

Sperimentazioni di Fisica 2

Docenti: Prof. A. Longhin - Prof. A. Patelli
Corso di Laurea in Fisica
Canale 1 A-L
Anno Accademico 2019/2020

ESPERIENZA DI LABORATORIO N^o 2

Circuito RC

TURNO IV - GRUPPO 8

CIGAGNA SIMONE

1193992

simone.cigagna@studenti.unipd.it

CUCCHETTO FILIPPO

1189283

filippo.cucchetto.1@studenti.unipd.it

LAI NICOLÒ

1193976

nicolo.lai@studenti.unipd.it

DATA DI CONSEGNA:
07/05/2020

1 Obiettivo

Misurare la capacità C di un condensatore.

2 Apparato Sperimentale

Gli strumenti che si utilizzano nel corso dell'esperienza sono i seguenti.

- **Oscilloscopio** (Tektronix TDS2012): permette di osservare l'andamento temporale di uno o più segnali di tensione, mostrando su uno schermo una (o più) tracce in cui la coordinata verticale si riferisce alla tensione e la coordinata orizzontale al tempo. L'oscilloscopio in questione campiona il segnale analogico a intervalli di tempo fissati e lo converte in valori numerici che sono visualizzati su un display LCD a colori da 7 pollici. Specifiche tecniche del modello utilizzato:

- Sampling rate: 1 GS/s ($\Delta t = 0.5$ ns)
- Risoluzione: 8 bit
- Bandwidth: 100 MHz ($\Delta t = 10$ ns)

Si può modellizzare lo strumento come una resistenza di $1\text{ M}\Omega$ in parallelo ad una capacità di 20 pF . Nell'accoppiamento AC il segnale è accoppiato ad una capacità $C_{AC} = 20\text{ nF}$, il cui scopo è quello di eliminare la componente continua del segnale. La configurazione DC invece preserva la componente continua e verrà usata di default sul canale di ingresso al circuito. Il trigger viene impostato sul canale 1, a livello $V_T = 0$ quando il segnale è in salita. Lo strumento presenta un'accuratezza sul guadagno verticale pari al 3% del valore letto (errore massimo) ed è generalmente il contributo più significativo. L'incertezza di guadagno sui tempi è invece trascurabile. L'accuratezza che tiene conto degli effetti di risoluzione e imprecisione della traccia è di 1/10 di divisione su tutta la scala di lettura (errore massimo), ed è uguale sia per le tensioni sia per i tempi.

- **Sonda di compensazione "10X"**: è un attenuatore compensato. Si utilizza per aumentare l'impedenza d'ingresso dell'oscilloscopio: così facendo il segnale misurato risente di una minor distorsione prodotta dai circuiti elettronici dell'oscilloscopio stesso. Il sistema costituito dalla sonda, il cavo coassiale e l'oscilloscopio è equivalente al sistema costituito dal cavo coassiale e l'oscilloscopio, ma con maggiore resistenza d'ingresso R_E e minore capacità parassita C_E . Il segnale mostrato sul display dell'oscilloscopio sarà però attenuato di un fattore 10.
- **Generatore di funzioni** (Tektronix AFG1062): può generare un'onda sinusoidale fino a 60 MHz, un'onda quadra fino a 30 MHz o una forma arbitraria con 192 punti e 14 bit. Il sampling rate è 300 MS/s ed ha un'uscita ad alta impedenza oppure a 50Ω . L'ampiezza dei segnali possibili varia tra 1 e $10 V_{pp}$.
- **Cavo coassiale**: costituito da un'anima centrale e da una calza conduttriva, collegata a massa, separate da un materiale isolante. Un capo del cavo coassiale è composto da due connettori a banana: uno rosso per il segnale (conduttore interno) e uno nero per la massa (calza esterna). I cavi coassiali vengono utilizzate nelle connessioni con l'oscilloscopio ed il generatore di funzioni.
- **Multimetro digitale** (Agilent U1232A): viene utilizzato per effettuare misure "dirette" delle componenti del circuito. Si riporta l'accuratezza dello strumento per misure di resistenza e di capacità. In modalità ohmmetro, con un fondoscala di $6\text{ k}\Omega$ si ha $0.9\% + 3$. Per la misura della capacità, invece, l'accuratezza dello strumento risulta $1.9\% + 2$.
- **Multimetro digitale** (Fluke 111): viene utilizzato per effettuare misure "dirette" delle componenti del circuito. L'accuratezza dello strumento per misure di capacità risulta $1.9\% + 2$.
- **Circuito RC**: modellizzabile come una rete a quattro poli, due di ingresso e due di uscita. È realizzato con una resistenza R ed una resistenza C e si possono avere due configurazioni:
 - Passa alto: condensatore tra un polo d'ingresso e un polo d'uscita (in serie) e la resistenza tra le due uscite (in parallelo).
 - Passa basso: resistenza tra un polo d'ingresso e un polo d'uscita (in serie) e la condensatore tra le due uscite (in parallelo).

Il circuito RC utilizzato è una rete unilatera, in quanto la massa del segnale in ingresso alla rete è comune con la massa in ingresso all'oscilloscopio e viene assemblato su sulla breadboard utilizzando una resistenza $R = (1.204 \pm 0.007) \text{ k}\Omega$ e una capacità $C = (97.0 \pm 1.6) \text{ nF}$ (misurate con il multimeter Agilent).

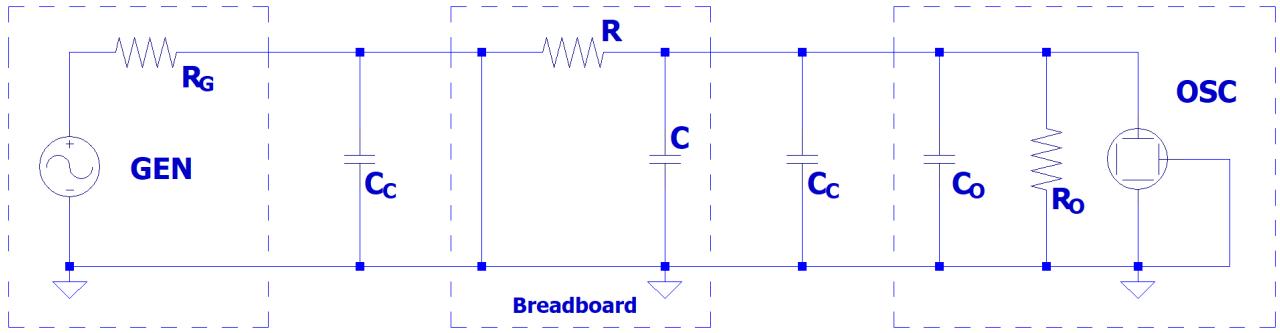


Figura 1: Rappresentazione a costanti concentrate del circuito utilizzato per la misura della capacità C attraverso la scarica del circuito. Si mettono in evidenza, oltre alla resistenza R ed alla capacità C su breadboard, anche la resistenza interna del generatore R_G , la resistenza R_O e la capacità C_O associate all'oscilloscopio, e le capacità parassite C_C dovute ai cavi coassiali che collegano generatore e oscilloscopio alla breadboard.

3 Errori di Lettura

Si vuole caratterizzare l'errore di lettura fornito dall'oscilloscopio, ovvero l'accuratezza che tiene conto degli effetti di risoluzione e imprecisione della traccia (contributo casuale), pari a 1/10 di divisione su tutta la scala di lettura.

3.1 Procedura di Acquisizione Dati

Viene impostato un segnale di tipo "rampa", cioè un segnale che cresce e decresce linearmente, agendo sul generatore di funzioni. Impostando opportunamente le opzioni di visualizzazione dell'oscilloscopio, sullo schermo viene visualizzato un fronte di salita (ben contenuto sullo schermo). Si procede quindi con la lettura dei punti intersecando il cursore sulle tensioni con la traccia in corrispondenza della griglia dei tempi. Dato che l'errore di lettura potrebbe dipendere dalla scala utilizzata, si decide ripetere le misure utilizzando sei scale differenti. I sei campioni di misure sono riportati in Tabella 5 (Appendice A).

3.2 Dati e Analisi

Avendo impostato il generatore di funzioni in modo da avere un segnale lineare ed avendo acquisito misure esclusivamente su un fronte di salita ci si aspetta che i dati si distribuiscano lungo una retta con pendenza positiva. Si vuole dunque osservare quanto le misure acquisite si discostino da questa retta, assumendo preliminarmente che gli effetti di non linearità del generatore siano sufficientemente trascurabili. Si intende quindi caratterizzare l'errore di lettura sfruttando l'errore a posteriori di un'interpolazione lineare: questo, infatti, fornisce una buona indicazione sull'errore in questione. Una volta stimato l'errore a posteriori, attraverso la relazione di proiezione degli errori dalle ascisse sulle ordinate

$$\sigma_y = \sqrt{\Delta V_r^2 + m^2 \Delta t_r^2} \quad \Delta V = \sigma_{\text{div}} \times \text{scalav} \quad \Delta t = \sigma_{\text{div}} \times \text{scala}_t \quad (1)$$

e assumendo che l'errore complessivo da associare ai punti σ_y corrisponda all'errore a posteriori, si fornisce una stima del contributo σ_{div} di incertezza su divisione, uguale sia per le tensioni sia per i tempi:

$$\sigma_{\text{div}} = \frac{\sigma_{\text{post}}}{\sqrt{\text{scalav}^2 + m^2 \text{scala}_t^2}} \quad (2)$$

Ottenute le sei stime di σ_{div} a partire dagli errori a posteriori, si decide di effettuare una media: si assume che, in questo modo, $\langle \sigma_{\text{div}} \rangle$ fornisca una caratterizzazione dell'incertezza di lettura più appropriata, rispetto a quella suggerita dall'oscilloscopio ($\frac{1/10 \text{ div}}{\sqrt{6}} = 0.04 \text{ div}$ assumendo una distribuzione triangolare). I risultati vengono esposti in Tabella 1 a pagina seguente.

Caratterizzazione dell'errore di lettura		
N° dataset	$\sigma_{\text{post}} (\text{V})$	σ_{div}
1	1.9	0.014
2	34	0.013
3	0.3	0.011
4	0.3	0.013
5	0.8	0.012
6	28	0.011

Tabella 1: Si mostrano gli errori a posteriori, calcolati attraverso l'interpolazione lineare, e le stime degli errori di lettura su divisione che si sostituiscono a 0.04 div, valore "consigliato" dallo strumento stesso.

Si nota immediatamente come questi siano visibilmente minori rispetto a quanto suggerito dall'oscilloscopio. Si assume dunque che la "discretizzazione" del movimento del cursore (che può assumere solo 25 posizioni per divisione) riduca leggermente l'incertezza del posizionamento di questo. Calcolando ora la media dei valori ottenuti si trova

$$\langle \sigma_{\text{div}} \rangle = 0.013 \quad (3)$$

Ipotizzando sempre una distribuzione triangolare, è possibile affermare che l'errore massimo che si sostituisce a 1/10 di divisione sia circa 3/100 di divisione. In seguito, dunque, si utilizzerà $\langle \sigma_{\text{div}} \rangle$ come errore di lettura.

4 Scarica del Circuito RC

Si vuole ora stimare la capacità C di un circuito RC (raffigurato in Figura 1) studiando la sua scarica.

