

Laboratorio di Fisica

Docenti: Prof. A. Garfagnini - Prof. M. Lunardon
Corso di Laurea in Fisica
Canale 1 A-L
Anno Accademico 2020/2021

ESPERIENZA DI LABORATORIO

Catena Elettronica

TURNO T2

NICOLÒ LAI
1193976
nicolo.lai@studenti.unipd.it

DATA ESPERIENZA
23/11/2020
25/11/2020
26/11/2020

1 Obiettivo

Assemblare una catena elettronica associata ad un rivelatore di radiazione. Studiare il segnale in uscita e la risposta in frequenza dei singoli moduli e della catena elettronica completa.

2 Strumentazione e Componenti

Nel corso dell'esperienza vengono utilizzati:

- Multimetro digitale Metrix MTX3292
- Generatore di funzioni Tektronix AFG1022
- Oscilloscopio digitale Tektronix TBS1102B
- Alimentatore di tensione continua TTi
- Due circuiti integrati TL082C (in totale quattro amplificatori operazionali)
- Resistori e condensatori di varie taglie
- Scheda Arduino Due

3 Introduzione

L'esperienza si basa su l'assemblamento e sullo studio della risposta di una serie di moduli volti a simulare l'elettronica associata ad un *rivelatore di radiazione*. In laboratorio, quindi, si utilizza il generatore di funzioni per simulare un segnale acquisibile dalla rivelazione di un evento da parte del detector. Questo segnale viene inizialmente elaborato dal *preamplificatore* (di tipo *charge sensitive*) e successivamente dallo *shaper* (di tipo *CR-RC*). Il segnale in uscita dal formattore viene infine amplificato per favorirne l'acquisizione da parte di una DAQ, che corrisponde in questo caso all'ADC della scheda Arduino Due. I tre stadi (*preamplificatore*, *shaper*, *amplificatore*) costituiscono dunque la *catena elettronica* rappresentata in Figura 1.

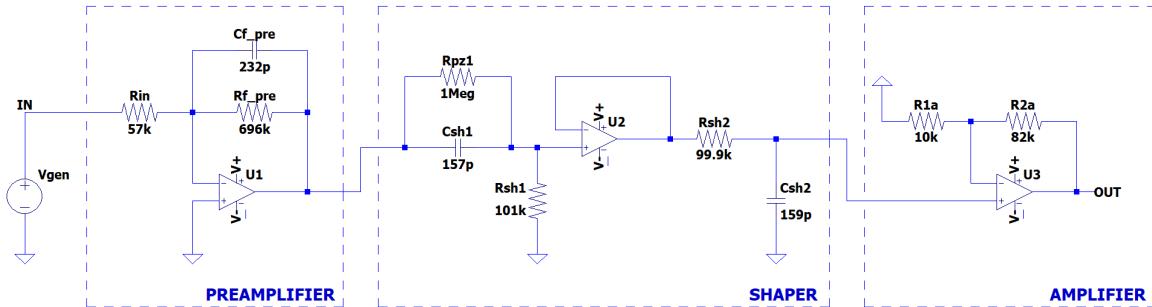


Figura 1: Schema a costanti concentrate della catena elettronica suddivisa nei tre moduli di interesse.

4 Preamplificatore

Il primo stadio della catena (*preamplificatore*) si utilizza per migliorare il rapporto segnale/rumore, in modo da trasferire un segnale più pulito all'elettronica di acquisizione. In laboratorio si assembla un preamplificatore *charge sensitive*: il modulo, infatti, consiste di un circuito integratore e la tensione in uscita è quindi direttamente proporzionale alla carica in ingresso. Nelle sezioni successive si vuole ricavare analiticamente il comportamento teorico del preamplificatore e, successivamente, verificarne l'accordo con la risposta sperimentale. In particolare, ci si concentra sulle caratteristiche del segnale in uscita, la sua linearità rispetto alla carica in ingresso e sull'analisi in frequenza del circuito.

4.1 Configurazione Sperimentale

Si comincia utilizzando il generatore per simulare i segnali del rivelatore, impostando sul CH1 un impulso quadrato di frequenza $f_{\text{gen}} = 1 \text{ kHz}$, tensione di riferimento $V_{\text{high}} = 0 \text{ V}$, ampiezza negativa $V_{\text{low}} = -1 \text{ V}$ e durata $T = 5 \mu\text{s}$ (cioè il tempo di raccolta del segnale). Viene successivamente assemblato sulla breadboard il primo modulo in Figura 1 utilizzando le componenti circuituali riportate in Tabella 1, misurate con il multimetro Metrix. È dunque fondamentale che il segnale erogato dal generatore sia

Misure Dirette - Preamplificatore		
Label	Valore	F.S.
R_{in}	$56.56 \pm 0.02 \text{ k}\Omega$	$100 \text{ k}\Omega$
R_f	$696.1 \pm 0.3 \text{ k}\Omega$	$1000 \text{ k}\Omega$
C_f	$232 \pm 9 \text{ pF}$	1000 pF

Tabella 1: Misure dirette delle componenti circuituali.

stesso potenziale (*virtual short*). Il segnale in ingresso V_{in} viene prelevato nel punto *IN* evidenziato nello schema mentre il segnale in uscita $V_{\text{out}}^{\text{pre}}$ dal preamplificatore viene prelevato al termine del primo modulo, entrambi utilizzando sonde 10X.

4.2 Trattazione Analitica

Concentrando inizialmente l'attenzione sul modulo di ingresso (generatore reale e cablaggio), il sistema è un filtro passa basso con frequenza di taglio $f_t^{\text{in}} \approx 32 \text{ MHz}$, molto maggiore delle frequenze in gioco: risulta allora corretto assumere il modulo in ingresso del tutto equivalente ad un generatore ideale, come rappresentato in Figura 1. Trattando ora il preamplificatore, invece, la funzione di trasferimento del circuito è riportata in Equazione 1: si noti il segno negativo dovuto all'amplificatore operazionale posto in configurazione invertente, la presenza di un unico polo e l'assenza di zeri.

$$H(s) = -\frac{1}{R_{\text{in}} C_f} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau_{\text{pre}}}} \quad \text{con } \tau_{\text{pre}} = R_f C_f \quad (1)$$

Data la forma della funzione di trasferimento, la risposta in frequenza sarà quella di un filtro *passa basso*: rappresentando $H(s)$ in un grafico di Bode ci si aspetta allora un andamento costante a basse frequenze fino alla *frequenza di taglio* $f_t = \frac{1}{2\pi\tau_{\text{pre}}}$ e una decrescita lineare con pendenza -20 dB/dec per frequenze maggiori. Facendo riferimento ai valori delle componenti circuituali riportati in Tabella 1, il tempo caratteristico del preamplificatore e la frequenza di taglio del filtro risultano essere

$$\tau_{\text{pre}} = 161 \pm 6 \mu\text{s} \quad f_t = 0.99 \pm 0.04 \text{ kHz} \quad (2)$$

