}$$

$\mathcal{F}\{\}$ – это самое некое монотонное преобразование

(12) Обнаружение сигналов с неизвестными параметрами

Методы избавления от неизвестных параметров
1) измерить неизвестные
2) минимаксный подход — самый худший случай
3) знание априорики W => отношение правдоподобия усредняется по этим параметрам

Минимаксные оценки позволяют оценить средний риск наихудшим образом, т.е. показывают наибольшее значение среднего риска. Грубо говоря, этот метод — тыкание пальцем в небо в поисках такой априорной ПВ $W(\lambda)$, что при этой ПВ $\Pi_{ср}$ будет иметь наибольшее значение и таким образом получается граница сверху.

(3) $W($

13) Обнаружение детерминированных сигналов. Структура устройства обнаружения. Критерии качества.

$$y(t) = x(t) + s(t)$$

$$W(y(t)|H_0) = /x(t) - \text{АБГШ}/ = k \cdot \exp\left(-\frac{1}{N_0}\int_0^T x^2(t)\,dt\right) =$$

$$= k \exp\left(-\frac{1}{N_0}\int_0^T y^2(t)\,dt\right)$$

$$W(y(t)|H_1) = k \exp\left(-\frac{1}{N_0}\int_0^T (y(t) - s(t))^2\,dt\right) =$$

$$= k \exp\left(-\frac{1}{N_0}\int_0^T y^2(t)\,dt - \frac{1}{N_0}\int_0^T s^2(t)\,dt + 2\frac{1}{N_0}\int_0^T y(t)s(t)\,dt\right) =$$

$$= /\int_0^T s^2(t)\,dt = E, \int_0^T y(t)s(t)\,dt = Z/ =$$

$$= k \exp\left(-\frac{1}{N_0}\int_0^T y^2(t)\,dt\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{N_0}E\right) \cdot \exp\left(\frac{2}{N_0}Z\right)$$

Запишем отношение правдоподобия

$$\frac{W(y(t)|H_1)}{W(y(t)|H_0)} = \frac{k \exp\left(-\frac{1}{N_0}\int_0^T y^2(t)\,dt\right) \exp\left(-E/N_0\right) \cdot \exp\left(\frac{2Z}{N_0}\right)}{k \exp\left(-\frac{1}{N_0}\int_0^T y^2(t)\,dt\right)} =$$

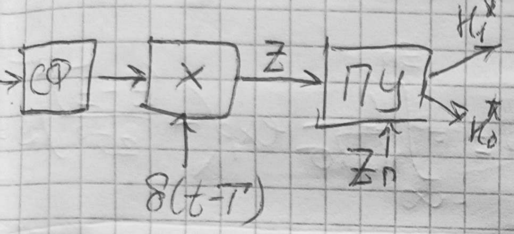
$$= \exp\left(\frac{2Z}{N_0} - \frac{E}{N_0}\right) \underset{H_0^*}{\overset{H_1^*}{\gtrless}} \frac{\Pi_\text{л} p_0}{\Pi_\text{п}(1-p_0)} \quad | \text{прологарифмируем}$$

$$\frac{2Z}{N_0} - \frac{E}{N_0} \gtrless \ln \frac{\Pi_\text{л} p_0}{\Pi_\text{п}(1-p_0)}$$

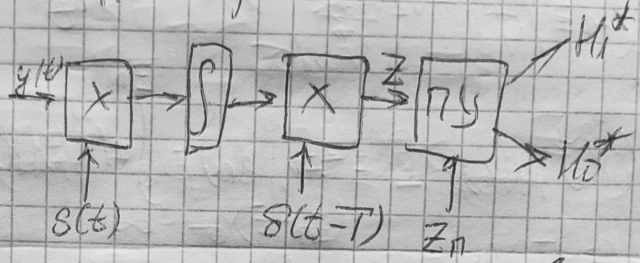
$$Z \gtrless \frac{N_0}{2} \ln \frac{\Pi_\text{л} p_0}{\Pi_\text{п}(1-p_0)} + E/2 = Z_\text{п}$$

Структурная схема может быть построена на СФ для $s(t)$ или корреляторе

На СФ



На корреляторе



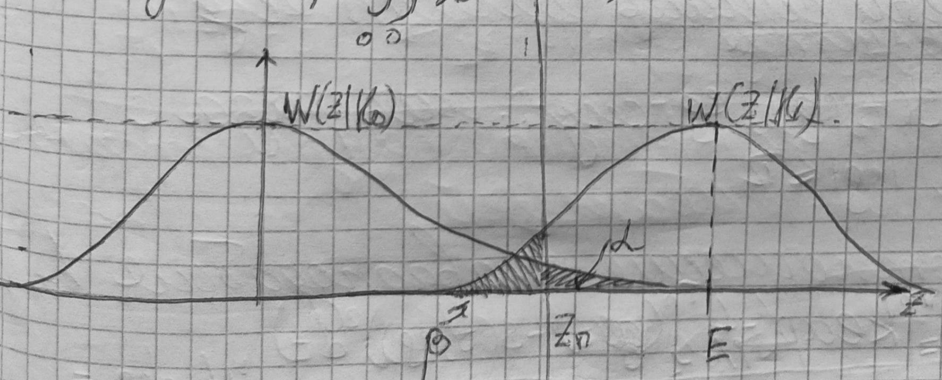
Качественные показатели устройства – α и β. Их удобнее всего показывать на графиках. Но сначала докажем положение центров $W(y(t)|H_0)$ и $W(y(t)|H_1)$

$$\overline{Z}\Big|_{H_0} = \overline{\int_0^T y(t)s(t)dt} = \int_0^T \overline{x(t)}\,s(t)\,dt = |\overline{x(t)}=0| = 0$$

$$\overline{Z}\Big|_{H_1} = \int_0^T \overline{y(t)s(t)dt} = \int_0^T \overline{x(t)s(t)+s^2(t)}\,dt = E+0 = E$$

$$\sigma^2 = R_Z(t_1,t_2)\Big|_{t_1=T} = \overline{Z(t_1)Z(t_2)}\Big|_{t_1=t_2=T} = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\overline{y(t)y(\tau)}\,s(t)s(\tau)\,dt\,d\tau =$$

$$= |\text{АКФ шума} = \delta| = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\frac{N_0}{2}\delta(t-\tau)s(t)s(\tau)\,dt\,d\tau = \int_0^{t_1}\frac{N_0}{2}s^2(\tau)\,d\tau = \frac{N_0E}{2}$$



$$\alpha = P(H_1^*|H_0) = P(z > z_п|H_0) = \int_{z_п}^{\infty} W(z|H_0)\,dz = \int_{z_п}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) dz =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = z/\sigma \\ dt = dz/\sigma \end{matrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_п/\sigma}^{\infty} \exp\left(-t^2/2\right) dt = 1 - \Phi(z_п/\sigma) = 1 - \Phi(h)$$

$$\beta = P(H_0^*|H_1) = P(z < z_п|H_1) = \int_{-\infty}^{z_п} W(z|H_1)\,dz = \int_{-\infty}^{z_п} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(z-\bar z)^2}{2\sigma^2}\right) dz$$

$$= \left| \begin{matrix} t = (z-\bar z)/\sigma \\ dt = dz/\sigma \end{matrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(z_п - E)/\sigma} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) dt = \Phi\left(\frac{z_п - E}{\sigma}\right) = \left| \frac{z_п}{\sigma} = h,\ \frac{E}{\sigma} = q \right| =$$

$$= \Phi(h-q)$$

$$D = P(H_1^*|H_1) = 1 - \Phi(h-q) = |\text{по св-ву } \Phi(x)| = \Phi(-(h-q)) = \Phi(q-h)$$