4.1 Procedura di Acquisizione Dati

Viene assemblato il circuito RC sulla breadboard, utilizzando una resistenza $R = (1204 \pm 7) \Omega$ e una capacità $C = (97 \pm 2) \text{nF}$ (misurate con il multimetro Agilent). Si collega poi il condensatore a massa mentre il segnale d'ingresso viene collegato alla resistenza: configurazione passa basso. Per misurare il segnale in uscita si utilizza la sonda, collegandola ai capi della capacità C. Si procede quindi collegando il generatore di funzioni in ingresso alla breadboard e collegando la sonda all'oscilloscopio. Dal generatore di funzioni si imposta un segnale di tipo onda quadra, con un'ampiezza di 4 V_{pp} e una frequenza di 500 Hz (il carico viene impostato su High Z in modo che il generatore eroghi il voltaggio impostato). Sull'oscilloscopio, invece, si imposta un'attenuazione sonda 10x, come da specifiche di quest'ultima. Inoltre, si attiva la modalità "media": in tale modalità, l'oscilloscopio fornisce sullo schermo una traccia corrispondente alla media di più segnali (in questo caso 128 periodi di oscillazione), rendendola così più fine eliminando le fluttuazioni che si mediano a zero. A questo punto, si procede con l'acquisizione delle misure, utilizzando come scala di lettura sul display dell'oscilloscopio 500 mV per divisione sulle tensioni e 50 μs per divisione sui tempi. Inizialmente, si usano entrambi i cursori dei tempi: il primo viene posizionato all'inizio della scarica, mentre il secondo si posiziona in corrispondenza delle intersezioni della traccia con la griglia dei tempi. Si misura quindi la differenza Δt dei tempi misurati dai due cursori, assieme al valore di tensione corrispondente. Successivamente, si utilizzano i due cursori delle tensioni: in modo del tutto analogo alla presa dati precedente, il primo cursore viene posizionato all'inizio della scarica e, attraverso l'uso del secondo cursore, si acquisiscono le misure ΔV in corrispondenza dei punti in cui la traccia interseca la griglia dei tempi. Viene eseguita poi una misura "puntuale" della costante di tempo τ : si vuole misurare la differenza di tempo tra l'inizio della discesa ed il momento in cui il valore della tensione iniziale si riduce di un fattore $1/e (\sim 0.37)$, ovvero quando il voltaggio assume il valore $V_\tau = -0.53 \text{ V}$. Si trova, come risultato approssimativo, $\tau \approx 137 \mu\text{s}$. I dati acquisiti sono riportati in Tabella 6 (Appendice A).

4.2 Analisi Dati

Si vuole misurare il valore della capacità C attraverso la stima della costante di tempo τ del circuito, nota la relazione che esprime la tensione ai capi del condensatore in funzione del tempo in un processo di scarica

$$V = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \log(V) = -\frac{t}{\tau} + \log(V_0) \quad (4)$$

Si procede adesso studiando separatamente il primo ed il secondo dataset.

4.2.1 Campione N°1

Si intende stimare la costante di tempo τ attraverso un'interpolazione log-lineare del tipo

$$\log\left(\frac{V}{V_0}\right) = -\frac{\Delta t}{\tau} \quad (5)$$

Per rendere questo possibile, i dati di voltaggio del primo dataset vengono traslati di +2 V, in modo da rendere tutti i valori positivi: così facendo non si altera la "forma" dei dati e si assume quindi sia un'operazione lecita. Successivamente, si considera il logaritmo naturale delle tensioni e si prosegue con un'interpolazione lineare "zero", cioè senza assegnare alcun errore ai punti, al fine di ricavare dei valori iniziali dei parametri V_0 e τ . Chiaramente, l'interpolazione "zero" non prevede la normalizzazione dei voltaggi a V_0 :

$$\log(V) = -\frac{\Delta t}{\tau} + \log(V_0) \quad (6)$$

In questo modo, coefficiente angolare e intercetta della retta interpolante forniscono un modo per estrarre i parametri a cui si è interessati. Questi vengono dunque sfruttati nella propagazione degli errori: ai logaritmi delle tensioni e alle misure di tempo vengono associate le incertezze

$$\sigma_{\log(V)} = \frac{\sigma_{V_r}}{V} \quad \sigma_{\Delta t} = \sqrt{\sigma_{\Delta t_r}^2 + \left(\frac{\tau}{V_0} e^{\frac{\Delta t}{\tau}}\right)^2 \sigma_{V_r}^2} \quad (7)$$

dove $\sigma_{V_r} = \langle \sigma_{\text{div}} \rangle \times 0.5 \text{ V}$ è l'errore di lettura associato alle tensioni e $\sigma_{\Delta t_r} = \langle \sigma_{\text{div}} \rangle \times 50 \mu\text{s}$ è l'errore di lettura associato ai tempi. Questi contributi sono dunque riconducibili all'incertezza nella lettura dei cursori. Nell'incertezza totale sui tempi $\sigma_{\Delta t}$ si vuole però considerare anche il contributo di incertezza proveniente dalla griglia, ottenuto dividendo l'errore di lettura delle tensioni per la derivata dV/dt , in quanto ci si aspetta aumenti al diminuire della pendenza della curva (traccia e griglia delle tensioni sono quasi parallele sulla coda ed è difficile determinare con precisione l'intersezione di queste). Si vuole ora ripetere la regressione lineare associando questa volta un errore ai punti sulle ordinate dato da $\sigma_{\log(V)}$ e dalla proiezione di $\sigma_{\Delta t}$

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma_{\log(V)}^2 + m^2 \sigma_{\Delta t}^2} \quad (8)$$

con $m = -1/\tau$ il coefficiente angolare del fit "zero". Si è interessati ai nuovi parametri V_0 e τ con i rispettivi errori: questi vengono ora utilizzati per un'ulteriore propagazione. In particolare, il parametro $V_0 = (3.923 \pm 0.017) \text{ V}$ viene utilizzato per la normalizzazione delle tensioni. Di conseguenza, l'errore che si associa ai logaritmi normalizzati è

$$\sigma_{\log(V/V_0)} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{V_r}}{V}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{V_0}}{V_0}\right)^2} \quad (9)$$

Viene poi ricalcolato l'errore sui tempi $\sigma_{\Delta t}$ utilizzando i nuovi parametri, in quanto si ritengono più affidabili avendo introdotto le incertezze nella regressione. Si considera ora l'errore complessivo da associare ai punti in ordinata come $\sigma_{\log(V/V_0)}$ e la proiezione di $\sigma_{\Delta t}$ mediante il coefficiente angolare del fit precedente. Si è ora pronti a procedere con l'interpolazione del tipo mostrato in Equazione 5. Il grafico è mostrato in Figura 2 (pagina seguente). L'ottima compatibilità del $\chi^2 = 6.0$ con i gradi di libertà (ndf = 5) è indice del fatto che l'incertezza associata ai punti è appropriata alla loro dispersione. Osservando il grafico dei residui, si nota immediatamente come l'incertezza aumenti con tempi maggiori: il contributo di griglia aggiunto come inverso della derivata e la diminuzione della tensione, infatti, aumentano progressivamente l'errore sui punti. All'aumentare dell'incertezza, per tempi sempre maggiori, cresce anche la dispersione dei punti: si pensa che questo andamento rifletta la difficoltà sperimentale di campionare la coda della traccia sull'oscilloscopio, per le motivazioni riportate in precedenza. Per ciò che concerne l'intercetta, essa presenta un'ottima compatibilità con zero, come da aspettative. Dai parametri dell'interpolazione, si ricava la costante di tempo τ come l'opposto dell'inverso del coefficiente angolare:

$$\tau = -\frac{1}{m} = (124.0 \pm 0.9) \mu\text{s} \quad \sigma_\tau = \frac{\sigma_m}{m^2} \quad (10)$$

Il contributo di incertezza di scala sulle misure di tensione non influenza il coefficiente angolare per le proprietà del logaritmo e, di conseguenza, non influenza la costante di tempo τ .

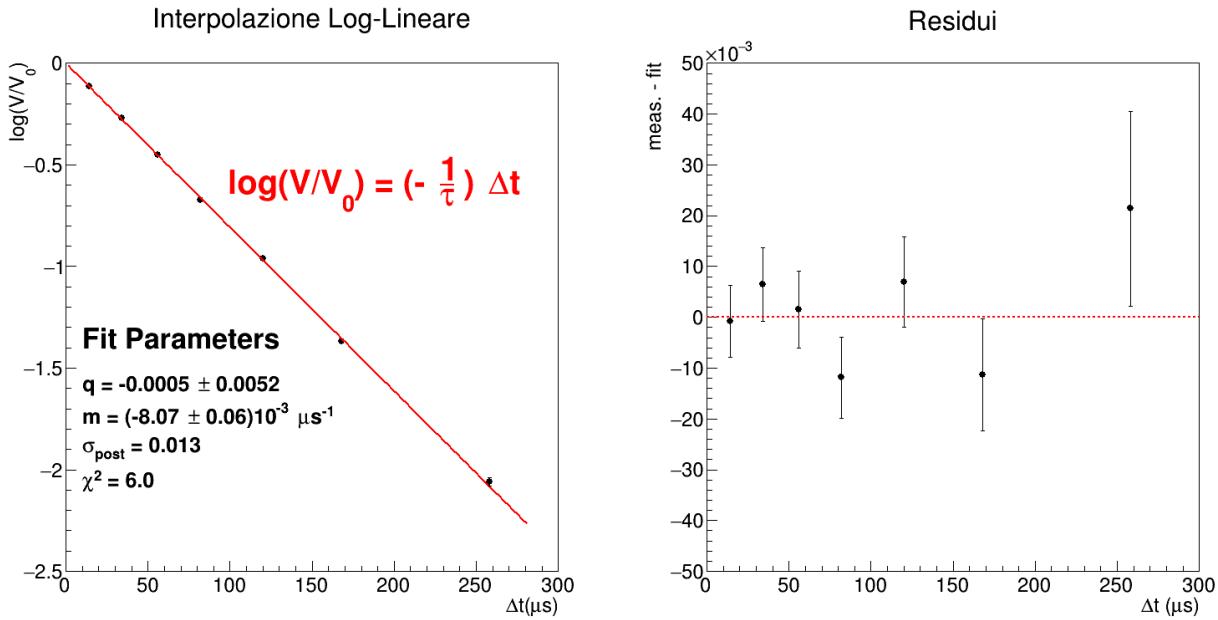


Figura 2: A sinistra: interpolazione finale log-lineare delle coppie $\{\Delta t, \log(V/V_0)\}$ in Tabella 6. A destra: grafico dei residui dei dati dalla retta.