Si ricava, infine, la risposta del circuito ad un segnale a gradino: nell'approssimazione $T \ll \tau_{\text{pre}}$ si trova una crescita lineare direttamente proporzionale alla carica in ingresso al preamplificatore per $0 < t < T$ e una decrescita smorzata esponenzialmente per $t \gg T$:

$$V_{\text{out}}^{\text{pre}}(t) = \begin{cases} -\frac{Q_{\text{in}}(t)}{C_f} & 0 < t < T \\ -\frac{Q_c}{C_f} e^{-\frac{t}{\tau_{\text{pre}}}} & t \gg T \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} Q_{\text{in}}(t) = I_{\text{in}} t = \frac{V_{\text{in}}}{R_{\text{in}}} t \\ Q_c = I_{\text{in}} T = \frac{V_{\text{in}}}{R_{\text{in}}} T \end{cases} \quad (3)$$

dove, appunto, $Q_{\text{in}}(t)$ corrisponde alla carica raccolta al tempo t dal preamplificatore mentre Q_c rappresenta la carica *totale* accumulata nel preamplificatore. Ci si aspetta allora che il segnale in uscita V_{out} visualizzato sull'oscilloscopio presenti una salita lineare fino ad un valore di tensione massimo $V_{\text{out}}^{\text{max}} = \frac{Q_c}{C_f}$ e, successivamente, una decrescita esponenziale di tempo caratteristico τ_{pre} .

Al fine di verificare il corretto funzionamento dell'apparato sperimentale, si riportano in Tabella 2 le misure sperimentali del massimo della tensione e della costante di tempo τ_{pre} acquisite con l'oscilloscopio. Confrontando ultime con le aspettative teoriche si nota chiaramente come ci sia un accordo generale tra le predizioni analitiche e l'effettiva risposta del preamplificatore. Osservando poi Equazione 3, è esplicita la dipendenza lineare del segnale in uscita rispetto alla carica in ingresso al preamplificatore: nella sezione successiva si vuole quindi verificare che tale linearità venga rispettata. Chiaramente, è importante che ciò avvenga in quanto la carica in questione rappresenta in questo caso un'idealizzazione del rivelamento di radiazione ionizzante da parte di un detector: è logico richiedere dunque che il preamplificatore risponda in modo lineare alla quantità di carica che riceve in ingresso.

negativo: avendo un amplificatore operazionale in configurazione *invertente* è infatti una richiesta necessaria per poter avere in output un segnale positivo, cioè già acquisibile con la scheda Arduino Due. Si utilizza poi un generatore di tensione continua con $V_{\text{cc}} = +15 \text{ V}$ e $V_{\text{ee}} = -15 \text{ V}$ per alimentare l'operazionale. Si assume che esso abbia un comportamento ideale, ovvero che il polo positivo ed il polo negativo si trovino allo stesso potenziale (*virtual short*).

Il segnale in ingresso V_{in} viene prelevato nel punto *IN* evidenziato nello schema mentre il segnale in uscita $V_{\text{out}}^{\text{pre}}$ dal preamplificatore viene prelevato al termine del primo modulo, entrambi utilizzando sonde 10X.

$$f_t = 0.99 \pm 0.04 \text{ kHz} \quad (2)$$

Si ricava, infine, la risposta del circuito ad un segnale a gradino: nell'approssimazione $T \ll \tau_{\text{pre}}$ si trova una crescita lineare direttamente proporzionale alla carica in ingresso al preamplificatore per $0 < t < T$ e una decrescita smorzata esponenzialmente per $t \gg T$:

$$V_{\text{out}}^{\text{pre}}(t) = \begin{cases} -\frac{Q_{\text{in}}(t)}{C_f} & 0 < t < T \\ -\frac{Q_c}{C_f} e^{-\frac{t}{\tau_{\text{pre}}}} & t \gg T \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} Q_{\text{in}}(t) = I_{\text{in}} t = \frac{V_{\text{in}}}{R_{\text{in}}} t \\ Q_c = I_{\text{in}} T = \frac{V_{\text{in}}}{R_{\text{in}}} T \end{cases} \quad (3)$$

dove, appunto, $Q_{\text{in}}(t)$ corrisponde alla carica raccolta al tempo t dal preamplificatore mentre Q_c rappresenta la carica *totale* accumulata nel preamplificatore. Ci si aspetta allora che il segnale in uscita V_{out} visualizzato sull'oscilloscopio presenti una salita lineare fino ad un valore di tensione massimo $V_{\text{out}}^{\text{max}} = \frac{Q_c}{C_f}$ e, successivamente, una decrescita esponenziale di tempo caratteristico τ_{pre} .

Al fine di verificare il corretto funzionamento dell'apparato sperimentale, si riportano in Tabella 2 le misure sperimentali del massimo della tensione e della costante di tempo τ_{pre} acquisite con l'oscilloscopio.

Controllo Apparato - Preamplificatore			
$V_{\text{max}}^{\text{th}}$ (mV)	$V_{\text{max}}^{\text{sper}}$ (mV)	$\tau_{\text{pre}}^{\text{th}}$ (μs)	$\tau_{\text{pre}}^{\text{sper}}$ (μs)
388 ± 17	392 ± 7	161 ± 6	158 ± 2

Tabella 2: Confronto tra stime teoriche e misure sperimentali.

4.3 Linearità del Preamplificatore

Ci si propone ora di verificare la dipendenza lineare del segnale in uscita $V_{\text{out}}^{\text{pre}}$ dalla carica in ingresso Q_{in} come espresso in Equazione 3. Si fa variare dunque la durata T del segnale erogato dal generatore di funzioni da $2 \mu\text{s}$ a $10 \mu\text{s}$, in modo da modificare di volta in volta la quantità di carica iniettata nel preamplificatore rimanendo nell'approssimazione $T \ll \tau_{\text{pre}}$: per ogni T viene calcolata la quantità di carica totale Q_c e viene misurato con l'oscilloscopio il valore massimo del segnale in uscita $V_{\text{out}}^{\text{max}}$. Ai valori di tensione misurati con l'oscilloscopio viene associato l'errore di acquisizione comprendente sia il contributo di lettura sia il contributo sul guadagno verticale in quanto nel processo di misura sono state utilizzate scale diverse, con la consapevolezza che queste ultime portano ad una correlazione almeno parziale delle incertezze. Gli errori sulla carica Q_c , invece, vengono calcolati per propagazione assumendo, ragionevolmente, che l'incertezza sulla durata T del segnale sia trascurabile. Questi risultano allora totalmente correlati tra loro: V_{in} e R_{in} rimangono costanti e l'incertezza sulla carica è dunque semplicemente l'incertezza sulla corrente in ingresso al preamplificatore riscalata dal tempo T .

Linearità del Preamplificatore - Misure		
T (μs)	Q_c (pC)	$V_{\text{out}}^{\text{max}}$ (mV)
2	36.0 ± 0.7	162 ± 3
3	54.0 ± 1.0	238 ± 4
4	72.0 ± 1.3	320 ± 6
5	90 ± 2	392 ± 7
6	108 ± 2	472 ± 8
7	126 ± 2	548 ± 9
8	144 ± 3	632 ± 12
9	162 ± 3	704 ± 13
10	180 ± 3	776 ± 14

Tabella 3: Dati relativi al grafico in Figura 2.

