

# Sperimentazioni di Fisica 2

Docenti: Prof. A. Longhin - Prof. A. Patelli

Corso di Laurea in Fisica

Canale 1 A-L

Anno Accademico 2019/2020

---

## ESPERIENZA DI LABORATORIO N° 3

Circuito RLC

---

TURNO IV - GRUPPO 8

**CIGAGNA SIMONE**

1193992

simone.cigagna@studenti.unipd.it

**CUCCHETTO FILIPPO**

1189283

filippo.cucchetto.1@studenti.unipd.it

**LAI NICOLÒ**

1193976

nicolo.lai@studenti.unipd.it

DATA DI CONSEGNA:

21/05/2020

# 1 Obiettivo

Misura dell'induttanza  $L$  e del Q-Valore di un circuito RLC serie.

## 2 Apparato Sperimentale

Gli strumenti che si utilizzano nel corso dell'esperienza sono i seguenti.

- **Oscilloscopio** (Tektronix TDS2012): l'accuratezza sul guadagno verticale pari al 1.5% del valore letto e l'accuratezza che tiene conto degli effetti di risoluzione e imprecisione della traccia è pari a 0.013 di divisione su tutta la scala di lettura, uguale per tensioni e tempi.
- **Sonda di compensazione "10X"**
- **Generatore di funzioni** (Tektronix AFG1062)
- **Cavo coassiale**
- **Multimetro digitale** (Agilent U1232A): per le misure di capacità presenta un'accuratezza dell' 1.9% + 2 digit mentre per le misure di resistenza vale 0.9% + 3 digit per fondo scala da 600  $\Omega$  a 60 M $\Omega$ .
- **Circuito RLC**: modellizzabile come una rete a quattro poli, due di ingresso e due di uscita. È realizzato con una resistenza  $R$ , un'induttanza  $L$  ed una resistenza  $C$ . Per quanto riguarda la capacità, si usa  $C = (99.0 \pm 1.6) \text{ nF}$ . Per la resistenza, invece, si considera inizialmente solo la resistenza interna del generatore  $R = (47.1 \pm 0.3) \Omega$  e altre resistenze parassite come la resistenza serie dell'induttanza e i vari collegamenti. Successivamente, si aggiunge in serie un resistore esterno di resistenza  $R = (22.0 \pm 0.2) \Omega$ . Come induttanza vengono utilizzate due bobine in serie, con resistenza parassita di circa  $R \sim 0.1 \Omega$ . In Figura 1 è mostrato il circuito RLC: in tale configurazione il segnale in uscita  $V_{\text{out}}$  è preso ai capi del condensatore. Per prelevare il segnale ai capi della resistenza, è sufficiente scambiare questa con la capacità, avendo cura di collegare la resistenza a massa.

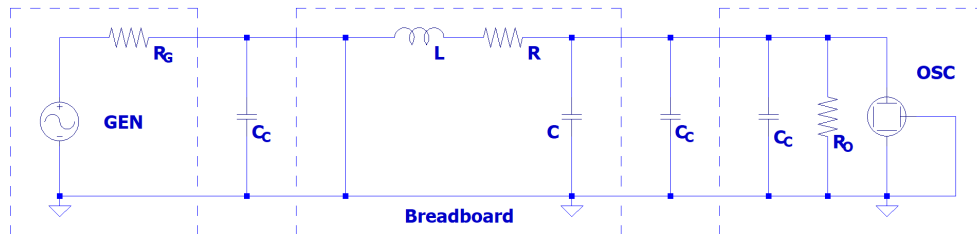


Figura 1: Rappresentazione a costanti concentrate del circuito utilizzato. Si mettono in evidenza, oltre alla resistenza  $R$ , l'induttanza  $L$  ed alla capacità  $C$  su breadboard, anche la resistenza interna del generatore  $R_G$ , la resistenza  $R_O$  e la capacità  $C_O$  associate all'oscilloscopio, e le capacità parassite  $C_C$  dovute ai cavi coassiali che collegano generatore e oscilloscopio alla breadboard.

## 3 Oscillazioni Smorzate

In questa sezione, ci si concentra sullo studio del comportamento del circuito RLC nel dominio del tempo. Le misure verranno eseguite ai capi della capacità, come mostrato in Figura 1. Si stimerà il valore dell'induttanza  $L$  e della resistenza  $R$  attraverso l'analisi dello pseudo-periodo e del decremento logaritmico. Le tabelle contenenti i dati utilizzati con le relative incertezze sono mostrate in Appendice A. Le formule di propagazione degli errori invece possono essere consultate in Appendice B.

### 3.1 Procedura di Acquisizione Dati

Il segnale in ingresso viene prelevato mediante l'uso di una sonda di compensazione, collegata al canale 1 dell'oscilloscopio, mentre il segnale in uscita ai capi della capacità viene prelevato mediante l'uso di una seconda sonda, collegata al canale 2. Dal generatore di funzioni, si imposta un segnale di tipo "onda quadra" di  $8 V_{\text{pp}}$  a bassa frequenza. Si misurano dunque i tempi per cui  $V_{\text{in}}$  e  $V_{\text{out}}$  hanno massimi per  $t_{\text{max}}$  e minimi per  $t_{\text{min}}$ , zeri

con derivata positiva per  $t^+$  e zeri con derivata negativa per  $t^-$  (si distinguono i campioni "positivi" e "negativi" per mettere in evidenza eventuali errori sistematici di zero). Si misura inoltre l'ampiezza  $V_{\max}$  dei massimi e  $V_{\min}$  dei minimi del segnale in uscita. Per le misure di  $t_{\max}$ ,  $t_{\min}$ ,  $t^+$  e  $t^-$ , si utilizzano due cursori di tipo tempo: il primo è posto sul fronte di  $V_{\text{in}}$  mentre il secondo è utilizzato per compiere le misure, avendo come riferimento di zero il primo cursore. I dati raccolti sono mostrati in Tabella 10 (Appendice A). Il numero di secondi per divisione utilizzato è  $25 \mu\text{s}/\text{div}$ , mantenuto costante nel corso della presa dati. Per le misure di  $V_{\max}$  e  $V_{\min}$ , invece, si utilizzano due cursori di tipo tensione: il primo viene posto in corrispondenza dell'asintoto del segnale in uscita, mentre il secondo viene utilizzato per la presa dati, avendo come riferimento di zero il primo cursore. Il procedimento viene effettuato inizialmente considerando come resistenza del circuito l'insieme delle resistenze parassite e successivamente con l'aggiunta di un resistore in serie di  $R = (22.0 \pm 0.2) \Omega$ . Il numero di volt per divisione utilizzato non è costante nel corso della presa dati: per le misure di tempo viene scelta una scala di tensione opportuna per facilitare la presa dati, per le misure di tensione utilizzando unicamente le resistenze parassite la scala viene mantenuta costante a  $550 \text{ mV}/\text{div}$  mentre quando si è utilizzata anche la resistenza  $R$  aggiuntiva sono stati considerati  $320 \text{ mV}/\text{div}$  per le prime due misure e  $28 \text{ mV}/\text{div}$  per le successive, al fine di poter misurare con sufficiente precisione i picchi di massimo e minimo di oscillazioni ormai molto smorzate.

### 3.2 Dati e Analisi

Al fine di stimare il valore dell'induttanza  $L$ , si vuole misurare la pulsazione di oscillazione

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T} \quad \text{pulsazione di oscillazione} \quad (1)$$

dove  $T$  è lo pseudo-periodo di oscillazione. Successivamente, si vuole stimare lo smorzamento  $\delta = R/2L$ , cioè l'inverso della costante di tempo del decremento esponenziale  $\tau$ . Infine, si è interessati a

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_d^2 + \delta^2} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{pulsazione propria del sistema} \quad (2)$$

#### 3.2.1 Pseudo-Periodo

Si vuole inizialmente confrontare le misure  $t_{\max}$ ,  $t_{\min}$ ,  $t^+$  e  $t^-$ : alle misure di tempo "positive" ( $t_{\max}$  e  $t^+$ ) viene assegnato un numero d'ordine intero ( $n = 1, 2, \dots$ ), mentre alle misure di tempo "negative" ( $t_{\min}$  e  $t^-$ ) viene assegnato un numero d'ordine mezzo intero ( $n = 1.5, 2.5, \dots$ ). Attraverso un'interpolazione lineare nel piano ( $n, t$ ), è possibile ricavare lo pseudo-periodo di oscillazione  $T$  dalla pendenza della retta  $m$ . In questo modo, è possibile ottenere una stima di  $\omega_d$ . Come errore di lettura è stato considerato  $\langle \sigma_{\text{div}} \rangle = 0.013$  di divisione, invece di  $1/10$  di divisione (errore massimo) come suggerito dallo strumento, come evidenziato nell'esperienza precedente. Essendo le misure date dalla differenza della posizione dei due cursori, nel computo dell'errore viene considerato il fattore  $\sqrt{2}$  ottenibile per propagazione. Si evidenzia inoltre una notevole difficoltà sperimentale nella misura degli ultimi punti di massimo/minimo/zero, in quanto lo smorzamento rende la curva quasi piatta: misurare con precisione il punto in cui la traccia assume massimo oppure interseca la griglia corrispondente a  $V = 0 \text{ V}$  risulta complicato. Per questo motivo, a tali punti (generalmente l'ultimo/gli ultimi due punti) si associa un errore maggiore basandosi sul grafico dei residui dalla retta interpolante, cercando di trovare un compromesso tra un buon valore di  $\chi^2$  del fit ed un errore che non sia esagerato. Si comincia considerando la configurazione con unicamente i contributi di resistenza parassita  $R_L$ , senza resistenza aggiuntiva: si mostrano in Tabella 1 i parametri dei fit e le stime preliminari di  $\omega_d$ .

Pseudo-Periodo $R_L$ - Dataset Separati							
$t^+$		$t^-$		$t_{\max}$		$t_{\min}$	
$q$ ( $\mu\text{s}$ )	$m$ ( $\mu\text{s}$ )	$q$ ( $\mu\text{s}$ )	$m$ ( $\mu\text{s}$ )	$q$ ( $\mu\text{s}$ )	$m$ ( $\mu\text{s}$ )	$q$ ( $\mu\text{s}$ )	$m$ ( $\mu\text{s}$ )
$-40.5 \pm 0.7$	$59.0 \pm 0.4$	$-40.7 \pm 0.9$	$59.6 \pm 0.4$	$-27.5 \pm 0.5$	$59.9 \pm 0.2$	$-26.1 \pm 0.8$	$59.5 \pm 0.3$
$\chi^2/\text{ndf} = 5.0/2$		$\chi^2/\text{ndf} = 2.1/2$		$\chi^2/\text{ndf} = 3.6/2$		$\chi^2/\text{ndf} = 0.8/1$	
$\omega_d = (106.6 \pm 0.7) \text{ kHz}$		$\omega_d = (105.3 \pm 0.7) \text{ kHz}$		$\omega_d = (104.9 \pm 0.3) \text{ kHz}$		$\omega_d = (105.6 \pm 0.6) \text{ kHz}$	
Compatibilità: $\lambda_{\omega_d}(t^+, t^-) = 1.3$				Compatibilità: $\lambda_{\omega_d}(t_{\max}, t_{\min}) = 1.1$			

Tabella 1: Si mostrano in tabella l'intercetta ed il coefficiente angolare della retta interpolante per ciascun dataset. Si mostrano successivamente i valori di  $\chi^2$  in relazione ai gradi di libertà. Infine, viene mostrata la pulsazione di oscillazione  $\omega_d$  e la compatibilità delle stime ottenute.

Vista l'ottima compatibilità tra le stime ottenute considerando i campioni singolarmente, si decide di accoppiare quelli di massimo e minimo in un unico dataset e, analogamente, si considerano assieme le misure di zero con derivata positiva e negativa: in questo modo si ottengono due stime di  $\omega_d$  e se ne valuta la compatibilità. I dati del campione unificato è mostrato in Tabella 11, in cui sono riportati anche gli errori associati alle misure.

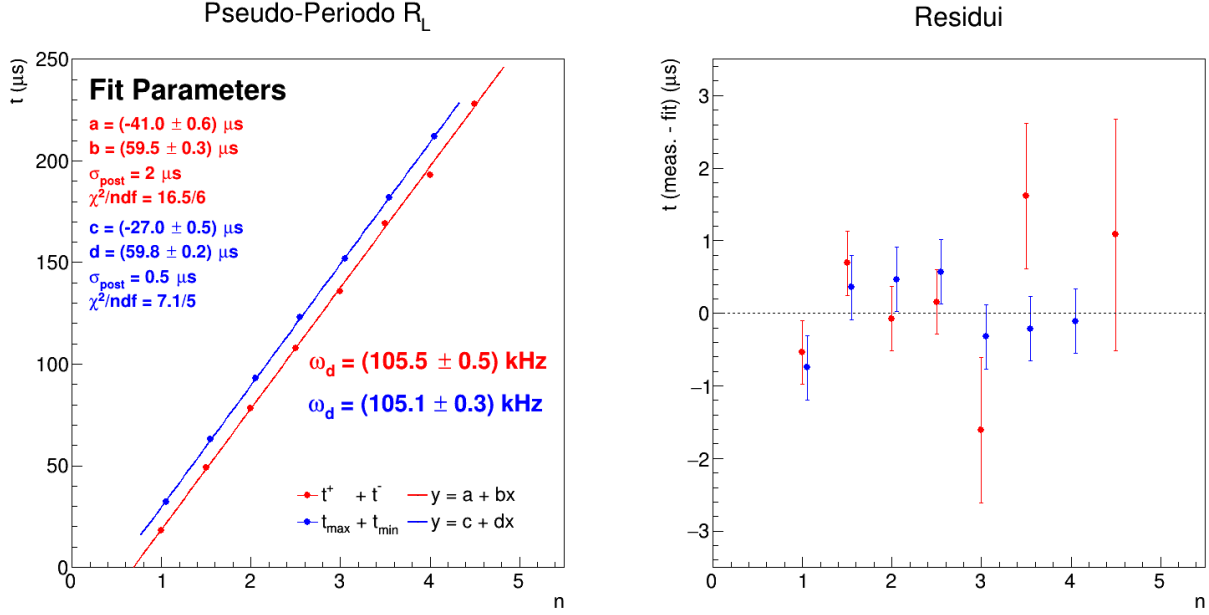


Figura 2: Si mostrano in grafico le due regressioni lineari: in rosso si ritrova il dataset  $t^+ + t^-$ , in blu invece si ritrova il dataset  $t_{\max} + t_{\min}$ . Sono inoltre mostrate le stime di  $\omega_d$ , ricavate dal coefficiente angolare per ciascun campione ricordando che questo fornisce una stima del periodo di oscillazione e  $\omega_d = 2\pi/T$ .