4.2.2 Campione N°2

Si intende stimare la costante di tempo τ attraverso un'interpolazione log-lineare del tipo

$$\log\left(\frac{\Delta V}{V_0}\right) = -\frac{t}{\tau} \quad (11)$$

Sapendo che il trigger dell'oscilloscopio è posizionato a $t_{trigger} = (1144.0 \pm 0.6) \mu s$ mentre il cursore tempo a $t_{cursore} = (908.0 \pm 0.6) \mu s$, segue che le misure di tempo necessitano di essere traslate di una quantità pari a $t^* = t_{trigger} - t_{cursore} = (236.0 \pm 0.9) \mu s$. Alla posizione del trigger e alla posizione del cursore sono stati associati gli errori di lettura come $\langle \sigma_{div} \rangle \times 50 \mu s$. Si procede adesso sulla falsa riga dell'analisi del primo campione. Si considera il logaritmo naturale delle tensioni e si prosegue con un'interpolazione lineare "zero", cioè senza assegnare alcun errore ai punti, della forma mostrata in Equazione 6, al fine di ricavare dei valori iniziali dei parametri V_0 e τ . Si associano le incertezze alle misure di tempo e tensione

$$\sigma_{\Delta V} = \sqrt{\left(\frac{V_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2 \sigma_{t_r}^2 + \sigma_{\Delta V_r}^2} \quad \sigma_t = \sigma_{t_r} \quad (12)$$

dove $\sigma_{\Delta V_r} = \langle \sigma_{div} \rangle \times 0.5 V$ è l'errore di lettura associato alle tensioni e $\sigma_{t_r} = \langle \sigma_{div} \rangle \times 50 \mu s$ è l'errore di lettura associato ai tempi. Questi contributi sono dunque riconducibili all'incertezza nella lettura dei cursori. Nell'incertezza totale sulle tensioni $\sigma_{\Delta V}$ si vuole però considerare anche il contributo di incertezza proveniente dalla griglia, ottenuto moltiplicando l'errore di lettura dei tempi per la derivata dV/dt , in quanto ci si aspetta aumenti con il crescere della pendenza della curva (per tempi piccoli la traccia è quasi parallela alla griglia dei tempi ed è difficile determinare con precisione la loro intersezione). Si ripete ora la regressione lineare associando questa volta un errore ai punti sulle ordinate propagando $\sigma_{\Delta V}$ al logaritmo naturale $\log(V)$ e proiettando σ_t alle ordinate attraverso il coefficiente angolare del fit "zero":

$$\sigma_{\log(\Delta V)} = \frac{\sigma_{\Delta V}}{\Delta V} \quad \sigma_y = \sqrt{\sigma_{\log(\Delta V)}^2 + m^2 \sigma_t^2} \quad (13)$$

Si utilizza il parametro $V_0 = (3.97 \pm 0.03) V$ stimato tramite questo fit per normalizzare le tensioni. L'errore che si associa ai logaritmi normalizzati è mostrato in Equazione 9, avendo preliminarmente ricalcolato l'errore $\sigma_{\Delta V}$ con i nuovi parametri V_0 e τ . Si considera ora l'errore complessivo da associare ai punti in ordinata come $\sigma_{\log(\Delta V/V_0)}$ e la proiezione di σ_t sulle ordinate mediante il coefficiente angolare del fit precedente. Si procede quindi con l'interpolazione del tipo mostrato in Equazione 11 (Figura 3 a pagina seguente).

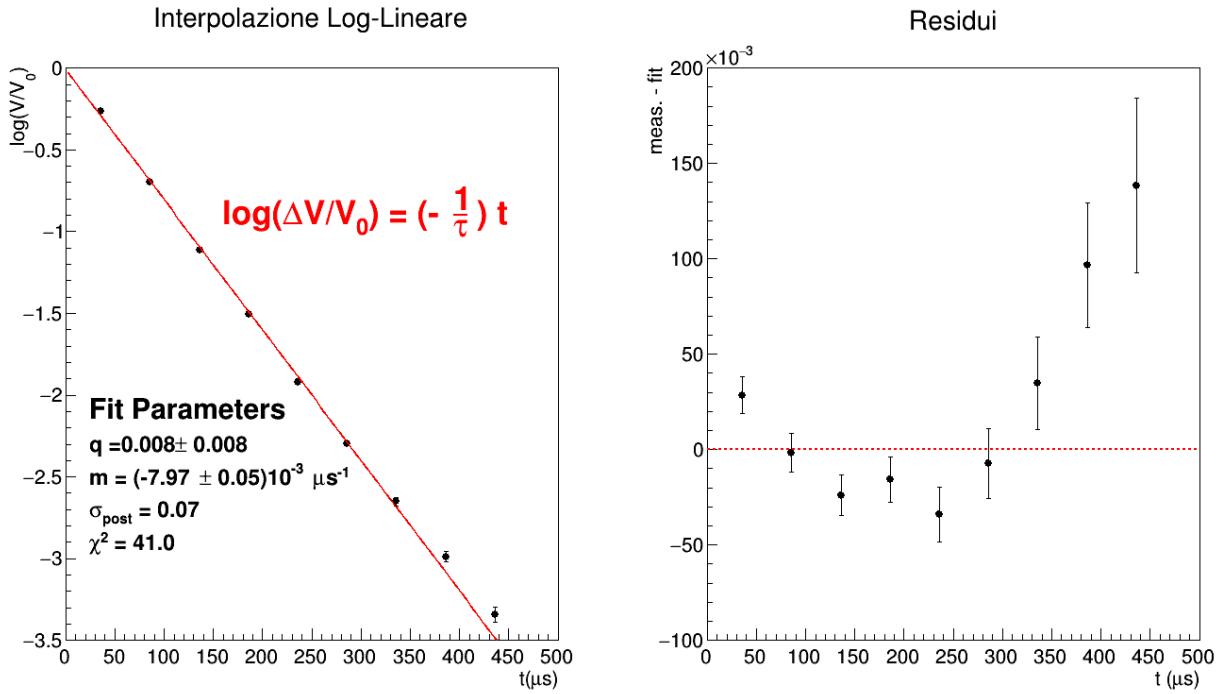


Figura 3: A sinistra: interpolazione finale log-lineare delle coppie $\{t, \log(\Delta V/V_0)\}$ in Tabella 6. A destra: grafico dei residui dei dati dalla retta.

Il $\chi^2 = 41.0$ presenta una pessima compatibilità con i gradi di libertà ($ndf = 7$): questo mette in evidenza una forte sottostima dell'incertezza associata ai dati sperimentali. L'andamento dei residui, inoltre, è marcatamente parabolico ed apre l'ipotesi di una possibile non linearità delle coppie $\{t, \log(\Delta V/V_0)\}$. Questo rende la stima del coefficiente angolare (e di conseguenza la stima di τ e della capacità C) decisamente meno affidabile. L'intercetta risulta in ogni caso compatibile con zero. Dai parametri dell'interpolazione, si ricava la costante di tempo τ come l'opposto dell'inverso del coefficiente angolare:

$$\tau = -\frac{1}{m} = (125.5 \pm 0.8) \mu\text{s} \quad \sigma_\tau = \frac{\sigma_m}{m^2} \quad (14)$$

4.2.3 Stima della Capacità

Per la stima della capacità $C = \frac{\tau}{R}$, bisogna tenere conto degli altri contributi di capacità e resistenza presenti nel circuito. I contributi di capacità parassite a valle del circuito (cavi coassiali e la capacità dell'oscilloscopio) portano ad una correzione del per mille (o addirittura inferiore) e vengono trascurati. Analogamente la resistenza dell'oscilloscopio porta ad una correzione del mille e non viene considerata. A monte del circuito, invece, risulta necessario prendere in considerazione la resistenza interna del generatore in serie, che risulta essere $R_{\text{gen}} = (47.1 \pm 0.3) \Omega$ (misurata con il multimetro Agilent con un fondo scala di 6Ω). Risulta quindi

$$C = \frac{\tau}{R + R_{\text{gen}}} = \frac{\tau}{R_{\text{eq}}} \quad \sigma_C = \sqrt{\left(\frac{\sigma_\tau}{R_{\text{eq}}}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{R_{\text{eq}}^2} \sigma_{R_{\text{eq}}}\right)^2}$$

Si vogliono ora confrontare le due stime di capacità, che verranno denotate (in questa sezione) come C_1 e C_2 in base al campione di provenienza, con la misura $C = (97.0 \pm 1.6) \text{ nF}$ eseguita con il multimetro digitale Agilent.

Confronto delle stime di Capacità		
	Capacità (nF)	Errore Relativo
Campione 1	99.1 ± 0.9	0.9%
Campione 2	100.3 ± 0.8	1.1%
Agilent	97.0 ± 1.6	1.6%

Tabella 2: Misure della capacità C del circuito, ottenute attraverso fit log-lineari o misurate direttamente.

La compatibilità tra C_1 e C_2 è pari a $\lambda = 1$ e risulta essere molto buona. Altrettanto buona è la compatibilità tra C_1 e C che vale $\lambda = 1.15$, mentre la compatibilità tra C_2 e C risulta $\lambda = 1.84$. Le due stime, ottenute attraverso le regressioni log-lineari, sono quindi in ottima compatibilità. Tuttavia, si ricorda che osservando il grafico dei residui in Figura 3, si nota un andamento decisamente poco lineare. Si presume dunque che alla base di ciò ci sia una sistematica di metodo, probabilmente dovuta all'acquisizione dei dati usando i cursori delle tensioni invece che i cursori dei tempi. Si è quindi portati a preferire la stima C_1 .

4.3 Misure Ripetute su vari Capacitori

Si decide, allo scopo di indagare possibili effetti sistematici, di misurare (direttamente e indirettamente) il valore di capacità di 22 capacitori ceramici da $C = 100 \text{ nF}$. I valori di capacità C sono dati con una tolleranza del 5%. Si misurano quindi "direttamente" le capacità usando sia il multimetro Agilent sia il multimetro Fluke. Successivamente, in modo del tutto analogo all'analisi mostrata per il primo campione di misure di scarica, si procede alla misura indiretta delle capacità. Infine, acquisendo delle foto del display dell'oscilloscopio in fase di scarica del circuito, i punti della traccia sono stati digitalizzati mediante l'uso di webplotdigitizer (<https://apps.automeris.io/wpd/>). I risultati di queste misure sono riportati in Tabella 7 (Appendice A)

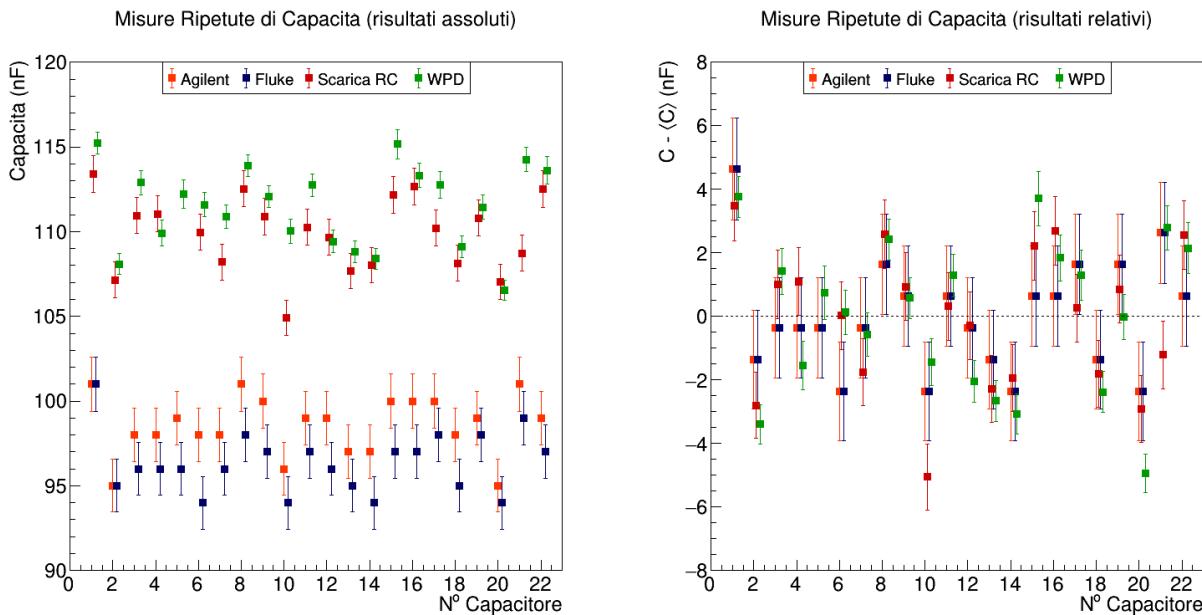


Figura 4: A sinistra: risultati assoluti delle misure dirette e indirette delle 22 capacità (Tabella 7). A destra: risultati relativi al valor medio dei singoli campioni delle misure dirette e indirette delle 22 capacità (Tabella 7).