Si rappresentano ora in Figura 2 le coppie $\{Q_c, V_{\text{out}}^{\text{max}}\}$: il coefficiente angolare della retta di regressione corrisponde analiticamente all'inverso della capacità di feedback C_f . Si vuole evidenziare che gli errori relativi su $V_{\text{out}}^{\text{pre}}$ e su Q_c sono entrambi circa il 2% della misura: nell'effettuare la regressione si decide tuttavia di trascurare l'incertezza sulla carica Q_c (in quanto totalmente correlata) e di aggiungere tale contributo successivamente nel calcolo dell'errore sulla capacità C_f in Equazione 4. La bontà del fit, l'andamento dei residui, l'errore a posteriori ed il confronto di C_f^{fit} con quanto misurato direttamente con il multimetro verranno presi in considerazione per verificare la linearità del preamplificatore rispetto alla carica in ingresso.

PreAmp - V_{max} vs Q_c Plot

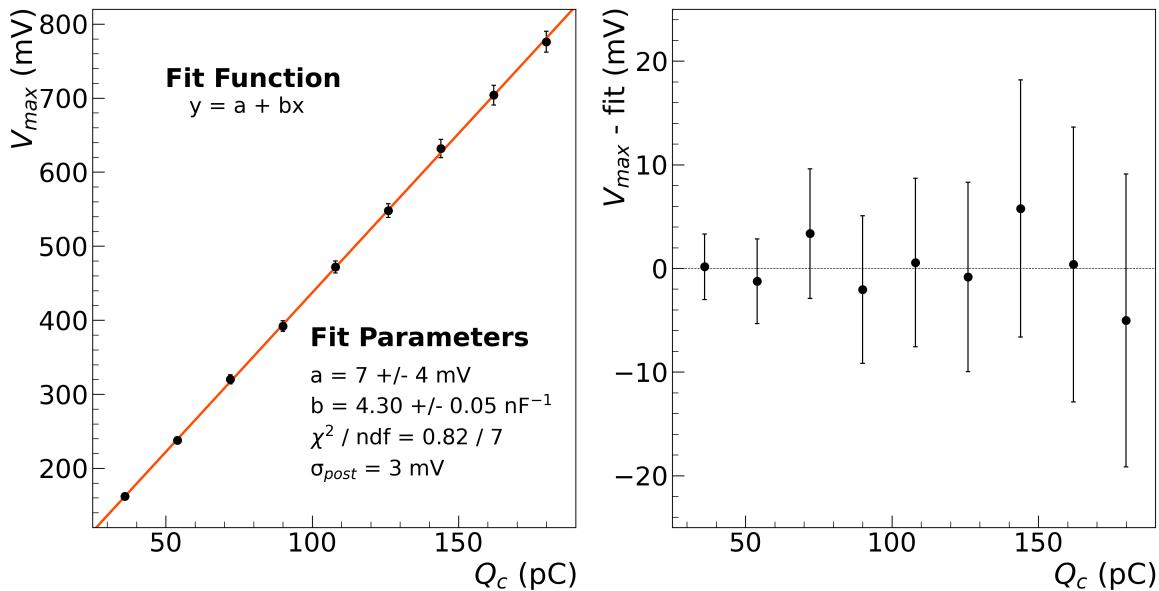


Figura 2: Fit lineare del massimo di tensione in uscita contro la carica totale in ingresso.

Si noti, inizialmente, come il χ^2 della regressione sia notevolmente inferiore rispetto al suo valore di aspettazione: essendo a conoscenza della parziale correlazione tra gli errori di scala dell'oscilloscopio ciò non risulta essere sorprendente in quanto il fit non ne tiene ovviamente conto. Segue direttamente una sottostima dell'errore sui parametri a e b della retta del fit. Un piccolo valore di χ^2 rispetto al numero di

gradi di libertà, purtroppo, non permette né di confermare l'ipotesi di linearità né di poterla rigettare. L'errore a posteriori, invece, si trova essere dello stesso ordine di grandezza dell'errore associato alle tensioni più basse (i primi punti) mentre diventa gradualmente inferiore rispetto all'incertezza associata alle tensioni maggiori. Questo suggerisce una soddisfacente distribuzione dei punti attorno alla retta di regressione, che si traduce nel grafico dei residui in un'ottimale distribuzione attorno allo zero. I residui, infatti, non presentano andamenti patologici accentuati e lo zero risulta essere sempre ben compreso nelle barre d'errore. Concentrando ora l'attenzione sui parametri della retta restituiti dal fit, si può notare come l'intercetta a sia ben compatibile con zero, evidenziando l'assenza di un eventuale offset sistematico o un errore di zero. Dal coefficiente angolare b si ricava la stima della capacità

$$C_f^{\text{fit}} = 232 \pm 7 \text{ pF} \quad \text{con } \sigma_{C_f^{\text{fit}}} = \sqrt{\left(\frac{1}{b^2}\right)^2 \sigma_b^2 + 2 \left(\frac{1}{bI}\right)^2 \sigma_I^2} \quad (4)$$

dove, nel computo dell'errore, σ_I rappresenta l'errore sulla corrente $I = \frac{V_{\text{in}}}{R_{\text{in}}}$ che, nel fit, verrebbe riscalato dalla durata T del segnale. La stima della capacità di feedback risulta essere in ottima compatibilità ($\lambda = 0.05$) con quanto misurato con il multimetro (Tabella 1): questo porta quindi ad un'ulteriore conferma di una *corretta* linearità del preamplificatore.

4.4 Forma d'Onda del segnale in uscita

In questa sezione si vuole analizzare il segnale in uscita dal preamplificatore $V_{\text{out}}^{\text{pre}}$: sfruttando la stessa configurazione sperimentale presentata in Sezione 4.1 viene acquisita la forma d'onda del segnale utilizzando la scheda Arduino Due. Inizialmente allora si vogliono convertire le grandezze acquisite dalla scheda in unità arbitrarie a grandezze fisicamente rilevanti. In particolare, dividendo il numero di acquisizione per il sampling rate $S = 0.955 \text{ Msps}$ si ottiene l'evoluzione temporale (in secondi) del segnale acquisito. Sfruttando invece la funzione di calibrazione in tensione $V = a + b \cdot \text{counts}$ (con $a = -0.637 \pm 0.010 \text{ V}$ e $b = 0.828 \pm 0.007 \text{ mV/counts}$) si ottengono i valori in Volt delle misure acquisite in ADC counts. Per quanto riguarda l'errore da associare a tali valori di tensione, ci si ritrova davanti ad un certo numero di complicazioni. La prima idea sarebbe sfruttare gli errori sui parametri di calibrazione e, per propagazione, trovare l'incertezza sui valori di tensione secondo

$$\sigma_V = \sqrt{\sigma_a^2 + \text{counts}^2 \cdot \sigma_b^2 + 2 \cdot \text{counts} \cdot \text{cov}(a, b)} \quad (5)$$