Иначе $D = \Phi(q - \Phi^{-1}(1-\alpha))$

14) Обнаружение сигналов с неизвестной начальной фазой. Структура устройства. Качественные показатели

Принимаемый сигнал имеет вид

$y(t) = x(t) + s(t, \varphi)$, φ – случ. нач. фаза с $W_\varphi(\varphi) = 1/2\pi$, $|\varphi| \le \pi$

Запишем отношение правдоподобия L

$$L = \frac{W(y(t)|H_1)}{W(y(t)|H_0)} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{k \exp\left(-\frac{1}{N_0}\int_0^T (y(t) - s(t,\varphi))^2 dt\right)}{k \exp\left(-\frac{1}{N_0}\int_0^T (y(t))^2 dt\right)} W_\varphi\, d\varphi =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{E}{N_0}\right)\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left(\frac{2z(\varphi)}{N_0}\right)d\varphi \quad (*)$$

$z(\varphi)=\int_0^T y(t)s(t,\varphi)dt$. Используя равенство Парсеваля, что от смены базиса скалярное произведение не меняется, перейдем к корреляции аналитических сигналов

$\dot{y}(t)=y(t)+jy_{\perp}(t)$ и $\dot{s}(t)=s(t)+js_{\perp}(t)$

$$\int_0^T \dot{y}(t)\dot{s}^*(t)dt=\int_0^T\left[(y(t)+jy_{\perp}(t))(s(t)-js_{\perp}(t))\right]dt=$$

$$=\int_0^T y(t)s(t)dt+j\int_0^T s(t)y_{\perp}(t)dt-j\int_0^T s_{\perp}(t)y(t)dt+\int_0^T y_{\perp}(t)s_{\perp}(t)dt=$$

$$=z+j\int_0^T s(t)y_{\perp}(t)dt-j\int_0^T s_{\perp}(t)y(t)dt+z$$

Т.к. изначально были сигналы вещественные, то $2z(\varphi)=\mathrm{Re}\left\{\int_0^T \dot{y}(t)\dot{s}^*(t)dt\right\}$

Переобозначим: $y(t)=\dot{Y}(t)e^{j2\pi f_0 t}$

$\dot{s}(t)=\dot{S}(t)e^{j(2\pi f_0 t+\varphi)}$

$$\dot{Z}=\frac{1}{2}\int_0^T \dot{Y}(t)\dot{S}^*(t)dt \quad , Z=|\dot{Z}|$$

Тогда $z(\varphi)=Z\cos(\varphi-\arg\dot{Z})$

$(*)$ можно тогда записать

$$L=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{E}{N_0}\right)\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left(\frac{2Z}{N_0}\cos(\varphi-\arg\dot{Z})\right)d\varphi=$$

$$= \exp(-E/N_0)\, I_0\left(\frac{2Z}{N_0}\right) = L$$

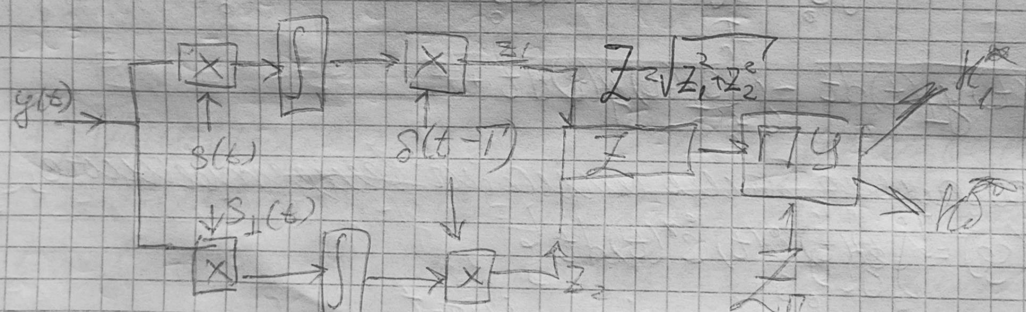
$$\exp(-E/N_0)\, I_0\left(\frac{2Z}{N_0}\right) \gtrless L_п$$

$$I_0(2Z/N_0) \gtrless L_п / \exp(-E/N_0)$$

$$2Z/N_0 \gtrless I_0^{-1}\left(L_п \cdot \exp(E/N_0)\right)$$

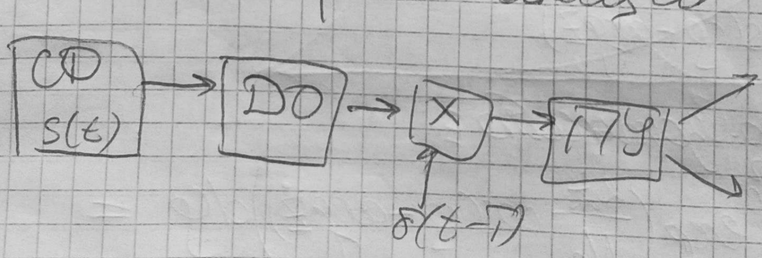
$$Z \gtrless \underbrace{N_0 I_0^{-1}\left(L_п \exp(E/N_0)\right)}_{Z_п}$$

Схема



Если используется СФ, то $s_\perp \to \delta(t - T - 1/(4f_0))$

Также можно построить обнаружитель на Детекторе огибающей



У такого обнаружителя

$$w(Z|H_0) = \frac{Z}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{Z^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$w(Z|H_1) = Z/\sigma^2 \exp\left(-\frac{Z^2+U_m^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{Z U_m}{\sigma^2}\right)$$

Характеристики обнаружителя

$$\alpha = P(Z > Z_п | H_0) = \int_{Z_п}^{\infty} w(Z|H_0)\,dZ = \exp\left(-\frac{h^2}{2}\right), \quad h = Z/\sigma$$

$$\beta = P(Z < Z_п | H_1) = \int_{-\infty}^{Z_п} w(Z|H_1)\,dZ = Q(h, q)$$

$$\left[Q(x, y) = \int_0^x t \exp\left(-\frac{t^2+y^2}{2}\right) I_0(yt)\,dt\right]$$

$$D = 1 - \beta = 1 - Q(h, q) = 1 - Q(\sqrt{-2\ln\alpha}, q)$$

(15) Обнаружение когерентных последовательностей радиоимпульсов. Структура уст-ва и качественные показатели.