Dal grafico in Figura 2 si può notare come il  $\chi^2 = 16.5$ , relativo al campione  $t^+ + t^-$ , non sia perfettamente compatibile con i suoi gradi di libertà ( $Z = 3$ ). L'errore a posteriori  $\sigma_{\text{post}} = 2 \mu\text{s}$ , maggiore degli errori assegnati ai tempi sulle ordinate, collegato al  $\chi^2$ , evidenzia infatti una leggera sottostima dell'errore: nonostante siano stati aumentate le incertezze sugli ultimi punti, si è preferito non ingrandirle ulteriormente. Questo perché le due stime di  $\omega_d$  presentano una compatibilità  $\lambda = 0.8$ , cioè ottima, senza la necessità di migliorare artificialmente il primo fit. Dall'ottima compatibilità delle due stime, segue la possibilità di effettuarne una media pesata che si considera essere la miglior stima di  $\omega_d$ :

$$\langle \omega_d \rangle = (105.0 \pm 0.2) \text{ kHz} \quad \sigma_{\langle \omega_d \rangle} / \langle \omega_d \rangle = 0.2\% \quad (3)$$

Da questa stima, si ottiene anche una misura del periodo di oscillazione  $T = (59.71 \pm 0.14) \mu\text{s}$  (invertendo l'Equazione 1), utilizzato in seguito. Si procede adesso considerando la configurazione " $R + R_L$ ", cioè con la resistenza aggiuntiva  $R$  collegata in serie. Si procede in modo analogo a quanto appena mostrato. I risultati dei fit a dataset separati sono mostrati in Tabella 2.

Pseudo-Periodo $R + R_L$ - Dataset Separati							
$t^+$		$t^-$		$t_{\max}$		$t_{\min}$	
$q$ ( $\mu\text{s}$ )	$m$ ( $\mu\text{s}$ )	$q$ ( $\mu\text{s}$ )	$m$ ( $\mu\text{s}$ )	$q$ ( $\mu\text{s}$ )	$m$ ( $\mu\text{s}$ )	$q$ ( $\mu\text{s}$ )	$m$ ( $\mu\text{s}$ )
$-40.1 \pm 0.9$	$60.3 \pm 0.5$	$-42.5 \pm 1.3$	$63.0 \pm 0.6$	$-29.0 \pm 0.6$	$62.3 \pm 0.3$	$-27.7 \pm 1.2$	$61.8 \pm 0.5$
$\chi^2 = 4.5$		$\chi^2 = 0$		$\chi^2 = 3.2$		$\chi^2 = 0.3$	
$\omega_d = (104.1 \pm 0.9) \text{ kHz}$		$\omega_d = (99.7 \pm 1.0) \text{ kHz}$		$\omega_d = (100.8 \pm 0.5) \text{ kHz}$		$\omega_d = (101.6 \pm 0.9) \text{ kHz}$	
Compatibilità: $\lambda_{\omega_d}(t^+, t^-) = 3.2$				Compatibilità: $\lambda_{\omega_d}(t_{\max}, t_{\min}) = 0.8$			

Tabella 2: Si mostrano in tabella l'intercetta ed il coefficiente angolare della retta interpolante per ciascun dataset. Si mostrano successivamente i valori di  $\chi^2$ . Infine, viene mostrata la pulsazione di oscillazione  $\omega_d$  e la compatibilità delle stime ottenute.

È evidente come i campioni  $t^+$  e  $t^-$  portano a stime incompatibili tra loro. In questo caso dunque, si sceglie di non accorpare i due dataset senza prima compiere delle ulteriori verifiche. Provando ad unire i due dataset, risulta evidente l'origine di questa incompatibilità: il dato corrispondente al numero d'ordine  $n = 3$  non rispecchia l'andamento lineare descritto dagli altri dati. Per aggiustare il fit attraverso l'aumento degli errori dei dati finali, sarebbe necessario accrescerli di una quantità tale che non si ritiene sufficientemente giustificata. Si decide dunque, di reiettare tale dato e ripetere le regressioni lineari. In questo modo, la compatibilità  $\lambda_{\omega_d}(t^+, t^-) = 2.3$  migliora leggermente. Si procede dunque accorpare  $t^+$  con  $t^-$  e  $t_{\max}$  con  $t_{\min}$  ed effettuando due interpolazioni lineari. In Tabella 12 vengono mostrati i due dataset utilizzati per effettuare le regressioni.

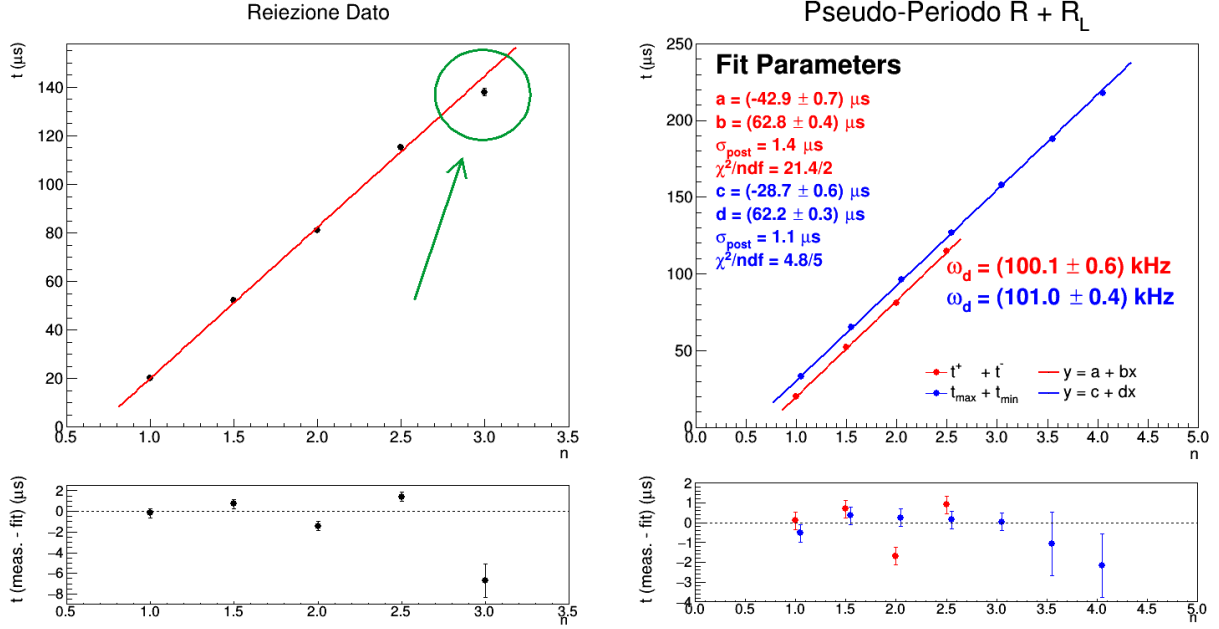


Figura 3: A sinistra: accorpamento provvisorio dei dataset  $t^+$  e  $t^-$ . Viene messa in evidenza l'incompatibilità del dato di ordine  $n = 3$  con il modello. Le misure rimanente, invece, risultano seguire piuttosto bene il modello: l'errore associato ad esse sembra leggermente sottostimato. A destra: si mostrano in grafico le due regressioni lineari: in rosso il dataset  $t^+ + t^-$ , in blu invece il dataset  $t_{\max} + t_{\min}$ . Sono inoltre mostrate le stime di  $\omega_d$ , ricavate dal coefficiente angolare per ciascun campione. In basso figurano i residui dei dati dai rispettivi fit.

Osservando i residui presenti in Figura 3, si nota un andamento poco lineare del dataset  $t_{\max} + t_{\min}$  (in blu): il  $\chi^2 = 4.8$  risulta ottimamente compatibile con i gradi di libertà  $\text{ndf} = 5$  per via dell'aumento dell'errore agli ultimi due dati. È possibile infatti che questi siano stati presi con una precisione minore rispetto agli altri, a causa di difficoltà nella lettura della misura all'oscilloscopio. Al contrario, invece, osservando i residui del dataset  $t^+ + t^-$  (in rosso) ed il relativo  $\chi^2 = 21.4$  del fit, è evidente una sottostima dell'errore. L'errore a posteriori  $\sigma_{\text{post}} = 1.4 \mu\text{s}$ , infatti, risulta sempre maggiore degli errori associati ai tempi sulle ordinate. Si potrebbe, in questo caso, assumere che le misure siano state acquisite con una precisione inferiore, e aumentare arbitrariamente l'errore ai punti facendolo coincidere, per esempio, con l'errore a posteriori. Le due stime di  $\omega_d$  presentano una compatibilità  $\lambda = 1.2$ , cioè buona: si decide dunque di considerare la media pesata delle due come migliori stima di  $\omega_d$ :

$$\langle \omega_d \rangle = (100.7 \pm 0.3) \text{ kHz} \quad \sigma_{\langle \omega_d \rangle} / \langle \omega_d \rangle = 0.3\% \quad (4)$$

Da questa stima, si ottiene anche una misura del periodo di oscillazione  $T = (62.4 \pm 0.2) \mu\text{s}$  (invertendo l'Equazione 1), utilizzato in seguito. Si nota che, aumentando la resistenza complessiva del circuito, il periodo di oscillazione  $T$  aumenta.

### 3.2.2 Decremento Logaritmico

Si è ora interessati ad una stima del fattore di smorzamento  $\delta$ : le ampiezze massime  $V_n$  di ogni oscillazione seguono la relazione

$$V_n = V(nT) = V_0 e^{-n\delta T} \quad \log(V_n) = \log(V_0) - n\delta T \quad (5)$$

quindi attraverso una regressione log-lineare delle coppie  $\{n, \log(V)\}$  è possibile ottenere una misura di  $\delta$  dallo studio del coefficiente angolare. La pendenza della retta, infatti, fornisce esattamente l'opposto del decremento logaritmico  $\Delta$ . Si considera inizialmente la configurazione circuitale che prevede come resistenza unicamente i contributi parassiti  $R_L$ . Vengono presi i logaritmi naturali delle misure di tensione, normalizzate a 1 V per rendere adimensionale l'argomento del logaritmo. Viene adottata la stessa convenzione precedente per l'assegnazione del numero d'ordine  $n$ . Preliminarmente, si considerano i due campioni  $V_{\max}$  e  $V_{\min}$  separatamente: in questo modo si riesce a mettere in evidenza un eventuale errore sistematico di zero. Essendo le misure, anche in questo caso, ottenute come differenza della posizione di due cursori, nel computo dell'errore sulle tensioni si considera il fattore  $\sqrt{2}$ . Essendo (in questa configurazione) le misure acquisite con un'unica scala (550 V/div), non viene considerato il contributo d'errore di calibrazione ed eventuali errori di scala, per le proprietà del logaritmo, vengono scaricati interamente sull'intercetta alla quale non si è interessati. Come fatto in precedenza, si aumenta leggermente l'incertezza delle ultime misure per tener conto delle difficoltà sperimentali riguardanti l'acquisizione dei dati. Successivamente, l'errore di lettura associato alle tensioni viene propagato al logaritmo. Per ricavare il fattore di smorzamento  $\delta$  è stato utilizzata la miglior stima del periodo di oscillazione  $T$  ricavata dallo studio precedente. I risultati delle regressioni sono mostrate in Tabella 3.

Decremento Logaritmico $R_L$ - Dataset Separati			
$\log(V_{\max})$		$\log(V_{\min})$	
$q$	$m$	$q$	$m$
$3.00 \pm 0.02$	$-1.89 \pm 0.02$	$2.82 \pm 0.08$	$-1.78 \pm 0.05$
$\chi^2/\text{ndf} = 2.0/2$		$\chi^2/\text{ndf} = 0.6/1$	
$\delta = (31.6 \pm 0.3) \text{ kHz}$		$\delta = (29.8 \pm 0.8) \text{ kHz}$	
Compatibilità: $\lambda_{\omega_d}(t_{\max}, t_{\min}) = 2.0$			

Tabella 3: Si mostrano in tabella l'intercetta ed il coefficiente angolare della retta interpolante per i due dataset. Si mostrano successivamente i valori di  $\chi^2$  in relazione ai gradi di libertà. Infine, viene mostrato il fattore di smorzamento  $\delta$  e la compatibilità delle stime ottenute.

Si osserva che le due stime del fattore di smorzamento  $\delta$  sono in buona compatibilità tra loro: si può dunque assumere che non sia presente un errore sistematico di zero rilevante. Si procede quindi accorpando i due campioni in un unico dataset, al fine di effettuare una regressione unica e di ricavare così una stima del fattore di smorzamento che tenga conto di entrambi i campioni. Il campione utilizzato per il fit è mostrato in Tabella 13.

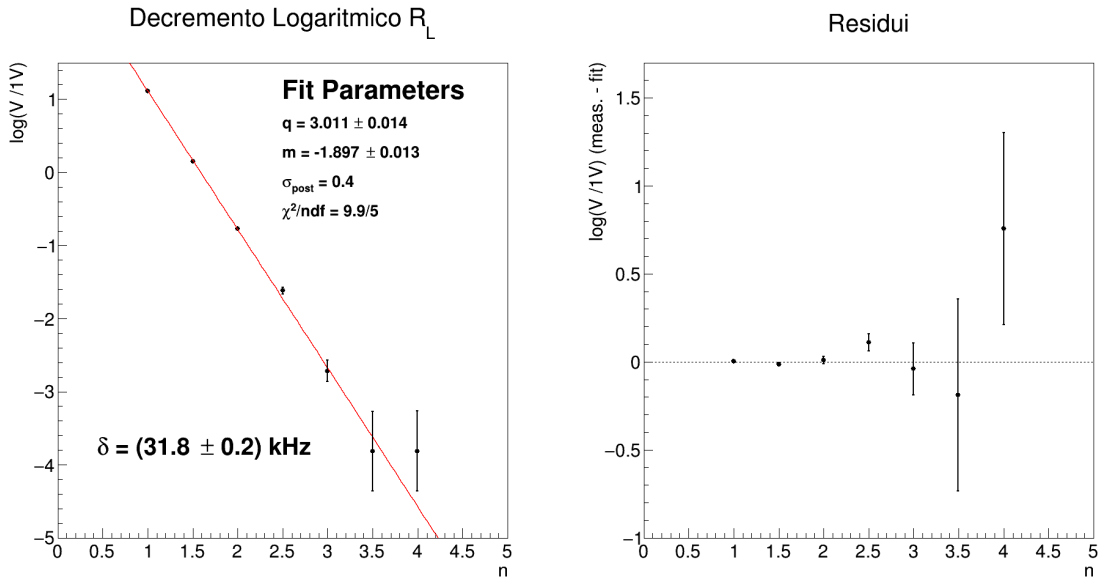


Figura 4: Si mostra in grafico la regressione log-lineare dei due dataset accorpati in un unico campione. È mostrata la stima del fattore di smorzamento  $\delta$ , ricavata dal coefficiente angolare e dalla miglior stima del periodo di oscillazione.

Osservando il grafico, si nota che il  $\chi^2 = 9.9$  non è del tutto compatibile con il valore di aspettazione teorico: l'errore a posteriori risulta molto maggiore delle incertezze associate ai primi punti, mentre risulta leggermente minore delle incertezze degli ultimi. Tuttavia, si considera come miglior stima del fattore di smorzamento  $\delta$  proprio quella mostrata in grafico, in quanto tiene conto di entrambi i campioni analizzati. Come stime dell'errore, invece, si preferisce considerare la semidisposizione delle stime di  $\delta$  ottenute dai dataset separati:

$$\delta = (31.8 \pm 0.9) \text{ kHz} \quad \sigma_\delta / \delta = 2.8\% \quad (6)$$

Si procede adesso considerando la configurazione " $R + R_L$ ", cioè con la resistenza aggiuntiva  $R$  collegata in serie. Si procede in modo analogo a quanto appena mostrato, con una piccola accortezza aggiuntiva. durante l'acquisizione dei dati è stata cambiata la scala. Nel computo dell'errore sulle tensioni, dunque, si tiene conto anche di un contributo di scalibrazione, pari al 1.5% della misura. Nonostante questo contributo aggiuntivo d'errore, le incertezze sulle ultime misure vengono leggermente aumentate, seguendo le strategie riportate in precedenza. Per ricavare il fattore di smorzamento  $\delta$  è stato utilizzata la miglior stima del periodo di oscillazione  $T$  ricavata dallo studio precedente, relativo a questa specifica configurazione di resistenze. I risultati delle regressioni preliminari sono mostrate in Tabella 4.

