

Sperimentazioni di Fisica 2

Docente: Prof.ssa A. Zaltron

Corso di Laurea in Fisica

Canale 1 A-L

Anno Accademico 2019/2020

ESPERIENZA DI OTTICA ONDULATORIA

Diffrazione & Interferenza

TURNO IV - GRUPPO 8

CIGAGNA SIMONE

1193992

simone.cigagna@studenti.unipd.it

CUCCHETTO FILIPPO

1189283

filippo.cucchetto.1@studenti.unipd.it

LAI NICOLÒ

1193976

nicolo.lai@studenti.unipd.it

DATA DI CONSEGNA:

22/12/2019

1 Obiettivo

Stima dell'apertura a di una fenditura e stima della spaziatura d tra più fenditure.

2 Apparato Sperimentale

L'apparato sperimentale si compone di:

- Laser a stato solido
- Sistema di fenditure multiple
- Rivelatore

Il laser a stato solido emette una radiazione elettromagnetica di lunghezza d'onda $\lambda = (670 \pm 5) \cdot 10^{-9} m$, approssimabile ad un'onda piana. Tale radiazione viene fatta incidere sul sistema di fenditure multiple, composto a sua volta da sistemi a 1, 2, 3 e 4 fenditure equispaziate e con ugual apertura: i bordi delle fenditure presentano delle imperfezioni, con una risoluzione di circa $1 \mu m$. Il sistema di fenditure è montato su un apposito supporto che ne permette la traslazione attraverso l'uso di una vite micrometrica in modo da facilitare l'allineamento del sistema a N fenditure con il fascio luminoso.

Sull'asse del supporto è imperniato un braccio meccanico lungo circa $70 cm$, movimentato con una vite a chiocciola senza fine mediante l'uso di un motorino. La distanza tra il perno e la vite è di $(65.5 \pm 0.5) mm$ (l'incertezza è dovuta al montaggio delle componenti ed è un errore massimo), mentre il passo della vite è $(0.500 \pm 0.005) mm$ (errore massimo). All'estremità del braccio meccanico è montato il rivelatore, con un diaframma di diametro di $0.6 mm$, che invia il segnale in unità arbitrarie al computer con un software per l'acquisizione dei dati. Attraverso il software, è anche possibile mobilitare il braccio meccanico indicandone lo spostamento in passi motore.

3 Procedura di Acquisizione Dati

Inizialmente, viene traslato il supporto delle fenditure in modo tale da far incidere il fascio luminoso sul sistema a fenditura singola. Una volta localizzata la regione con maggior intensità luminosa, viene posizionato il braccio meccanico in prossimità di questa e viene effettuata una scansione di prova attorno a tale regione. Si individua così la posizione del massimo di diffrazione: il braccio meccanico viene poizionato in corrispondenza del massimo e successivamente viene azzerato l'indicatore di posizione, in modo che il massimo di diffrazione si trovi nell'origine del sistema di riferimento del software. Viene poi fatta una seconda scansione più ampia per l'individuazione del range angolare tale per cui si abbiano 4 massimi a destra e 4 a sinistra del massimo principale. Successivamente, si posiziona il braccio all'estremità del range angolare precedentemente determinato e si procede con la scansione dell'intensità di fondo (a laser spento) fino all'estremo opposto del range angolare. Dopodichè, si riposiziona il braccio meccanico alla prima estremità del range e si effettua la scansione dell'intensità luminosa (a laser acceso). Per i sistemi a 2, 3 e 4 fenditure, viene utilizzato lo stesso range angolare (in modo da avere più di 4 ordini di massimo), tuttavia viene cambiato l'intervallo angolare di acquisizione dell'intensità luminosa. Più precisamente:

- per la scansione del fondo viene utilizzato un intervallo di 20 passi motore
- per il sistema a fenditura singola viene utilizzato un intervallo di 15 passi motore
- per il sistema a 2 fenditure viene utilizzato un intervallo di 10 passi motore
- per il sistema a 3 fenditure viene utilizzato un intervallo di 5 passi motore
- per il sistema a 4 fenditure viene utilizzato un intervallo di 3 passi motore

Inoltre, tutte le scansioni vengono effettuate nello stesso verso.

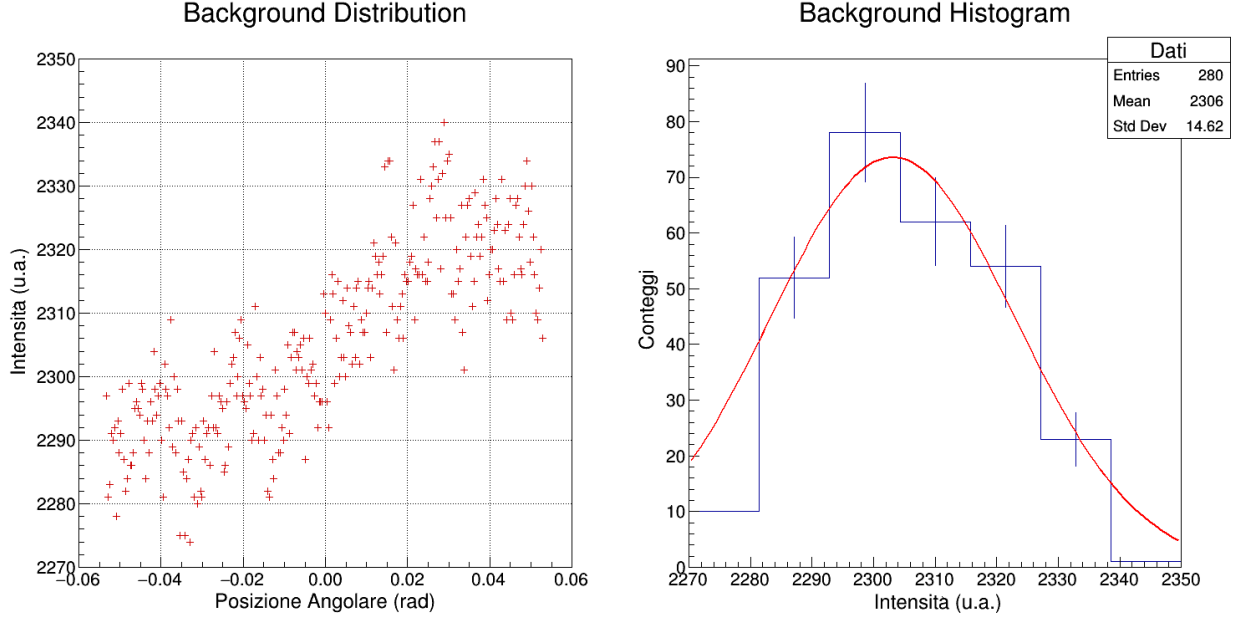
4 Dati e Analisi

Si suddivide l'analisi dei dati in tre sezioni: l'analisi del fondo, l'analisi dei minimi di diffrazione per il sistema a fenditura singola e l'analisi dei massimi d'interferenza per i sistemi a fenditura multipla.

Il range angolare utilizzato è $[-2780, +2780]$ passi motore, sufficiente a contenere 4 massimi di diffrazione a sinistra e a destra del massimo principale.