Tuttavia, questa strategia porta ad una notevole sovrastima degli errori: così facendo, si associa ai valori di tensione V un'incertezza proveniente dal fit di calibrazione, pesato con gli errori di misura dati dall'oscilloscopio. Si perde quindi l'informazione sull'accuratezza effettiva della scheda Arduino, che risulta essere invece decisamente migliore. Inoltre, i parametri (a, b) e, soprattutto, i loro errori (σ_a, σ_b) della funzione di calibrazione dipendono fortemente dal range di tensioni che si sceglie di adottare per la calibrazione: quest'ultima, infatti, risulta essere sensibilmente differente per bassi valori di tensione (fino a circa 1.5 V) e per alti valori di tensione a causa dei circuiti di protezione dei pin di ingresso. Si sceglie quindi di adottare una metodologia differente per stimare le incertezze sui valori di tensione V . Ricordando che l'ADC della scheda Arduino Due converte segnali analogici con tensione di riferimento $V_{\text{ref}} = 3.3 \text{ V}$ su un range di $N = 12$ bit (ovvero 4096 valori), si trova una risoluzione di tensione dell'ADC, ovvero la più piccola variazione di tensione in ingresso che causa la variazione di 1 bit del valore convertito in uscita, pari a

$$\Delta V = \frac{V_{\text{ref}}}{2^N} = \frac{3.3 \text{ V}}{4096} = 0.81 \text{ mV} \quad (6)$$

Per valutare gli effetti dell'accuratezza complessiva dell'acquisizione dell'ADC sulla stima della tensione in ingresso ad Arduino, occorre ricordare che ciascun bit della conversione digitale ha un peso pari alla risoluzione di tensione dell'ADC. Assumendo poi una un'accuratezza di $\pm 4 \text{ LSB}$ (bit meno significativo) sull'acquisizione dell'ADC si ottiene un'accuratezza sulla stima della tensione in ingresso di $\Delta V \times 4 = 3.2 \text{ mV}$. Assumendo infine che questa si distribuisca uniformemente, si arriva alla stima finale dell'incertezza sulle stime dei valori di tensione $\sigma_V = 2 \text{ mV}$.¹ In Figura 3 è esposto quanto acquisito dalla scheda Arduino: si nota immediatamente come siano stati registrati due "eventi", o meglio nel tempo di acquisizione impostato per Arduino il generatore di funzioni ha erogato due impulsi

¹Tamberi, G. (2016). *La Conversione Analogico/Digitale con Arduino*. (Prima Edizione).

di tensione. Il segnale registrato, inoltre, risulta essere leggermente rumoroso: per rendere l'analisi successiva meglio gestibile si decide di sovrapporre i due picchi di tensione e di effettuarne una media. Osservando la Figura 3, si può inoltre notare chiaramente la salita lineare del segnale e la decrescita esponenziale, come previsto in Equazione 3. Il valore massimo di tensione acquisito con la scheda Arduino, inoltre, è in linea con le aspettative e con quanto misurato sperimentalmente con l'oscilloscopio. Ci si concentra ora sulla stima del tempo caratteristico τ_{pre} : si vuole inizialmente effettuare un fit esponenziale del tipo $y = a + b \exp(-x/\tau)$. Successivamente, sfruttando i parametri a e b per normalizzare i dati, si vuole considerare il logaritmo delle tensioni normalizzate ed effettuare una regressione lineare. Non è infatti possibile, per questioni analitiche, considerare semplicemente il logaritmo delle tensioni V ed aspettarsi un andamento lineare: si considera invece il logaritmo delle tensioni normalizzate $\tilde{V} = (V - a)/b$ e l'errore su \tilde{V} è dato per propagazione. In questo modo, quindi, i dati si distribuiscono secondo $\log(\tilde{V}) = -\frac{t}{\tau}$.

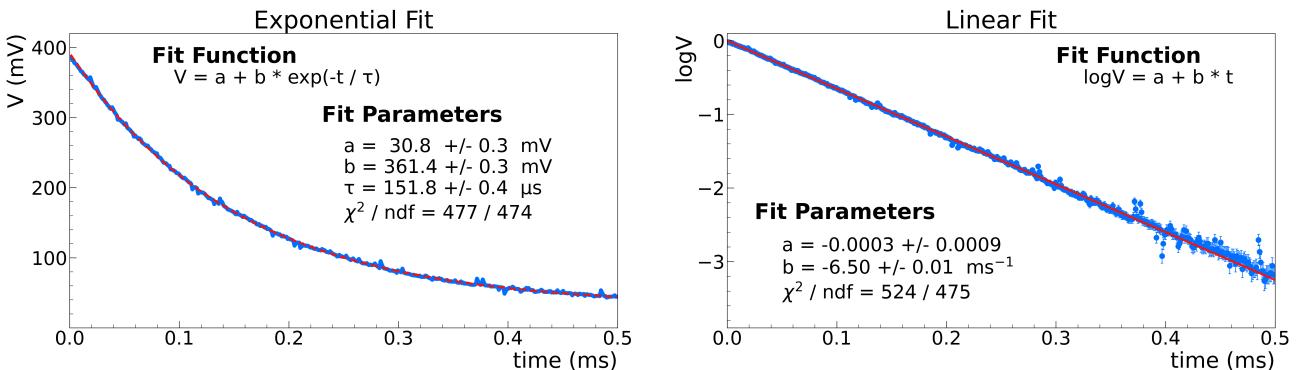


Figura 4: A sinistra: fit esponenziale dello smorzamento del segnale in uscita. A destra: fit lineare del logaritmo del segnale in uscita normalizzato.

Osservando rapidamente il grafico a sinistra, si nota come il segnale seguia in modo ottimale la funzione esponenziale: la stima del tempo caratteristico $\tau_{\text{pre}}^{\text{exp}}$, inoltre, risulta essere sufficientemente compatibile con la stima teorica $\tau_{\text{pre}}^{\text{th}} = 161 \pm 6 \mu\text{s}$ ($\lambda = 1.5$). Come stima del tempo caratteristico, in ogni caso, si preferisce quanto trovato dalla regressione lineare: tale metodo, infatti, è complessivamente più robusto, più preciso e fornisce una stima migliore sugli errori dei parametri. Dal grafico a destra, quindi, si nota chiaramente come computare il logaritmo delle tensioni \tilde{V} porti a considerare più "pesanti" (barre d'errore più piccole) i punti a monte della discesa esponenziale e a dare conseguentemente meno peso ai punti di coda. Questi ultimi, eccessivamente prossimi allo zero, non vengono considerati dato che la propagazione dell'errore su di essi porta ad un contributo decisamente troppo grande ed il fit non ne è praticamente influenzato. Il χ^2 , inoltre risulta essere in soddisfacente accordo con il suo valore di aspettazione ($Z = 1.6$): le misure in cima alla discesa si distribuiscono estremamente fedelmente attorno alla retta, compatibilmente con il loro errore, mentre le misure verso la coda risultano discostarsi più sensibilmente dal fit. Si nota, infine, che rimuovendo dati outlier scartando tutti i punti che distano più di 3σ dalla retta di regressione i risultati non vengono sensibilmente influenzati: queste misure si trovano quasi esclusivamente sulla coda di destra e, avendo un errore notevolmente maggiore rispetto ai punti situati in alto a sinistra, hanno poca influenza sulla retta del fit. Calcolando ora il tempo caratteristico si trova $\tau_{\text{pre}}^{\text{lin}} = -1/b = 153.9 \pm 0.2 \mu\text{s}$: questo presenta infine una compatibilità $\lambda = 1.2$ con la stima teorica $\tau_{\text{pre}}^{\text{th}}$ ed è in linea con quanto misurato sperimentalmente (Tabella 2).