Si nota immediatamente, in particolare nel grafico a destra, che tutti e quattro i metodi di misura riproducono lo stesso pattern. Tuttavia, osservando il grafico a sinistra, è evidente la presenza di un offset che affligge le stime di C ottenute dallo studio del processo di scarica (sia con i cursori sia con webplotdigitizer). L'origine di questo notevole sfasamento non è nota: la resistenza interna del generatore è stata già presa in considerazione nel calcolo della capacità. La resistenza serie dei capacitori non è sufficientemente elevata da contribuire in modo evidente, in quanto risulta essere di circa $ESR = 0.04 \Omega$. Si evidenzia che, per ciascun metodo di misura effettuato, le fluttuazioni dei valori della capacità sono entro i 5% previsti dalla tolleranza dei capacitori. Le fluttuazioni statistiche, dunque, sono del tutto regolari. Non si riesce, invece, ad indagare le possibili incertezze sistematiche in quanto le stime ottenute attraverso la scarica del circuito RC presentano esse stesse un errore sistematico di natura ignota.

5 Filtri RC

Si intende adesso stimare la capacità C di un circuito RC attraverso la misura della frequenza di taglio di un filtro RC passa basso e passa alto. Per la configurazione passa basso, si può fare riferimento a Figura 1, mentre per la configurazione passa alto è sufficiente scambiare la resistenza R con la capacità C , in modo da prelevare la tensione ai capi della resistenza.

5.1 Procedura di Acquisizione Dati

La procedura eseguita per acquisire le misure è la stessa sia nella configurazione passa basso sia nella configurazione passa alto, con la differenza che il segnale in uscita si misura rispettivamente ai capi del condensatore e del resistore. Si imposta dal generatore di funzioni un'onda sinusoidale e si fa variare la frequenza dell'onda, che si assume sia priva di errore. Il segnale in ingresso V_{in} , cioè il segnale erogato dal generatore di funzioni ($V_0 = 7.5 \text{ V}$), viene prelevato con una prima sonda ed è collegato all'oscilloscopio nel canale 1. Il segnale in uscita V_{out} dal circuito RC viene prelevato con una seconda sonda ed è collegato all'oscilloscopio nel canale 2. Il trigger è impostato sul canale 1 a livello zero con fronte di salita. Le misure di tensione sono prese in modo automatico come V_{pp} "picco picco" in modalità "medie 128". Come errore di lettura da associare alle misure di tensione si sceglie di utilizzare $\langle \sigma_{\text{div}} \rangle$ (Sezione 3.2, Equazione 3) e di moltiplicare tale valore per $\sqrt{2}$ in quanto i dati V_{pp} rappresentano una differenza di due misure. Le misure di sfasamento si acquisiscono mediante l'uso dei cursori verticali (di tempo): si misura la differenza temporale Δt data dalla differenza di tempo che intercorre tra il passaggio per $V = 0 \text{ V}$ dell'onda in uscita ed il passaggio per $V = 0 \text{ V}$ di quella in ingresso. Si fa notare che, per le misure di tensione in uscita, sono state utilizzate scale differenti al fine di renderle più precise.

5.2 Dati e Analisi

Si considerano separatamente le due configurazioni (passa alto e passa basso) e si applicano ad entrambe le stesse tecniche di analisi. Date le misure di tensione V_{in} e V_{out} , si computa la funzione di trasferimento (per ciascuna coppia $\{V_{\text{in}}, V_{\text{out}}\}$) e l'errore ad essa associato come

$$A = \frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} \quad \sigma_A = A \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2} \times \langle \sigma_{\text{div}} \rangle \times \text{div}_{\text{in}}}{V_{\text{in}}} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2} \times \langle \sigma_{\text{div}} \rangle \times \text{div}_{\text{out}}}{V_{\text{out}}} \right)^2 + 2 \left(\frac{\sigma_k}{k} \right)^2} \quad (15)$$

dove $\langle \sigma_{\text{div}} \rangle = 0.013$, div_{in} corrisponde al numero di volt per divisione utilizzati per il segnale in ingresso e div_{out} corrisponde al numero di volt per divisione utilizzati per il segnale in uscita. A causa del fatto che le misure non sono state acquisite tutte con lo stesso numero di volt per divisione, e a causa del fatto che le misure sono state effettuate in due canali diversi, viene aggiunto un contributo di scala all'errore sulla funzione di trasferimento. Si ricorda che $\sigma_k = 1.5\%$ e si assume che k sia mediamente pari all'unità. Dalle misure di sfasamento temporale Δt e dal periodo T impostato sul generatore ($T = 1/f$, si assume privo di errore), si calcola invece lo sfasamento normalizzato a $\pi/2$ (per ciascuna coppia $\{\Delta t, T\}$) come

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta t}{T} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \sigma_{\Delta\varphi} = \frac{2\pi}{T} \times \langle \sigma_{\text{div}} \rangle \times \text{div}_t \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (16)$$

dove $\langle \sigma_{\text{div}} \rangle = 0.013$ e div_t corrisponde al numero di secondi per divisione utilizzati per la scala temporale. La normalizzazione a $\pi/2$ dello sfasamento è utile per far variare sia la funzione di trasferimento A sia $\Delta\varphi$ nell'intervallo $[0, 1]$, come è reso evidente in Figura 6 e Figura 7. Si vuole ora stimare la frequenza di taglio f_t attraverso fit non lineari. Equazione 17 si riferisce al passa basso mentre Equazione 18 al passa alto

$$|A(f)| = \left| \frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_t)^2}} \quad \tan(\Delta\varphi) = -\frac{f}{f_t} \quad (17)$$

$$|A(f)| = \left| \frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_t/f)^2}} \quad \tan(\Delta\varphi) = \frac{f_t}{f} \quad (18)$$

Alla frequenza di taglio, quindi, la funzione di trasferimento vale $|A(f_t)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ mentre lo sfasamento vale $\Delta\varphi = -\frac{\pi}{4}$ per un passa basso e $\Delta\varphi = +\frac{\pi}{4}$ per un passa alto. Dati i valori di $A(f)$ e $\Delta\varphi(f)$, si computa il $\chi^2(f_t)$ al variare della frequenza di taglio f_t (si sceglie di farla variare ad intervalli fissi di 0.0005 kHz per le funzioni di trasferimento, mentre si utilizzano intervalli di 0.0005 kHz e 0.0002 kHz rispettivamente per lo sfasamento del passa basso e del passa alto). In questo modo, si ottiene un campione di χ^2 . Si cerca allora la frequenza di taglio f_t che renda minimo il χ^2 : in un intorno (ristretto) del minimo i valori del χ^2 sono approssimabili con una parabola del tipo $y = ax^2 + bx + c$. Interpolando quindi un intorno del minimo con una tale funzione, si ottiene che l'ascissa del vertice della parabola corrisponde alla frequenza di taglio f_t che minimizza il χ^2 . Per associare un errore al parametro f_t , si utilizza la convenzione $\Delta\chi^2 = 1$: dato χ^2_{min} , si considera $y = \chi^2_{\text{min}} + 1$ e le intersezioni di questa retta con la parabola forniscono una stima dell'incertezza da associare al parametro.

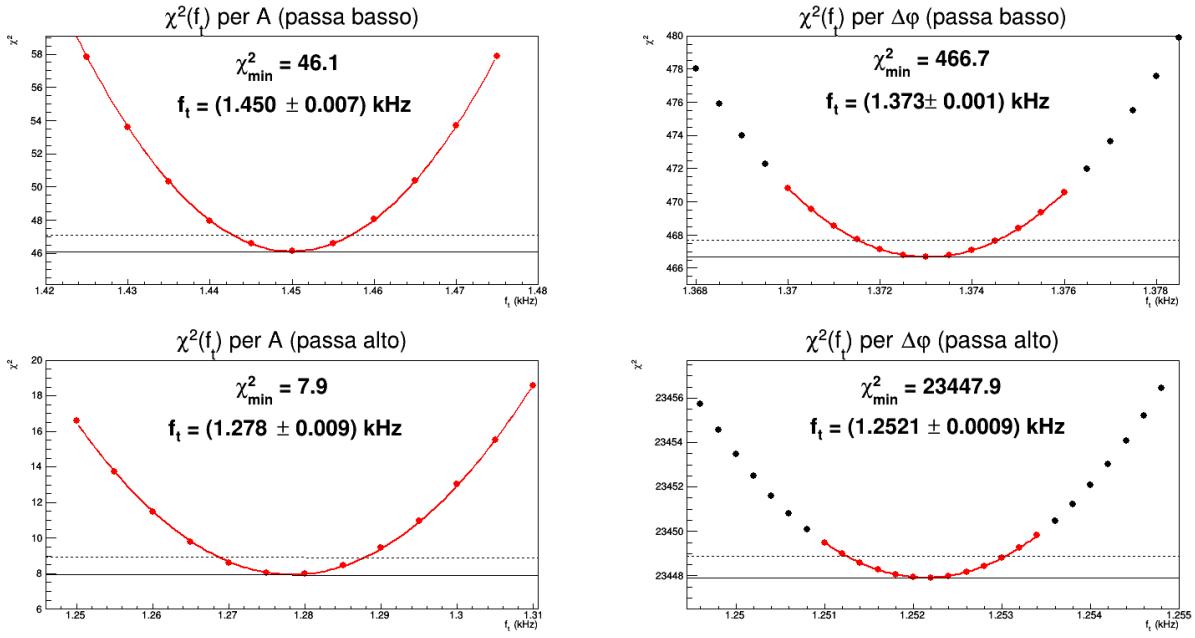


Figura 5: In alto: configurazione passa basso. In basso: configurazione passa alto. La linea continua evidenzia il minimo, mentre la linea tratteggiata rappresenta il valore $\chi^2_{\min} + 1$.

Si nota come il valore dei χ^2_{\min} sia notevolmente maggiore per quanto riguarda lo sfasamento, indice di una notevole difficoltà nel rappresentare i dati con il modello fornito, oltre che ad una possibile sottostima dell'errore. Utilizzando tali stime di f_t ed inserendole in Equazione 17 e in Equazione 18 si ottengono le curve tratteggiate in Figura 6 e Figura 7. Seguono ora i due grafici riassuntivi dell'andamento della funzione di trasferimento e dello sfasamento (di cui si prende il modulo per avere una visualizzazione coerente). In punti raffigurati come quadratini vuoti (in alto) mostrano l'andamento della tensione in ingresso (normalizzato a V_0): questo infatti non resta costante nel tempo ma, all'aumentare della frequenza, l'impedenza della capacità tende a zero e dunque si ha un partitore di tensione $V_{in} = V_0[R/(R + R_{gen})]$.

Configurazione Passa Basso

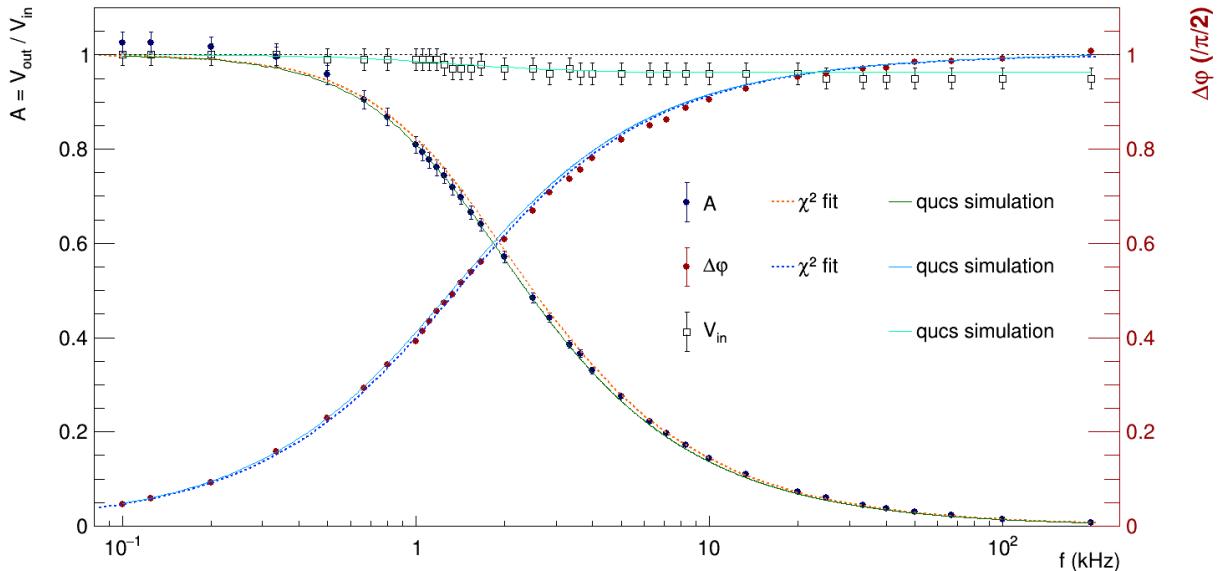


Figura 6: Configurazione passa basso. I punti in blu corrispondono ai valori della funzione di trasferimento, mentre i punti rossi corrispondono allo sfasamento. Le linee tratteggiate rappresentano un fit, mentre le linee continue rappresentano le simulazioni di Qucs (il circuito utilizzato per la simulazione è mostrato in Figura 12).