Когерентный в этом смысле, что все пакеты имеют одну случ. нач. фазу.

$$S(t, \varphi) = \sum_{i=1}^{N} a_i S_0(t - iT, \varphi) = Re\left\{\sum \dot{a}_i \dot{S}(t - iT) \exp(j(2\pi f_0 t + \varphi))\right\}$$

Для простоты считаем $\{a_i\} = \pm 1$

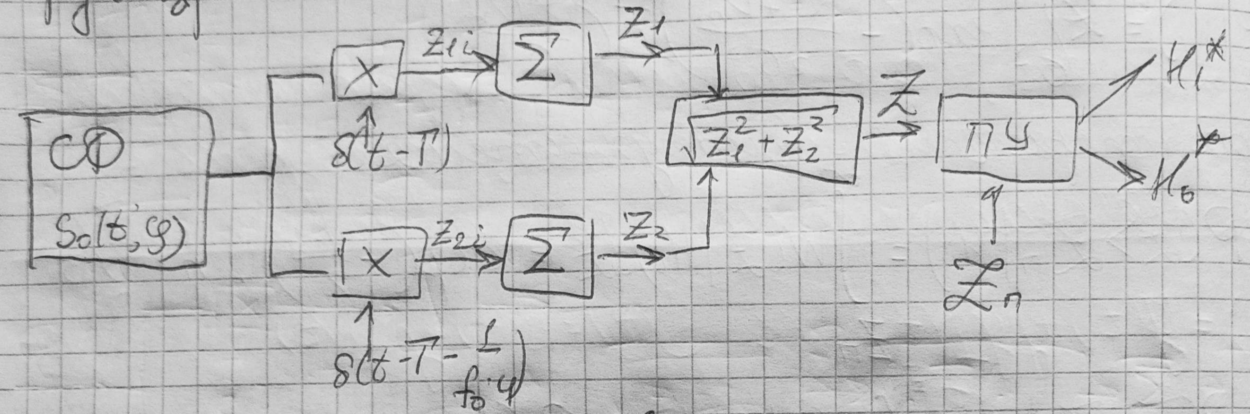
Т.к. фаза случайна, то считаем квадратурные статистики Z_{1i} и Z_{2i} для каждого пакета

$$Z_{1i} = Re\left\{\int_0^T \dot{y}(t) \dot{S}(t - iT)\,dt = \int_0^T y(t) S_0(t - iT) \cos(2\pi f_0 t)\,dt\right.$$

Для $Z_{Яi} = \mathrm{Im}\{\dots\} = \int^{T} \dots \sin(2\pi f_0 t)\,dt$

$S_0(t-iT)$ – закон изменения амплитуды пакета

Структурная схема



Показатели качества аналогичны тем, что были для обнаружения сигнала со случайной начальной фазой

$\alpha = \exp(-h^2/2)$, $\beta = Q(h, q)$

Отличие в том, что $E = \sum E_i = NE_i$

$q = q_0\sqrt{N}$, q_0 – ОСШ на выходе СФ

Для обеспечения требуемых α и β нужно принять N_{min}

$$N_{min} = \frac{\left(Q^{-1}(\sqrt{-2\ln\alpha}, \beta)\right)^2}{q_0^2} \approx \frac{\left(\Phi^{-1}(1-\alpha) + \Phi^{-1}(1-\beta)\right)^2}{q_0^2}$$

16 Обнаружение некогерентных последовательностей радиоимпульсов. Структура устр-ва и качественные показатели

Некогерентной называется последовательность, у которой все пакеты имеют различную случайную начальную фазу. Или, есть другое определение под авторством А.С. Маручина: это такая последовательность, накопление которой на радиочастоте крайне неэффективно.

$$s(t)=\sum_{i=1}^{N} S_0(t-iT,\varphi_i)$$

Полагаем, что априорная $W_\varphi(\varphi)$ равномерна для $|\varphi|\le\pi$

$$L=\int_{-\pi}^{\pi}\dots\int\frac{W(y(t)|H_1)}{W(y(t)|H_0)}W_\varphi(\varphi)\,d\varphi_1\dots d\varphi_N=\int_{-\pi}^{\pi}\dots\int\frac{k\exp\left(-\frac{1}{N_0}\int_0^T[y(t)-s(t,\varphi_1,\dots,\varphi_N)]^2dt\right)}{k\exp\left(-\frac{1}{N_0}\int_0^T y^2(t)\,dt\right)}W_\varphi(\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^N}\int_{-\pi}^{\pi}\dots\int\frac{k\exp\left(-\frac{1}{N_0}\int_0^T y^2(t)dt\right)\exp\left(-\frac{1}{N_0}\int_0^T s^2(t,\varphi_1\dots\varphi_N)dt\right)\exp\left(\frac{2}{N_0}\int_0^T y(t)s(t,\varphi_1\dots\varphi_N)dt\right)}{k\exp\left(-\frac{1}{N_0}\int_0^T y^2(t)\,dt\right)}d\varphi_1\dots d\varphi_N=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^N}\int_{-\pi}^{\pi}\dots\int\exp\left(-\frac{E}{N_0}\right)\exp\left(\frac{2Z(\varphi)}{N_0}\right)d\varphi_1\dots d\varphi_N=$$

/$Z(\varphi)$ включает в себе $\forall$ нач. фазу $\Rightarrow \int\dots\int f(\varphi)\,d\varphi_1\dots d\varphi_N=\prod_{i=1}^{N}\int f(\varphi_i)\,d\varphi_i$ /=

$$=\exp\left(-\frac{E}{N_0}\right)\prod_{i=1}^{N}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left(\frac{2Z(\varphi_i)}{N_0}\right)d\varphi_i=$$

/переходя к аналитическим сигналам/ $=\exp(-E/N_0)\prod_{i=1}^{N}I_0\left(\frac{2Z_{0i}}{N_0}\right)$, где

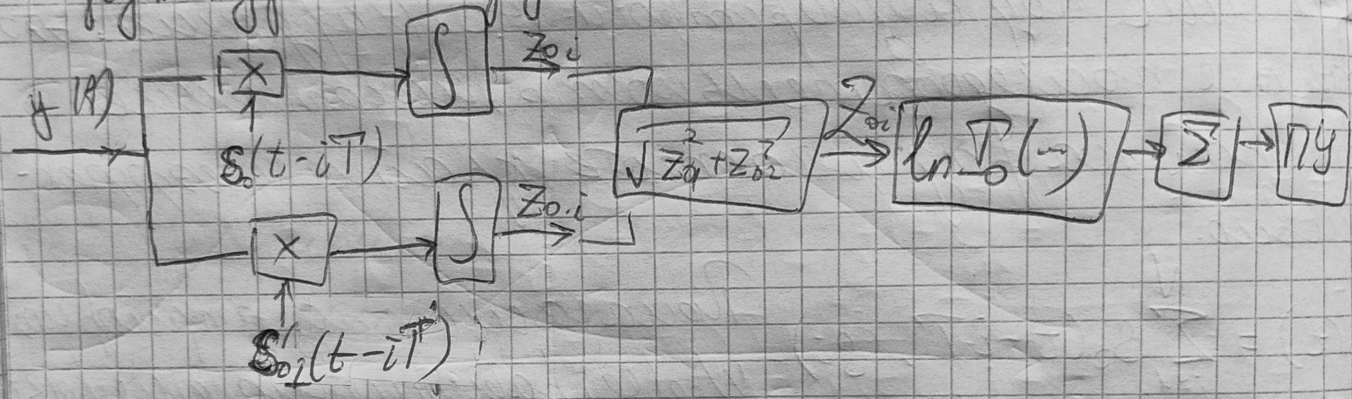
$$Z_{0i}=\sqrt{Z_{01}^2+Z_{02}^2},\quad Z_{01/2}=\int_{iT}^{T}y(t)\,S_{0_{1/2}}(t-iT)\,dt$$