Decremento Logaritmico $R + R_L$ - Dataset Separati			
$\log(V_{\max})$		$\log(V_{\min})$	
$q$	$m$	$q$	$m$
$3.33 \pm 0.03$	$-2.66 \pm 0.02$	$3.45 \pm 0.06$	$-2.78 \pm 0.03$
$\chi^2/\text{ndf} = 1.6/2$		$\chi^2/\text{ndf} = 0.07/1$	
$\delta = (42.7 \pm 0.4) \text{ kHz}$		$\delta = (44.5 \pm 0.5) \text{ kHz}$	
Compatibilità: $\lambda_{\omega_d}(t_{\max}, t_{\min}) = 3.0$			

Tabella 4: Si mostrano in tabella l'intercetta ed il coefficiente angolare della retta interpolante per i due dataset. Si mostrano successivamente i valori di  $\chi^2$  in relazione ai gradi di libertà. Infine, viene mostrato il fattore di smorzamento  $\delta$  e la compatibilità delle stime ottenute.

Si osserva che le due stime del fattore di smorzamento  $\delta$  sono sufficientemente compatibili tra loro: si può assumere che non sia presente un errore sistematico di zero eccessivamente rilevante. Si procede quindi accorpando i due campioni in un unico dataset, al fine di effettuare una regressione unica e di ricavare così una stima del fattore di smorzamento che tenga conto di entrambi i campioni. Il campione utilizzato per il fit è mostrato in Tabella 14.

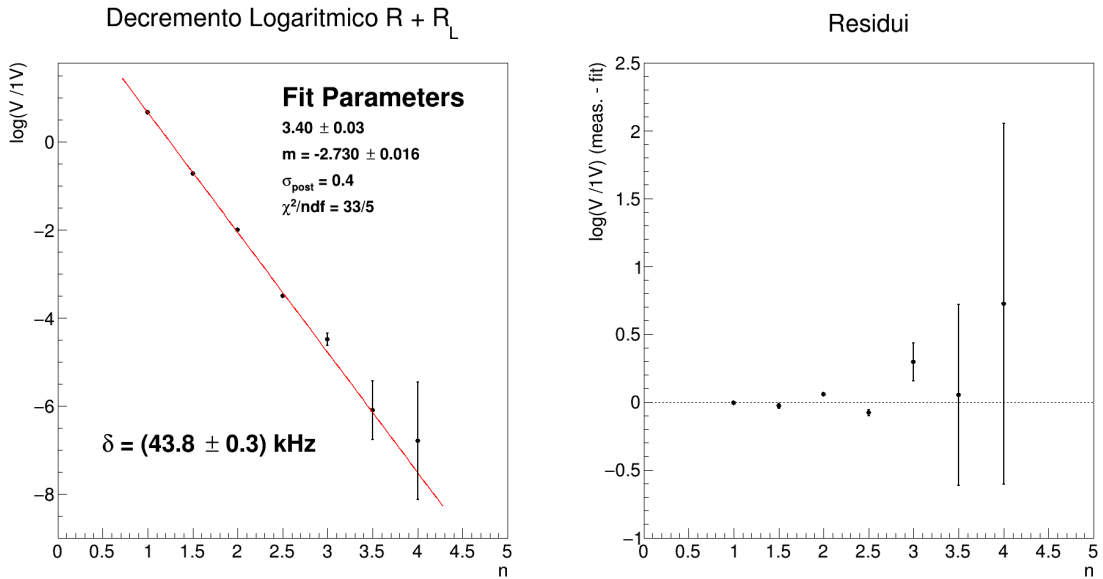


Figura 5: Si mostra in grafico la regressione log-lineare dei due dataset accorpati in un unico campione. È mostrata la stima del fattore di smorzamento  $\delta$ , ricavata dal coefficiente angolare e dalla miglior stima del periodo di oscillazione.

Osservando il grafico, si nota che il  $\chi^2 = 33$  è decisamente incompatibile con il valore di aspettazione teorico: l'errore a posteriori risulta molto maggiore delle incertezze associate ai primi punti, mentre risulta leggermente minore delle incertezze degli ultimi. I primi punti, infatti, presentano un errore decisamente sottostimato, mentre gli ultimi punti presentano un'incertezza molto elevata. L'incertezza elevata sugli ultimi punti deriva dalla difficoltà sperimentale dell'acquisizione stessa dei dati che, propagata al logaritmo, aumenta notevolmente. Provando a reiettare l'ultimo dato, non si ottiene un miglioramento sostanziale. Si considera allora come miglior stima del fattore di smorzamento  $\delta$  quella mostrata in grafico, in quanto tiene conto di entrambi i campioni analizzati. Come stime dell'errore, invece, si preferisce considerare la semidispersione delle stime di  $\delta$  ottenute dai dataset separati, ottenendo

$$\delta = (43.8 \pm 0.9) \text{ kHz} \quad \sigma_\delta / \delta = 2.1\% \quad (7)$$

Si nota come l'aumento della resistenza del circuito comporti un aumento del fattore di smorzamento: una resistenza maggiore, infatti, comporta una dissipazione più rapida dell'energia del sistema e questo si manifesta attraverso oscillazioni che si smorzano più velocemente.

### 3.2.3 Stima dell'Induttanza e della Resistenza

Si vuole ora stimare la pulsazione propria del sistema  $\omega_0 = \sqrt{\omega_d^2 + \delta^2}$ . Successivamente, sapendo che il valore della capacità vale  $C = (99.0 \pm 1.6) \text{ nF}$ , si propone una stima dell'induttanza come

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C} \quad (8)$$

Si fornisce anche una stima del Q-valore dato da  $Q = \frac{\omega_0}{2\delta}$ : da questo è possibile ricavare il valore della resistenza  $R$ . In questo modo è possibile fornire una stima delle resistenze parassite che interferiscono nel circuito, conoscendo la resistenza del generatore e l'eventuale resistenza aggiuntiva. Si è interessati, inoltre, al rapporto  $\delta/\omega_0$ : se questo è minore dell'unità, il sistema è in condizioni di smorzamento debole.

Configurazione: $R_L$		Configurazione: $R + R_L$	
Pulsazione Propria			
$\omega_0 = (109.9 \pm 0.4) \text{ kHz}$	$\sigma_{\omega_0}/\omega_0 = 0.3\%$	$\omega_0 = (109.8 \pm 0.5) \text{ kHz}$	$\sigma_{\omega_0}/\omega_0 = 0.4\%$
Induttanza			
$L = (836 \pm 15) \mu\text{H}$	$\sigma_L/L = 1.7\%$	$L = (838 \pm 15) \mu\text{H}$	$\sigma_L/L = 1.8\%$
Q-valore			
$Q = 1.73 \pm 0.05$		$Q = 1.25 \pm 0.03$	
Resistenza			
$R = (53.1 \pm 1.6) \Omega$	$\sigma_R/R = 3.1\%$	$R = (73.3 \pm 1.8) \Omega$	$\sigma_R/R = 2.5\%$
$\delta/\omega_0 \approx 0.29$		$\delta/\omega_0 \approx 0.40$	

Tabella 5: Stima dei parametri significativi nello studio delle oscillazioni smorzate di un circuito RLC serie. Stima della resistenza  $R$  e dell'induttanza  $L$  sapendo a priori il valore della capacità  $C$ .

È ora evidente come l'aumento della resistenza totale del circuito comporti un maggiore smorzamento: il Q-valore si abbassa ed il rapporto  $\delta/\omega_0$  invece si avvicina all'unità. Inoltre, all'aumentare della resistenza del circuito, diminuisce la pulsazione di oscillazione (come fatto notare in precedenza): la pulsazione caratteristica del sistema  $\omega_0$  rimane infatti costante. Questo è in linea con le aspettative teoriche dato che  $\omega_0$  dipende unicamente dall'induttanza  $L$  e dalla capacità  $C$ , che non subiscono variazioni. Si nota che la misura della pulsazione caratteristica è molto precisa (0.3% – 0.4%), mentre l'induttanza  $L$  è misurata con una precisione decisamente minore: questo perché il contributo d'errore della capacità domina nella propagazione. L'incertezza associata all'induttanza è ben rappresentativa delle difficoltà incontrate nel corso dell'acquisizione dei dati e dell'analisi di questi. Le due stime di induttanza, inoltre, presentano un'ottima compatibilità ( $\lambda = 0.08$ ): si sceglie, come miglior stima dell'induttanza, la media pesata di queste

$$\langle L \rangle = (837 \pm 11) \mu\text{H} \quad \sigma_{\langle L \rangle} / \langle L \rangle = 1.3\% \quad (9)$$



Si vuole ora offrire una stima del contributo di resistenza parassita, a priori ignoto, presente nel circuito. Dalla prima configurazione (senza resistenza aggiuntiva), sapendo che la resistenza interna del generatore vale  $R_G = (47.1 \pm 0.3) \Omega$  si ricava

$$R_{\text{parassita}} = R - R_G = (6.0 \pm 1.7) \Omega \quad (10)$$

mentre dalla seconda configurazione, ricordando che la resistenza aggiuntiva vale  $R_{\text{ext}} = (22.0 \pm 0.2) \Omega$  risulta

$$R_{\text{parassita}} = R - R_G - R_{\text{ext}} = (4.2 \pm 1.9) \Omega \quad (11)$$

Le due stime della resistenza parassita presentano una compatibilità  $\lambda = 0.7$ , cioè sono in ottima compatibilità tra loro. L'incertezza associata alle resistenze, dunque, riesce a coprire in modo soddisfacente le possibili discrepanze tra le due configurazioni. Come stima della resistenza parassita incognita, si considera la media pesata delle due precedenti misure, trovando

$$\langle R_{\text{parassita}} \rangle = (5.2 \pm 1.5) \Omega \quad (12)$$

che presenta un errore relativo del 29%. Misurando la resistenza parassita dell'induttanza con un multimetro digitale, questa risulta essere circa  $R_L \approx 0.1 \Omega$ : è dunque evidente come il contributo di resistenza dovuto agli avvolgimenti dell'induttanza è decisamente poco influente sul valore totale di resistenza parassita.

### 3.2.4 Fit della Forma d'Onda

Si vuole ora estrarre simultaneamente il valore della resistenza  $R$ , induttanza  $L$  e capacità  $C$  attraverso un fit della forma d'onda

$$V(t) = \frac{V_0}{k} e^{-\frac{t+\varphi}{\tau}} \left[ \sin\left(\frac{k}{\tau}(t+\varphi)\right) + k \cos\left(\frac{k}{\tau}(t+\varphi)\right) \right] \quad (13)$$

dove  $\tau = 2\frac{L}{R}$  e  $k = \sqrt{\omega_0^2 \tau^2 - 1}$ , con  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . Si tratta quindi di una funzione con cinque parametri liberi. Al fine di permettere al fitter<sup>1</sup> di convergere ad un minimo corrispondente ai corretti valori dei parametri, è necessario fissare dei valori iniziali in linea con le aspettative: vengono dunque utilizzate le stime espresse in precedenza come parametri iniziali. I dati sono stati digitalizzati tramite WebPlotDigitizer<sup>2</sup>: si sceglie di non associare ai punti l'errore di lettura utilizzato per i valori di tensione, in quanto la web app WPD cambia qualità di prestazione a seconda di molti fattori (illuminazione della foto, angolazione ecc..) e, in condizioni favorevoli, è da considerarsi molto preciso. Si decide allora di effettuare un fit preliminare non pesato con l'obiettivo di calcolare l'errore a posteriori: questo verrà poi associato come incertezza ai punti digitalizzati per ottenere una miglior stima degli errori sui parametri. In Figura 6 sono mostrati i dati digitalizzati assieme al fit e ai dati simulati con Qucs. Si nota immediatamente come le simulazioni effettuate tramite Qucs seguono fedelmente l'andamento dei dati e del fit: i punti e le due curve, infatti, sono in stretto accordo tra loro. Dai residui in basso a sinistra si nota una leggera tendenza dei punti a stare sopra il fit: questo potrebbe indicare la necessità di una leggera traslazione verticale dei dati digitalizzati. Gli errori a posteriori stimati, e associati ai dati, valgono rispettivamente  $\sigma_{\text{post}} = 0.03 \text{ V}$  per la configurazione  $R_L$  e  $\sigma_{\text{post}} = 0.01 \text{ V}$  per la configurazione  $R + R_L$ . Osservando i parametri, è evidente come i valori di induttanza stimati siano decisamente maggiori di quelli misurati mediante l'analisi dello pseudo-periodo e del decremento logaritmico: quest'ultima, infatti, presenta una compatibilità  $\lambda = 3.7$  con la stima ottenuta dalla configurazione  $R_L$  e una compatibilità  $\lambda = 2.6$  con la stima ottenuta dalla configurazione  $R + R_L$ . Le due stime di  $L$  ottenute attraverso il fit della forma d'onda, invece, ottimamente compatibili ( $\lambda = 0.9$ ). Per quanto riguarda le stime di resistenza, queste risultano compatibili con quelle ottenute dall'analisi precedente e sono coerenti con la presenza di un contributo di resistenza parassita incognito. Da questa analisi, il contributo parassita risulta leggermente maggiore, cioè attorno ai  $\sim 6 \Omega$  piuttosto che i  $\sim 5 \Omega$  precedenti. Si fa notare che, durante il fit, il valore della capacità  $C$  è stato lasciato come parametro libero nonostante sia stato preliminarmente misurato con il multimetro digitale. Ci si aspetta un miglioramento del fit mantenendo fissata la capacità  $C$ , nonostante i valori ricavati sono in ottima compatibilità con  $C = (99.0 \pm 1.6) \text{ nF}$ . Si vuole ora osservare l'andamento dei  $\chi^2$  attorno ai minimi trovati, assumendo che questi siano i minimi assoluti della funzione  $\chi^2$ . Si sceglie quindi di mostrare il  $\chi^2$  sull'asse  $z$  e di considerare due parametri da porre sull'asse  $x$  e  $y$ , fissando i rimanenti ai valori ottenuti dal fit. In questo modo, è possibile analizzare la forma del minimo in funzione di coppie di parametri. Come plot range si scelgono  $3\sigma$  dal valore stimato dal fit, che sarà in tal modo centrato ed evidenziato da linee continue. Gli errori dei parametri restituiti dal fit, corrispondenti a  $1\sigma$  dal valore stimato, vengono evidenziati con linee tratteggiate. L'andamento dei  $\chi^2$  attorno ai minimi trovati è mostrato in Figura 7.