4.5 Analisi in Frequenza

Si vuole ora studiare la risposta in frequenza del preamplificatore: si modificano le impostazioni del generatore in modo da erogare un'onda sinusoidale di ampiezza 1 V e frequenza f_{gen} variabile da 10 Hz a 1 MHz. Viene acquisita allora l'ampiezza del segnale sia in ingresso sia in uscita utilizzando l'oscilloscopio e viene calcolata la funzione di trasferimento H , alla quale viene associata un'incertezza σ_H data da

$$H = \frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} \quad \sigma_H = H \sqrt{\left(\frac{\sigma_L \times V_{\text{in}}/\text{div}}{V_{\text{in}}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_L \times V_{\text{out}}/\text{div}}{V_{\text{out}}} \right)^2} \quad (7)$$

dove $\sigma_L = 0.04$ rappresenta l'incertezza di lettura associata all'oscilloscopio mentre i termini V_{in}/div e $V_{\text{out}}/\text{div}$ corrispondono al numero di Volt per divisione per il canale di acquisizione rispettivamente del segnale in ingresso e del segnale in uscita. L'incertezza di guadagno associata all'oscilloscopio non viene invece considerata in quanto, volendo rappresentare le misure acquisite sperimentalmente attraverso un grafico di Bode, tale contributo viene scaricato interamente nell'intercetta delle interpolazioni volte a caratterizzare l'andamento delle misure. L'errore sulle misure espresse in Decibel viene calcolato per propagazione. Si assume infine trascurabile l'incertezza sulla frequenza dell'onda erogata dal generatore. Si faccia quindi riferimento a quanto riportato in Sezione 4.2 per le aspettative teoriche della risposta in frequenza del circuito. Si rappresenta ora in Figura 5 il grafico di Bode delle misure acquisite assieme ai punti ottenuti attraverso una simulazione Spice della risposta del circuito.

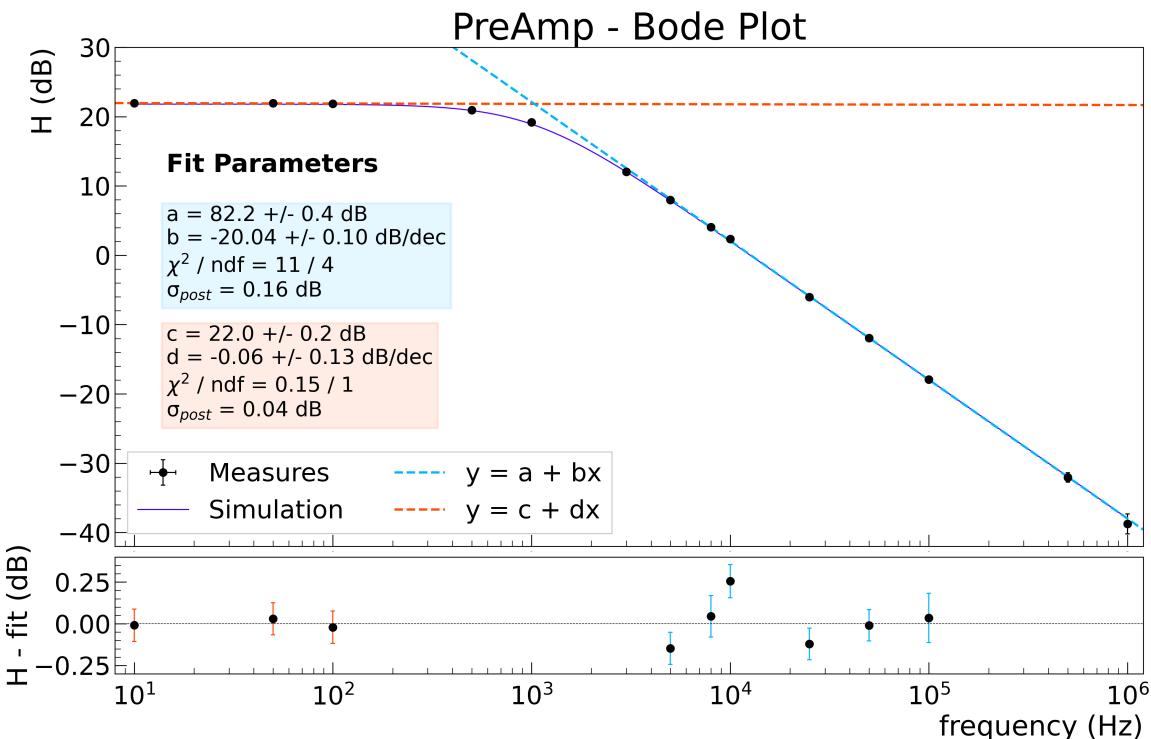


Figura 5: Grafico di Bode delle misure sperimentali e dei dati simulati.

Confrontando inizialmente le misure sperimentali con la simulazione Spice, si nota un ottimo accordo in tutto lo spettro di frequenze. Questo è chiaramente indice di una risposta in frequenza del circuito compatibile con le aspettative: il comportamento del filtro, infatti, è evidentemente un passa basso. A basse frequenze, la funzione di trasferimento è pressoché costante a 22 dB (retta in arancione), mentre per frequenze crescenti la funzione di trasferimento decresce linearmente con coefficiente angolare conforme all'aspettativa dei -20 dB/dec . L'ascissa del punto di intersezione tra le due rette di regressione fornisce una stima della frequenza di taglio del circuito $f_t = 1.03 \pm 0.03 \text{ kHz}$, compatibile in modo soddisfacente ($\lambda = 0.9$) con la frequenza di taglio teorica esposta in Equazione 2. Si vuole sottolineare che nel computo dell'errore su f_t è stata presa in considerazione la covarianza tra parametri appartenenti allo stesso fit. Osservando infine che la formula analitica frequenza di taglio f_t riportata in Equazione 2 contiene il tempo caratteristico τ_{pre} , si vuole valutare l'accordo tra la frequenza di

taglio ottenuta dal grafico di Bode e la frequenza di taglio teorica, utilizzando però $\tau_{\text{pre}} = \tau_{\text{pre}}^{\text{lin}}$ ricavato nella sezione precedente. Si ottiene dunque una frequenza di taglio $f_t^{\text{lin}} = 1.0340 \pm 0.0013 \text{ kHz}$ ed è in eccellente compatibilità con quanto appena stimato ($\lambda = 0.13$). Da questo notevole accordo si deduce l'assenza di possibili sistematicità di metodo, sia nella stima del tempo caratteristico attraverso il fit lineare in Figura 4, sia nella stima della frequenza di taglio analizzando il grafico di Bode.