$$\exp(-E_0/N_0)\prod_{i=1}^{N} I_0\left(\frac{2Z_{0i}}{N_0}\right) \gtrless L_\Pi$$

$$\prod_{i=1}^{N} I_0(2Z_{0i}/N_0) \gtrless L_\Pi \exp(E_0/N_0)$$ |логарифмируем

$$\sum \ln\left[I_0(2Z_{0i}/N_0)\right] \gtrless \frac{E_0}{N_0} \ln L_\Pi$$

Структура обнаружителя



Качественные показатели — см лекции

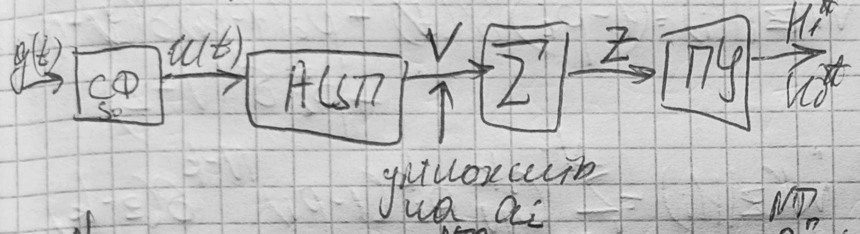
(19) Постановка задачи различения сигналов. Критерии различения. Правила оптимального различения сигналов

См. лекцию от 28.11

18) Цифровые обнаружители

Сигнал представим $S(t)=\sum_{i=1}^{N} a_i S_0(t-iT_п)$, $a_i = \{0, 1\}$

Рассматриваемая схема



$Z=\sum_{i=1}^{N} a_i Z_{0i}$, $Z = \int_0^{NT_п} y(t)s(t)dt = \int_0^{NT_п} y(t)\sum_{i=1}^{N} a_i S_0(t-iT_п)dt =$

$=\sum_{i=0}^{N-1} a_i \int_{iT_п}^{(i+1)T_п} y(t) S_0(t-iT_п)dt = \sum a_i z_{0i} \gtrless Z_п$

Рассматриваем бинарный АЦП с порогом $a=0$, т.е. $V=\begin{cases}0, & u<0\\ 1, & u\geq 1\end{cases}$

Случай гипотезы H_0 (только шум) АЦП равновероятно выдает 0 или 1 и вероятность этих чисел равна $p_0=1/2$

$W(V|H_0)=(1-p_0)\delta(V)+p_0\delta(V-1)$

Случай гипотезы H_1 и вер-ть единицы равна p_1

! $p_1 > 1/2$!

$W(V|H_1)=(1-p_1)\delta(V)+p_1\delta(V-1)$

Полагая шум гауссовским

$p_1 = P(u\geq 0|H_1) = \int_0^{\infty} W(u|H_1)du = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-E)^2}{2\sigma^2}\right)dx =$

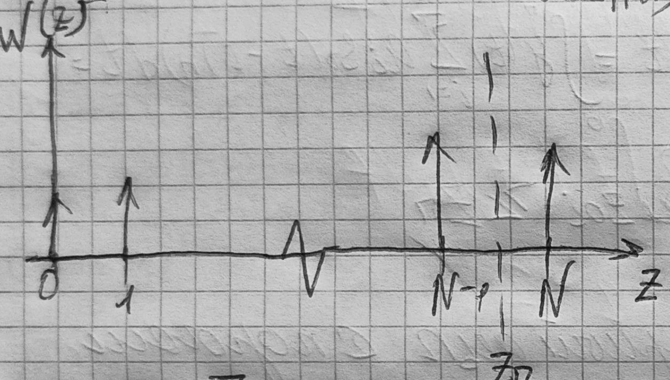
$=1-\Phi(-E/\sigma^2)=\Phi(q_0)$.

Рассмотрим по двум отсчетам

на Σ может быть 0, 1 или 2 и p - вер-ть единицы из АЦП.

Гипотеза H_i, $i=1,0$: $W(z|H_i)=(1-p_i)^2\delta(V)+p_i(1-p_i)\delta(V-1)+p_i^2\delta(V-2)$

Для N отсчетов: $W(z|H_i)=\sum_{k=0}^{N} C_N^k p_i^k(1-p_i)^{N-k}\delta(z-k)$



Пусть порог $z_п \in (N-1, N)$

Вер-ть ложной тревоги $\alpha = p_0^N$

H_0: $\bar{z}=\sum_{i=1} V_i p_0$, V может быть либо 0 или 1

$0\cdot p_0=0 \quad 1\cdot p_0=1$

H_0 $\bar{z}=Np_0$

При H_0 $p_0=1/2$, тогда $\Sigma = Np_0$

H_1: $\bar{z}=\sum p_1 = Np_1 = N\Phi(q_0)$

H_0: $\sigma_z^2 = N(p_0-p_0^2)=Np_0(1-p_0)$ $\quad H_1$: $\sigma_z^2=Np_1(1-p_1)$

? Увеличивая разрядность АЦП $N\to\infty$

$\Delta z \to 0 \Rightarrow dz$

$$\int_{z>z_п} W(z|H_0)\,dz=\int_{z_п}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi Np_0(1-p_0)}}\exp\left[\frac{(z-Np_0)^2}{2Np_0(1-p_0)}\right]=$$

$$=1-\Phi\Big(\underbrace{\frac{z_п-Np_0}{\sqrt{Np_0(1-p_0)}}}_{h}\Big)=1-\Phi(h)=\alpha$$

$$D = \int_{z_n}^{\infty} w(z|K_1)\, dz = \int_{z_n}^{\infty} \frac{1}{2\pi N p_1(1-p_1)} \exp\left(-\frac{(z-Np_1)^2}{2Np_1(1-p_1)}\right) dz =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{z_n - Np_1}{\sqrt{Np_1(1-p_1)}}\right) = \Phi\left(\frac{Np_0 - z_n}{\sqrt{Np_0^2}} + \frac{q_0\sqrt{N}\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}}\right) =$$

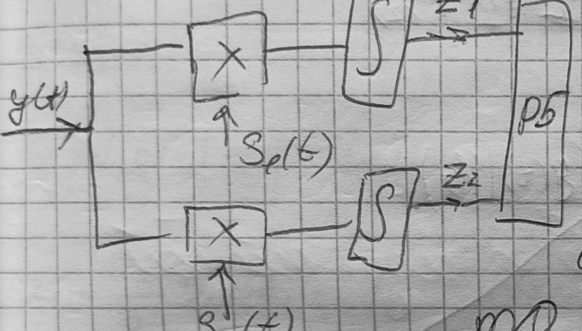
$$= \Phi\left(q_0\sqrt{N}\sqrt{\frac{2}{\pi}} - h\right).$$

(20) Различение двух детерминированных сигналов.