<sup>1</sup>Minuit di ROOT, algoritmo MIGRAD <https://root.cern.ch/doc/master/classTMinuit.html>

<sup>2</sup><https://apps.automeris.io/wpd/>

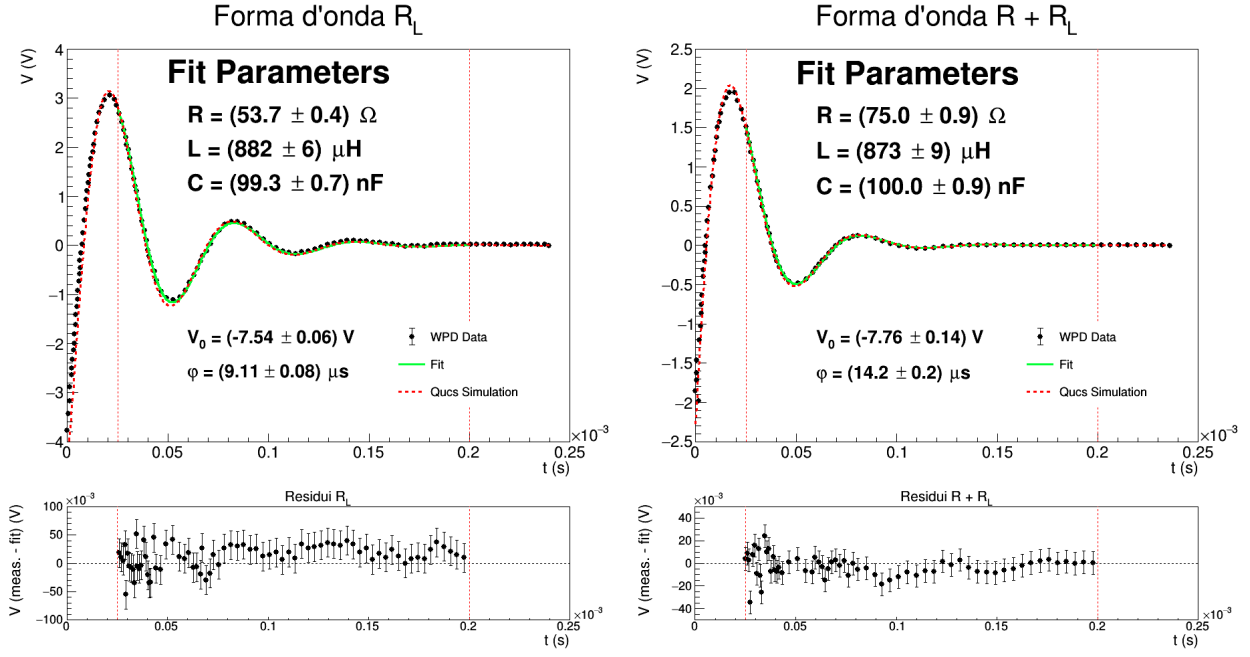


Figura 6: In alto a sinistra: fit della forma d'onda digitalizzata (configurazione  $R_L$ ). In basso a sinistra: residui dei punti digitalizzati dal fit. In alto a destra: fit della forma d'onda digitalizzata (configurazione  $R + R_L$ ). In basso a destra: residui dei punti digitalizzati dal fit. La linea tratteggiata rossa corrisponde ai punti simulati con Qucs. Le linee tratteggiate rosse verticali invece delimitano l'intervallo di fit.

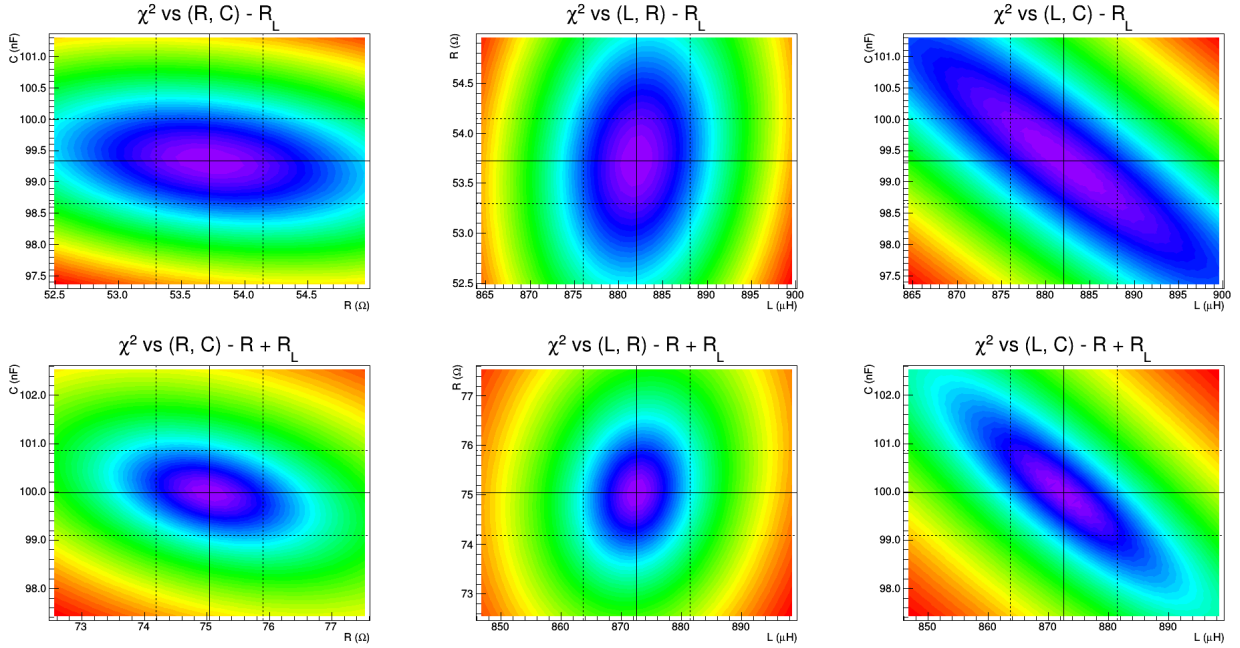


Figura 7: Andamento del  $\chi^2$  in un intorno di  $\pm 3\sigma$  dal minimo. Le linee continue, verticali e orizzontali, evidenziano la stima del parametro. Le linee tratteggiate, verticali e orizzontali, evidenziano l'errore del parametri ( $\pm 1\sigma$ ). I minimi sono colorati con tonalità tendenti al viola.

Si nota immediatamente una forte anticorrelazione tra l'induttanza  $L$  e la capacità  $C$ : questo in linea con le aspettative teoriche, in quanto i due parametri compaiono come prodotto in  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . I minimi, inoltre, sono decisamente ben definiti ed è evidente come l'incertezza sul parametro comprenda in modo ottimale il minimo associato, specialmente per quanto riguarda la configurazione " $R + R_L$ " (in basso): gli errori associati ai parametri per tale configurazione infatti risultano leggermente maggiori rispetto alla configurazione " $R_L$ " e si aggirano attorno all' 1% del parametro.

## 4 Risonanza

In questa sezione, ci si concentra sullo studio del comportamento del circuito RLC nel dominio della frequenza. Verranno acquisite misure della tensione  $V_{in}$  in ingresso al circuito e misure di tensione  $V_{out}$  in uscita, sia ai capi della capacità sia ai capi della resistenza. Attraverso l'analisi della curva di risonanza e dello sfasamento tra  $V_{in}$  e  $V_{out}$ , sarà quindi possibile ottenere una stima di  $R$ ,  $L$  ed eventualmente  $C$ , che si assume nota in quanto misurata con il multimetro digitale. Le formule di propagazione degli errori possono essere consultate in Appendice B, nell'apposita sezione riguardante lo studio della risonanza.

### 4.1 Procedura di Acquisizione Dati

Si considera unicamente la configurazione in cui è aggiunta la resistenza esterna  $R_{ext} = (22.0 \pm 0.2) \Omega$ . Il segnale in ingresso viene prelevato mediante l'uso di una sonda di compensazione, collegata al canale 1 dell'oscilloscopio, mentre il segnale in uscita (ai capi della capacità o ai capi della resistenza) viene prelevato mediante l'uso di una seconda sonda, collegata al canale 2. Dal generatore di funzioni si imposta un'onda sinusoidale di ampiezza  $8 V_{pp}$ , la cui frequenza viene fatta variare ad intervalli regolari di 1 kHz. Dall'oscilloscopio, invece, viene attivata la modalità "media": così facendo il rumore della traccia viene ridotto e questa risulta essere più precisa. Per quanto riguarda l'ampiezza dei segnali, si acquisiscono le misure "picco picco" di tensione, sia per  $V_{in}$  che per  $V_{out}$ , utilizzando come scala sulle tensioni 1.44 V/div. Per quanto riguarda lo sfasamento, invece, si utilizzano i cursori di tipo tempo: il primo viene posizionato in corrispondenza dello zero di  $V_{in}$  mentre il secondo in corrispondenza dello zero di  $V_{out}$ . Viene presa quindi la misura "delta", acquisendo automaticamente la differenza tra i due cursori, utilizzando una scala sui tempi variabile al fine avere per ogni misura una visualizzazione ottimale sul display dell'oscilloscopio.

### 4.2 Dati e Analisi

Inizialmente, si vogliono utilizzare i risultati ottenuti dallo studio delle oscillazioni smorzate del circuito per ottenere delle stime di ciò che ci si aspetta dall'analisi della risonanza del sistema. Sapendo che la frequenza è legata alla capacità  $C$  (nota a priori) e all'induttanza  $L$ , utilizzando le stime precedenti si ottiene

$$f_{res} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = (17.5 \pm 0.2) \text{ kHz} \quad (14)$$

mentre il Q-valore risulta essere

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = 3.4 \pm 0.2 \quad (15)$$

ricordando che, per il calcolo del Q-valore, si utilizza la resistenza aggiuntiva di  $R_{ext} = (22.0 \pm 0.2) \Omega$  sommata alla stima della resistenza parassita del circuito. Nel calcolo quindi non si considera la resistenza interna del generatore: questo perché si vuole studiare la forma della funzione di trasferimento e quindi la tensione in ingresso è prelevata tra il generatore ed il circuito, utilizzando un'apposita sonda. Così facendo, gli unici contributi di resistenza parassita (sufficientemente grandi da essere considerati) sono quelli dati dai contatti sulla breadboard. Si vuole ora fornire una nuova misura della resistenza parassita del circuito conoscendo il valore della resistenza aggiuntiva  $R_{ext}$ : i contributi di resistenza parassita sono a priori ignoti e possibilmente differenti da quelli misurati alla fine dell'analisi delle oscillazioni smorzate. Sapendo che in risonanza il circuito è puramente resistivo (cioè con sfasamento nullo e reattanza nulla) ed il segnale in ingresso che viene prelevato all'uscita del generatore non è uguale alla tensione erogata dal generatore a circuito aperto, misurando la profondità del minimo di  $V_{in}$  in funzione della frequenza, è quindi possibile stimare  $R_{parassita}$  conoscendo  $R_{ext}$ . Misurando una caduta di tensione da 8 V a circa 2.9 V si trova

$$\frac{R_{ext} + R_{parassita}}{R_{ext} + R_{parassita} + R_G} = \frac{2.9 \text{ V}}{8 \text{ V}} = a = 0.363 \pm 0.003 \quad R_{parassita} = \frac{a}{1-a} R_G - R_{ext} \approx (4.8 \pm 0.3) \Omega \quad (16)$$

La nuova misura di resistenza parassita è ampiamente contenuta nell'errore della stima ottenuta dall'analisi delle oscillazioni smorzate e risulta leggermente minore rispetto a  $\langle R_{parassita} \rangle$  ottenuta in Equazione 12: si può ipotizzare dunque che in precedenza ci fossero degli ulteriori contributi parassiti dovuti a cavi o contatti al di fuori della breadboard e che, attraverso questa strategia di misura e analisi, cessano di influire sul circuito.

Si vuole ora procedere studiando la funzione di trasferimento del circuito e lo sfasamento tra  $V_{in}$  e  $V_{out}$ : dalle misure di tensione acquisite viene computata l'amplificazione in tensione, mentre dalle misure di differenza

temporale si ricava lo sfasamento

$$T = \frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} \quad \Delta\varphi = 2\pi\Delta t \quad (17)$$

Alle misure di tensione e di tempo si associa l'errore di lettura dato da  $\langle\sigma_{\text{div}}\rangle \times \text{div} \times \sqrt{2}$ . L'errore sulla funzione di trasferimento e sullo sfasamento segue per propagazione (si veda Appendice B). Successivamente, vengono considerate questa quantità in funzione della frequenza del segnale sinusoidale impostato dal generatore. Si procede allora con fit non lineari della funzione di trasferimento e dello sfasamento, al fine di ricavare simultaneamente i valori di  $R$ ,  $L$  e  $C$ : questo viene effettuato in modo analogo sia per l'acquisizione del segnale di uscita ai capi della resistenza sia per l'acquisizione del segnale di uscita ai capi della capacità.

#### 4.2.1 Segnale prelevato ai capi della Resistenza

In questa sezione ci si concentra sull'analisi della funzione di trasferimento del circuito e dello sfasamento del segnale prelevato ai capi della resistenza. Prelevando il segnale  $V_{\text{out}}$  ai capi della resistenza di un circuito RLC serie, si ottiene un filtro detto "passa banda". Un filtro passa banda è un dispositivo passivo che permette il passaggio di frequenze all'interno di un dato intervallo ed attenua le frequenze al di fuori di esso. L'intervallo in questione è anche detto "banda passante" e corrisponde ad una regione di frequenze distribuite attorno alla frequenza di risonanza  $f_{\text{res}}$ . In questa configurazione, il punto di massimo della funzione di trasferimento  $T_R$  in funzione della frequenza corrisponde esattamente alla frequenza di risonanza. A tale frequenza, inoltre, si ha uno sfasamento nullo tra  $V_{\text{in}}$  e  $V_{\text{out}}$ . Volendo essere espliciti con le equazioni utilizzate, si mostra la dipendenza funzionale della funzione di trasferimento e dello sfasamento rispetto alla pulsazione  $\omega = 2\pi f$  e ai parametri del circuito  $R$ ,  $L$  e  $C$ . Queste equazioni vengono successivamente utilizzate per effettuare i fit non lineari.

$$T_R(\omega) = \frac{A\omega}{\sqrt{\omega^4 - 2\omega^2(\Omega^2 - 2\delta^2) + \Omega^4}} \quad \Delta\varphi_R(\omega) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}\right) \quad (18)$$

dove  $\delta = R/2L$  e  $\Omega = 1/\sqrt{LC}$ . Massimizzando la funzione di trasferimento e annullando lo sfasamento si ottiene in entrambi i casi

$$f_{\text{res}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (19)$$

Effettuando i fit della funzione di trasferimento e dello sfasamento non si è unicamente interessati ai valori dei parametri liberi  $R$ ,  $L$  e  $C$ . Oltre alla relazione riportata in Equazione 15 per il calcolo del Q-valore dai parametri del fit, questo può essere stimato anche dalla conoscenza della frequenza di risonanza  $f_{\text{res}}$  e dalla larghezza di banda  $\Delta f = f_{\text{high}} - f_{\text{low}}$ , dove  $f_{\text{high}} - f_{\text{low}}$  rappresentano, nel caso della funzione di trasferimento, quelle particolari frequenze tali per cui il massimo della funzione di trasferimento è ridotto di un fattore  $\sqrt{2}$ , mentre nel caso dello sfasamento sono quelle particolari frequenze tali per cui  $\Delta\varphi = \pm\frac{\pi}{4}$ . Si ottiene allora

$$Q = \frac{f_{\text{res}}}{\Delta f} \quad (20)$$

Si procede dunque con i fit (mostrati in Figura 8) e l'analisi dei risultati ottenuti. Osservando la curva di risonanza, si nota un ottimo accordo tra dati sperimentali, fit e simulazioni di Qucs. Dal grafico dei residui si nota una discontinuità sospetta intorno alla frequenza di risonanza: probabilmente una campionatura più fine attorno al massimo della funzione di trasferimento avrebbe portato a dei residui più omogenei (o messo in evidenza un disaccordo tra dati e fit). In questo caso, dal grafico dei residui si nota una soddisfacente stima dell'errore a priori, confermata anche dal  $\chi^2 = 16$  che risulta leggermente minore del valore di aspettazione ( $Z = 1.5$ ). Le stime dei parametri  $R$ ,  $L$  e  $C$  presentano un errore relativo che si aggira attorno al 6%. Si vuole ora stimare il Q-Valore del sistema sia utilizzando i parametri  $R$ ,  $L$  e  $C$  che la frequenza di risonanza  $f_{\text{res}}$  e la larghezza di banda  $\Delta f$ . Al contrario di quanto mostrato in Equazione 15, in questo caso per associare l'errore al Q-Value è necessario tenere conto della covarianza tra i parametri. I risultati dell'analisi del Q-Valore sono riportati in Tabella 6. Si nota immediatamente come il valore dell'induttanza  $L$  risulti decisamente maggiore delle stime ottenute analizzando il comportamento delle oscillazioni smorzate. Si è inoltre riscontrata una forte anticorrelazione tra l'induttanza  $L$  e la capacità  $C$ , già evidenziata in Figura 7 nel corso dell'analisi delle oscillazioni smorzate. Il valore della resistenza  $R$  risulta anch'esso leggermente maggiore delle aspettative: per quanto trovato in Equazione 16 ci si aspetta una resistenza totale di  $R = (26.8 \pm 1.6)\Omega$ , che presenta una compatibilità  $\lambda = 1.0$  con il parametro restituito dal fit, che si ritiene dunque accettabile.