Configurazione Passa Alto

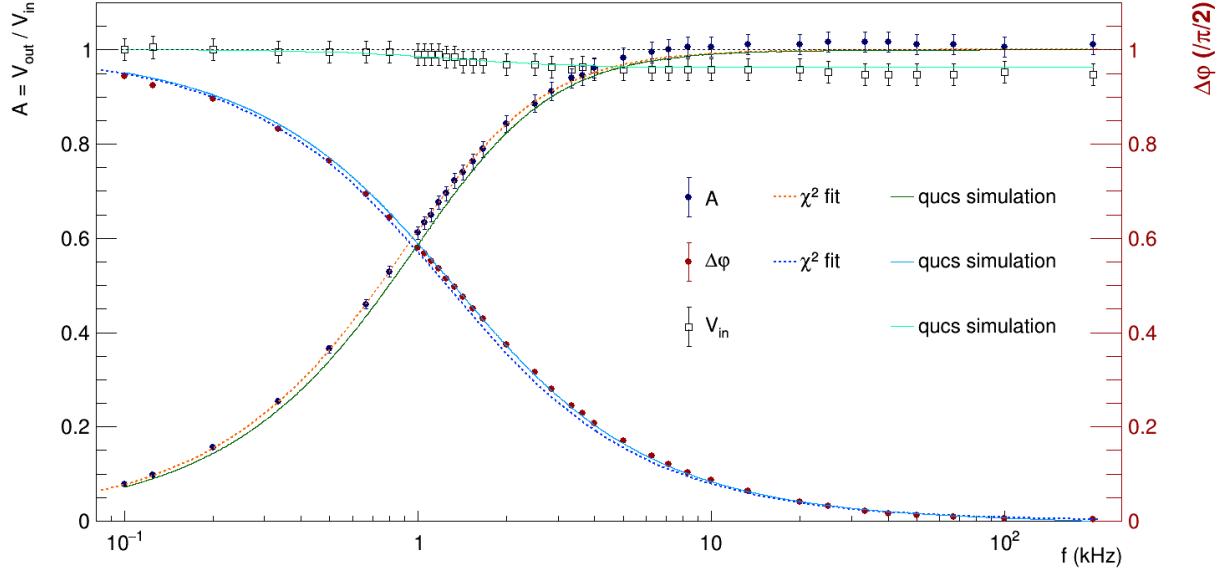


Figura 7: Configurazione passa alto. I punti in blu corrispondono ai valori della funzione di trasferimento, mentre i punti rossi corrispondono allo sfasamento. Le linee tratteggiate rappresentano un fit, mentre le linee continue rappresentano le simulazioni di Qucs (il circuito utilizzato per la simulazione è mostrato in Figura 13).

In Figura 8 sono mostrati i residui della funzione di trasferimento e dello sfasamento rispetto alle funzioni Equazione 17 ed Equazione 18 con f_t la frequenza di taglio ottenuta dalla minimizzazione del χ^2 .

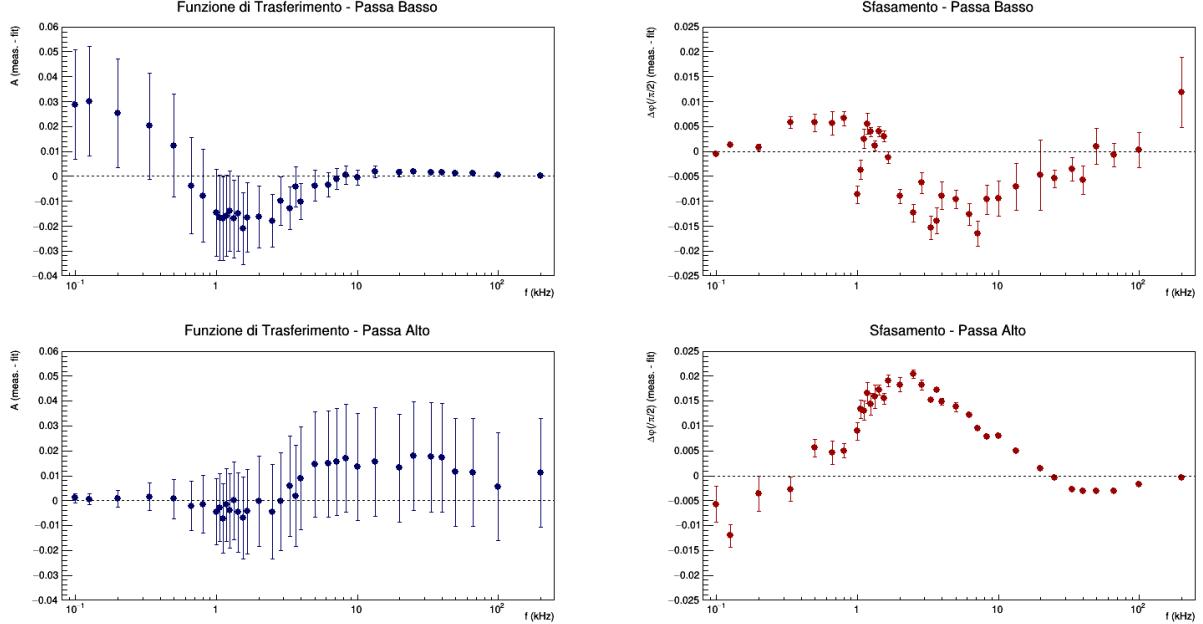


Figura 8: Residui dei punti sperimentale dai rispettivi fit. In blu sono rappresentati i dati corrispondenti alla funzione di trasferimento, mentre in rosso i dati corrispondenti allo sfasamento.

È evidente come gli errori totali coprono sufficientemente bene i residui per quanto riguarda le funzioni di trasferimento (in alto e in basso a sinistra), mentre questi risultano decisamente sottostimati per quanto riguarda le due funzioni di sfasamento. Questo era già possibile notarlo dai valori del χ^2 in Figura 5 e ??, esageratamente elevati lo sfasamento $\Delta\varphi$. Tuttavia, spaziando su quattro ordini di grandezza in frequenza, è molto ambizioso pretendere un'ottima descrizione dei dati con una funzione con un unico parametro f_t . Si decide dunque di considerare un ristretto intorno della frequenza di taglio ed effettuare una regressione lineare del tipo $y = mx + q$.

Da questi, è possibile stimare la frequenza di taglio f_t come (considerando la funzione di trasferimento)

$$f_t = \frac{1/\sqrt{2} - q}{m} = \frac{1/\sqrt{2}}{m_r \cdot \frac{k_{\text{out}}}{k_{\text{in}}}} - \frac{q_r \cdot \frac{k_{\text{out}}}{k_{\text{in}}}}{m_r \cdot \frac{k_{\text{out}}}{k_{\text{in}}}} \quad (19)$$

$$\sigma_{f_t} = \sqrt{\left(\frac{q}{m^2} - \frac{1}{\sqrt{2}m^2}\right)^2 \sigma_q^2 + \left(-\frac{1}{m}\right)^2 \sigma_m^2 + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}m}\right)^2 \sigma_k^2 + 2 \left(\frac{q}{m^2} - \frac{1}{\sqrt{2}m^2}\right) \left(-\frac{1}{m}\right) \text{cov}(m, q)} \quad (20)$$

dove σ_q e σ_m sono gli errori dei parametri restituiti dal fit, σ_k è l'errore di scala sulle tensioni (pari a 1.5%). Per ricavare f_t dalle misure di sfasamento, è sufficiente sostituire $1/\sqrt{2}$ con $1/2$ ($\pi/4$ normalizzato a $\pi/2$) e trascurare il contributo di scala (sui tempi è appunto trascurabile). Avendo errori tutti differenti sulle ordinate (funzione di trasferimento A e sfasamento $\Delta\varphi$), la covarianza tra i due parametri della retta risulta essere

$$\text{cov}(m, q) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_j \frac{1}{\sigma_{y_j}^2} \left[x_j \sum_i \frac{x_i^2}{\sigma_{y_i}^2} \sum_i \frac{1}{\sigma_{y_i}^2} - \sum_i \frac{x_i}{\sigma_{y_i}^2} \sum_i \frac{x_i^2}{\sigma_{y_i}^2} - x_j^2 \sum_i \frac{x_i}{\sigma_{y_i}^2} \sum_i \frac{1}{\sigma_{y_i}^2} + x_j \left(\sum_i \frac{x_i}{\sigma_{y_i}^2} \right)^2 \right] \quad (21)$$

$$\Delta = \sum_i \frac{1}{\sigma_{y_i}^2} \sum_i \frac{x_i^2}{\sigma_{y_i}^2} - \left(\sum_i \frac{x_i}{\sigma_{y_i}^2} \right)^2 \quad (22)$$

dove x rappresenta l'ascissa dei punti (cioè la frequenza) e σ_{y_i} l'errore associato all'ordinata. In Pag. 11 sono mostrate le due regressioni lineari (funzione di trasferimento e sfasamento) per la configurazione passa basso, mentre in Pag. 12 sono mostrate le due regressioni lineari (funzione di trasferimento e sfasamento) per la configurazione passa alto. Si mette in evidenza che il contributo di scala presente in Equazione 15 non viene considerato, in quanto in un fit lineare questo non influenza i residui. Il contributo viene quindi aggiunto in secondo luogo sui parametri dell'interpolazione, in particolare nel calcolo di f_t , come si vede in Equazione 20. I risultati delle regressioni sono mostrate in Tabella 3. Per la configurazione passa basso, si nota osservando il grafico dei residui relativi alla funzione di trasferimento che questi sono ben coperti dagli errori associati. Per quanto riguarda i residui relativi allo sfasamento (sia passa alto che passa basso) e alla funzione di trasferimento in configurazione passa basso, invece, si nota che gli errori sono stati leggermente sottostimati. Questo è evidenziato anche dai valori del χ^2 , presenti in Tabella 3.