Нам известны два сигнала $S_1(t)$ и $S_2(t)$

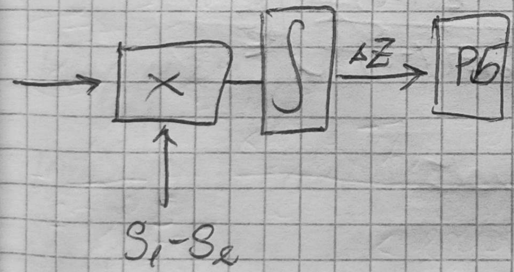
На различитель поступает аддитивная смесь шума $x(t)$ с одним из сигналов

Схема



В решающем блоке сравниваются Z_1 и Z_2, какой больше, тот сигнал и принят. Если сигналы имеют различные энергии, то после $\int$ вычитаем половины их энергий и только потом формируем статистику Z_i

Можно и так:



Если $\Delta Z > 0$, то $y(t) = x(t) + S_1(t)$

Если $\Delta Z < 0$, то $y(t) = x(t) + S_2(t)$

Качественные показатели:

$P_{ош}$ = |полная вер-ть ошибки| = $\frac{P(H_2^*|H_1) + P(H_1^*|H_2)}{2}$

$P(H_2^*|H_1) = P(Z_2 > Z_1|H_1) = \iint\limits_{(Z_2>Z_1)} W(Z_1, Z_2|H_1)\, dZ_1\, dZ_2$

Аналогично для $P(H_1^*|H_2)$

Если центр. ΔZ

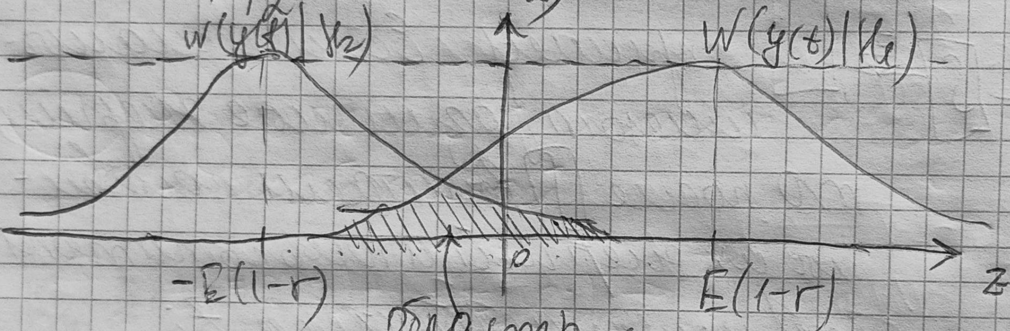
H_1: $\overline{\Delta Z} = \int \overline{y(t)}\, \Delta S(t)\, dt = \int \bar{y}(t)(S_1 - S_2)\, dt = \Big/ \bar{y}(t) = S_1(t) + x(t)$

$= S_1(t) \Big/ = \int S_1^2(t) - S_1(t) S_2(t)\, dt = E - \int S_1(t) S_2(t)\, dt =$

$= E - E r_{12} = E(1 - r_{12})$, r_{12} – коэффициент корреляции

H_2: $\overline{\Delta Z} = -\int S_2^2(t) - S_1(t) S_2(t)\, dt = -E(1 - r_{12})$

$\sigma^2 = N_0 E_\Delta / 2 = N_0 E (1 - r_{12})$



(оно должно быть симметричное)

$$P_{ош} = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi E N_0 (1-r)}} \cdot \exp\left(-\frac{(\Delta Z - E(1-r))^2}{2 N_0 E (1-r)}\right) dZ$$

$$= 1 - \Phi\left(q\sqrt{\frac{1-r}{2}}\right)$$

Наибольшее «раздвигание» $W(y(t)|H_1)$ и $W(y(t)|H_2)$ дает коэффициент корреляции равный -1

21 Различение M детерминированных сигналов. Структура уст-ва. Оптим. ансамбль. Качественные показатели

По критерию максимума правдоподобия

$W(y(t)|H_k) \overset{H_k^*}{\geqslant} W(y(t)|H_i) \quad i=\overline{1,M}$

$w(y(t)|H_i) = k\exp\left(-\frac{1}{N_0}\int_0^T (y(t)-s_i(t))^2 dt\right) = \exp(-E/N_0)\exp\left(\frac{2z_i}{N_0}\right)k_y$

$\ln[W(y(t)|H_i)] = \ln k_y + 2z_i/N_0 - E_i/N_0$ ($\ln k_y$ - постоянная добавка => далее не учитываем)

$z_k - \frac{E_k}{2} \overset{H_k^*}{\geqslant} z_i - E_i/2$ - решающее правило

т.е. принимается решение в пользу гипотезы H_k, если эта гипотеза имеет наибольшее значение $z_k - E_k/2$ среди всех остальных

Структурную схему см. в лекциях

Выбор ансамбля: для достижения наименьшей вероятности ошибки следует использовать ансамбли с наименьшим возможным коэффициентом корреляции между двумя любыми сигналами. Такой набор сигналов называется правильным симплексом.

$r_{max} \geqslant -1/M-1$ при $M\to\infty$ $r_m \to 0$ => ансамбль состоит из ортогональных сигналов

$$\sum_{i,k} r_{ik} = \frac{1}{E}\int \sum_{i,k} s_i(t)\, s_k(t)\,dt = \frac{1}{E}\int\left[\sum_{i=1}^{M} s_i(t)\right]^2 dt \geq 0$$

$$\left[\sum_i s_i(t)\right]^2 = (s_1+s_2+\dots+s_M)^2 = s_1^2+s_2^2+\dots s_M^2+2s_1s_M+\dots = \sum s_i^2 + 2\sum_{i\neq j} s_i s_j$$

$$\left[\int\sum s_i^2(t)\,dt + 2\int\sum_{i\neq j} s_i s_j\,dt\right]\frac{1}{E} = \underbrace{\sum r_{ii}}_{M,\ \text{т.к. } r_{ii}=1} + 2\sum_{i\neq j} r_{ji}$$

$$r \geq -1/_{M-1}$$

(22) Различение сигналов со случайной начальной фазой

$H_i: y(t) = x(t) + s_i(t;\varphi_i)$

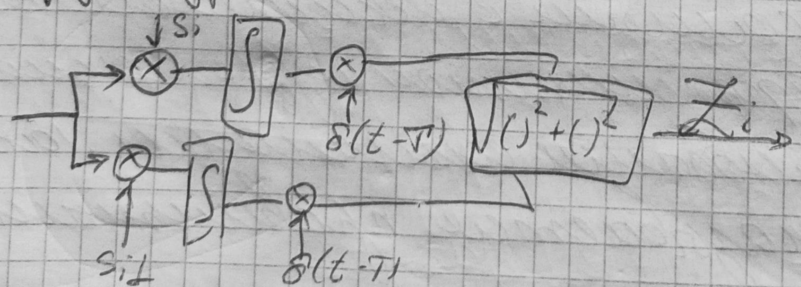
Считаем, что $W_\varphi(\varphi) = 1/2\pi,\ |\varphi| \leq \pi$

$$W(y(t)|H_i) = \int W(y(t)|H_i,\varphi_i)\,W_\varphi(\varphi_i)\,d\varphi_i = k\, I_0\left(\frac{2Z_i}{N_0}\right)$$