4.1 Analisi del Fondo

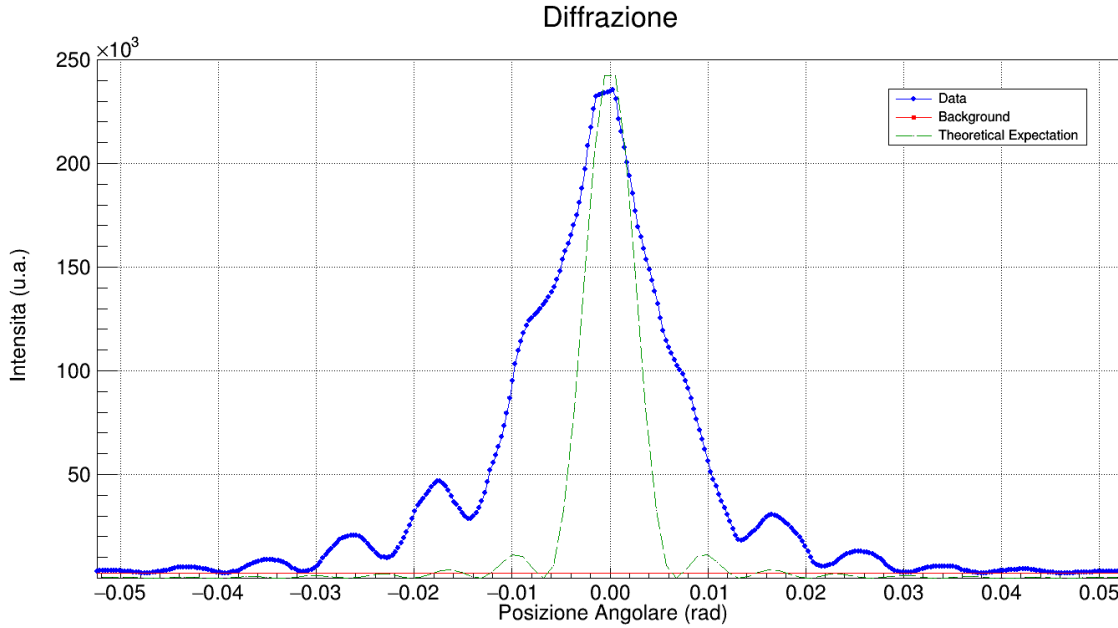
Le origini del rumore di fondo possono essere molteplici. La prima è sicuramente la luce presente in laboratorio durante la scansione che, seppur molto debole, viene ugualmente rilevata. In secondo luogo, bisogna tenere conto del rumore dovuto all'elettronica presente nell'apparato sperimentale. Viene mostrato in grafico il risultato della scansione a laser spento: a sinistra l'intensità luminosa di fondo in funzione della posizione angolare, a destra l'istogramma nel range di intensità pari a $[2270, 2350]$ u.a. a cui è stata sovrapposta la gaussiana corrispondente.



Dal grafico a sinistra, si nota un andamento (linearmente) crescente globale: all'aumentare della posizione angolare viene misurata una crescita dell'intensità luminosa. Si deduce quindi che per posizioni angolari alte il rivelatore sia direzionato verso una zona del laboratorio più luminosa, mentre per posizioni angolari basse sia rivolto verso una zona del laboratorio più buia. Dal grafico a destra, invece, viene messa in evidenza la natura gaussiana del rumore di fondo. Si ipotizza dunque che il contributo del rumore dovuto all'elettronica dell'apparato sia gaussiano. A verifica di tale ipotesi, si procede con il test del χ^2 , calcolando i residui tra il numero di conteggi per bin ed il relativo valore della gaussiana (valore assunto al centro del bin). Ai vari bin dell'istogramma viene associato un errore $\sigma = \sqrt{n}$ con n numero di conteggi, secondo quanto prevede la distribuzione di Poisson. Vengono dunque trascurati il primo e l'ultimo bin poichè, essendo composti da pochi conteggi, l'errore risulta essere eccessivamente ridotto, vincolando la gaussiana sulle code dell'istogramma. Risulta allora $\chi^2 = 2$, rispetto a $E(\chi^2) = 4$. In seguito ad uno Z-Test: $Z = 0.7(\sigma)$. Si assume che il background sia compatibile alla funzione gaussiana con probabilità $P = 48\%$ (l'area sottesa ad una gaussiana normalizzata nell'intervallo $[-0.7, 0.7]$ è circa 0.52). Siccome i gradi di libertà $\nu = 4$ sono ridotti, l'approssimazione della curva del χ^2 ad una gaussiana con $\mu = \nu$ e $\sigma = \sqrt{2\nu}$ non è ottimale, dunque la probabilità $P = 48\%$ non è precisa. È comunque possibile compiere un'analisi sui minimi di diffrazione più prossimi ai valori di intensità del background: dato il valore di intensità di un minimo, viene calcolata la distanza tra il valore di intensità del minimo e il valor medio del background. Questa distanza viene poi divisa per la deviazione standard del rumore di fondo, ottenendo così una "distanza in sigma" tra il minimo e il background, cioè la significanza della misura rispetto al rumore di fondo. Si accettano come valide tutte le misure distanti almeno 5σ dal valor medio del background. Inoltre, si associa all'intensità luminosa registrata dal rivelatore in unità arbitrarie un'incertezza pari alla deviazione standard del rumore di fondo in un ristretto intervallo, ovvero $[-0.02, 0.02]$ radianti. Si nota infatti che la distribuzione complessiva delle misure di fondo può essere suddivisa in tre blocchi principali: il blocco sinistro, il blocco centrale ed il blocco destro. Tali blocchi si assumono gaussiani, in quanto prevalentemente costanti (specialmente quello sinistro e quello destro) e con deviazioni standard estremamente simili. Si sceglie di utilizzare l'intervallo centrale, associando quindi alle misure di intensità un'incertezza $\sigma_I = 10.6$ u.a. Tuttavia, sarebbe più corretto suddividere le misure in tre blocchi (gli stessi del background) e associare a ciascuno di essi la deviazione standard del blocco di rumore di fondo corrispondente.

4.2 Analisi dei Minimi di Diffrazione

Viene inizialmente posta in grafico la figura di diffrazione ottenuta con la scansione a laser acceso (incidente su una singola fenditura) insieme al rumore di fondo ottenuto con la scansione a laser spento. Viene inoltre mostrata la funzione teorica che descrive il fenomeno di diffrazione.



È evidente come la figura di diffrazione non rispetti le previsioni teoriche. Dalla formula

$$I_{\vartheta} = I_m \cdot \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$$

con $\alpha = \frac{\pi a}{\lambda} \cdot \sin \vartheta$, si deduce che la figura di diffrazione debba essere simmetrica, con minimi per $\alpha = m\pi$ (con m numero d'ordine del minimo). Inoltre, si nota che il massimo principale non è ben definito ed il primo ordine di minimi è particolarmente asimmetrico e indefinito. Si ipotizza che la causa di questo discostamento dalle aspettative teoriche sia prevalentemente dovuto all'irregolarità della fenditura.

Per stimare l'apertura a della fenditura, si fa riferimento alla formula

$$a \cdot \sin(\vartheta_{min}) = m\lambda$$

Dove λ è la lunghezza d'onda della radiazione elettromagnetica incidente, m è l'ordine del minimo a cui si riferisce ϑ_{min} , cioè la posizione angolare dei minimi di diffrazione, in radianti. Di conseguenza, vengono convertiti i valori delle posizioni angolari misurati in passi motore secondo la relazione:

$$\vartheta = \vartheta_{PM} \cdot \delta\alpha = \vartheta_{PM} \cdot \frac{p/400}{d}$$

dove $\delta\alpha$ è la minima variazione di posizione angolare (in radianti), p è il passo della vite (che viene diviso per 400 sapendo che la vite compie un giro completo per 400 passi motore) mentre d è la distanza tra il perno e la vite. Segue che il valore di minimo incremento della posizione angolare è $\delta\alpha = (1.91 \pm 0.01) \cdot 10^{-5} \text{ rad/pass}$. Per il calcolo dell'incertezza, vengono inizialmente convertiti gli errori massimi su p e d in errori casuali assumendo una distribuzione uniforme: $\sigma = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}}$. Successivamente, si è assunto come errore sulla posizione angolare in passi motore l'incertezza data da $\sigma_{PM} = \frac{p \cdot t_l}{\sqrt{12}}$ e come più piccola tacca di lettura si è utilizzato il singolo passo motore. Dopodichè, si propaga l'errore secondo la formula

$$\sigma_{\vartheta} = \frac{1}{400} \sqrt{\left(\frac{p}{d} \sigma_{PM} \right)^2 + \left(\frac{\vartheta_{PM}}{d} \sigma_p \right)^2 + \left(\frac{\vartheta_{PM}}{d^2} p \sigma_d \right)^2}$$

Si nota che tale incertezza è differente per ogni valore di posizione angolare misurata in passi motore dal rivelatore, essendo dipendente dalle stesse misure.