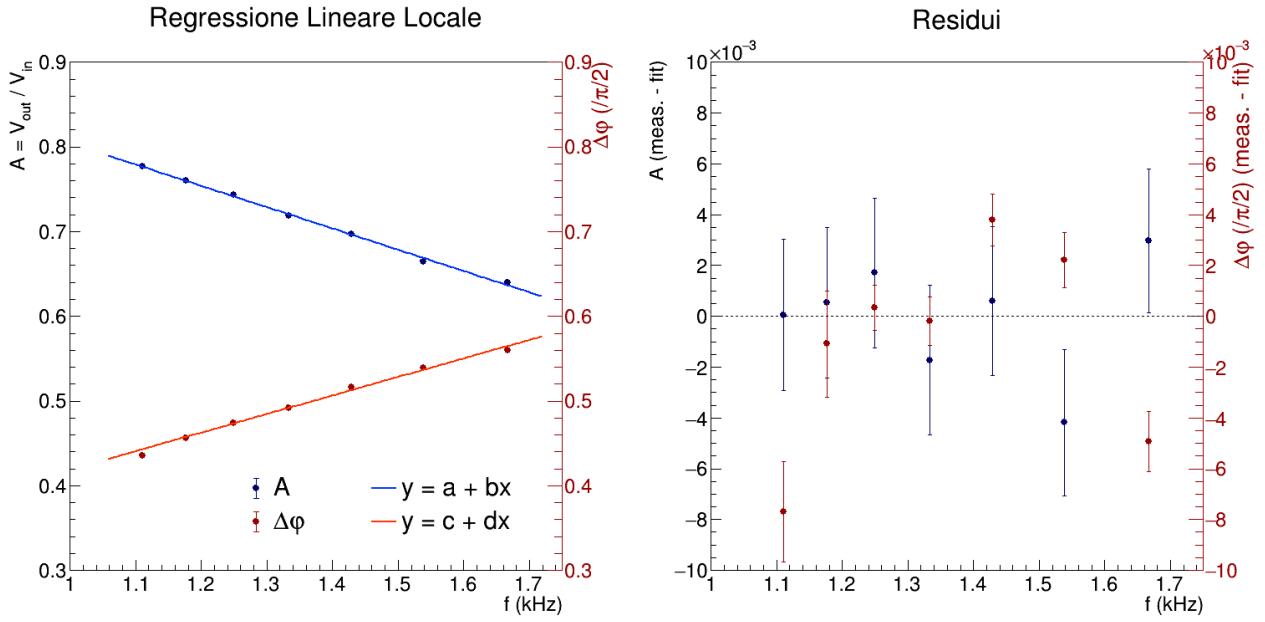


Figura 9: Configurazione passa basso. A sinistra: regressione lineare dei valori della funzione di trasferimento e dello sfasamento in un intorno della frequenza di taglio. A destra: residui dei punti sperimentali dai corrispondenti fit. In blu sono rappresentati i dati corrispondenti alla funzione di trasferimento, mentre in rosso i dati corrispondenti allo sfasamento.

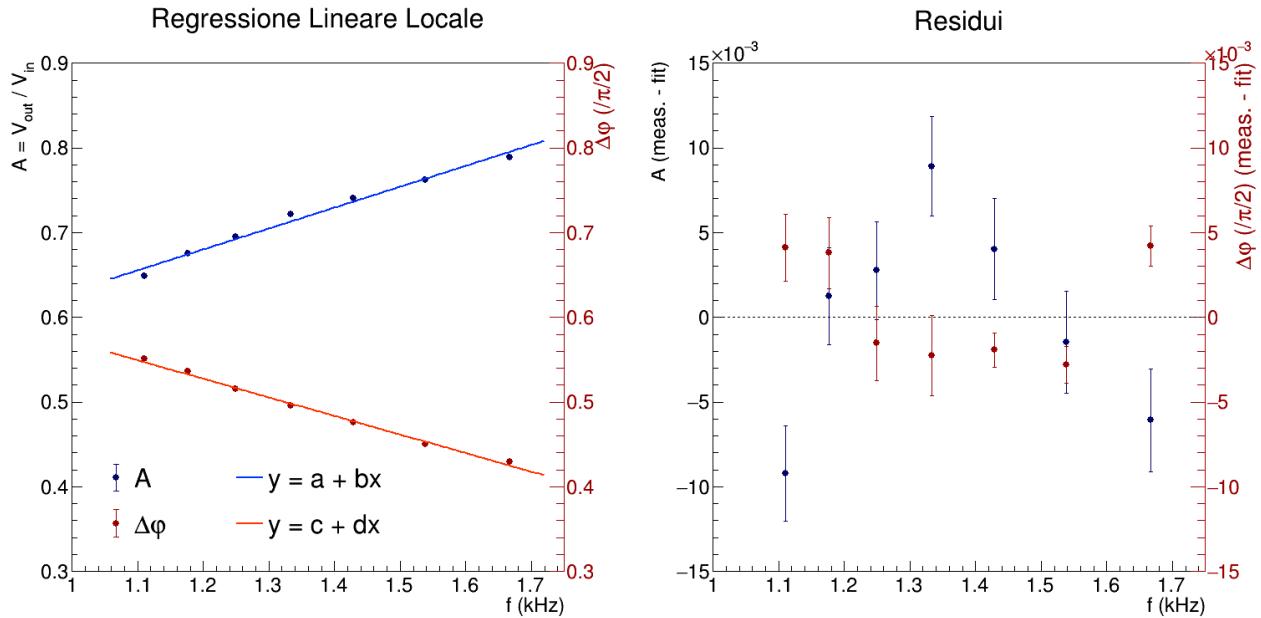


Figura 10: Configurazione passa alto. A sinistra: regressione lineare dei valori della funzione di trasferimento e dello sfasamento in un intorno della frequenza di taglio. A destra: residui dei punti sperimentali dai corrispondenti fit. In blu sono rappresentati i dati corrispondenti alla funzione di trasferimento, mentre in rosso i dati corrispondenti allo sfasamento.

Regressione Lineare intorno a f_t					
Configurazione Passa Basso - Funzione di Trasferimento					
a 1.056 ± 0.008	b (ms) -0.252 ± 0.006	σ_{post} 0.003	χ^2/ndf 4.0/5	$\text{cov}(a, b)$ -0.00005	
Frequenza di Taglio					
			$f_t = (1.39 \pm 0.06) \text{ kHz}$		
Configurazione Passa Basso - Sfasamento					
c 0.200 ± 0.004	d (ms) 0.219 ± 0.003	σ_{post} 0.005	χ^2/ndf 51.3/5	$\text{cov}(a, b)$ -0.00001	
Frequenza di Taglio					
			$f_t = (1.370 \pm 0.002) \text{ kHz}$		
Configurazione Passa Alto - Funzione di Trasferimento					
a 0.384 ± 0.008	b (ms) 0.247 ± 0.006	σ_{post} 0.007	χ^2/ndf 27.2/5	$\text{cov}(a, b)$ -0.00005	
Frequenza di Taglio					
			$f_t = (1.31 \pm 0.06) \text{ kHz}$		
Configurazione Passa Alto - Sfasamento					
c 0.791 ± 0.005	d (ms) -0.219 ± 0.003	σ_{post} 0.004	χ^2/ndf 31.9/5	$\text{cov}(a, b)$ -0.00001	
Frequenza di Taglio					
			$f_t = (1.325 \pm 0.003) \text{ kHz}$		

Tabella 3: Risultati delle quattro regressioni locali.

Si vuole ora stimare il valore della capacità C, assumendo come resistenza $R = (1.204 \pm 0.007) \text{ k}\Omega$ e non considerando altri contributi parassiti, in quanto non influenti nella stima della capacità del circuito:

$$C = \frac{1}{2\pi f_t R} \quad \sigma_C \sqrt{\left(\frac{\sigma_R}{2\pi f_t R^2} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{f_t}}{2\pi R f_t^2} \right)^2} \quad (23)$$

Si riassumono adesso in una tabella i valori delle capacità ottenute con lo studio dei filtri passa alto e passa basso, considerando sia i fit non lineari, sia le regressioni lineari locali.

Stime del valore della Capacità C			
Interpolazioni non lineari			
Passa Basso		Passa Alto	
F. Trasferimento	Sfasamento	F. Trasferimento	Sfasamento
$C = (91.2 \pm 0.7) \text{ nF}$	$C = (96.3 \pm 0.6) \text{ nF}$	$C = (103.4 \pm 1.0) \text{ nF}$	$C = (105.6 \pm 0.6) \text{ nF}$
$\sigma_C/C = 0.8\%$	$\sigma_C/C = 0.6\%$	$\sigma_C/C = 0.9\%$	$\sigma_C/C = 0.6\%$

Interpolazioni lineari locali			
Passa Basso		Passa Alto	
F. Trasferimento	Sfasamento	F. Trasferimento	Sfasamento
$C = (95 \pm 4) \text{ nF}$	$C = (96.5 \pm 0.6) \text{ nF}$	$C = (101 \pm 5) \text{ nF}$	$C = (99.7 \pm 0.6) \text{ nF}$
$\sigma_C/C = 4\%$	$\sigma_C/C = 0.6\%$	$\sigma_C/C = 5\%$	$\sigma_C/C = 0.6\%$

Tabella 4: Stime del valore della capacità C ottenute studiando i filtri RC passa basso e passa alto, utilizzando come tecnica di analisi sia fit non lineari sia regressioni lineari locali

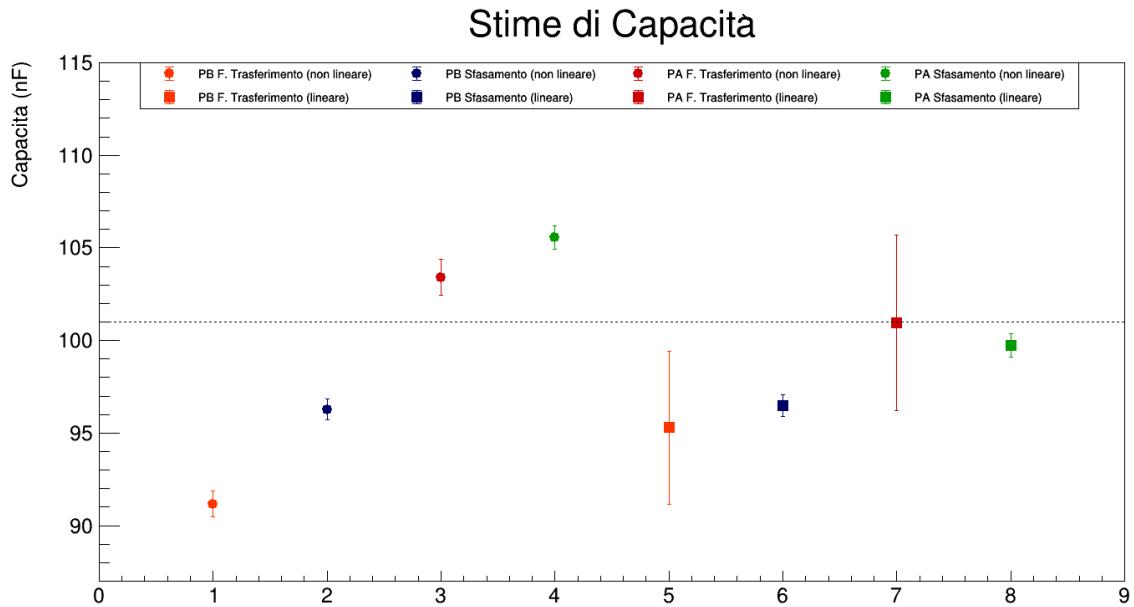


Figura 11

Inizialmente, si fa notare come il filtro passa basso restituisca valori di capacità sempre inferiori rispetto al filtro passa alto. Per indagare questa sistematica, sono state effettuate misure ripetute su cinque differenti condensatori: è stata misurata la capacità con il multimetro digitale Agilent e successivamente, replicando la procedura di acquisizione delle misure e l'analisi sopra mostrata, è stata stimata la capacità unicamente attraverso regressioni lineari locali. Si nota che la misura del multimetro è sempre intermedia, mentre si conferma che la configurazione passa basso restituisce dei valori di capacità sempre più basse rispetto a quanto si riesce ad inferire studiando la configurazione passa alto. Per indagare più a fondo questa evidente sistematicità, vengono inizialmente prese in considerazione le resistenze parassite (in serie ed in parallelo) dovute alla capacità come elemento non ideale. Considerando inizialmente la configurazione passa basso, l'effetto della resistenza in parallelo è tanto più grande quanto più piccola è la frequenza. Tuttavia, alla frequenza più bassa (pari a 0.1kHz) l'impedenza della capacità risulta essere $\sim 0.5 \text{ M}\Omega \ll R_p$. Un' ulteriore conferma si ottiene osservando che la funzione di trasferimento

del passa basso per frequenze basse si satura ad 1. La resistenza parassita in serie alla capacità, invece, per frequenze fino a ~ 100 kHz risulta trascurabile. Si nota infatti che lo sfasamento (normalizzato a $\pi/2$) per alte frequenze si satura ad 1. Analogamente, considerando adesso il passa alto, si ottiene che per alte frequenze il circuito si ridurrebbe ad un partitore resistivo. Tuttavia, la risposta del circuito satura ad 1 e questo implica che la resistenza in serie alla capacità è minore del 1% della resistenza R . Si vuole adesso confermare queste stime utilizzando delle simulazioni (Qucs) inserendo nel circuito anche le resistenze parassite della capacità, oltre alle sonde, ai cavi coassiali, l'oscilloscopio e la resistenza interna del generatore.