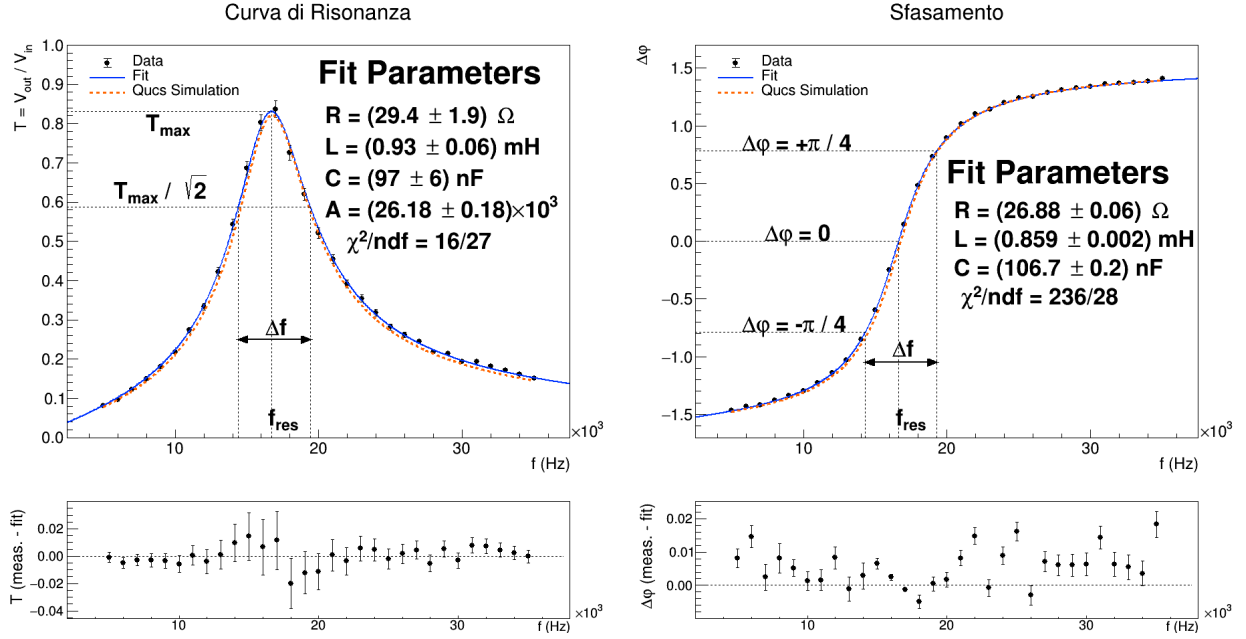


Figura 8: A sinistra: fit della funzione di trasferimento in funzione della frequenza (in blu) e simulazione Qucs (in arancione tratteggiato). A destra: fit dello sfasamento in funzione della frequenza (in blu) e simulazione Qucs (in arancione tratteggiato). In basso sono mostrati i residui dei punti dai fit. Le linee nere tratteggiate identificano la posizione della frequenza di risonanza e della larghezza di banda.

Stima del Q Valore - Funzione di Trasferimento			
$R$	$(29.4 \pm 1.9) \Omega$	$f_{\text{res}}$	$(16.73 \pm 0.04) \text{ kHz}$
$L$	$(0.93 \pm 0.06) \text{ mH}$	$\Delta f$	$(5.02 \pm 0.09) \text{ kHz}$
$C$	$(97 \pm 6) \text{ nF}$		
$Q = 3.33 \pm 0.06$		$Q = 3.33 \pm 0.06$	

Tabella 6: Stima del Q-Valore attraverso  $R$ ,  $L$  e  $C$  e attraverso  $f_{\text{res}}$  e  $\Delta f$ .

Il Q-valore, infine, è in linea con le aspettative esposte in Equazione 15. Per quanto riguarda la frequenza di risonanza, invece, il valore stimato in Equazione 14 non è coerente con quanto ritrovato dall'analisi dei parametri del fit e dall'analisi della forma della curva di risonanza. Dal fit, infatti, si ricava che il circuito si trova in risonanza per un valore di frequenza leggermente minore di quanto ipotizzato dai valori dei parametri ottenuti dall'analisi nel dominio del tempo. Osservando il grafico dello sfasamento in funzione della frequenza (Figura 8), è piuttosto evidente come i punti sperimentali siano (quasi) sempre maggiori della simulazione Qucs (linea tratteggiata arancione). Un comportamento analogo è evidenziato dal grafico dei residui dei punti sperimentali dal fit: si nota come i punti, oltre ad avere a priori decisamente sottostimato ( $\chi^2 = 236$ ), si distribuiscono (quasi) sempre al di sopra del fit. Data la notevole sottostima degli errori a priori e dell'andamento patologico dei residui, si è portati ad assumere che le incertezze sui parametri siano anch'esse sottostimate: queste, infatti, risultano essere dell'ordine dell' 1%. Si nota inoltre come le stime dei parametri risultino visibilmente differenti da quelle ottenute dal fit della curva di risonanza. In particolare, è ancora evidenziata la forte anticorrelazione tra  $L$  e  $C$ : calcolando un'induttanza bassa, inevitabilmente il fit restituisce una capacità maggiore. Seguono ora le stime del Q-valore, riportate in Tabella 7. Si nota immediatamente come il Q-valore stimato dall'analisi dello sfasamento sia calcolato con una precisione notevolmente maggiore. Questo è probabilmente dovuto alla sottostima dell'errore a priori che comporta una sottostima dell'errore sui parametri. In ogni caso, queste stime risultano ottimamente compatibili con il Q-Valore ricavato studiando la funzione di trasferimento, nonostante il fit abbia restituito parametri di valori molto diversi tra loro. Si vuole far notare come, nel caso del segnale in uscita prelevato ai capi della resistenza, stimare il Q-Valore dai parametri del fit o dalla larghezza di banda e la frequenza di risonanza portino allo stesso risultato.

Stima del Q Valore - Sfasamento			
$R$	$(26.88 \pm 0.06) \Omega$	$f_{\text{res}}$	$(16.6228 \pm 0.0011) \text{ kHz}$
$L$	$(0.859 \pm 0.002) \text{ mH}$		
$C$	$(106.7 \pm 0.2) \text{ nF}$	$\Delta f$	$(4.978 \pm 0.006) \text{ kHz}$
$Q = 3.339 \pm 0.004$		$Q = 3.339 \pm 0.004$	

Tabella 7: Stima del Q-Valore attraverso  $R$ ,  $L$  e  $C$  e attraverso  $f_{\text{res}}$  e  $\Delta f$ .

#### 4.2.2 Segnale prelevato ai capi della Capacità

In questa sezione ci si concentra sull'analisi della funzione di trasferimento del circuito e dello sfasamento del segnale prelevato ai capi della capacità. Prelevando il segnale  $V_{\text{out}}$  ai capi della capacità, il massimo della funzione di trasferimento avviene a frequenze leggermente più basse rispetto alla frequenza di risonanza:

$$f^{\text{max}} = f_{\text{res}} \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad (21)$$

Alla frequenza di risonanza, inoltre, si ottiene che lo sfasamento tra  $V_{\text{in}}$  e  $V_{\text{out}}$  vale  $\pi/2$ . Volendo essere espliciti con le equazioni utilizzate, si mostra la dipendenza funzionale della funzione di trasferimento e dello sfasamento rispetto alla pulsazione  $\omega = 2\pi f$  e ai parametri del circuito  $R$ ,  $L$  e  $C$ . Queste equazioni vengono successivamente utilizzate per effettuare i fit non lineari.

$$T_R(\omega) = \frac{A\Omega^2}{\sqrt{\omega^4 - 2\omega^2(\Omega^2 - 2\delta^2) + \Omega^4}} \quad \Delta\varphi_R(\omega) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}\right) \quad (22)$$

dove  $\delta = R/2L$  e  $\Omega = 1/\sqrt{LC}$ . Massimizzando la funzione di trasferimento si ottiene che

$$\omega^{\text{max}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{2} \frac{R^2}{L^2}} \quad (23)$$

in accordo con quanto riportato in Equazione 21. Anche in questo caso, non si è unicamente interessati ai valori dei parametri  $R$ ,  $L$  e  $C$  del fit: si vuole stimare il Q-valore anche attraverso la frequenza di risonanza  $f_{\text{res}}$  e la larghezza di banda  $\Delta f = f_{\text{high}} - f_{\text{low}}$ , dove  $f_{\text{high}} - f_{\text{low}}$  rappresentano, nel caso della funzione di trasferimento, quelle particolari frequenze tali per cui il massimo della funzione di trasferimento è ridotto di un fattore  $\sqrt{2}$ , mentre nel caso dello sfasamento sono quelle particolari frequenze tali per cui  $\Delta\varphi = \frac{\pi}{4}$  e  $\Delta\varphi = \frac{3\pi}{4}$ . Si procede dunque con i fit (mostrati in Figura 9) e l'analisi dei risultati ottenuti. Dal grafico a sinistra si può notare come il massimo della curva non corrisponda esattamente alle linee tratteggiate identificanti la frequenza di risonanza. Il massimo, infatti, si trova a frequenze leggermente minori ed è legato alla frequenza di risonanza dalla Equazione 21 e Equazione 23. Si può inoltre notare un leggero disaccordo tra il fit (in blu) e la simulazione Qucs (in arancione), visibile specialmente sulle code. Dal grafico dei residui si nota un andamento piuttosto regolare su tutto il range di frequenze, ad eccezione di tre punti prossimi alla risonanza: anche in questo caso una campionatura più fine del massimo potrebbe essere una soluzione alla discontinuità. Si nota inoltre una leggera sottostima dell'errore, evidenziata anche dal valore del  $\chi^2 = 67$  che risulta essere incompatibile con i gradi di libertà ( $Z = 4.6$ ). Le stime dei parametri  $R$ ,  $L$  e  $C$  presentano un errore relativo che si aggira attorno al 2%: data la sottostima dell'errore a priori si può ipotizzare che anche gli errori sui parametri siano leggermente sottostimati. Seguono ora le stime del Q-valore, riportate in Tabella 8. È subito evidente come, prelevando il segnale ai capi della capacità, le due stime del Q-Valore portino a risultati leggermente diversi. Questo è causato dal fatto che il massimo della curva non si presenta alla frequenza di risonanza: nonostante siano state apportate le dovute correzioni, stimare la larghezza di banda come il massimo della curva ridotto di un fattore  $\sqrt{2}$  non risulta essere analiticamente corretto, bensì un'approssimazione sufficientemente accurata. Osservando il grafico dello sfasamento (Figura 9), è piuttosto evidente una notevole sottostima dell'errore a priori, confermata dall'elevato valore del  $\chi^2 = 1755$  e dal grafico dei residui. Questa forte sottostima si è probabilmente proiettata anche sulla stima degli errori sui parametri, che risultano essere calcolati con un errore relativo pari a 0.75% del valore del parametro. I valori dei parametri, inoltre, sono decisamente incompatibili con quelli ottenuti dall'analisi della funzione di trasferimento: si nota immediatamente la forte anticorrelazione tra  $L$  e  $C$ . Questa grande discrepanza è da intendersi come una problematica del fit e della difficoltà a trovare un minimo del  $\chi^2$  con parametri fortemente anticorrelati, quali sono appunto  $L$  e  $C$ . Seguono ora le stime del Q-valore, riportate in Tabella 9.

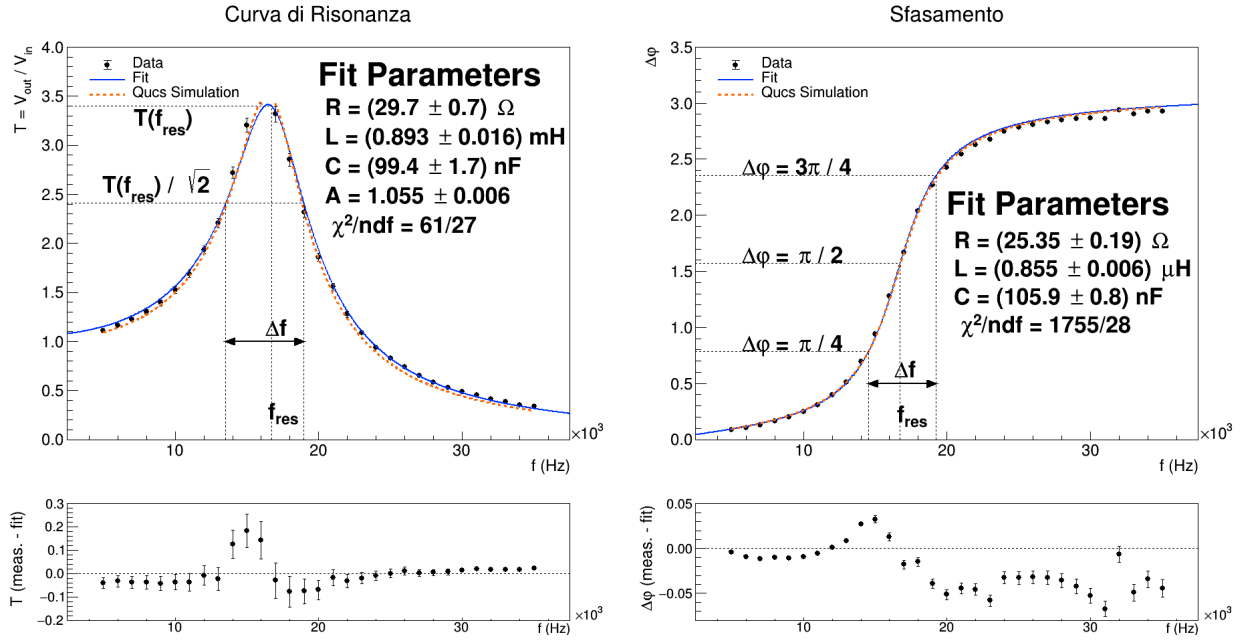


Figura 9: A sinistra: fit della funzione di trasferimento in funzione della frequenza (in blu) e simulazione Qucs (in arancione tratteggiato). A destra: fit dello sfasamento in funzione della frequenza (in blu) e simulazione Qucs (in arancione tratteggiato). In basso sono mostrati i residui dei punti dai fit. Le linee nere tratteggiate identificano la posizione della frequenza di risonanza e della larghezza di banda.