Si procede poi con la traslazione del massimo centrale nell'origine. Dato che il massimo centrale di diffrazione non è ben definito, si decide di ricercare la sua posizione attraverso interpolazioni lineari: vengono scelti 3 punti a destra e a sinistra del picco, in un intorno di esso, tali da essere relativamente disposti lungo una retta. Si interpolano i 3 dati a sinistra del picco con una retta di equazione $y = a + bx$ e i 3 dati a destra del picco con una retta di equazione $y = c + dx$ (ciò è possibile in quanto è verificata la condizione $\frac{\sigma_\vartheta}{\vartheta} \ll \frac{\sigma_I}{I}$). Si riporta un esempio concreto di tale procedimento nell'analisi del sistema a due fenditure. Successivamente, viene calcolata l'ascissa del punto di intersezione come

$$\vartheta_{max} = \frac{a - c}{d - b}$$

e la relativa incertezza seguendo la formula di propagazione

$$\sigma_{\vartheta_{max}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{d-b}\right)^2 + \left(\frac{a-c}{(d-b)^2}\sigma_b\right)^2 + \left(\frac{-\sigma_c}{d-b}\right)^2 + \left(\frac{c-a}{(d-b)^2}\sigma_d\right)^2 + 2\frac{a-c}{(d-b)^3}\text{cov}(a,b) + 2\frac{a-c}{(d-b)^3}\text{cov}(c,d)}$$

Viene quindi traslato l'insieme di misure imponendo la condizione ($\vartheta_{max} = 0$): si applica $\vartheta_f = \vartheta_i - \vartheta_{max}$ e si propaga l'errore secondo $\sigma_{\vartheta_f} = \sqrt{\sigma_{\vartheta_i}^2 + \sigma_{\vartheta_{max}}^2}$.

Il massimo centrale risulta essere in posizione

$$\vartheta_{max} = (0.0003 \pm 0.0002) \text{ rad}$$

dunque, l'intero set di misure viene traslato di tale valore.

Segue ora la scelta dei minimi di diffrazione da analizzare per la stima dell'apertura della fenditura: si trascura il primo ordine di minimi, in quanto decisamente poco definiti, e, in seguito all'analisi svolta sul rumore di fondo, si considerano i minimi dal secondo al sesto ordine.

Per stimare la posizione angolare ϑ_{min} è stato replicato il procedimento della ricerca del massimo principale: si considerano 3 punti a destra e a sinistra del minimo sperimentale in modo simmetrico e si interpolano linearmente, rispettivamente con rette $y = a + bx$ e $y = c + dx$. Utilizzando le formule riportate in precedenza, viene calcolata l'ascissa del punto di intersezione delle due rette e la relativa incertezza. Vengono riportati in tabella i valori delle posizioni angolari dei minimi e il relativo ordine.

Tabella 1: Minimi di Diffrazione

Ordine m	$\vartheta_{min} \text{ (rad)}$	$\sigma_{\vartheta_{min}} \text{ (rad)}$	Ordine m	$\vartheta_{min} \text{ (rad)}$	$\sigma_{\vartheta_{min}} \text{ (rad)}$
-2	-0.01423	0.00007	2	0.01340	0.00008
-3	-0.02274	0.00008	3	0.02168	0.00006
-4	-0.03134	0.00006	4	0.03026	0.00009
-5	-0.03929	0.00008	5	0.03824	0.00007
-6	-0.04757	0.00007	6	0.04649	0.00008

Si calcola per ogni valore della posizione angolare dei minimi il corrispettivo seno, propagando l'errore secondo la formula

$$\sigma_{\sin(\vartheta)} = \cos(\vartheta)\sigma_\vartheta$$

ottenendo i seguenti risultati.

Tabella 2: Seno dei Minimi di Diffrazione

Ordine m	$\sin(\vartheta_{min})$	$\sigma_{\sin(\vartheta_{min})}$	Ordine m	$\sin(\vartheta_{min})$	$\sigma_{\sin(\vartheta_{min})}$
-2	-0.01423	0.00007	2	0.01340	0.00008
-3	-0.02274	0.00008	3	0.02168	0.00006
-4	-0.03133	0.00006	4	0.03026	0.00009
-5	-0.03928	0.00008	5	0.03823	0.00007
-6	-0.04755	0.00007	6	0.04647	0.00008

Successivamente, in riferimento alla formula

$$\sin(\vartheta_{min}) = \frac{\lambda}{a}m$$

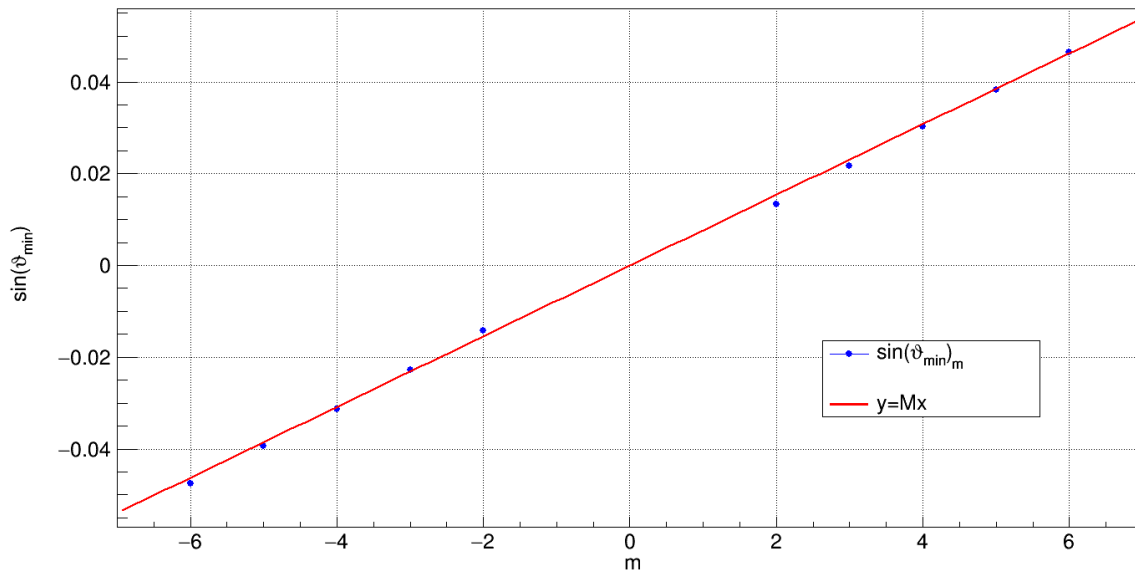
si procede interpolando linearmente le coppie $\{m, \sin(\vartheta_{min})\}$ con una retta del tipo $y = A + Bx$ (essendo i numeri m privi di errore, è certamente rispettata la condizione $\frac{\sigma_x}{x} \ll \frac{\sigma_y}{y}$). Ci si aspetta dunque un'intercetta $A \approx 0$, mentre il coefficiente angolare $B = \frac{\lambda}{a}$ viene utilizzato per la stima dell'apertura a della fenditura. Vengono riportati in tabella i valori dei parametri $A \pm \sigma_A$ e $B \pm \sigma_B$.

Tabella 3: Interpolazione Lineare

A	σ_A	B	σ_B
-0.00054	0.00002	0.007701	0.000005

Come da previsioni teoriche, risulta $A \approx 0$. Si decide allora di ripetere l'interpolazione delle coppie $\{m, \sin(\vartheta_{min})\}$ con una retta $y = Mx$: si vincola la retta a passare per l'origine, in quanto previsto dall'equazione teorica e compatibile con i dati in questione. In tal modo, viene ridotto il numero di parametri liberi, aumentando così l'informazione contenuta nel coefficiente angolare della retta.

Apertura Fenditura



Vengono riportati in tabella i valori del parametro $M \pm \sigma_M$, l'errore a posteriori $\sigma_{\sin(\vartheta_{min}),post}$, il coefficiente di correlazione lineare ρ ed il valore della variabile t della distribuzione t-Student.