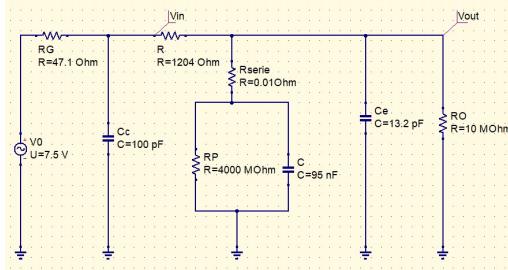


Figura 12: Configurazione passa basso.

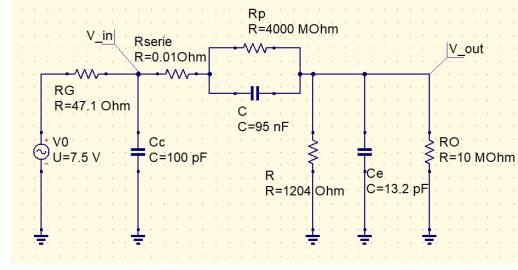


Figura 13: Configurazione passa alto.

Si procede adesso modificando leggermente i valori delle resistenze parassite e si osserva se l'accordo con le misure sperimentali viene significativamente modificato.

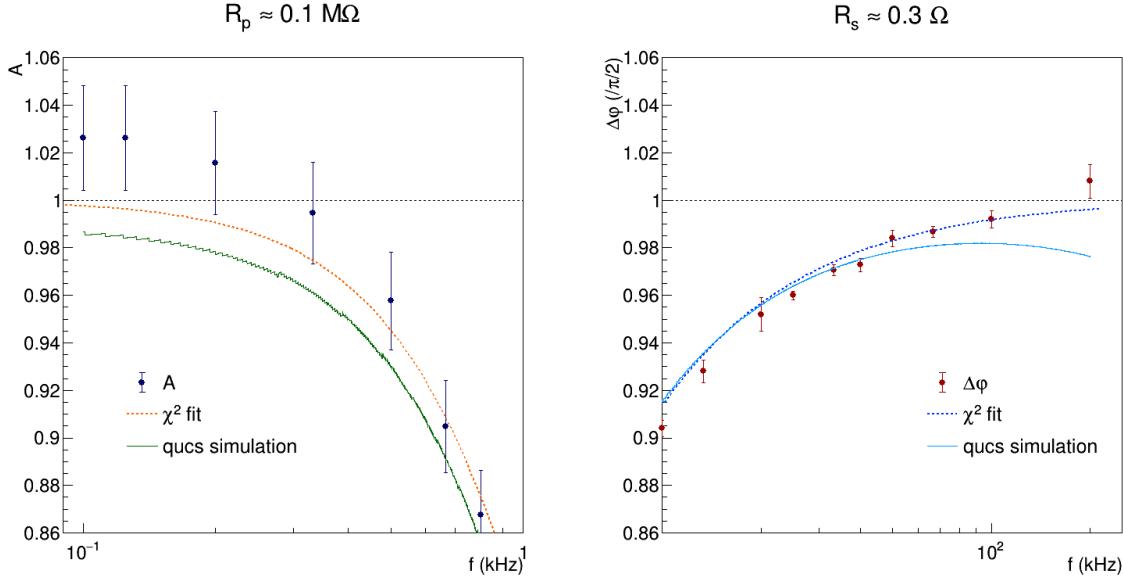


Figura 14: A sinistra: in blu i valori della funzione di trasferimento ottenuti dai dati sperimentali, in arancione il fit del χ^2 non lineare e in verde i dati simulati con Qucs. A destra: in rosso i valori dello sfasamento ottenuti dai dati sperimentali, in blu il fit del χ^2 non lineare e in azzurro i dati simulati con Qucs.

Come si nota in Figura 14, se la resistenza parassita in parallelo R_p fosse molto bassa, per frequenze piccole la funzione di trasferimento non saturerebbe a 1 ma ad un valore inferiore. In modo analogo, se la resistenza in serie fosse maggiore (è stata variata da 0.01Ω a 0.3Ω) lo sfasamento non saturerebbe ad 1 ma ad un valore inferiore. Tutto ciò è del tutto in accordo con le stime esposte in precedenza e ci porta un'ulteriore conferma del fatto che le resistenze parassite della capacità non influiscono sulle due diverse configurazioni. Si vuole allora controllare se questa discrepanza nasce da errori sistematici strumentali. È possibile, infatti, che i due canali dell'oscilloscopio abbiano risposte diverse in funzione della frequenza, a prescindere dal circuito: questo può essere dovuto a differenze tra i due canali dell'oscilloscopio e/o differenze tra le due sonde utilizzate. Si misura allora l'ampiezza dei segnali avendo preliminarmente scollegato il circuito RC, combinando in modi differenti le due sonde con i due canali. Si nota immediatamente come l'uso di due sonde diverse e due differenti canali modifichi leggermente il segnale misurato. L'effetto non è grande ed è in buona parte coperto dall'errore assunto sulla calibrazione.

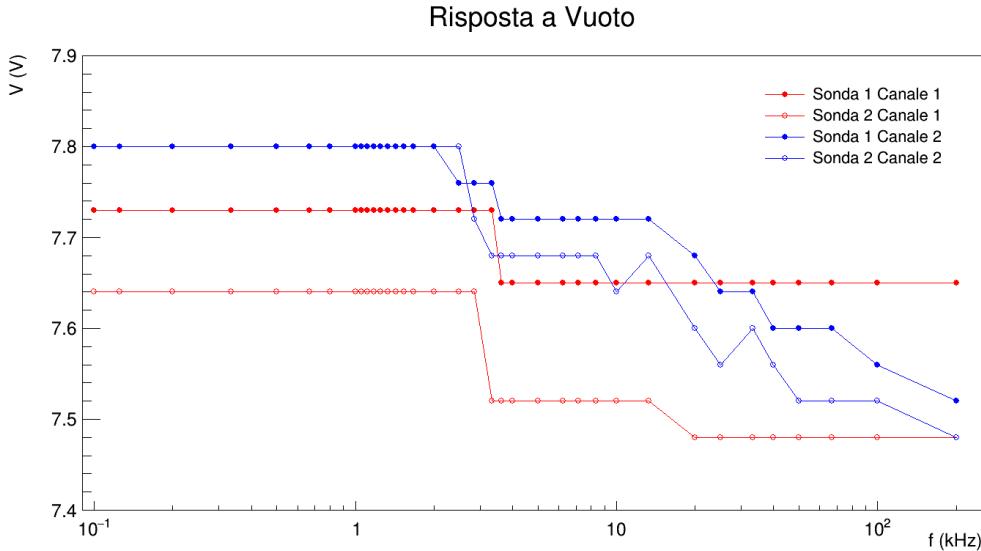


Figura 15: Misure di tensione "a vuoto" combinando le due sonde e i due canali dell'oscilloscopio.

Nell'acquisizione delle misure dell'esperienza, si è utilizzata la sonda 1 per prelevare il segnale in ingresso nel canale 1 e la sonda 2 per prelevare il segnale in uscita nel canale 2. Date le misure della funzione di trasferimento (si faccia riferimento a Figura 6 per il passa basso e Figura 7 per il passa alto) si decide di associare a ciascuna di essa un peso nel seguente modo: essendo definita $A = V_{\text{out}}/V_{\text{in}}$, si pesa V_{out} con i valori di tensione ottenuti nella risposta a vuoto dalla sonda 2 collegata al canale 2 e V_{in} con i valori di tensione ottenuti nella risposta a vuoto dalla sonda 1 collegata al canale 1. Si ottiene dunque $A^* = A \frac{\text{ws1ch1}}{\text{ws2ch2}}$. Si utilizzano i valori pesati della funzione di trasferimento per ripetere il fit non lineare sfruttando la minimizzazione del χ^2 . Successivamente, si è interessati ad osservare l'andamento dei residui, mostrato in Figura 16. Si nota che, nel caso del passa basso, a basse frequenze i residui migliorano leggermente, mentre sia per il passa basso che per il passa alto per frequenze maggiori di 1 kHz l'andamento peggiora. Pesando la funzione di trasferimento in questo modo, si trova un valore esplicito di k , che si è precedentemente assunto pari a 1 (il fattore k compare in Equazione 15) e che ora invece prende il valore di $\text{ws1ch1}/\text{ws2ch2}$, che è prossimo a 1 ma cambia a seconda della frequenza. Per riuscire ad essere più esaustivi su questa sistematica si è deciso di suddividere il campione relativo alla funzione di trasferimento del filtro passa basso in tre sottocampioni. Questa suddivisione è stata pensata per separare le stime di A ottenute da misure di tensione con un numero differente di volt per divisione sullo schermo dell'oscilloscopio. Il primo dataset si compone di misure da 0.1 kHz a 4 kHz, il secondo da 4 kHz a 25 kHz mentre il terzo da 25 kHz a 250 kHz. Si procede poi con un fit a quattro parametri: il primo parametro è la frequenza di taglio, comune a tutti e tre i set, mentre gli altri tre parametri sono identificati dai coefficienti moltiplicativi k , che si ipotizzano essere diversi a seconda del range di frequenza considerato. Viene eseguito dunque un fit simultaneo dei tre sottocampioni, ottenendo come risultato dei valori di $k \sim 1.1$: questi presentano un errore minore di $\sigma_k = 1.5\%$ per basse frequenze, mentre per alte frequenze l'errore risulta maggiore. Le stime di k , inoltre, si discostano dal valore teorico di ben oltre il 3%: la compatibilità tra queste varia infatti tra 1 e 6, dimostrando che le assunzioni considerate nel corso dell'analisi sono state probabilmente troppo grossolane. Notando l'andamento crescente dell'errore all'aumentare della frequenza, è possibile che dietro sia nascosta una sistematica più profonda. Un primo passo per ridurne gli effetti generali è sicuramente utilizzare un'unica sonda per entrambi i canali. Tuttavia, nessuna sistematica finora analizzata è sufficiente per fornire una spiegazione adeguata alla discrepanza tra i valori di capacità ricavati studiando il passa basso e il passa alto. Per questo motivo, non si può preferire nessuna delle due configurazioni rispetto all'altra. Si vuole ora riportare l'attenzione sulle stime della capacità, mostrate in Tabella 4: è evidente come i valori ottenuti da regressioni lineari locali della funzione di trasferimento presentano un errore decisamente maggiore rispetto alle altre stime. Il contributo di errore preponderante è quello di scala, trascurato durante la regressione e aggiunto successivamente sul parametro f_t . Osservando i risultati delle regressioni lineari in Tabella 3 si nota che i χ^2 corrispondenti alla funzione di trasferimento sono i migliori, mentre quelli riguardanti lo sfasamento non risultano ottimi. Si preferiscono dunque le stime ottenute dallo studio dell'amplificazione A , in particolare quelle ottenute da regressioni lineari locali. Le stime ottenute dai fit non lineari si considerano infatti non accurate, vista la notevole difficoltà di poter descrivere in modo ottimale su quattro ordini di grandezza utilizzando una funzione ad un unico parametro e la significativa variabilità di k e σ_k in funzione della frequenza.