Stima del Q Valore - Funzione di Trasferimento			
$R$	$(29.7 \pm 0.7) \Omega$	$f_{\text{res}}$	$(16.89 \pm 0.03) \text{ kHz}$
$L$	$(0.893 \pm 0.16) \text{ mH}$		
$C$	$(99.4 \pm 1.7) \text{ nF}$	$\Delta f$	$(5.43 \pm 0.09) \text{ kHz}$
$Q = 3.19 \pm 0.07$		$Q = 3.11 \pm 0.05$	

Tabella 8: Stima del Q-Valore attraverso  $R$ ,  $L$  e  $C$  e attraverso  $f_{\text{res}}$  e  $\Delta f$ .

Stima del Q Valore - Sfasamento			
$R$	$(25.35 \pm 0.19) \Omega$	$f_{\text{res}}$	$(16.720 \pm 0.005) \text{ kHz}$
$L$	$(0.855 \pm 0.06) \text{ mH}$		
$C$	$(105.9 \pm 0.8) \text{ nF}$	$\Delta f$	$(4.719 \pm 0.008) \text{ kHz}$
$Q = 3.545 \pm 0.005$		$Q = 3.544 \pm 0.005$	

Tabella 9: Stima del Q-Valore attraverso  $R$ ,  $L$  e  $C$  e attraverso  $f_{\text{res}}$  e  $\Delta f$ .

Si nota immediatamente come il Q-valore stimato dall'analisi dello sfasamento sia calcolato con una precisione notevolmente maggiore. Questo è probabilmente dovuto alla sottostima dell'errore a priori che comporta una sottostima dell'errore sui parametri. Queste stime risultano inoltre incompatibili con il Q-Valore ricavato studiando la funzione di trasferimento. Infine, si nota che le due stime risultano essere molto simili tra loro, al contrario di quanto riscontrato dall'analisi della funzione di trasferimento. Tuttavia, non risultano identiche come nel caso di un segnale in uscita prelevato ai capi della resistenza. A tal proposito, si preferisce quindi l'analisi effettuata su tale configurazione e i risultati ottenuti si ritengono più affidabili. Si vuole ora indagare maggiormente l'anticorrelazione tra  $L$  e  $C$  e verificare quanto siano affidabili le stime delle incertezze restituite dal fit. Per fare ciò, in analogia con quanto mostrato in Figura 7, si indaga l'andamento del  $\chi^2$  attorno al minimo tenendo come parametri liberi l'induttanza e la capacità.

### 4.3 Analisi del $\chi^2$ per l'induttanza $L$

Si vuole mostrare inizialmente l'andamento del  $\chi^2$  attorno al minimo del grafico in Figura 9, raffigurante la funzione di trasferimento e lo sfasamento del segnale prelevato ai capi della capacità. Per poter analizzare l'errore sui parametri restituiti dal fit si è poi traslato il  $\chi^2$  lungo l'asse  $z$  in modo da avere  $\chi^2_{\min} = 0$ . Successivamente, si vuole raffigurare unicamente la sezione di  $\chi^2$  corrispondente ad una coverage probability del 68.27% ( $1\sigma$ ): per fare questo viene utilizzata la convenzione  $\Delta\chi^2$  adattata per funzioni a più parametri. La funzione di trasferimento presenta 4 parametri liberi e la  $CP$  al 68.27% è data da  $\Delta\chi^2 = 4.72$ , mentre lo sfasamento presenta 3 parametri liberi e la  $CP$  al 68.27% è data da  $\Delta\chi^2 = 3.53$ . È doveroso evidenziare che questi valori di  $\Delta\chi^2$  sono esatti unicamente nel limite di dataset formati da un gran numero di dati. Nei grafici corrispondenti al  $\chi^2$  traslato, dunque, le zone colorate rappresentano un'incertezza al 68% mentre le zone rosse uniformi corrispondono ai valori del  $\chi^2$  maggiori. Nei grafici le linee continue rappresentano il valore del parametro stimato dal fit, mentre le linee tratteggiate rappresentano l'incertezza del parametro a  $1\sigma$ .

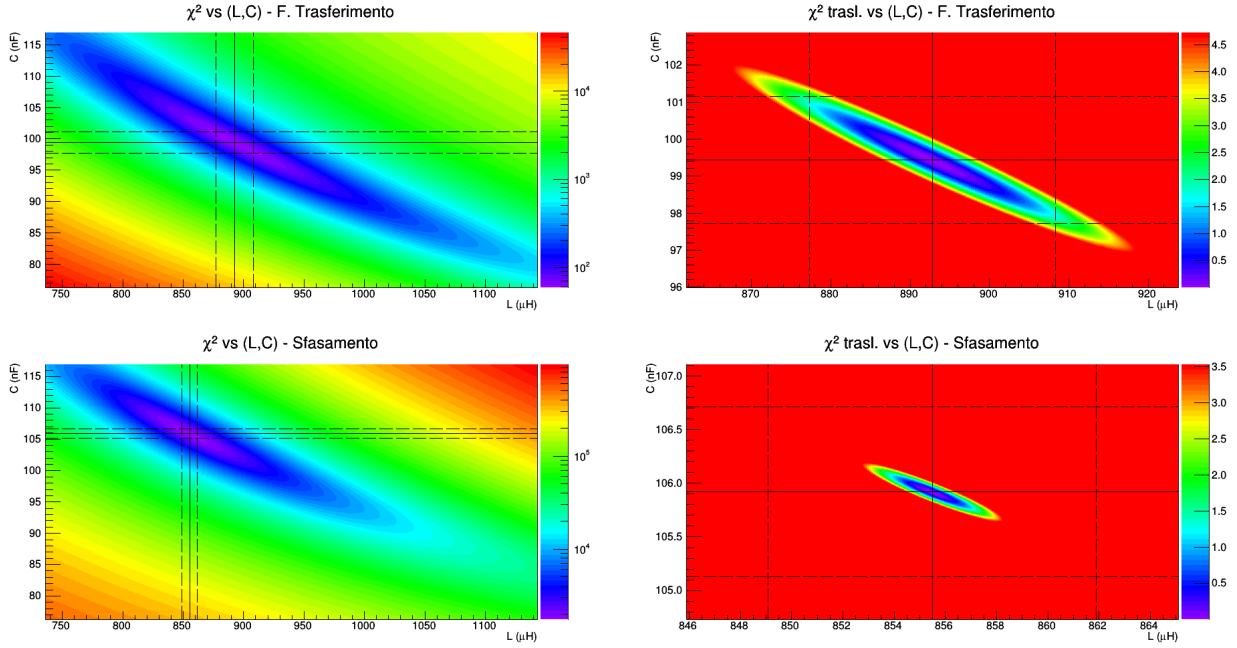


Figura 10: A sinistra:  $\chi^2$  vs  $(L, C)$  per il fit della curva di risonanza e dello sfasamento. A destra:  $\chi^2$  vs  $(L, C)$  traslato lungo l'asse  $z$  in modo da avere il minimo a zero.

Dai grafici a sinistra si può notare una forma leggermente allungata dei minimi: questi risultano essere più stretti e curvilinei rispetto a quelli analizzati in Figura 7, di forma ellittica. Essendo questi minimi molto stretti, si assume che i parametri estratti dalla minimizzazione siano piuttosto precisi. Per analizzare a fondo la stima delle incertezze sui parametri è necessario concentrarsi sui grafici a destra. Si può notare come la stima dell'errore del parametro restituita dal fit della funzione di trasferimento (linee tratteggiate) è conforme con la sezione colorata del  $\chi^2$ : si assume dunque che l'errore sui parametri  $L$  e  $C$  sia ben stimato dal fit. Al contrario, invece, la stima dell'errore sui parametri restituiti dal fit dello sfasamento risulta essere una sovrastima rispetto all'incertezza suggerita dal  $\Delta\chi^2$ . Ci si vuole ora concentrare maggiormente sullo studio dell'andamento del  $\chi^2$  attorno al minimo del grafico in Figura 8, raffigurante la funzione di trasferimento e lo sfasamento del segnale prelevato ai capi della resistenza: è già stato messo in evidenza il motivo per cui le stime provenienti da questa configurazione siano in generale più affidabili rispetto a quanto si ottiene prelevando il segnale ai capi della capacità. Osservando il grafico in Figura 11 si nota come il minimo del  $\chi^2$  relativo allo sfasamento (Figura 8) risulta essere particolarmente stretto: la stima dell'errore sui parametri inoltre risulta essere perfettamente compatibile con quanto suggerito dal  $\Delta\chi^2 = 3.53$ . Si sceglie allora di approfondire la stima dei parametri e degli errori restituiti dal fit dello sfasamento: dal  $\chi^2$  traslato (grafico a destra) si vuole passare alla PDF bidimensionale relativa ai parametri  $L$  e  $C$  sapendo che  $P_{2D}(L, C) \propto e^{-\chi^2/2}$ . Questa probabilità viene successivamente normalizzata e mostrata in Figura 12 (in alto a sinistra). Ci si vuole ora concentrare maggiormente sulla stima dell'induttanza: si mostra allora nel grafico a destra la distribuzione di probabilità



relativa al parametro  $L$  marginalizzando<sup>3</sup> il parametro  $C$ . Fittando a questa distribuzione una curva gaussiana, si ritrova un accordo sufficientemente buono: dal fit si ricava un valore medio pari al valore di induttanza restituito dal fit, mentre la larghezza della gaussiana ( $1\sigma$ ) risulta essere leggermente minore dell'errore sul parametro stimato attraverso il fit.

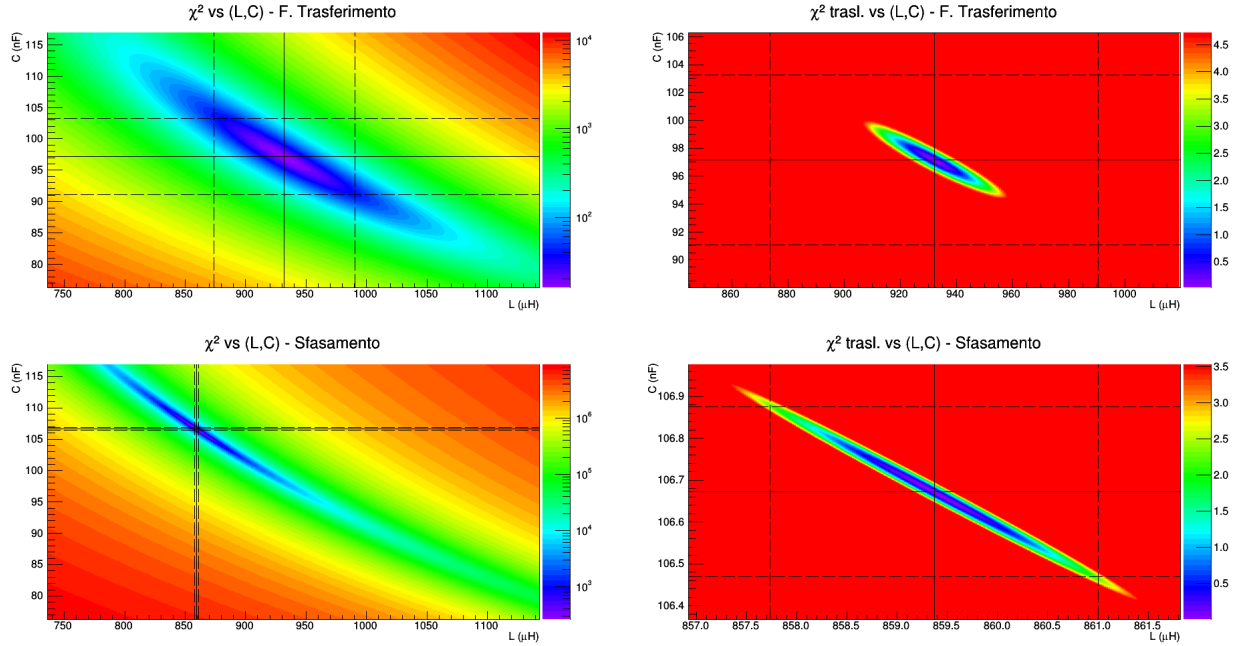


Figura 11: A sinistra:  $\chi^2$  vs  $(L, C)$  per il fit della curva di risonanza e dello sfasamento. A destra:  $\chi^2$  vs  $(L, C)$  traslato lungo l'asse  $z$  in modo da avere il minimo a zero.

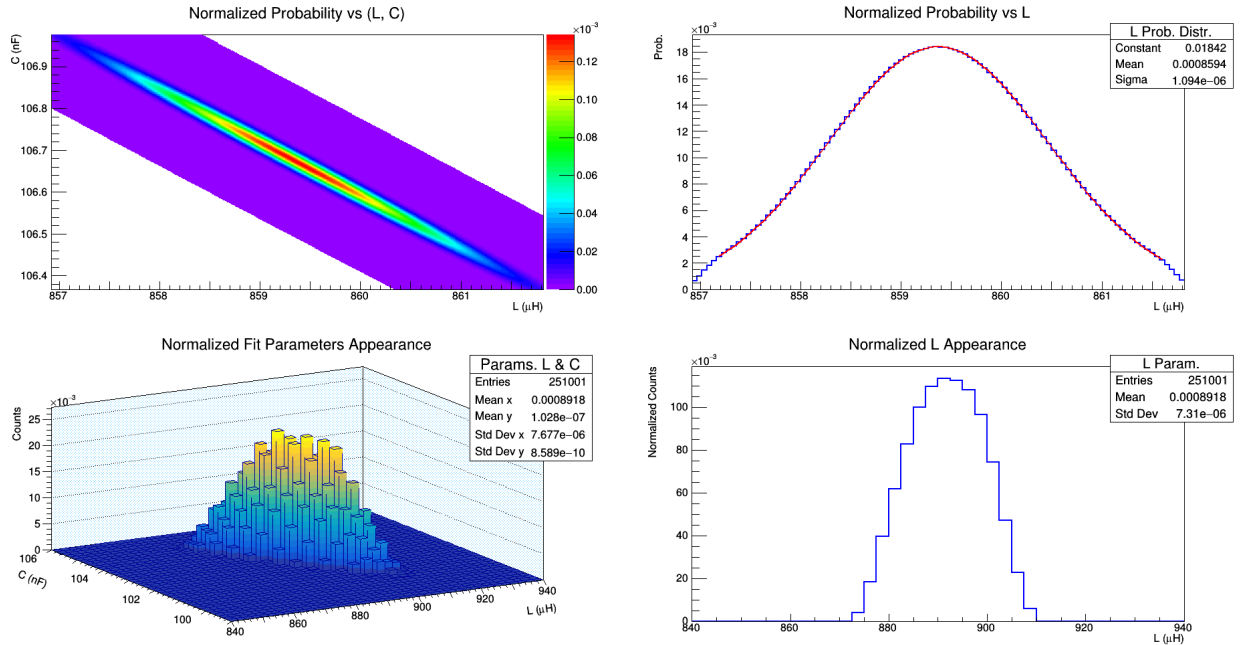


Figura 12: In alto a sinistra: PDF bidimensionale normalizzata relativa ai parametri  $L$  e  $C$ . È evidente la forte anticorrelazione dei parametri. In alto a destra: PDF normalizzata per l'induttanza  $L$ . Buon accordo con una curva gaussiana. In basso a sinistra: istogramma delle frequenze relative dei parametri  $L$  e  $C$  compiendo un elevato numero di fit con parametri iniziali differenti. In basso a destra: proiezione dell'istogramma lungo l'induttanza  $L$ .