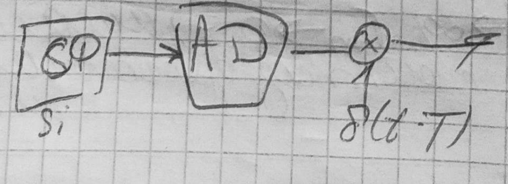
$$Z_i = \sqrt{Z_{1i}^2+Z_{2i}^2}$$

$$Z_{1i} = \int y(t)\, s_i(t)\,dt,\quad Z_{2i} = \int y(t)\, s_{i\perp}(t)\,dt$$

Структура i-го канала



На СФ



Рассмотрим вер-ть ошибки для сигналов, ортогональных в усиленном смысле

$$\int s_i(t,\varphi_i)\, s_k(t,\varphi_k)\, dt = 0 \quad \forall i \neq k \text{ и } \forall \varphi_i, \varphi_k$$

$$\Updownarrow$$

$$\int \dot{S}_i(t)\, \dot{S}_k^*(t)\, dt = 0$$

Вероятность перепутывания S_0 с S_1 – p_{01}

$$p_{01} = \iint\limits_{(Z_1 > Z_0)} W(Z_1, Z_2 | H_0) = /\text{т.к. ортогональные}/ = W(Z_0|H_0) \times W(Z_1|H_0)$$

$$W(Z_0|H_0) = \frac{Z_0}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{Z_0^2 + E^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{Z_0 E}{\sigma^2}\right)$$

$$W(Z_1|H_0) = \frac{Z_0}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{Z_0^2}{2\sigma^2}\right)$$

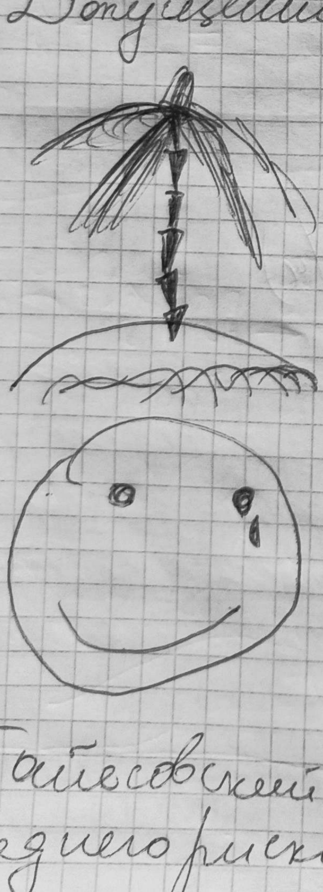
$P_{ош} = \frac{1}{2} \exp(-q^2/4)$ – для двух

для M сигналов $P_{ош} \leq \frac{M-1}{2} \exp(-q^2/4)$

(23) Постановка задачи измерения параметров сигналов. Байесовские алгоритмы измерения параметров сигналов

$y(t,\vec{\lambda}(t),\vec{\theta}(t)) \to$ Измеритель $\to \hat{\vec{\lambda}}(t)$

На входе измерителя сигнал $y(t,\vec{\lambda}(t),\vec{\theta}(t))$, содержащий полезные параметры $\vec{\lambda}(t)$ и неполезные $\theta(t)$. Цель измерителя — выдать $\hat{\vec{\lambda}}(t)$ вектор оценок (измеренных им параметров).



Допущения
- $\vec{\lambda}(t)\to\vec{\lambda}$, т.е. за время измерения не меняется
- $\vec{\theta}(t)\to\varnothing$, т.е. не участвует.
- $\vec{\lambda}$ – случайный вектор с ПВ $w_{\lambda}(\lambda)$, которая не связана с реализацией $y(t)$
- $\hat{\vec{\lambda}}=F\{y(t)\}$, вектор оценок определяется детерминированной функцией от $y(t)$
- шумы статистически описаны

Байесовский алгоритм – минимизирующий среднего риска $\overline{\Pi}$

$\overline{\Pi} = \sum_{(i)}\sum_{(k)} \Pi_{ik} P(H_i) P(H_k^*|H_i)$ ← Этот вариант хорош, но проблема в том, что H_k^* и H_i, представляющие собой вер-ти λ_i и $\hat{\lambda}$, не подходят, если λ → непрерывна.

Поэтому делаем предельный переход

$\Pi_{ik} \to \Pi(\lambda_i, \hat{\lambda}_k)$ – функция ошибки

$P(H_i) \to W_0(\lambda) d\lambda$

$P(H_k^*|H_i) \to W(\hat{\lambda}|\lambda) d\hat{\lambda}$

И тогда $\overline{\Pi} = \int_{(\lambda)}\int_{(\hat{\lambda})} \Pi(\lambda, \hat{\lambda}) W_0(\lambda) W(\hat{\lambda}|\lambda) d\hat{\lambda} d\lambda$

По теореме об умножении вероятностей

$W_0(\lambda) W(\hat{\lambda}|\lambda) = W(\hat{\lambda}) W(\lambda|\hat{\lambda})$

Тогда $\overline{\Pi} = \int_{(\lambda)}\int_{(\hat{\lambda})} \Pi(\lambda, \hat{\lambda}) W(\hat{\lambda}) W(\lambda|\hat{\lambda}) d\hat{\lambda} d\lambda =$

$= \int_{(\hat{\lambda})} W(\hat{\lambda}) \int_{(\lambda)} \Pi(\lambda, \hat{\lambda}) W(\lambda|\hat{\lambda}) d\lambda d\hat{\lambda} = /$ т.к. $\hat{\lambda} = \mathcal{F}\{y(t)\}$ $/ =$

$= \int_{(\hat{\lambda})} W(\hat{\lambda}) \int_{(\lambda)} \Pi(\lambda, \hat{\lambda}) W(\lambda|y(t)) d\lambda d\hat{\lambda}$;

Оптимальной по Байесу минимизирует внутренний интеграл $\int_{(\lambda)} d\lambda = \Pi[y(t)]$

Байесовский критерий не очень, т.к. грубо говоря приходится брать с потолка $W(\lambda)$, $W(\hat{\lambda})$

24) Небайесовские критерии оценки параметров сигнала. Несмещенные оценки. Эффективные оценки. Граница Крамера-Рао

Из-за требования в знании априорных $W(\vec{\lambda})$ байесовские критерии плохо применимы. Вместо них используются критерии несмещенности оценки и минимума дисперсии условной оценки.