Tabella 4: Interpolazione Lineare

M	σ_M	σ_{post}
0.007709	0.000005	0.001
$\rho = 0.99959$		
$t = 105$		

Si prende ora in considerazione il coefficiente angolare: dalla relazione $M = \frac{\lambda}{a}$ si ottiene una formula per la stima dell'apertura della fenditura

$$a = \frac{\lambda}{M} = 86.9 \mu m$$

mentre propagando l'errore si ottiene

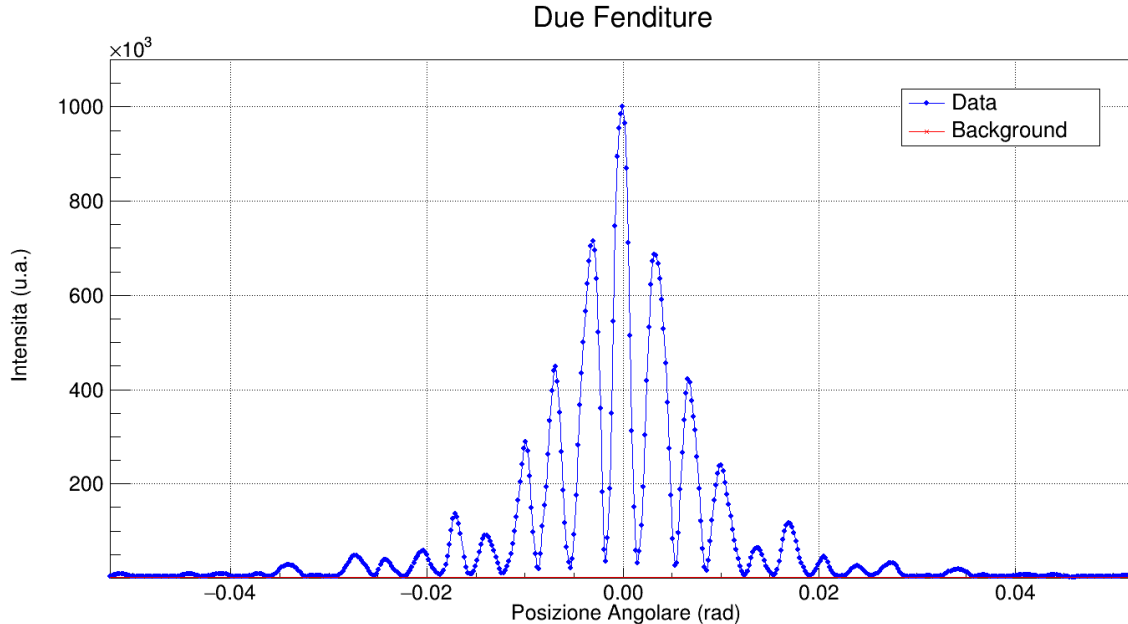
$$\sigma_a = \sqrt{\left(\frac{\sigma_\lambda}{M}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{M^2} \sigma_M\right)^2} = 0.7 \mu m$$

4.3 Analisi dei Massimi di Interferenza

Per la stima della distanza d tra le fenditure nei sistemi a fenditura multipla, si procede con l'analisi dei massimi di interferenza. Si vuole ottenere una stima di tale parametro per ogni set di fenditure: l'analisi viene quindi ripetuta per il laser incidente su 2, 3 e 4 fenditure.

4.3.1 Sistema a 2 fenditure

Viene mostrata in grafico la figura di interferenza, modulata dalla diffrazione, ottenuta con la scansione a laser acceso assieme al rumore di fondo ottenuto con la scansione a laser spento.



Si nota come il background sia notevolmente inferiore al valore di intensità dei massimi. Si considerano dunque 10 massimi a destra e 10 massimi a sinistra del picco principale. Viene comunque eseguito un controllo per verificare che ogni massimo sia ad almeno 5σ di distanza dal rumore di fondo.

Per la stima della spaziatura d tra le due fenditure, si fa riferimento alla formula

$$d \cdot \sin(\vartheta_{max}) = m\lambda$$

Dove λ è la lunghezza d'onda della radiazione elettromagnetica incidente, m è l'ordine del massimo a cui si riferisce ϑ_{max} , cioè la posizione angolare dei massimi di interferenza, in radianti.

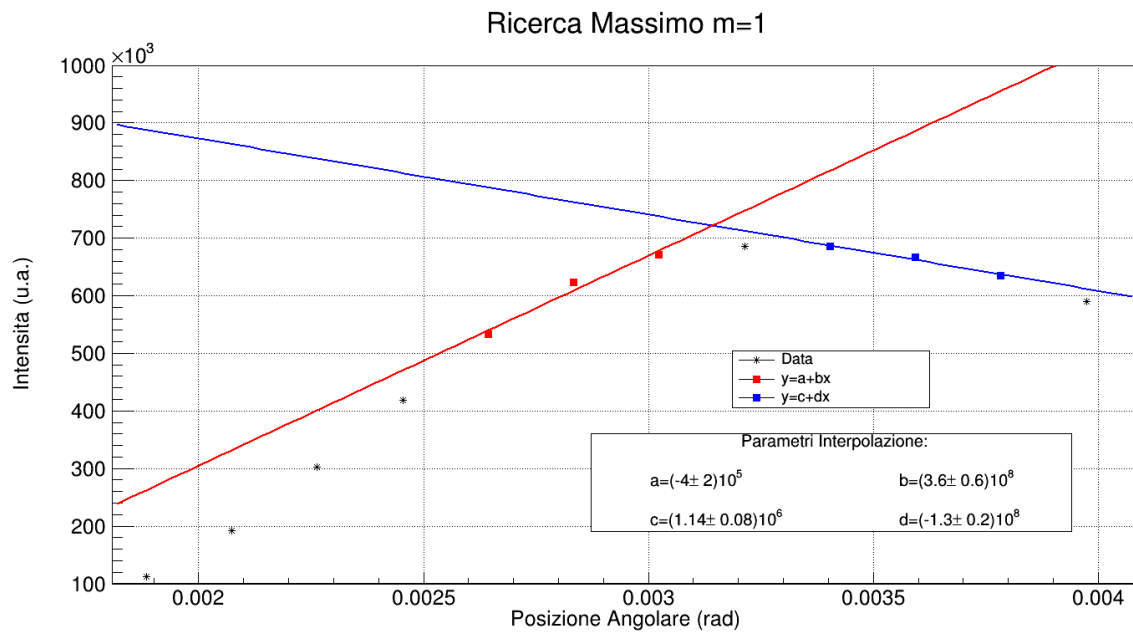
Si procede, analogamente a come descritto in precedenza, convertendo i valori di posizione angolare da passi motore in radianti e, successivamente, viene traslato il set di misure in modo che l'ascissa del massimo centrale coincida con l'origine del sistema di riferimento.

La posizione angolare del massimo centrale viene stimata tramite due interpolazioni, in modo analogo al sistema a fenditura singola. Si ottiene che l'ascissa del picco si trova per

$$\vartheta_{Max} = (0.00019 \pm 0.00005) \text{ rad}$$

dunque, l'intero set di misure viene traslato di tale valore.

Si procede ora alla ricerca della posizione angolare dei massimi di interferenza. Si considerano allora 3 punti a destra e a sinistra del massimo sperimentale in modo simmetrico e si interpolano linearmente, rispettivamente con rette $y = a + bx$ e $y = c + dx$. Viene dunque calcolata l'ascissa del punto di intersezione delle due rette e la relativa incertezza.



Si riportano in tabella i valori delle posizioni angolari dei massimi ed il relativo ordine.

Tabella 5: Massimi di Interferenza

Ordine m	$\vartheta_{max} (rad)$	$\sigma_{\vartheta_{max}} (rad)$	Ordine m	$\vartheta_{max} (rad)$	$\sigma_{\vartheta_{max}} (rad)$
-1	-0.00299	0.00004	1	0.00314	0.00005
-2	-0.00686	0.00002	2	0.00662	0.00002
-3	-0.00986	0.00002	3	0.01001	0.00002
-4	-0.01395	0.00004	4	0.01363	0.00005
-5	-0.01714	0.00002	5	0.01688	0.00004
-6	-0.02031	0.00003	6	0.02051	0.00001
-7	-0.02417	0.00005	7	0.02390	0.00003
-8	-0.02743	0.00002	8	0.02741	0.00005
-9	-0.03148	0.00004	9	0.03118	0.00001
-10	-0.03399	0.00004	10	0.03417	0.00004

Si calcola per ogni valore della posizione angolare dei massimi il corrispettivo seno e l'incertezza ad esso associata, ottenendo i seguenti risultati.