<sup>3</sup>Data una distribuzione di probabilità bidimensionale  $P_{2D}(a, b)$ , per marginalizzazione del parametro  $b$  si intende integrare rispetto a quel parametro e ricavare quindi la distribuzione di probabilità del parametro  $a$  considerando tutti i valori possibili di  $b$ .

Nonostante la distribuzione di probabilità indichi esplicitamente come l'errore sul parametro restituito dal fit sia sovrastimato (al contrario di quanto notato osservando il  $\chi^2 \gg \text{ndf}$  ed il grafico dei residui) si preferisce indagare ulteriormente questa stima per ricercare un maggiore accordo tra i risultati. A tal proposito, si considerano adesso le problematiche legate ai valori dei parametri iniziali: le stime di  $R$ ,  $L$  e  $C$ , infatti, hanno una certa dipendenza dai valori iniziali che si assegnano per far convergere il fit. Si propone allora la seguente strategia di analisi: si ripete il fit dello sfasamento ai capi di  $R$  facendo variare i valori iniziali dei parametri  $R$ ,  $L$  e  $C$  in intervalli molto larghi, effettuando l'interpolazione per ogni possibile combinazione di parametri in questo intervallo. Il numero di parametri "finali" restituiti dai numerosi fit si ritiene sufficientemente elevato (251001 parametri) per poter trarre delle osservazioni conclusive. Vengono registrate in un istogramma i valori dei parametri  $L$  e  $C$  restituite dai fit e si è interessati alla proiezione di questo lungo l'asse dell'induttanza. Osservando l'effettiva distribuzione di  $L$  (grafico in basso a destra, Figura 12) si nota come la dipendenza dai parametri iniziali non può essere trascurata: la larghezza della distribuzione risulta essere infatti maggiore rispetto all'errore restituito dal fit e ovviamente maggiore della larghezza della pdf sopra riportata. La distribuzione, inoltre, risulta non essere centrata nel valore del parametro restituito dal fit: si assume dunque che i parametri restituiti dal fit non siano i più probabili se si tiene conto delle sistematiche introdotte dalla dipendenza dai valori iniziali. Come miglior stima dell'induttanza  $L$ , quindi, si considera il valore medio della distribuzione mostrata in basso a destra in Figura 12 e come incertezza si prende la larghezza della distribuzione:

$$L_{\text{best}} = (0.892 \pm 0.007) \text{ mH} \quad (24)$$

Questa stima risulta essere compatibile con l'induttanza stimata dal fit della forma d'onda delle oscillazioni smorzate, mentre risulta essere incompatibile con quanto stimato attraverso lo studio dello pseudo-periodo e del decremento logaritmico.

## 5 Conclusioni

In conclusione, nel corso dell'esperienza si è inizialmente studiato il comportamento di un circuito RLC serie nel dominio del tempo. Si è stimata l'induttanza del circuito attraverso il calcolo dello pseudo-periodo e del decremento logaritmico in due differenti configurazioni: " $R_L$ " (solo resistenze parassite del circuito) e " $R + R_L$ " (resistenze parassite e resistenza esterna in serie). Si è verificato come l'aumento della resistenza totale comporti un aumento del fattore di smorzamento  $\delta$  e un aumento del periodo di oscillazione. Trovando due stime di induttanza compatibili, si è considerata come miglior stima la media pesata  $\langle L \rangle = (837 \pm 11) \mu\text{H}$ , con un errore relativo dell'1.3%. È stato provato inoltre come il Q-Valore diminuisca all'aumentare della resistenza totale, trovando  $Q_{R_L} = 1.73 \pm 0.05$  e  $Q_{R+R_L} = 1.25 \pm 0.03$ . Si è poi proseguito con il fit della forma d'onda di un campione di dati digitalizzati (per entrambe le configurazioni  $R_L$  e  $R + R_L$ ), con l'obiettivo di stimare simultaneamente  $R$ ,  $L$  e  $C$ : le due stime dell'induttanza non risultano però compatibili con quanto calcolato in precedenza. Il fit, infatti, presenta numerose problematiche, tra cui la forte anticorrelazione tra  $L$  e  $C$  (evidenziata analizzando l'andamento del  $\chi^2$  attorno al minimo) che non permette di ritenere affidabili le stime ricavate dal fit senza un maggiore approfondimento. Successivamente, ci si è concentrati sullo studio del comportamento del circuito nel dominio della frequenza. Viene inizialmente fornita una stima del Q-Valore utilizzando l'induttanza calcolata nel dominio del tempo. Prelevando il segnale in uscita ai capi della capacità, si è riscontrata una notevole difficoltà nel fornire una stima accurata del Q-Valore in quanto il punto massimo della curva di risonanza non coincide con la frequenza di risonanza. Si decide allora di dedicare maggior attenzione alla configurazione in cui si preleva il segnale ai capi della resistenza: i Q-Valori restituiti dall'analisi della funzione di trasferimento e dello sfasamento sono perfettamente compatibili tra loro e con la stima preliminare ottenuta con l'induttanza calcolata in precedenza. Dall'analisi dell'andamento del  $\chi^2$  attorno al minimo, emerge un'ottima stima dell'errore dell'induttanza restituita dal fit dello sfasamento. Approfondendo maggiormente, la distribuzione di probabilità del parametro  $L$  indica una leggera sovrastima dell'errore, mentre la distribuzione del parametro ottenuta facendo variare i valori iniziali dei fit indica una sottostima dell'errore. Si sceglie come miglior stima allora il valor medio di quest'ultima distribuzione e come incertezza si associa la larghezza della distribuzione: si ritiene migliore in quanto tiene conto della forte sistematica introdotta dalla variazione dei parametri iniziali ed è in linea con la sottostima dell'errore già evidenziata in precedenza dal grafico dei residui e dal  $\chi^2 > \text{ndf}$ . Risulta allora  $L = (892 \pm 7) \mu\text{H}$ . Per quanto riguarda il Q-Valore, dall'analisi dello sfasamento si ottiene  $Q = 3.339 \pm 0.004$ , tuttavia, si ipotizza che l'errore su di esso sia leggermente sottostimato: al fine di ottenere una più corretta stima del Q-Valore e del suo errore, sarebbe opportuno studiarne la distribuzione utilizzando i parametri restituiti dai numerosi fit effettuati al variare dei parametri iniziali. Una procedura analoga andrebbe inoltre ripetuta anche per lo studio della funzione di trasferimento, al fine di poter indagare più a fondo quale sia effettivamente la miglior stima dell'induttanza e del Q-Valore.

## Appendice

Si riportano, in Appendice A, i dati utilizzati nell'analisi delle esperienze. Alcuni di questi sono riportati senza errore, in quanto rappresentano unicamente le misure effettuate. L'elaborazione dei dati e la corretta stima dei loro errori è stata effettuata nelle apposite sezioni. In Appendice B, invece, si riportano le formule utilizzate per il calcolo degli errori.

### A Dati

#### A.1 Oscillazioni Smorzate

Si riportano le misure di  $t_{\max}$ ,  $t_{\min}$ ,  $t^+$ ,  $t^-$ ,  $V_{\max}$  e  $V_{\min}$ , utilizzate per la stima dello pseudo-periodo e del decremento logaritmico in Sezione 3.2.

Resistenza del circuito: $R_L$					
$V_{\max}$ (V)	$V_{\min}$ (V)	$t^+$ ( $\mu$ s)	$t^-$ ( $\mu$ s)	$t_{\max}$ ( $\mu$ s)	$t_{\min}$ ( $\mu$ s)
3.0525	-1.1660	18.00	49.00	32.00	63.00
0.4620	-0.1980	78.00	108.0	93.00	123.0
0.0660	-0.0220	136.0	169.0	152.0	182.0
0.0220	/	193.0	228.0	212.0	/
Resistenza del circuito: $R_L + R$					
$V_{\max}$ (V)	$V_{\min}$ (V)	$t^+$ ( $\mu$ s)	$t^-$ ( $\mu$ s)	$t_{\max}$ ( $\mu$ s)	$t_{\min}$ ( $\mu$ s)
1.95200	0.48640	20.00	52.00	33.00	65.00
0.13552	0.03024	81.00	115.0	96.00	127.0
0.01120	0.00224	138.0	/	158.0	188.0
0.00112	/	/	/	218.0	/

Tabella 10: Si mostrano le misure acquisite con i cursori, ricordando che per i tempi sono stati utilizzati 25  $\mu$ s/div, per le tensioni del primo campione 0.55 V/div mentre per le tensioni del secondo campione 0.32 V/div per la prima coppia  $V_{\max}$ ,  $V_{\min}$  e 0.028 V/div per le rimanenti.

##### A.1.1 Pseudo-Periodo

Si mostrano ora i dataset unificati, utilizzati nello studio dello pseudo-periodo.

Dataset Uniti - Configurazione $R_L$					
Dataset $t^+ + t^-$			Dataset $t_{\max} + t_{\min}$		
$n$	$t$ ( $\mu$ s)	$\sigma_t$ ( $\mu$ s)	$n$	$t$ ( $\mu$ s)	$\sigma_t$ ( $\mu$ s)
1.0	18.0	0.4	1.0	32.0	0.4
1.5	49.0	0.4	1.5	63.0	0.4
2.0	78.0	0.4	2.0	93.0	0.4
2.5	108.0	0.4	2.5	123.0	0.4
3.0	136.0	1.0	3.0	152.0	0.4
3.5	169.0	1.0	3.5	182.0	0.4
4.0	193.0	1.6	4.0	212.0	0.4
4.5	228.0	1.6	/	/	/

Tabella 11: Dataset unificati. Particolare attenzione viene posta sugli errori del primo dataset: gli ultimi sono stati appositamente aumentati per evidenziare le difficoltà sperimentali nell'acquisizione di quei particolari dati.

Dataset Uniti - Configurazione $R + R_L$					
Dataset $t^+ + t^-$			Dataset $t_{\max} + t_{\min}$		
$n$	$t$ ( $\mu\text{s}$ )	$\sigma_t$ ( $\mu\text{s}$ )	$n$	$t$ ( $\mu\text{s}$ )	$\sigma_t$ ( $\mu\text{s}$ )
1.0	20.0	0.4	1.0	33.0	0.4
1.5	52.0	0.4	1.5	65.0	0.4
2.0	81.0	0.4	2.0	96.0	0.4
2.5	115.0	0.4	2.5	127.0	0.4
/	/	/	3.0	158.0	0.4
/	/	/	3.5	188.0	1.6
/	/	/	4.0	218.0	1.6

Tabella 12: Dataset unificati. Particolare attenzione viene posta sugli errori del primo dataset: gli ultimi sono stati appositamente aumentati per evidenziare le difficoltà sperimentali nell’acquisizione di quei particolari dati.

### A.1.2 Decremento Logaritmico

Seguono i dataset unificati utilizzati nello studio del decremento logaritmico.

Dataset Uniti - Configurazione $R_L$		
$n$	$\log(V/1V)$	$\sigma_{\log(V/1V)}$
1.0	1.116	0.003
1.5	0.154	0.008
2.0	-0.77	0.02
2.5	-1.62	0.05
3.0	-2.72	0.15
3.5	-3.8	0.5
4.0	-3.8	0.5

Tabella 13: Si mostra il dataset ottenuto accorpando le misure di  $V_{\max}$  e  $V_{\min}$  nella configurazione  $R_L$ .

Dataset Uniti - Configurazione $R + R_L$		
$n$	$\log(V/1V)$	$\sigma_{\log(V/1V)}$
1.0	0.669	0.015
1.5	-0.721	0.019
2.0	-1.999	0.015
2.5	-3.50	0.02
3.0	-4.49	0.14
3.5	-6.1	0.7
4.0	-6.8	1.3

Tabella 14: Si mostra il dataset ottenuto accorpando le misure di  $V_{\max}$  e  $V_{\min}$  nella configurazione  $R + R_L$ .

## B Propagazione degli Errori

### B.1 Oscillazioni Smorzate

Per quanto riguarda le misure di tempo ( $t_{\max}$ ,  $t_{\min}$ ,  $t^+$  e  $t^-$ ), viene associato a queste un errore dato da

$$\sigma_t = \langle \sigma_{\text{div}} \rangle \times \text{div} \times \sqrt{2} \quad (25)$$

dove  $\langle \sigma_{\text{div}} \rangle = 0.013$  e  $\text{div} = 25 \mu\text{s}$ , costante per tutte le misure.

Per la stima della pulsazione di oscillazione  $\omega_d$ , l'errore viene calcolato nel seguente modo:

$$\sigma_{\omega_d} = 2\pi \frac{\sigma_m}{m^2} \quad (26)$$

dove  $m$  è il coefficiente angolare della retta interpolante e  $\sigma_m$  il suo errore.

Per quanto riguarda le misure di tensione ( $V_{\max}$  e  $V_{\min}$ ), si associa ad esse un errore di lettura dato da

$$\sigma_{V_r} = \langle \sigma_{\text{div}} \rangle \times \text{div} \times \sqrt{2} \quad (27)$$

dove  $\langle \sigma_{\text{div}} \rangle = 0.013$  e  $\text{div} = 0.55 \text{ V}$ , costante per tutte le misure della configurazione  $R_L$ . Per le misure di tensione corrispondenti alla configurazione  $R + R_L$ , invece, si considera anche il contributo di scalibrazione dovuto al fatto che la scala è stata cambiata nel corso delle misure:

$$\sigma_V = \sqrt{\left( \langle \sigma_{\text{div}} \rangle \times \text{div} \times \sqrt{2} \right)^2 + (1.5\% \times V)^2} \quad (28)$$

dove  $\langle \sigma_{\text{div}} \rangle = 0.013$  e  $\text{div}$  non è costante ma dipende dalla misura.

L'errore sulle tensioni propagato al logaritmo è dato da

$$\sigma_{\log(V)} = \frac{\sigma_V}{V} \quad (29)$$

dove  $\sigma_V$ , a seconda della configurazione circuitale, contiene o meno il contributo di scalibrazione.

L'errore  $\sigma_\delta$ , associato al fattore di smorzamento  $\delta$ , si ottiene da

$$\sigma_\delta = \sqrt{\frac{1}{T^2} \sigma_m^2 + \left( \frac{m}{T^2} \right)^2 \sigma_T^2} \quad (30)$$

dove  $m$  è il coefficiente angolare della retta interpolante e  $\sigma_m$  il suo errore.  $T$  invece rappresenta la miglior stima del periodo di oscillazione, il cui errore è dato da

$$\sigma_T = 2\pi \frac{\sigma_{\omega_d}}{\omega_d^2} \quad (31)$$

dove  $\omega_d$  corrisponde alla miglior stima della pulsazione di oscillazione.