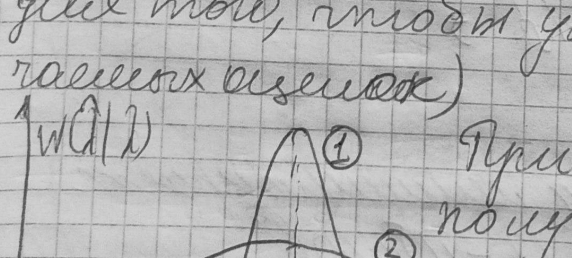
• Условие несмещенности оценки:

$$\overline{\hat{\lambda}} = \lambda \Leftrightarrow \overline{\hat{\lambda} - \lambda} = 0 \Leftrightarrow \int (\lambda - \hat{\lambda})\, W(y(t)/\lambda)\, dy(t) = 0$$

т.е. отсутствует систематическая погрешность.

• Условие минимума условной дисперсии:

$D\{\hat{\lambda}|\lambda\} \to min$ (Это условие вводится для того, чтобы уменьшить разброс получаемых оценок)



При несмещенности оценок, полученных по правилам 1 и 2 оценка, полученная по правилу 1 лучше. (λ_0 - истинное значение измеряемой величины)

Формализовано: $D\{\hat{\lambda}|\lambda\} = \overline{(\lambda - \overline{\hat{\lambda}})^2} = \overline{(\hat{\lambda} - \lambda)^2} \to min$

$$= \int (\hat{\lambda} - \lambda)^2 W(y(t)|\lambda)\, dy(t)$$

Граница Крамера-Рао устанавливает нижний предел условной дисперсии несмещенной оценки

$$\overline{\hat{\lambda} - \lambda} = \int (\hat{\lambda} - \lambda) W(y(t)|\lambda)\, dy(t) = 0$$ | продифференц. по λ

$$\int (\hat{\lambda} - \lambda) \frac{dW(y(t)|\lambda)}{d\lambda}\, dy(t) = 1$$

Заметим $\frac{d \ln W(y(t)|\lambda)}{d\lambda} W(y(t)|\lambda) = \frac{dW(y(t)|\lambda)}{d\lambda}$

$\left(\frac{d \ln f(x)}{dx} f(x) = \left| \frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x};\ f(g(x))'_x = f'(g(x))\, g'(x) = \frac{df(g(x))}{dx} \frac{dg(x)}{dx} \right| = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx} \cdot f(x) = \frac{df(x)}{dx} \right)$

$$\int (\hat{\lambda} - \lambda) \frac{d \ln W(y(t)|\lambda)}{d\lambda} W(y(t)|\lambda)\, dy(t) = 1$$

По неравенству Буняковского-Шварца

$$\left[\int f \cdot g\, dx \right]^2 \leq \int f^2 dx \cdot \int g^2 dx$$

усреднение

Получаем

$$\overline{\left[\frac{d \ln W(y(t)|\lambda)}{d\lambda} \right]^2} = -\overline{\frac{d^2 \ln W(y(t)|\lambda)}{d\lambda^2}} = Ф \text{ (инф. Фишера)}$$

$$D\{\hat{\lambda}|\lambda\} \geq \left\{ \overline{\left[\frac{d \ln W(y(t)|\lambda)}{d\lambda} \right]^2} \right\}^{-1} = \left[-\overline{\frac{d^2 \ln W(y(t)|\lambda)}{d\lambda^2}} \right]^{-1}$$

Если интересует оценка дисперсии $\vec{\lambda}$, то используется матрица Фишера

$D\{\hat{\lambda}_i|\lambda\} \geq \Phi^{-1}_{ik}$, Φ^{-1} - обратная матрица

$$\Phi_{ik} = -\overline{\frac{\partial^2 \ln W(y(t)|\lambda)}{\partial\lambda_i \partial\lambda_k}}$$

25 Оценки по максимуму правдоподобия (ОМП)

ОМП асимптотически стремятся к оптимальным, т.е. при $t_{наблюд.} \to \infty$ и увеличении ОСШ.

Максимум $W(y(t)|\hat{\lambda})$ достигается при максимуме $W(y(t)|\lambda)$. Для удобства прологарифмируем $\boxed{\ln W(y(t)|\hat{\lambda}) = \max_{\lambda} \ln W(y(t)|\lambda)}$

Свойства ОМП

1) асимптотически несмещенные
2) ОМП пар-ов $\vec{\lambda}$ асимптотически совместно эффективны ($\forall i$ граница D по Крамеру-Рао обращается в равенство)
3) ОМП пар-ов $\vec{\lambda}$ асимптотически совместно нормальны ($\hat{\lambda}_i$ - гауссовские и $\vec{\lambda}$ - гауссовский) с корреляционной матрицей $K = \Phi^{-1}$

4) Если строго эффективная ($\hat{\lambda} - \lambda = k(\lambda)\frac{d\ln W(y(t)|\lambda)}{d\lambda}$) оценка $\exists$, то этой есть ОМП

5) ОМП асимптотически стремится к байесовским оценкам

ОМП на фоне АБГШ

$$W(y(t)|s(t,\lambda)) = C\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T [y(t)-s(t,\lambda)]^2 dt\right\} =$$

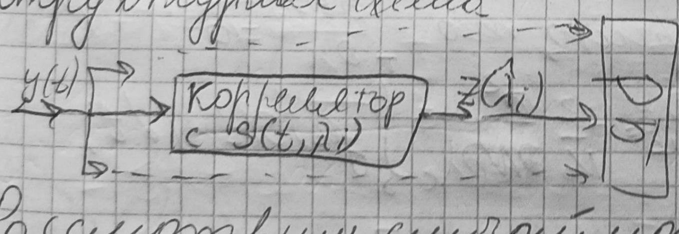
$$= /\text{раскрываем квадрат}/ = k_y \exp\left[\frac{2z(\lambda)-E(\lambda)}{N_0}\right]$$

При оценке энергетических параметров

$$z(\hat{\lambda}) - E(\hat{\lambda})/2 = \max_{\lambda}\left[z(\lambda) - E(\lambda)/2\right]$$

Неэнергетические $z(\hat{\lambda}) = \max_{\lambda} z(\lambda)$

Структурная схема



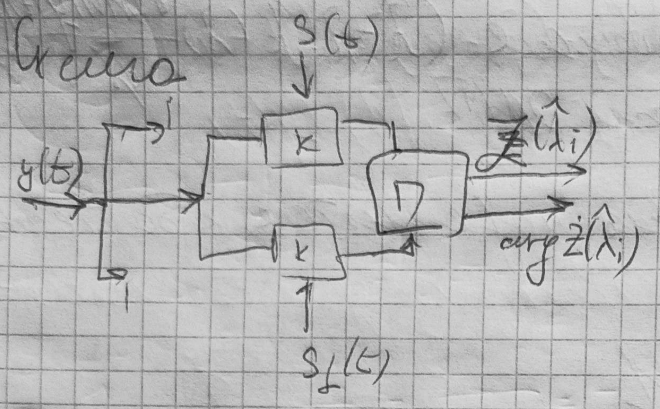
Рассмотрим случай наличия в сигнале неинформационного параметра, например фазы φ, распределенной равномерно между $-\pi$ и π.

$$W(y(t)|\lambda) = k_y \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left[\frac{2Z(\lambda)-E(\lambda)}{N_0}\right]\frac{1}{2\pi}\,d\varphi =$$

$$= k_y I_0\left[\frac{2Z(\lambda)}{N_0}\right]\exp\left[-\frac{E(\lambda)}{N_0}\right]$$

$$Z(\hat{\lambda}) = \max_{\lambda} Z(\lambda)$$

Схема



26 Дисперсия оценок по максимуму правдоподобия

Допустим, что оцениваем все параметры (информационные и неинформационные).