Tabella 6: Seno dei Massimi di Interferenza

Ordine m	$\sin(\vartheta_{max})$	$\sigma_{\sin(\vartheta_{max})}$	Ordine m	$\sin(\vartheta_{max})$	$\sigma_{\sin(\vartheta_{max})}$
-1	-0.00299	0.00004	1	0.00314	0.00005
-2	-0.00686	0.00002	2	0.00662	0.00002
-3	-0.00985	0.00002	3	0.01001	0.00002
-4	-0.01394	0.00004	4	0.01363	0.00005
-5	-0.01714	0.00002	5	0.01688	0.00004
-6	-0.02031	0.00003	6	0.02050	0.00001
-7	-0.02417	0.00005	7	0.02390	0.00003
-8	-0.02742	0.00002	8	0.02741	0.00005
-9	-0.03147	0.00004	9	0.03118	0.00001
-10	-0.03398	0.00004	10	0.03416	0.00004

Successivamente, in riferimento alla formula

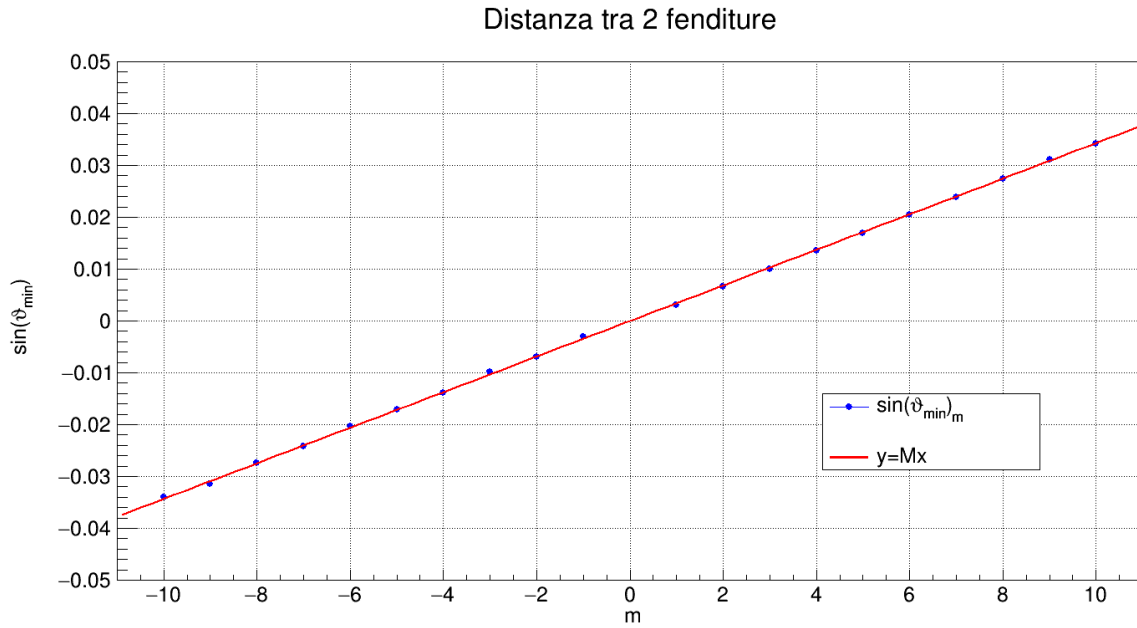
$$\sin(\vartheta_{max}) = \frac{\lambda}{d}m$$

si procede interpolando linearmente le coppie $\{m, \sin(\vartheta_{max})\}$ con una retta del tipo $y = A + Bx$. Ci si aspetta dunque un'intercetta $A \approx 0$, mentre il coefficiente angolare $B = \frac{\lambda}{d}$ viene utilizzato per la stima della spaziatura d tra le fenditure. Vengono riportati in tabella i valori dei parametri $A \pm \sigma_A$ e $B \pm \sigma_B$.

Tabella 7: Interpolazione Lineare

A	σ_A	B	σ_B
0.00041	0.00002	0.00343	0.00008

Come da previsioni teoriche, risulta $A \approx 0$. Si decide allora di ripetere l'interpolazione delle coppie $\{m, \sin(\vartheta_{max})\}$ con una retta $y = Mx$: si vincola la retta a passare per l'origine, in quanto previsto dall'equazione teorica e compatibile con i dati in questione. In tal modo, viene ridotto il numero di parametri liberi, aumentando così l'informazione contenuta nel coefficiente angolare della retta.



Vengono riportati in tabella i valori del parametro $M \pm \sigma_M$, l'errore a posteriori $\sigma_{\sin(\vartheta_{max}),post}$, il coefficiente di correlazione lineare ρ ed il valore della variabile t della distribuzione t-Student.

Tabella 8: Interpolazione Lineare

M	σ_M	σ_{post}
0.0034321	0.0000008	0.0003
$\rho = 0.99992$		
$t = 351$		

Si prende ora in considerazione il coefficiente angolare: dalla relazione $M = \frac{\lambda}{d}$ si ottiene una formula per la stima della spaziatura delle fenditure

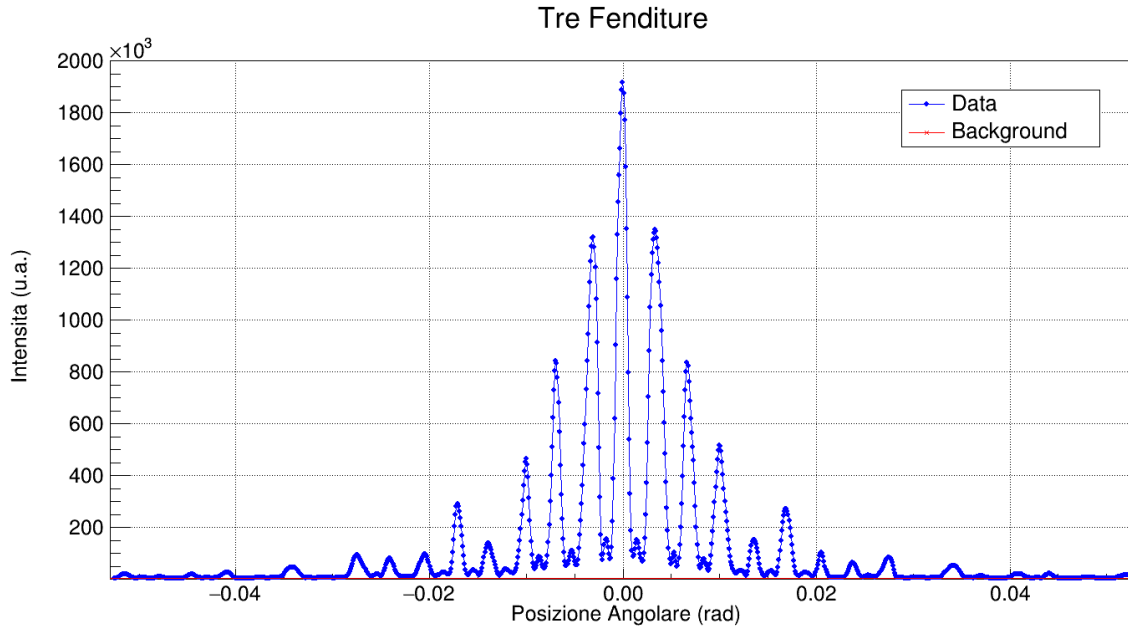
$$d = 195 \mu m$$

mentre propagando l'errore (secondo la formula riportata in precedenza) si ottiene

$$\sigma_d = 1 \mu m$$

4.3.2 Sistema a 3 fenditure

La figura di interferenza, modulata dalla diffrazione, risulta essere:



Il processo di analisi dei dati è analogo a quello riportato per il sistema a fenditura doppia. Vengono illustrati quindi unicamente i risultati rilevanti, tralasciando la trattazione della procedura di analisi.