Per quanto riguarda la pulsazione propria del sistema  $\omega_0$ , si associa l'incertezza

$$\sigma_{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{(\omega_d \sigma_{\omega_d})^2 + (\delta \sigma_\delta)^2} \quad (32)$$

dove  $\omega_0$  è la pulsazione propria del sistema,  $\omega_d$  è la pulsazione di oscillazione e  $\delta$  è il fattore di smorzamento.

All'induttanza  $L$  viene associato l'errore dato da

$$\sigma_L = \sqrt{\left( \frac{1}{\omega_0^2 C^2} \right)^2 \sigma_C^2 + \left( \frac{2}{\omega_0^3 C} \right)^2 \sigma_{\omega_0}^2} \quad (33)$$

dove  $\omega_0$  è la pulsazione propria del sistema e  $C$  è la capacità del circuito.

Al Q-valore viene associata un'incertezza dovuta da

$$\sigma_Q = \sqrt{\left(\frac{1}{2\delta}\right)^2 \sigma_{\omega_0}^2 + \left(\frac{\omega_0}{2\delta^2}\right)^2 \sigma_{\delta}^2} \quad (34)$$

dove  $\omega_0$  è la pulsazione propria del sistema e  $\delta$  è il fattore di smorzamento.

Alla resistenza  $R$ , invece, si attribuisce un errore dato da

$$\sigma_R = \sqrt{\frac{L}{C} \frac{1}{Q^4} \sigma_Q^2 + \frac{1}{4} \frac{1}{LC} \frac{1}{Q^2} \sigma_L^2 + \frac{1}{4} \frac{L}{C^3} \frac{1}{Q^2} \sigma_C^2} \quad (35)$$

dove  $Q$  è il Q-valore,  $C$  è la capacità del circuito e  $L$  è l'induttanza del circuito.

## B.2 Risonanza

Per la stima della frequenza di risonanza utilizzando i risultati ottenuti dallo studio delle oscillazioni smorzate, si propaga l'errore secondo

$$\sigma_{f_{\text{res}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{C}{2(LC)^{3/2}}\right)^2 \sigma_L^2 + \left(\frac{L}{2(LC)^{3/2}}\right)^2 \sigma_C^2} \quad (36)$$

mentre al Q-valore si associa l'incertezza (senza covarianza in questo caso)

$$\sigma_Q = \sqrt{\left(\frac{1}{R^2} \sqrt{\frac{L}{C}}\right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{1}{2R\sqrt{LC}}\right)^2 \sigma_L^2 + \left(\frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C^3}}\right)^2 \sigma_C^2} \quad (37)$$

Per la stima della resistenza parassita del circuito, viene calcolata la quantità  $a = \frac{V_{\text{in,minimo}}}{V_{\text{in,maximo}}}$ : alle misure di tensione si associa l'errore di lettura

$$\sigma_V = \sqrt{2} \times \langle \sigma_{\text{div}} \rangle \times \text{div} \quad (38)$$

dove il fattore  $\sqrt{2}$  evidenzia il fatto che la misura è data da una differenza di tensioni. Segue dunque

$$\sigma_a = \sqrt{\left(\frac{\sigma_V}{V_{\text{in,maximo}}}\right)^2 + \left(\frac{V_{\text{in,minimo}} \times \sigma_V}{V_{\text{in,maximo}}^2}\right)^2} \quad (39)$$

e, in definitiva, l'errore associato alla stima della resistenza parassita è dato da

$$\sigma_{R_{\text{parassita}}} = \sqrt{\left(\frac{R_G}{(1+a)^2}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{a}{1-a}\right)^2 \sigma_{R_G}^2 + \sigma_{R_{\text{ext}}}^2} \quad (40)$$

L'errore che si associa alla funzione di trasferimento è

$$\sigma_T = T \sqrt{\left(\frac{\sigma_{V_r}}{V_{\text{in}}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{V_r}}{V_{\text{out}}}\right)^2 + 2 \left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2} \quad (41)$$

dove  $\sigma_{V_r}$  è l'errore di lettura associato alle tensioni,  $\sigma_k$  è l'errore di compensazione, pari all'1.5%, e  $k$  si assume sia pari all'unità. L'errore che si associa allo sfasamento è invece

$$\sigma_{\Delta\varphi} = 2\pi f \sigma_{t_r} \quad (42)$$

dove  $\sigma_{t_r}$  è l'errore di lettura associato ai tempi.

Per quanto riguarda la configurazione in cui il segnale è prelevato ai capi della resistenza, alla frequenza di risonanza si associa un'incertezza data da

$$\sigma_{f_{\text{res}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{L^2 \sigma_C^2 + C^2 \sigma_L^2 + 2CL \text{cov}(L,C)}{4C^3 L^3}} \quad (43)$$

mentre alla larghezza di banda si associa un errore dato da

$$\sigma_{\Delta f} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{-2RL\text{cov}(R,L) + L^2\sigma_R^2 + R^2\sigma_L^2}{L^4}} \quad (44)$$

Al Q-Valore, infine si associa l'errore dato dalla seguente propagazione:

$$\sigma_Q = \sqrt{\frac{C^2(-4RL\text{cov}(R,L) + 4L^2\sigma_R^2 + R^2\sigma_L^2) + 2LRC(2\text{cov}(R,C)L - \text{cov}(L,C)R) + L^2R^2\sigma_C^2}{4C^3LR^4}} \quad (45)$$

Per quanto riguarda la configurazione in cui il segnale viene prelevato ai capi della capacità: l'errore associato alla frequenza di risonanza è analogo a quello riportato in Equazione 43. Per la larghezza di banda, invece, è necessario effettuare una correzione che porta a

$$\Delta f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\sqrt{-C^3R^2(CR^2-4L)}}{C^2L^2} + \frac{2}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{-C^3R^2(CR^2-4L)}}{C^2L^2} + \frac{2}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} \quad (46)$$

Data l'elevata complessità analitica delle funzioni in questione, per la propagazione su  $\Delta f$  e su  $Q$  si utilizza la notazione matriciale: nota la matrice di covarianza, l'incertezza è data dal prodotto del gradiente trasposto con la matrice applicata al gradiente.

$$\sigma_Q^2 = \nabla Q^T M \nabla Q \quad \text{con } M = \begin{pmatrix} \sigma_R^2 & \text{cov}(R,L) & \text{cov}(R,L) \\ \text{cov}(R,L) & \sigma_L^2 & \text{cov}(L,C) \\ \text{cov}(R,C) & \text{cov}(L,C) & \sigma_C^2 \end{pmatrix} \quad (47)$$

$$\left( \begin{array}{c} -21 \left( \sqrt{c(21+r(-cr+\sqrt{c(41-cr^2)}))} + \sqrt{2c1-cr(c r+\sqrt{c(41-cr^2)})} \right) + cr \left( \sqrt{41-cr^2} \left( -\sqrt{21+r(-cr+\sqrt{c(41-cr^2)})} + \sqrt{21-r(c r+\sqrt{c(41-cr^2)})} \right) \right) + r \left( \sqrt{c(21+r(-cr+\sqrt{c(41-cr^2)})} + \sqrt{2c1-cr(c r+\sqrt{c(41-cr^2)})} \right) \right) \\ \sqrt{2-\frac{cr^2}{21}} \sqrt{21+r(-cr+\sqrt{c(41-cr^2)})} \sqrt{21-r(c r+\sqrt{c(41-cr^2)})} \left( \sqrt{21+r(-cr+\sqrt{c(41-cr^2)})} - \sqrt{21-r(c r+\sqrt{c(41-cr^2)})} \right)^2 \\ r \left( -21 \left( \sqrt{c(21+r(-cr+\sqrt{c(41-cr^2)})} + \sqrt{2c1-cr(c r+\sqrt{c(41-cr^2)})} \right) + cr \left( \sqrt{41-cr^2} \left( -\sqrt{21+r(-cr+\sqrt{c(41-cr^2)})} + \sqrt{21-r(c r+\sqrt{c(41-cr^2)})} \right) \right) + r \left( \sqrt{c(21+r(-cr+\sqrt{c(41-cr^2)})} + \sqrt{2c1-cr(c r+\sqrt{c(41-cr^2)})} \right) \right) \right) \\ \sqrt{1(81-2cr^2)} \sqrt{21-r(c r+\sqrt{c(41-cr^2)})} \sqrt{21-r(c r+\sqrt{c(41-cr^2)})} \left( \sqrt{21+r(-cr+\sqrt{c(41-cr^2)})} - \sqrt{21-r(c r+\sqrt{c(41-cr^2)})} \right)^2 \\ r \left( -21 \left( \sqrt{c(21+r(-cr+\sqrt{c(41-cr^2)})} + \sqrt{2c1-cr(c r+\sqrt{c(41-cr^2)})} \right) + cr \left( \sqrt{41-cr^2} \left( -\sqrt{21+r(-cr+\sqrt{c(41-cr^2)})} + \sqrt{21-r(c r+\sqrt{c(41-cr^2)})} \right) \right) + r \left( \sqrt{c(21+r(-cr+\sqrt{c(41-cr^2)})} + \sqrt{2c1-cr(c r+\sqrt{c(41-cr^2)})} \right) \right) \right) \\ c \sqrt{8-\frac{2cr^2}{1}} \sqrt{21-r(c r+\sqrt{c(41-cr^2)})} \sqrt{21-r(c r+\sqrt{c(41-cr^2)})} \left( \sqrt{21+r(-cr+\sqrt{c(41-cr^2)})} - \sqrt{21-r(c r+\sqrt{c(41-cr^2)})} \right)^2 \end{array} \right)$$

Figura 13: Gradiente del Q valore:  $\nabla Q$

$$\nabla \Delta f = \frac{1}{2\pi} \left( \begin{array}{c} \frac{R(\sqrt{C(4L-CR^2)}-CR)+2L}{\sqrt{2L-R(\sqrt{C(4L-CR^2)}+CR)}} + \frac{2L-R(\sqrt{C(4L-CR^2)}+CR)}{\sqrt{R(\sqrt{C(4L-CR^2)}-CR)+2L}} \\ \frac{L\sqrt{8L-2CR^2}}{\sqrt{R(\sqrt{C(4L-CR^2)}-CR)+2L}} + \frac{C^{3/2}R^3-CR^2\sqrt{4L-CR^2}+L\sqrt{4L-CR^2}-3\sqrt{CLR}}{\sqrt{2L-R(\sqrt{C(4L-CR^2)}+CR)}} \\ \frac{C^{3/2}R^3+CR^2\sqrt{4L-CR^2}-L\sqrt{4L-CR^2}-3\sqrt{CLR}}{\sqrt{R(\sqrt{C(4L-CR^2)}-CR)+2L}} + \frac{C^{3/2}R^3-CR^2\sqrt{4L-CR^2}+L\sqrt{4L-CR^2}-3\sqrt{CLR}}{\sqrt{2L-R(\sqrt{C(4L-CR^2)}+CR)}} \\ \frac{\sqrt{2L^2}\sqrt{C(4L-CR^2)}}{\sqrt{\frac{4L}{C}-R^2}} \\ R \left( -\frac{1}{\sqrt{2L-R(\sqrt{C(4L-CR^2)}+CR)}} - \frac{1}{\sqrt{R(\sqrt{C(4L-CR^2)}-CR)+2L}} \right) \\ -\frac{1}{\sqrt{R(\sqrt{C(4L-CR^2)}-CR)+2L}} + \frac{1}{\sqrt{2L-R(\sqrt{C(4L-CR^2)}+CR)}} \end{array} \right) \quad (48)$$

## C Approfondimento: Studio di diversi algoritmi di minimizzazione

Si vuole in questa sezione osservare come la stima dell'induttanza, ma in generale di tutti i parametri, dipenda fortemente dall'algoritmo di minimizzazione che si usa. Viene ripetuto allora il fit dello sfasamento del segnale prelevato ai capi della resistenza con diversi software e diversi algoritmi. Si utilizzano gli stessi valori di inizializzazione dei parametri e, a parte alcuni particolari casi (l'algoritmo non converge), non vengono imposte limitazioni ai parametri.

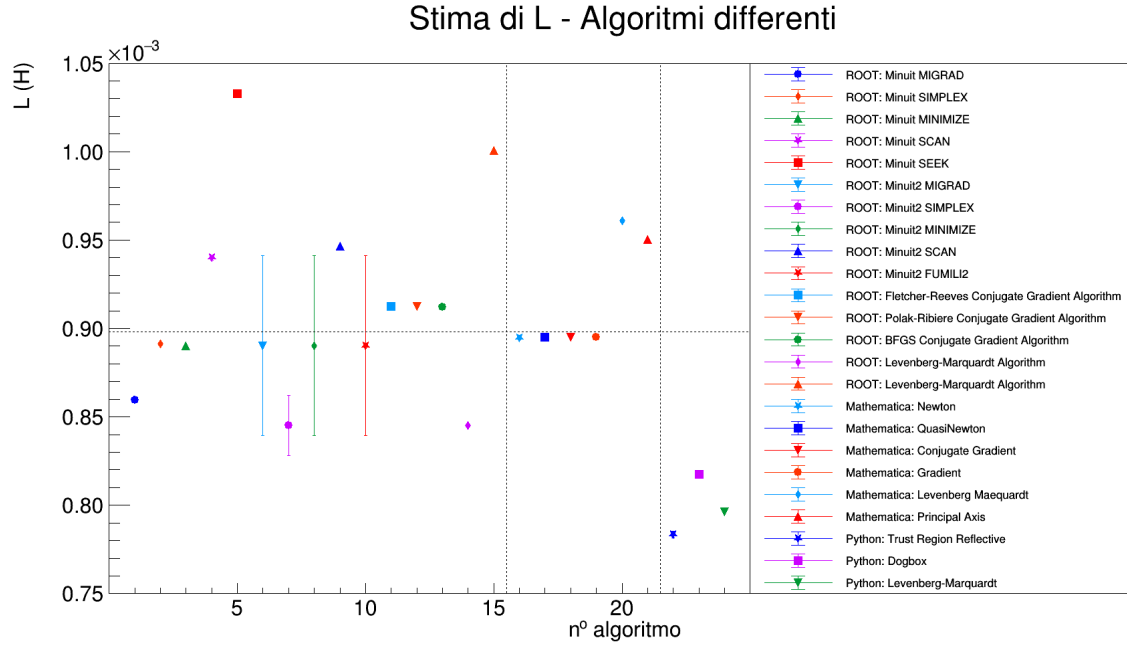


Figura 14: In ascissa è riportato il numero dell'algoritmo utilizzato, da 1 a 24. In ordinata è riportata la stima dell'induttanza con l'incertezza restituita dal fit. La linea tratteggiata orizzontale rappresenta la media delle misure. Le linee tratteggiate verticali separano le stime ottenute da diversi software: in ordine si ha ROOT, Mathematica e Python.

Si fa notare che nel grafico sono stati inseriti anche algoritmi che non hanno portato ad una buona stima degli altri parametri del fit: l'algoritmo Minuit SCAN di ROOT, per esempio, restituisce una resistenza di circa  $R \sim 38 \Omega$ . Gli algoritmi di Mathematica, invece, restituiscono un errore sulla resistenza dell'ordine di  $10^{-10} \Omega$ . Gli algoritmi migliori per questo tipo di fit si ritengono essere quelli di Minuit, Minuit2 e Python.