5 Shaper CR-RC

Riprendendo ora quanto esposto in Sezione 4.2, si ottiene in uscita dal preamplificatore un segnale direttamente proporzionale alla carica in ingresso. Questo segnale è caratterizzato da una salita lineare fino al raggiungimento del massimo di tensione (in modulo) $V_{\text{out}}^{\max} = \frac{Q_c}{C_f}$ ed uno smorzamento esponenziale di tempo caratteristico τ_{pre} di circa un centinaio di μs . Si nota allora in Figura 3 che un segnale di questo tipo impiega circa 1 ms per azzerarsi completamente. Il secondo stadio della catena (*shaper*) si utilizza per modificare la forma del segnale in uscita dal preamplificatore, rendendolo più simile ad una curva gaussiana ed accorciandone la durata effettiva. Si è particolarmente interessati a diminuire il tempo di discesa al fine di evitare un possibile *signal pile up* nel caso di un'elevata frequenza di acquisizione. In tale situazione, infatti, il segnale di un'acquisizione precedente si sovrapporrebbe (almeno parzialmente) a quello dell'acquisizione successiva, rendendo estremamente più complicato estrarre le corrette informazioni dalle due acquisizioni. In Figura 6 è raffigurata una simulazione di questo fenomeno, impostando una

infine, per quanto affermato in Sezione 4.2, è importante che lo shaper preservi l'informazione sulla carica in ingresso, in quanto questa risulta essere il modello utilizzato nell'esperienza per simulare l'evento rivelato dal detector. Nelle sezioni successive si vuole ricavare analiticamente il comportamento teorico dello shaper e, successivamente, verificarne l'accordo con la risposta sperimentale. In particolare, si vuole verificare che il segnale in uscita sia proporzionale al segnale in ingresso e che la durata del segnale in uscita sia ridotta rispetto allo smorzamento esponenziale della tensione dovuto al preamplificatore. Si vuole sottolineare, infine, che inizialmente verrà studiato il comportamento dello shaper in condizioni di preamplificatore *ideale* mentre successivamente ci si concentrerà sul caso reale, il quale porta a delle leggere complicazioni.

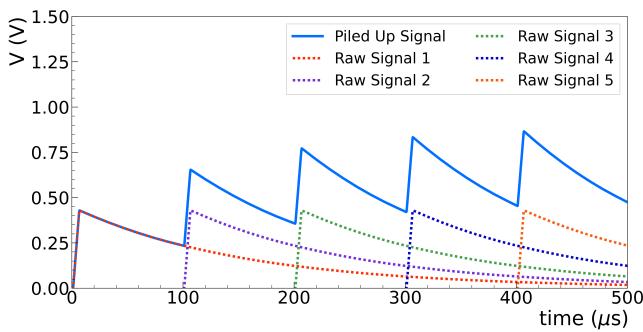


Figura 6: Signal pile-up simulazione Spice.

frequenza dell'impulso in ingresso pari a 10 kHz. Si comincia assemblando sulla breadboard il secondo modulo rappresentato in Figura 1 utilizzando le resistenze e capacità riportate in Tabella 4. Si evidenzia che per la prima fase di analisi (preamplificatore ideale) non viene montata la resistenza R_{pz} . Per studiare il comportamento dello shaper in coda ad un preamplificatore ideale è sufficiente fornire in ingresso (direttamente allo shaper) un segnale tale da avere una salita (quasi) istantanea che mantenga la tensione al valore massimo per un tempo sufficientemente lungo. Un segnale di questo tipo viene simulato facendo erogare al generatore di funzioni un'onda quadra a bassa frequenza (100 Hz) di tensioni $V_{\text{low}} = 0 \text{ V}$ e $V_{\text{high}} = 1 \text{ V}$. Si rimanda infine a Sezione 4.1 per l'alimentazione dell'operazionale e l'acquisizione del segnale mediante l'oscilloscopio.

5.1 Configurazione Sperimentale Ideale

Si comincia assemblando sulla breadboard il secondo modulo rappresentato in Figura 1 utilizzando le resistenze e capacità riportate in Tabella 4. Si evidenzia che per la prima fase di analisi (preamplificatore ideale) non viene montata la resistenza R_{pz} . Per studiare il comportamento dello shaper in coda ad un preamplificatore ideale è sufficiente fornire in ingresso (direttamente allo shaper) un segnale tale da avere una salita (quasi) istantanea che mantenga la tensione al valore massimo per un tempo sufficientemente lungo. Un segnale di questo tipo viene simulato facendo erogare al generatore di funzioni un'onda quadra a bassa frequenza (100 Hz) di tensioni $V_{\text{low}} = 0 \text{ V}$ e $V_{\text{high}} = 1 \text{ V}$. Si rimanda infine a Sezione 4.1 per l'alimentazione dell'operazionale e l'acquisizione del segnale mediante l'oscilloscopio.

Misure Dirette - Shaper		
Label	Valore	F.S.
R_1	$100.99 \pm 0.06 \text{ k}\Omega$	$1000 \text{ k}\Omega$
R_2	$99.93 \pm 0.06 \text{ k}\Omega$	$1000 \text{ k}\Omega$
C_1	$157 \pm 9 \text{ nF}$	1000 pF
C_2	$159 \pm 9 \text{ nF}$	1000 pF

Tabella 4: Misure dirette delle componenti circuituali

5.2 Trattazione Analitica

Si noti inizialmente (Figura 1) la presenza di un *buffer* tra il modulo CR ed il modulo RC. Il *buffer*, che non altera il comportamento del circuito, permette di fattorizzare la funzione di trasferimento

complessiva $H(s) = H_{\text{CR}} H_{\text{RC}}$, dove H_{CR} e H_{RC} sono rispettivamente le funzioni di trasferimento di un circuito RC in configurazione passa alto e passa basso. In questo modo, quindi, il calcolo della funzione di trasferimento si semplifica notevolmente. Inoltre, si vuole assumere $R_1 C_1 \equiv \tau_{\text{sh}1} \approx \tau_{\text{sh}2} \equiv R_2 C_2$: questa approssimazione risulta ragionevole osservando i valori riportati Tabella 5 e, di conseguenza, si considera la media pesata dei due come tempo caratteristico dello shaper, detto *shaping time*. L'effettiva validità di questa approssimazione può essere verificata studiando il grafico di Bode della risposta in frequenza del circuito. La funzione di trasferimento risulta allora essere

$$H(s) = \frac{1}{\tau_{\text{sh}}} \frac{s}{\left(s + \frac{1}{\tau_{\text{sh}}}\right)^2} \quad \text{con } \tau_{\text{sh}} = 15.9 \pm 0.6 \mu\text{s} \implies f_{\text{polo}} = \frac{1}{2\pi\tau_{\text{sh}}} = 10.0 \pm 0.4 \text{ kHz} \quad (8)$$

Si noti quindi come la forma analitica di $H(s)$ presenti uno zero nell'origine ed un polo doppio legato allo *shaping time*. Il grafico di Bode della risposta in frequenza presenta allora una salita lineare con pendenza 20 dB/dec fino al raggiungimento della frequenza f_{polo} relativa al polo doppio per poi decrescere linearmente con pendenza -20 dB/dec. Il filtro è dunque un passa banda, la cui banda passante (e di conseguenza gli intervalli di integrazione e derivazione del segnale) è influenzata dallo *shaping time*. Concentrandosi ora l'attenzione sulla risposta dello shaper ad un segnale in ingresso ideale, ci si aspetta in uscita una tensione data da

$$V_{\text{out}}(t) = \frac{V_{\text{in}}}{\tau_{\text{sh}}} t e^{-\frac{t}{\tau_{\text{sh}}}} \quad (9)$$

che presenta un massimo $V_{\text{out}}^{\text{max}} = V_{\text{in}}/e$ direttamente proporzionale al segnale in ingresso, che quindi contiene l'informazione sulla carica raccolta dal preamplificatore. Inoltre, tale massimo viene assunto ad un tempo $t^{\text{max}} = \tau_{\text{sh}}$: lo *shaping time*, quindi, determina approssimativamente la durata del segnale in uscita dallo shaper. Si noti che τ_{sh} è un ordine di grandezza inferiore rispetto al tempo caratteristico τ_{pre} : da questo si deduce quindi che la durata del segnale viene notevolmente ridotta grazie all'azione dello shaper, come anticipato in Sezione 5.