Il valore di ascissa del picco centrale risulta essere

$$\vartheta_{Max} = (0.00027 \pm 0.00002) \text{ rad}$$

dunque, l'intero set di misure viene traslato di tale valore.

Si riportano in tabella i valori delle posizioni angolari dei massimi considerati (ricavati come ascissa del punto di intersezione di due rette interpolanti i dati) ed il relativo ordine. Vengono considerati esclusivamente i massimi principali, trascurando i massimi secondari.

Tabella 9: Massimi di Interferenza

Ordine m	$\vartheta_{max} \text{ (rad)}$	$\sigma_{\vartheta_{max}} \text{ (rad)}$	Ordine m	$\vartheta_{max} \text{ (rad)}$	$\sigma_{\vartheta_{max}} \text{ (rad)}$
-1	-0.00302	0.00002	1	0.00332	0.00002
-2	-0.00693	0.00002	2	0.00665	0.00001
-3	-0.00996	0.00002	3	0.00998	0.00002
-4	-0.01397	0.00001	4	0.01358	0.00002
-5	-0.01713	0.00002	5	0.01681	0.00002
-6	-0.02042	0.00002	6	0.02052	0.00001
-7	-0.02412	0.00002	7	0.02375	0.00002
-8	-0.02748	0.00001	8	0.02756	0.00002
-9	-0.03130	0.00001	9	0.03093	0.00002
-10	-0.03409	0.00002	10	0.03409	0.00003

Si riporta ora il valore del seno di ciascuna posizione angolare, con il corrispettivo errore.

Tabella 10: Seno dei Massimi di Interferenza

Ordine m	$\sin(\vartheta_{max})$	$\sigma_{\sin(\vartheta_{max})}$	Ordine m	$\sin(\vartheta_{max})$	$\sigma_{\sin(\vartheta_{max})}$
-1	-0.00302	0.00002	1	0.00332	0.00002
-2	-0.00693	0.00002	2	0.00665	0.00001
-3	-0.00996	0.00002	3	0.00998	0.00002
-4	-0.01397	0.00001	4	0.01358	0.00002
-5	-0.01712	0.00002	5	0.01681	0.00002
-6	-0.02042	0.00002	6	0.02052	0.00001
-7	-0.02412	0.00002	7	0.02375	0.00002
-8	-0.02747	0.00001	8	0.02756	0.00002
-9	-0.03129	0.00001	9	0.03092	0.00002
-10	-0.03409	0.00002	10	0.03409	0.00003

Successivamente, in riferimento alla formula

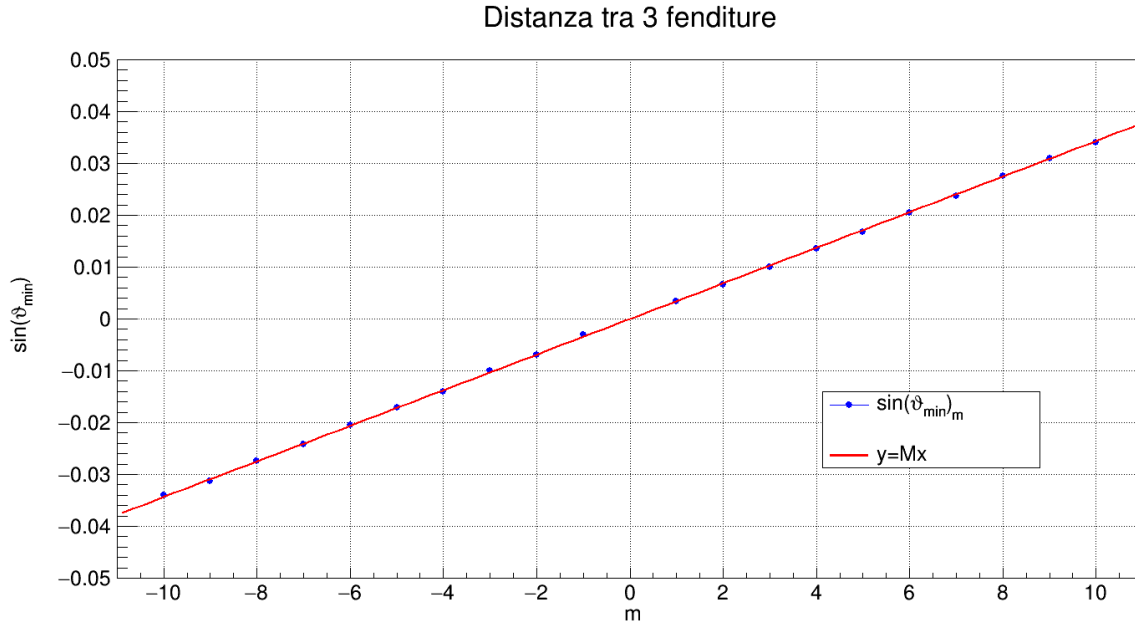
$$\sin(\vartheta_{max}) = \frac{\lambda}{d}m$$

si procede interpolando linearmente le coppie $\{m, \sin(\vartheta_{max})\}$ con una retta del tipo $y = A + Bx$. Ci si aspetta dunque un'intercetta $A \approx 0$, mentre il coefficiente angolare $B = \frac{\lambda}{d}$ viene utilizzato per la stima della spaziatura d tra le fenditure. Vengono riportati in tabella i valori dei parametri $A \pm \sigma_A$ e $B \pm \sigma_B$.

Tabella 11: Interpolazione Lineare

A	σ_A	B	σ_B
-0.000091	0.000004	0.0034320	0.0000006

Come da previsioni teoriche, risulta $A \approx 0$. Si decide allora di ripetere l'interpolazione delle coppie $\{m, \sin(\vartheta_{max})\}$ con una retta $y = Mx$: si vincola la retta a passare per l'origine, in quanto previsto dall'equazione teorica e compatibile con i dati in questione. In tal modo, viene ridotto il numero di parametri liberi, aumentando così l'informazione contenuta nel coefficiente angolare della retta.



Vengono riportati in tabella i valori del parametro $M \pm \sigma_M$, l'errore a posteriori $\sigma_{\sin(\vartheta_{max}),post}$, il coefficiente di correlazione lineare ρ ed il valore della variabile t della distribuzione t-Student.

Tabella 12: Interpolazione Lineare

M	σ_M	σ_{post}
0.0034345	0.0000006	0.0002
$\rho = 0.99995$		
$t = 432$		

Si prende ora in considerazione il coefficiente angolare: dalla relazione $M = \frac{\lambda}{d}$ si ottiene una formula per la stima della spaziatura delle fenditure

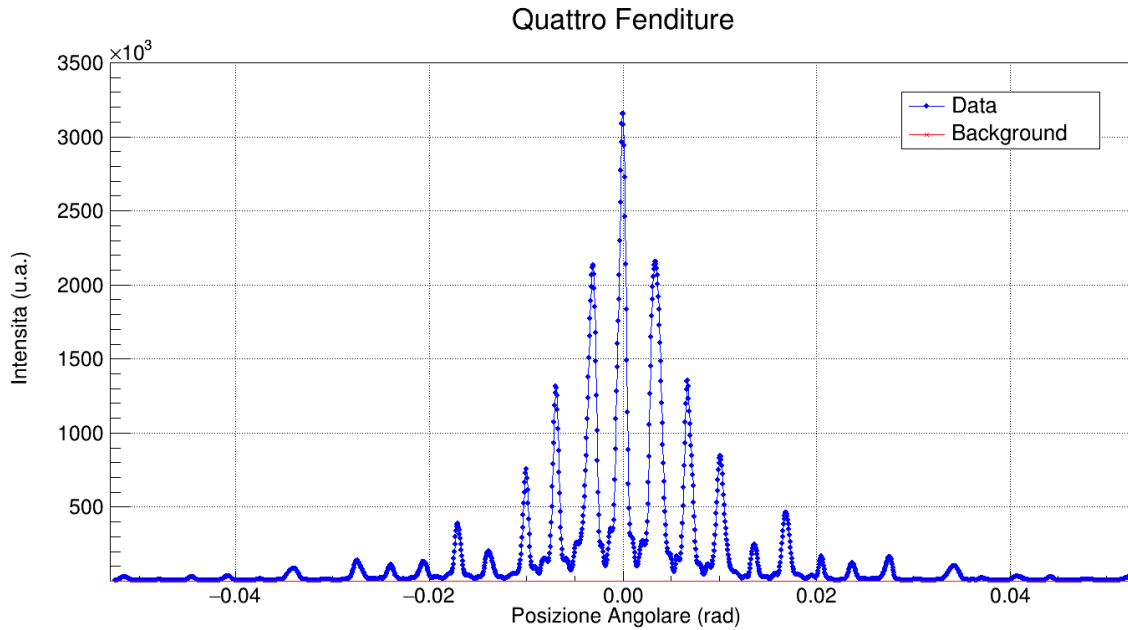
$$d = 195 \mu m$$

mentre propagando l'errore (secondo la formula riportata in precedenza) si ottiene

$$\sigma_d = 1 \mu m$$

4.3.3 Sistema a 4 fenditure

La figura di interferenza, modulata dalla diffrazione, risulta essere:



Il processo di analisi dei dati è analogo a quello riportato per il sistema a fenditura doppia. Vengono illustrati quindi unicamente i risultati rilevanti, tralasciando la trattazione della procedura di analisi.

Il valore di ascissa del picco centrale risulta essere

$$\vartheta_{Max} = (0.00033 \pm 0.00001) rad$$

dunque, l'intero set di misure viene traslato di tale valore.

Si riportano in tabella i valori delle posizioni angolari dei massimi considerati (ricavati come ascissa del punto di intersezione di due rette interpolanti i dati) ed il relativo ordine. Vengono considerati esclusivamente i massimi principali, trascurando i massimi secondari.

Tabella 13: Massimi di Interferenza

Ordine m	$\vartheta_{max} (rad)$	$\sigma_{\vartheta_{max}} (rad)$	Ordine m	$\vartheta_{max} (rad)$	$\sigma_{\vartheta_{max}} (rad)$
-1	-0.00310	0.00001	1	0.00339	0.00001
-2	-0.00692	0.00001	2	0.006684	0.000009
-3	-0.00996	0.00001	3	0.01006	0.00001
-4	-0.01389	0.00001	4	0.01467	0.00001
-5	-0.01709	0.00001	5	0.01684	0.00001
-6	-0.02055	0.00001	6	0.020545	0.000009
-7	-0.02397	0.00001	7	0.02368	0.00001
-8	-0.02746	0.00001	8	0.02757	0.00001

Vengono trascurati i massimi del decimo e del nono ordine, in quanto dopo l'ottavo ordine inizia ad essere complicato distinguere massimi principali da massimi secondari. Si riporta ora il valore del seno di ciascuna posizione angolare, con il corrispettivo errore.

Tabella 14: Seno dei Massimi di Interferenza

Ordine m	$\sin(\vartheta_{max})$	$\sigma_{\sin(\vartheta_{max})}$	Ordine m	$\sin(\vartheta_{max})$	$\sigma_{\sin(\vartheta_{max})}$
-1	-0.00310	0.00001	1	0.00339	0.00001
-2	-0.00692	0.00001	2	0.006684	0.000009
-3	-0.00996	0.00001	3	0.01006	0.00001
-4	-0.01389	0.00001	4	0.01467	0.00001
-5	-0.01709	0.00001	5	0.01684	0.00001
-6	-0.02055	0.00001	6	0.020543	0.000009
-7	-0.02397	0.00001	7	0.02368	0.00001
-8	-0.02746	0.00001	8	0.02756	0.00001

Successivamente, in riferimento alla formula

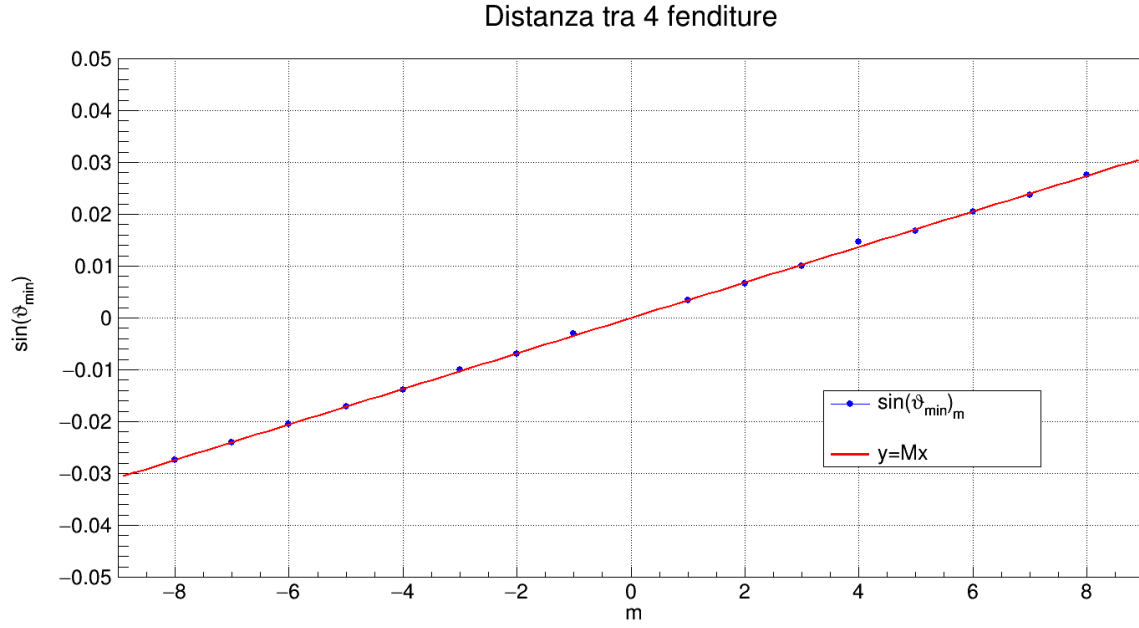
$$\sin(\vartheta_{max}) = \frac{\lambda}{d}m$$

si procede interpolando linearmente le coppie $\{m, \sin(\vartheta_{max})\}$ con una retta del tipo $y = A + Bx$. Ci si aspetta dunque un'intercetta $A \approx 0$, mentre il coefficiente angolare $B = \frac{\lambda}{d}$ viene utilizzato per la stima della spaziatura d tra le fenditure. Vengono riportati in tabella i valori dei parametri $A \pm \sigma_A$ e $B \pm \sigma_B$.

Tabella 15: Interpolazione Lineare

A	σ_A	B	σ_B
-0.000073	0.000002	0.0035218	0.0000004

Come da previsioni teoriche, risulta $A \approx 0$. Si decide allora di ripetere l'interpolazione delle coppie $\{m, \sin(\vartheta_{max})\}$ con una retta $y = Bx$: si vincola la retta a passare per l'origine, in quanto previsto dall'equazione teorica e compatibile con i dati in questione. In tal modo, viene ridotto il numero di parametri liberi, aumentando così l'informazione contenuta nel coefficiente angolare della retta.



Vengono riportati in tabella i valori del parametro $M \pm \sigma_M$, l'errore a posteriori $\sigma_{\sin(\vartheta_{max}),post}$, il coefficiente di correlazione lineare ρ ed il valore della variabile t della distribuzione t-Student.

Tabella 16: Interpolazione Lineare

M	σ_M	σ_{post}
0.0035244	0.0000004	0.0003
$\rho = 0.99985$		
$t = 222$		

Si prende ora in considerazione il coefficiente angolare: dalla relazione $M = \frac{\lambda}{d}$ si ottiene una formula per la stima della spaziatura delle fenditure

$$d = 196 \mu m$$

mentre propagando l'errore (secondo la formula riportata in precedenza) si ottiene

$$\sigma_d = 1 \mu m$$

5 Discussione dei Risultati

Vengono ora discusse in dettaglio la stima dell'ampiezza a delle fenditure e la stima della spaziatura d tra più fenditure. In generale, invece, ciò che si nota è un'evidente sottostima degli errori su ϑ e $\sin(\vartheta)$, confermata da valori di χ^2 molto elevati ed errori a posteriori di circa un ordine di grandezza maggiori rispetto agli errori stimati per propagazione.