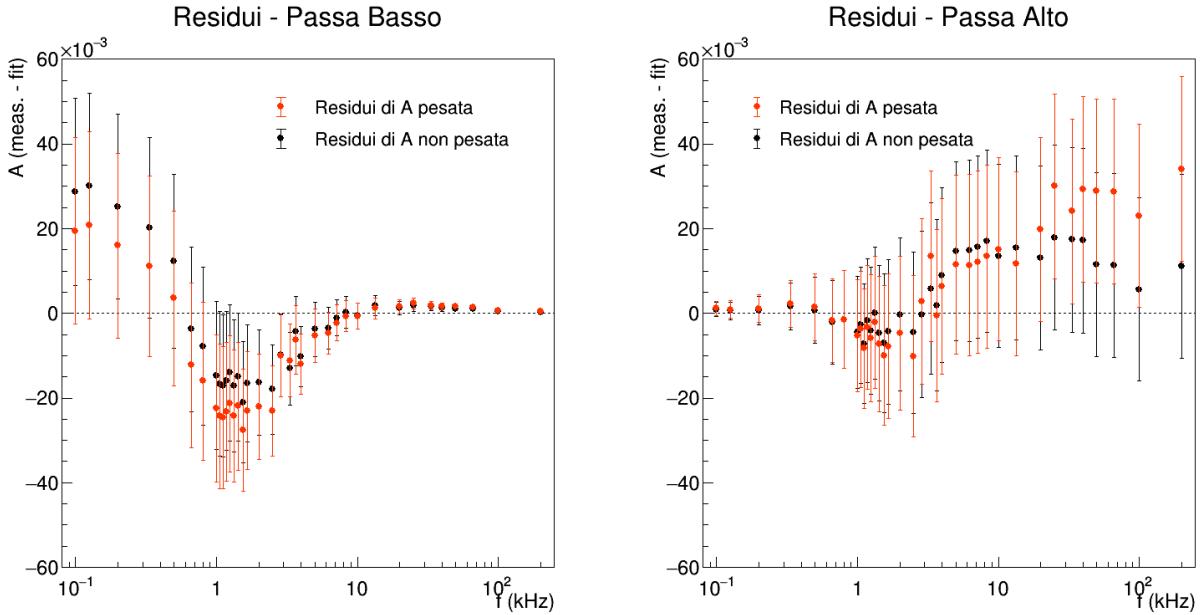


Figura 16: Residui della funzione di trasferimento A (in nero) e della funzione di trasferimento pesata A^* (in arancione) rispetto ad un fit non lineare.

Essendo le stime di C , ottenute da una regressione lineare locale della funzione di trasferimento, indipendenti tra loro per quanto riguarda le due configurazioni (passa basso e passa alto), si sceglie di effettuare una media tra le due, associando ad esse il loro scarto quadratico medio piuttosto che l'errore della media. Si ottiene dunque come stima $C = (98 \pm 4)$ nF. Questo valore va confrontato con la misura diretta eseguita con l'Agilent, che risulta essere $C = (101.0 \pm 1.6)$ nF (capacitore n° 1 in Tabella 7): la stima ottenuta è perfettamente compatibile con la misura diretta.

6 Conclusioni

In conclusione, si è inizialmente stimato l'errore di lettura $\langle \sigma_{\text{div}} \rangle = 0.013$ a partire da sei campioni di misure: si crede che questo rappresenti in modo più preciso l'incertezza sperimentale che affligge la lettura dei cursori. Tuttavia, nel corso dell'analisi ci si è spesso trovati di fronte a evidenti sottostime dell'errore. Si crede però che queste sottostime non derivino, o almeno non in modo significativo, al nuovo errore di lettura, bensì ai modelli utilizzati e agli errori sistematici di cui non si conosce a fondo l'entità. Per quanto riguarda lo studio della scarica del circuito, il primo campione di misure fornisce degli ottimi risultati, compatibili con le aspettative teoriche, mentre il secondo presenta delle notevoli complicazioni, probabilmente dovute alla procedura di acquisizione dati: si conclude che utilizzare i cursori della scala dei tempi è un metodo più sicuro e accurato rispetto ad effettuare le misure utilizzando i cursori della scala delle tensioni. La miglior stima della capacità C utilizzata è dunque $C = (99.1 \pm 0.9)$ nF, ottimamente compatibile con la misura diretta. Per quanto riguarda l'analisi in frequenza, invece, è stato possibile indagare maggiormente i contributi sistematici in gioco: utilizzare una singola sonda per prelevare sia il segnale in ingresso sia il segnale in uscita è un possibile modo per ridurne gli effetti. Tuttavia, la costante discrepanza tra le stime di capacità ottenute dallo studio del passa basso e quelle ottenute dallo studio del passa alto non è stata compresa a pieno. La strategia di analisi che è risultata più soddisfacente consiste nell'effettuare una regressione lineare in un ristretto intorno della frequenza di taglio: studiando la funzione di trasferimento si sono ottenuti dei buoni risultati. Il vantaggio di questa metodologia è la possibilità di aggiungere il contributo sistematico di scala direttamente sui parametri restituiti dalla regressione. Questo contributo, infatti, si è mostrato estremamente preponderante e, considerando le notevoli discrepanze tra le varie stime (sia nella scarica del circuito sia nell'analisi in frequenza) si è scelta come miglior stima della capacità $C = (98 \pm 4)$ nF, ottenuta mediando i valori di capacità ottenuti proprio dalla regressione lineare locale della funzione di trasferimento. Si crede infatti che un'incertezza elevata sulla stima della capacità sia decisamente rappresentativa delle sistematiche in gioco.

Appendice

Si riportano, in Appendice A, i dati grezzi utilizzati nell'analisi delle esperienze. La maggior parte di questi sono riportati senza errore, in quanto rappresentano unicamente le misure effettuate. L'elaborazione dei dati e la corretta stima dei loro errori è stata effettuata nelle apposite sezioni.

A Dati Grezzi

A.1 Errori di Lettura

I sei campioni utilizzati per la caratterizzazione dell'errore di lettura riguardante l'oscilloscopio sono i seguenti.

Campione N°1		Campione N°2	
100 ns/div	100 mV/div	2500000 ns/div	2000 mV/div
t (ns)	V (mV)	t (ns)	V (mV)
-400	-328	-10000000	-6400
-300	-248	-7500000	-4880
-200	-168	-5000000	-3200
-100	-80	-2500000	-1680
0	0	0	0
100	84	2500000	1600
200	168	5000000	3200
300	248	7500000	4800
400	332	10000000	6400
Campione N°3		Campione N°4	
2500000 ns/div	20 mV/div	100000 ns/div	20 mV/div
t (ns)	V (mV)	t (ns)	V (mV)
-10000000	-66.4	-400000	-63.2
-7500000	-49.6	-300000	-47.2
-5000000	-32.8	-200000	-32.2
-2500000	-16.0	-100000	-16.0
0	0.8	0	0
2500000	17.6	100000	15.2
5000000	35.2	200000	30.4
7500000	51.2	300000	46.4
10000000	68.8	400000	62.4
Campione N°5		Campione N°6	
5000 ns/div	50 mV/div	5000 ns/div	2000 mV/div
t (ns)	V (mV)	t (ns)	V (mV)
-20000	-164	-20000	-6240
-15000	-124	-15000	-4560
-10000	-82	-10000	-2960
-5000	-40	-5000	-1280
0	0	0	320
5000	40	5000	2000
10000	82	10000	3680
15000	122	15000	5280
20000	162	20000	6888

Tabella 5: Misure acquisite con l'oscilloscopio con in ingresso un segnale lineare. Utilizzate in Sezione 3.2 per stimare l'errore di lettura delle misure prese con l'oscilloscopio.

A.2 Scarica del Circuito RC

I due campioni di misure utilizzati per la stima della capacità C del circuito RC sono i seguenti.

Campione N°1		Campione N°2	
Cursore tempo a $t^* = 908 \text{ ms}$ 50 $\mu\text{s}/\text{div}$	500 mV/div	Cursore tensione a $V^* = -2 \text{ V}$ 50 $\mu\text{s}/\text{div}$	500 mV/div
$\Delta t (\mu\text{s})$	V (V)	t (μs)	$\Delta V (\text{V})$
14	1.5	-200	3.04
34	1.0	-150	1.98
56	0.5	-100	1.30
82	0.0	-50	0.88
120	-0.5	0	0.58
168	-1.0	50	0.40
258	-1.5	100	0.28
		150	0.20
		200	0.14

Tabella 6: Misure della scarica del circuito RC raffigurato in Figura 1 con in ingresso un'onda quadra. Utilizzate in Sezione 4.2 per stimare la capacità del circuito RC.

A.3 Misure Ripetute della Capacità

Si riportano le misure dirette delle 22 capacità considerate, acquisite rispettivamente con il multmetro Agilent e con il multmetro Fluke. Si riportano anche le stime ottenute studiando la scarica del circuito.

N° Capacità	Agilent $C (\text{nF})$	Fluke $C (\text{nF})$	Scarica RC $C (\text{nF})$	WebPlotDigitizer $C (\text{nF})$
1	101.0 ± 1.6	101.0 ± 1.6	113.4 ± 1.1	115.2 ± 0.6
2	95.0 ± 1.6	95.0 ± 1.6	107.2 ± 1.1	108.1 ± 0.6
3	98.0 ± 1.6	96.0 ± 1.6	111.0 ± 1.1	112.9 ± 0.7
4	98.0 ± 1.6	96.0 ± 1.6	111.0 ± 1.1	109.9 ± 0.8
5	99.0 ± 1.6	96.0 ± 1.6	-	112.2 ± 0.8
6	98.0 ± 1.6	94.0 ± 1.6	110.0 ± 1.1	111.6 ± 0.7
7	98.0 ± 1.6	96.0 ± 1.6	108.2 ± 1.1	110.9 ± 0.7
8	101.0 ± 1.6	98.0 ± 1.6	112.5 ± 1.0	113.9 ± 0.6
9	100.0 ± 1.6	97.0 ± 1.6	110.9 ± 1.1	112.1 ± 0.6
10	96.0 ± 1.6	94.0 ± 1.6	104.9 ± 1.1	110.0 ± 0.7
11	99.0 ± 1.6	97.0 ± 1.6	110.3 ± 1.1	112.8 ± 0.7
12	99.0 ± 1.6	96.0 ± 1.6	109.7 ± 1.1	109.4 ± 0.7
13	97.0 ± 1.6	95.0 ± 1.6	107.7 ± 1.1	108.8 ± 0.7
14	97.0 ± 1.6	94.0 ± 1.6	108.0 ± 1.1	108.4 ± 0.6
15	100.0 ± 1.6	97.0 ± 1.6	112.2 ± 1.1	115.2 ± 0.9
16	100.0 ± 1.6	97.0 ± 1.6	112.7 ± 1.1	113.3 ± 0.7
17	100.0 ± 1.6	98.0 ± 1.6	110.2 ± 1.1	112.8 ± 0.8
18	98.0 ± 1.6	95.0 ± 1.6	108.1 ± 1.1	109.1 ± 0.6
19	99.0 ± 1.6	98.0 ± 1.6	110.8 ± 1.1	111.4 ± 0.7
20	95.0 ± 1.6	94.0 ± 1.6	107.0 ± 1.0	106.5 ± 0.6
21	101.0 ± 1.6	99.0 ± 1.6	108.7 ± 1.1	114.3 ± 0.7
22	99.0 ± 1.6	97.0 ± 1.6	112.5 ± 1.1	113.6 ± 0.8

Tabella 7: Misure dirette e indirette dei valori delle capacità.