5.3 Risposta del Circuito

Al fine di verificare il corretto funzionamento dell'apparato sperimentale, si riportano in Tabella 6 le misure sperimentali del massimo della tensione e dello *shaping time* τ_{sh} acquisite con l'oscilloscopio. Confrontando la misura di $V_{\text{max}}^{\text{sper}}$ con l'aspettativa teorica emerge una sensibile discrepanza tra le due: la prima, infatti, si discosta del 7.9% rispetto alla seconda. Questa incongruenza si attribuisce principalmente alle componenti circuituali ed alle sistematiche presenti nel

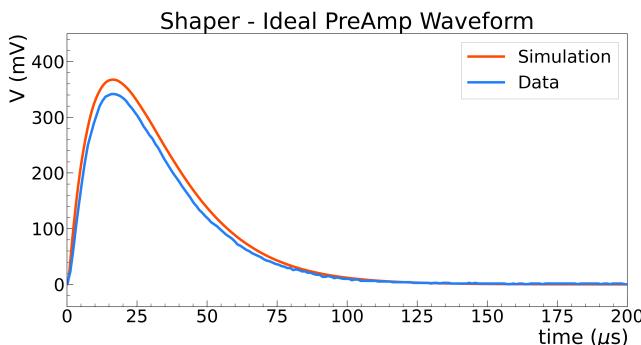


Figura 7: Segnale in uscita dallo shaper.

prima rispetto al segnale in uscita dal preamplificatore (Figura 3): come anticipato in Sezione 5, questo

Shaping Time
$\tau_{\text{sh}1} = 15.86 \pm 0.91 \mu\text{s}$
$\tau_{\text{sh}2} = 15.89 \pm 0.90 \mu\text{s}$
$\langle \tau_{\text{sh}} \rangle = 15.9 \pm 0.6 \mu\text{s}$

Tabella 5: Stime di τ^{sh} .

Controllo Apparato - Shaper			
$V_{\text{max}}^{\text{th}}$ (mV)	$V_{\text{max}}^{\text{sper}}$ (mV)	$\tau_{\text{sh}}^{\text{th}}$ (μs)	$\tau_{\text{sh}}^{\text{sper}}$ (μs)
372 ± 6	342 ± 6	15.9 ± 0.6	16 ± 3

Tabella 6: Confronto tra stime teoriche e misure sperimentali.

nel circuito stesso, comprendendo quindi anche la capacità parassita dovuta ai cavi ed alla breadboard. Tale valore massimo, tuttavia, viene assunto ad un tempo $\tau_{\text{sh}}^{\text{sper}}$ perfettamente conforme allo *shaping time*. In Figura 7 viene mostrato il segnale in uscita acquisito con la scheda Arduino assieme alla simulazione Spice: si nota chiaramente come la tensione sperimentale sia inferiore alle aspettative, come già evidenziato in Tabella 6. Si fa notare, tuttavia, che il valore massimo dei dati acquisiti con la scheda Arduino risulta essere $V_{\text{max}} = 342 \pm 2 \text{ mV}$ e questo viene assunto ad un tempo $t \approx 15.9 \mu\text{s}$ perfettamente in linea con quanto misurato sperimentalmente mediante l'oscilloscopio. Si noti, inoltre, che il segnale si azzera dopo circa 150 μs , ovvero molto

aspetto è fondamentale per evitare un *signal pile up* in caso di alta frequenza di acquisizione. Si vuole infine specificare che il convertitore all'interno della scheda Arduino Due è ottimizzato per ricevere in ingresso segnali provenienti da una sorgente la cui impedenza di uscita sia sufficientemente bassa. Secondo il datasheet Atmel (relativo alla CPU su cui è basata la scheda), questa deve essere al massimo di $10\text{ k}\Omega$.² Questo non è chiaramente il caso dell'uscita dallo *shaper*: una tale impedenza porterebbe quindi ad una scorretta conversione del segnale. Per ovviare al problema, il segnale viene prelevato in uscita dalla *catena elettronica completa* (Sezione 6.1), la quale presenta un'impedenza in uscita idealmente nulla, e dividendo i valori misurati per il fattore di amplificazione G si riporta il segnale allo stadio non amplificato. Questa procedura viene effettuata anche per la configurazione *reale* dello *shaper + preamplificatore*, trattata in seguito.

5.4 Analisi in Frequenza

Si vuole ora studiare la risposta in frequenza dello shaper (configurazione *ideale*): si imposta il generatore in modo da erogare un'onda sinusoidale di ampiezza 1 V e frequenza f_{gen} variabile da 50 Hz a 1 MHz. Si acquisisce quindi l'ampiezza del segnale sia in ingresso sia in uscita utilizzando l'oscilloscopio e viene calcolata la funzione di trasferimento H , alla quale viene associata un'incertezza σ_H data da Equazione 7. Si rimanda a Sezione 4.5 per le considerazioni sugli errori associati alle misure, in quanto risulta essere perfettamente analogo. Si rappresenta allora in Figura 8 il grafico di Bode delle misure acquisite e di una simulazione Spice della risposta del circuito.