Тогда $\Phi_{ik} = -\frac{2}{N_0}\frac{\partial^2 \overline{Z(\lambda)}}{\partial\lambda_i\partial\lambda_k} + \frac{1}{N_0}\frac{\partial^2 E(\lambda)}{\partial\lambda_i\partial\lambda_k}$ если λ не изменяет энергию, то $\frac{\partial E(\lambda)}{\partial\lambda} = 0$

$\overline{Z(\lambda)} = \int_0^T \overline{y(t)}\, s(t,\lambda)\,dt \Rightarrow \Phi_{ik} = -\frac{2}{N_0}\frac{\partial^2}{\partial\lambda_i\partial\lambda_k}\int_0^T \overline{y(t)}\, s(t,\lambda)\,dt,$

$y(t)$ содержит в себе истинное λ_0

Введем ф-ию неопределенности $\psi(\lambda_0,\lambda)$

$\psi(\lambda_0,\lambda) = \frac{1}{E}\int s(t,\lambda_0)s(t,\lambda)\,dt$

Рассматривать далее будем стационарные ψ: $\psi(\lambda_0,\lambda) = \psi(\lambda-\lambda_0)$, поэтому можно

$\psi(\lambda_0,\lambda)$ определить как $\frac{1}{E}\int s(t,0)s(t,\lambda)\,dt$

После таких преобразований $\Phi_{ik} = -q^2 \frac{\partial^2 \Psi(\lambda)}{\partial \lambda_i \partial \lambda_k}\Big|_{\lambda=\lambda_0}$

т.к. λ - неэнергетический, то

$\Phi_{ik} = -\frac{\partial^2}{\partial\lambda_i \partial\lambda_k} \overline{\ln I_0(2Z(\lambda)/N_0)}$ и мы хотим

точных оценок, что приводит к $I_0(2Z(\lambda)/N_0) \gg 1$

и $\ln I_0(2Z(\lambda)/N_0) \approx 2Z(\lambda)/N_0$

Перейдя к Φ-огибающим

$\dot\varphi(\lambda_0, \lambda) = \frac{1}{2E}\int \dot S(t,\lambda_0)\dot S^*(t,\lambda)dt$ получим $\overline{Z(\lambda)} = E\Psi(\lambda_0, \lambda)$

где $\Psi(\lambda_0, \lambda) = |\dot\varphi|$ и здесь тоже положим Ψ

стационарной можно $\vec\lambda_0 = \vec 0$

Получив все Φ_{ik} и обратив матрицу Φ

получим дисперсии на главной диагонали:

$$D(\hat\lambda|\lambda) = -\frac{1}{q^2\Psi''(0)}$$

27 Оценка амплитуды сигнала

$S(t, A) = A\, s_0(t)$, A - амплитуда, подлежащая измерению

причем $s_0(t)$ - множитель, задающий форму сигнала и $\int s_0^2(t)dt = E_0 = 1$

$E(\lambda) = E(A) = \int s^2(t,A)dt = E_0 A^2 = A^2$

$Z(\lambda) = \int_0^T y(t)\, s(t,A)dt = A_Z$ тогда по ОНП

$\hat A$ соответствует точка max фии $A_Z - A^2/2$

Это можно ~~ку~~ получить

$D(\hat{A}|A)/A^2 = \frac{N_0}{2A^2} = \frac{N_0}{2E(A)} = \frac{1}{q^2}$ — это относитель-ная дисперсия ошибки, отнесенной к истинному значению

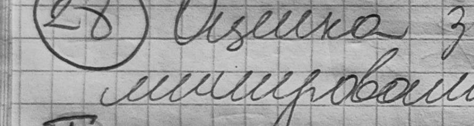
(28) Оценка запаздывания детерминированного сигнала

T_c — длительность сигнала

наблюдение начинается при $t=0$ и имеет продолжительность $T=\tau+T_c$

Таким образом $\int^{T} s^2(t-\tau)\,dt$ полностью описывает энер-ю всего сигнала $\Rightarrow$ τ — неэнергетический параметр $\Rightarrow$

$= Z(\hat{\tau}) = \max_{\tau} Z(\tau)$



Вычисляется время формирования максимума t_M, которое связано с $\hat{\tau}$: $t_M = \hat{\tau} + T_c$

$$D(\hat{\tau}|\tau) = -\frac{1}{q^2\psi''(0)}$$

$$\psi(\tau_0,\tau)=\frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau_0)s(t-\tau)\,dt,$$ но для большей наглядности вторую производную найдем через спектр.

$$\psi(\tau)=\frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty}|\dot S(f)|^2\exp(j2\pi f\tau)\,df$$

$$\psi''(\tau)=\frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty}(j2\pi f)^2|\dot S(f)|^2\exp(j2\pi f\tau)\,df$$

и наконец $$\psi''(0)=-\frac{1}{E}2\pi\int_{-\infty}^{\infty}f^2|\dot S(f)|^2\,df$$

т.о. $$D(\hat\tau|\tau)=\frac{1}{(2\pi f_э)^2 q^2},\quad q\gg 1$$

где $$f_э=\left[\frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty}f^2|\dot S(f)|^2\,df\right]^{1/2}$$ ← центральный момент II поряд. (эквивалент дисперсии)

видео (для радио $(f-f_0)^2$)

Для узкополосного $$D(\hat\tau|\tau)=\frac{1}{(2\pi f_0)^2 q^2},\quad q\gg 1$$

29 Оценка запаздывания сигнала со случайной начальной фазой

Представим сигнал в виде:

$$s(t-\tau, \varphi) = Re\{\dot S(t-\tau)\exp(j\varphi)\exp(j2\pi f_0 t)\}$$

$\dot S(t-\tau)$ - К-огибающая $|\varphi| \le \pi$, $W(\varphi) = 1/2\pi$

$$y \to \boxed{СФ} \to \boxed{ДО} \to \boxed{РБ} \to \hat\tau$$

СФ согласован на сигнал с $\varphi = 0$

$t_м = \tau + T_c$, $t_м$ - момент времени достижения огибающей своего максимума

$$\dot\Psi(\tau) = \left|\frac{1}{2E}\int_{-\infty}^{\infty} \dot S(t)\cdot \dot S(t,\tau)\,dt\right| = \frac{1}{2E}\int |\dot S(f)|^2 e^{j2\pi f\tau}\,df$$

огибающ.

$$D\{\hat\tau|\tau\} = \frac{1}{(2\pi F_э)^2 q^2}, \quad q \gg 1$$

$F_э$ - эффективная ширина спектра огибающей

$$F_э = \left[\frac{\int f^2 |\dot S(f)|^2 df}{\int |\dot S(f)| df}\right]^{1/2}$$