5.1 Stima dell'ampiezza di una fenditura

Già alla prima osservazione del grafico delle coppie $\{m, \sin(\vartheta)\}$, si nota che la barra d'errore associata ai punti non è visibile. L'ipotesi che l'incertezza su $\sin(\vartheta)$ sia stata sottostimata viene confermata dal computo del χ^2 . Risulta infatti

$$\chi^2 \approx 2.0 \cdot 10^3 \quad E(\chi^2) = 9$$

e svolgendo uno Z-Test risulta $Z \approx 500 (\sigma)$: la probabilità $P(\chi^2)$ dunque è estremamente piccola. Tuttavia, è evidente come i dati si dispongano effettivamente lungo una retta, e si assume dunque che l'errore su $\sin(\vartheta)$ sia stato decisamente sottostimato. La prova che i dati siano effettivamente correlati è data dalla variabile t molto elevata, che segue la distribuzione di Student con $N - 1$ gradi di libertà: ciò permette di rigettare l'ipotesi di non correlazione con altissima probabilità.

Alla stima dell'apertura a è stata associata un'incertezza relativa $\delta a = 0.7\%$, tuttavia, si ipotizza che sia anch'essa leggermente sottostimata.

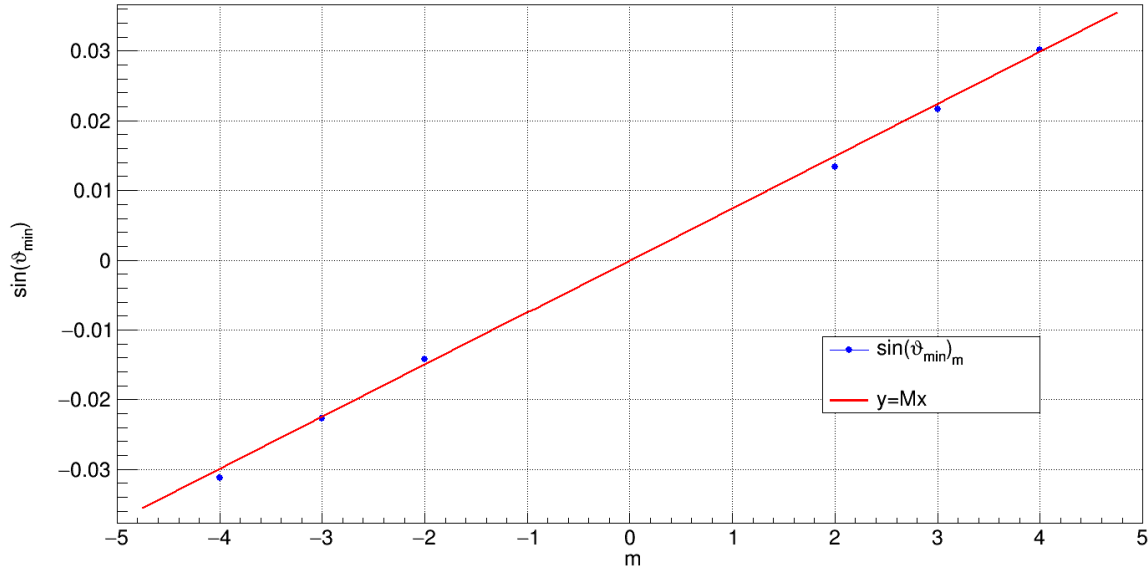
Per cercare di ridurre la sottostima dell'incertezza su $\sin(\vartheta)$, si decide di considerare come minimi di diffrazione i punti di minimo sperimentale. A questi viene assegnata un'incertezza data dalle formule di propagazione riportate nell'analisi dei minimi di diffrazione, considerando però $ptl = 15$ passi motore.

Tabella 17: Minimi di Diffrazione

Ordine m	$\vartheta_{min} (rad)$	$\sigma_{\vartheta_{min}} (rad)$	Ordine m	$\vartheta_{min} (rad)$	$\sigma_{\vartheta_{min}} (rad)$
-2	0.0142	0.0002	2	0.0134	0.0002
-3	-0.0228	0.0002	3	0.0217	0.0002
-4	-0.0313	0.0002	4	0.0302	0.0002

Calcolando ora il seno dei minimi ed il relativo errore non si nota alcuna differenza dalla precedente tabella, in quanto si è in buona approssimazione $\sin(\vartheta) \approx \vartheta$ e le stime non vengono sensibilmente alterate. Lo stesso vale per le incertezze. Si procede ora all'interpolazione delle coppie $\{m, \sin(\vartheta_{min})\}$.

Apertura Fenditura



Risulta quindi un coefficiente angolare $M = 0.00750 \pm 0.00003$ con un $\chi^2 = 116$ ($E(\chi^2) = 5$). Segue che l'errore sui seni è stato nuovamente sottostimato, tuttavia questa sottostima è avvenuta in misura minore. Seguendo questo metodo si trova una stima dell'apertura $a = (89.4 \pm 0.8) \mu m$ (errore relativo $\delta a = 0.8\%$). Si sceglie tale valore come miglior stima dell'apertura: si assume sia più verosimile in quanto risulta $Z = 35$ (σ).

5.2 Stima della spaziatura tra più fenditure

In modo analogo all'analisi precedente, la gli errori su $\sin(\vartheta)$ risultano essere decisamente sottostimati.

$$\chi_{2f}^2 \approx 2.5 \cdot 10^3$$

$$E(\chi_{2f}^2) = 19$$

$$\chi_{3f}^2 \approx 4.0 \cdot 10^3$$

$$E(\chi_{3f}^2) = 19$$

$$\chi_{4f}^2 \approx 11.0 \cdot 10^3$$

$$E(\chi_{4f}^2) = 15$$

Calcolando dunque la compatibilità con i gradi di libertà risulta

$$Z_{2f} \approx 400$$

$$Z_{3f} \approx 600$$

$$Z_{4f} \approx 2000$$

Osservando i grafici, anche in questo caso, si nota comunque una forte correlazione lineare: si assue dunque che l'errore su $\sin(\vartheta)$ sia stato nuovamente sottostimato. La prova che i dati siano effettivamente correlati è data dalla variabile t molto elevata, che segue la distribuzione di Student con $N - 1$ gradi di libertà: ciò permette

di rigettare l'ipotesi di non correlazione con altissima probabilità.

Si riportano ora le tre stime ottenute della spaziatura d , assieme al grado di compatibilità che sussiste tra esse.

Tabella 18: Stime di Spaziatura

$d_{2f} (\mu m)$	$d_{3f} (\mu m)$	$d_{4f} (\mu m)$
195 ± 1	195 ± 1	196 ± 1
$\lambda_{2f,3f}$	$\lambda_{2f,4f}$	$\lambda_{3f,4f}$
0.07	0.20	0.27

Alle tre le stime di d è associata un'incertezza relativa $\delta d = 0.7\%$. Queste risultano essere altamente compatibili tra loro: per dare una stima finale della spaziatura d si sceglie dunque di effettuare la media pesata tra i tre valori con la rispettiva incertezza. Si ottiene dunque come stima

$$d = (195.3 \pm 0.8) \mu m$$

a cui è associato un errore relativo $\delta d = 0.4\%$.

Si fa presente che in questa sezione sono state utilizzate le seguenti formule:

- Z-Test: $Z = \frac{|\chi^2 - \nu|}{\sqrt{2\nu}}$ con $\nu = E(\chi^2) =$ numero di gradi di libertà
- Compatibilità: $\lambda = \frac{|x-y|}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}}$
- Media pesata: $\langle x \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}}$
- Errore della media pesata: $\sigma_{\langle x \rangle} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}}}$

6 Conclusioni

Si conclude con la stima dell'apertura a e della spaziatura d riferite ai sistemi di fenditure uguali ed equispaziate:

- $a = (89.4 \pm 0.8) \mu m$
- $d = (195.3 \pm 0.8) \mu m$