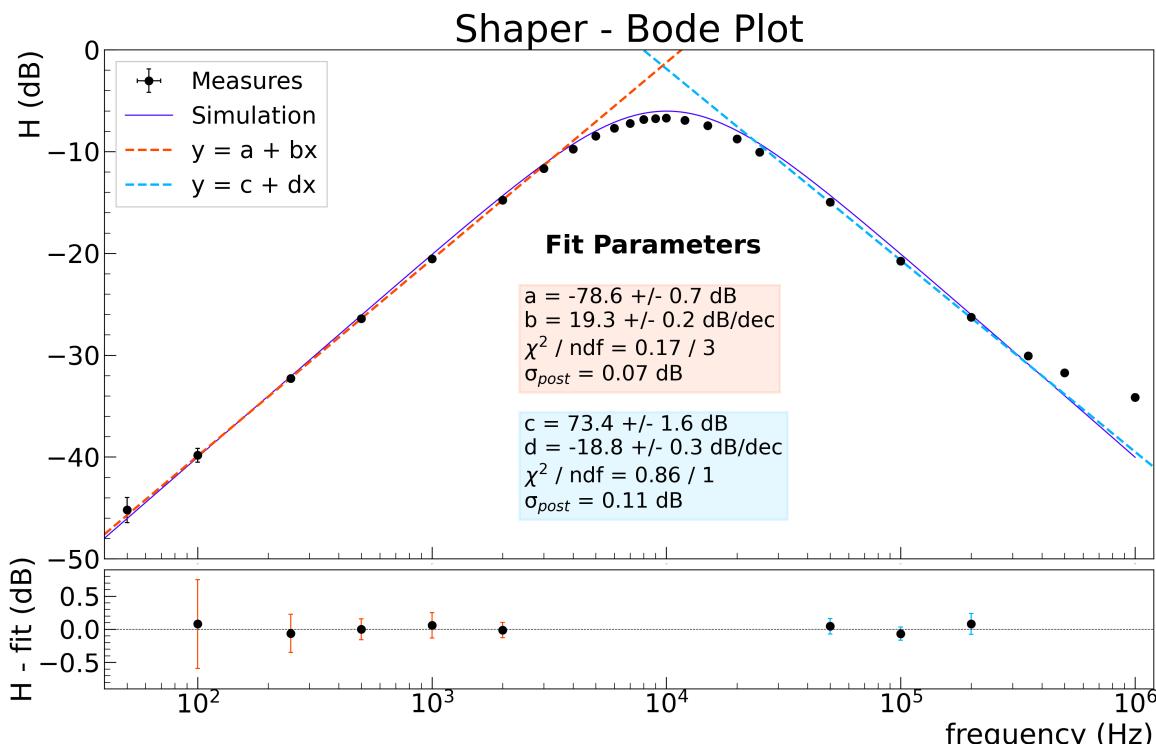


Figura 8: Grafico di Bode delle misure sperimentali e dei dati simulati.

Confrontando inizialmente le misure sperimentali con la simulazione Spice si nota un ottimo accordo a basse frequenze. Nella zona di *mid band* si ha invece un leggero scostamento: i dati sperimentali risultano essere lievemente inferiori rispetto alla simulazione. Per alte frequenze (attorno al MHz) si osserva infine un notevole disaccordo tra l'andamento delle misure sperimentali e la simulazione Spice: la causa di questa anomalia si crede essere dovuta alla GBW dell'operazionale, la quale non è stata presa in considerazione nel simulare la risposta del circuito.³ In ogni caso, il filtro si comporta secondo le aspettative riportate in Sezione 5.2: la funzione di trasferimento presenta una crescita lineare a basse frequenze (zona di derivazione) con pendenza $19.3 \pm 0.2 \text{ dB/dec}$ ed una decrescita lineare ad alte

²Link al datasheet: <https://bit.ly/3nw0QSN>

³La *Gain BandWidth* dell'amplificatore operazionale, anche detta *frequenza a guadagno unitario*, determina il massimo guadagno ottenibile ad una data frequenza.

frequenze (zona di integrazione) con pendenza -18.8 ± 0.3 dB/dec. L'ascissa del punto di intersezione delle due rette di regressione fornisce una stima della frequenza relativo al polo $f_{\text{polo}} = 9.6 \pm 0.2$ kHz, in ottima compatibilità con la frequenza del polo teorica esposta in Equazione 8 ($\lambda = 0.8$). Sottraendo infine 3 dB al massimo della funzione di trasferimento, le ascisse dei punti di intersezione con le due rette di regressione determinano la larghezza di banda Δf del filtro. Si ottiene quindi la *bandwidth* dello shaper, delimitata da

$$f_{\text{low}} = 3.7 \pm 0.4 \text{ kHz} \quad f_{\text{high}} = 26.1 \pm 0.8 \text{ kHz} \quad (10)$$

Si vuole infine sottolineare che l'ottimo accordo della frequenza f_{polo} con l'aspettativa teorica (in cui compare la media pesata τ_{sh}) supporta ulteriormente la validità dell'approssimazione $\tau_{\text{sh1}} \approx \tau_{\text{sh2}}$.

5.5 Shaper con Preamplificatore in ingresso

Si vuole ora studiare il comportamento dello *shaper* in condizioni più realistiche. Nelle sezioni precedenti è stato iniettato nel formattore un segnale *ideale* direttamente erogato dal generatore. Nell'idea di una catena elettronica associata ad un rivelatore di radiazione, ovviamente, questo non è possibile. Nella situazione reale, infatti, lo *shaper* è posto in coda al *preamplificatore*, che fornisce in uscita il segnale rappresentato in Figura 3. La salita è ora lineare, non più "istantanea", ed il segnale è smorzato esponenzialmente, non più costante al suo valore massimo. Questa deviazione dall'idealità porta a rilevanti deformazioni del segnale in uscita dallo *shaper*. Osservando il grafico a sinistra in Figura 9 si nota chiaramente il fenomeno di *undershoot* del segnale: questo, infatti, dopo aver raggiunto il massimo di tensione scende sotto allo zero (*baseline*) per poi tendere ad esso abbastanza lentamente. Si ricorda che, nel caso ideale, già dopo 150 μs il segnale si poteva considerare azzerato, mentre in questa situazione è necessario attendere circa 600 μs . È tuttavia possibile aggirare l'effetto di *undershoot* ponendo una resistenza adeguata in parallelo alla capacità C_1 : scegliendo quindi R_{pz} tale che $R_{\text{pz}} = \frac{\tau_{\text{pre}}}{C_1}$ si trova $R_{\text{pz}} \gg R_1$ e di conseguenza la funzione di trasferimento del modulo CR assume la forma

$$H(s) = \frac{s + \frac{1}{\tau_{\text{pz}}}}{s + \frac{1}{\tau_{\parallel}}} \approx \frac{s + \frac{1}{\tau_{\text{pz}}}}{s + \frac{1}{\tau^{\text{I}}}} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \tau^{\text{pz}} = C_1 R_{\text{pz}} \\ \tau_{\parallel} = C_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{\text{pz}}} \right)^{-1} \end{cases} \quad (11)$$

e risulta avere, in buona approssimazione, lo stesso polo de modulo CR *base*. Di conseguenza, la funzione di trasferimento complessiva dello *shaper compensato* continua ad avere un polo doppio in f_{polo} e questo non ne altera le proprietà caratteristiche. La correzione apportata per eliminare l'effetto di *undershoot* prende il nome di compensazione *pole zero*. In laboratorio, quindi, viene montata una resistenza $R_{\text{pz}} = 1.013 \pm 0.007 \text{ M}\Omega$ ($\text{F.S. } 10 \text{ M}\Omega$) molto simile a quella necessaria per compensare l'effetto di *undershoot* ($R_{\text{pz}}^{\text{th}} = 1.03 \pm 0.07 \text{ M}\Omega$): osservando il grafico a destra in Figura 9 si nota quindi come l'effetto sia del tutto scomparso. Il segnale ora, infatti, dopo aver assunto il valore massimo decresce senza scendere sotto la *baseline*. Inoltre, il segnale si azzera completamente dopo circa 200 μs , come nel caso ideale trattato in precedenza.

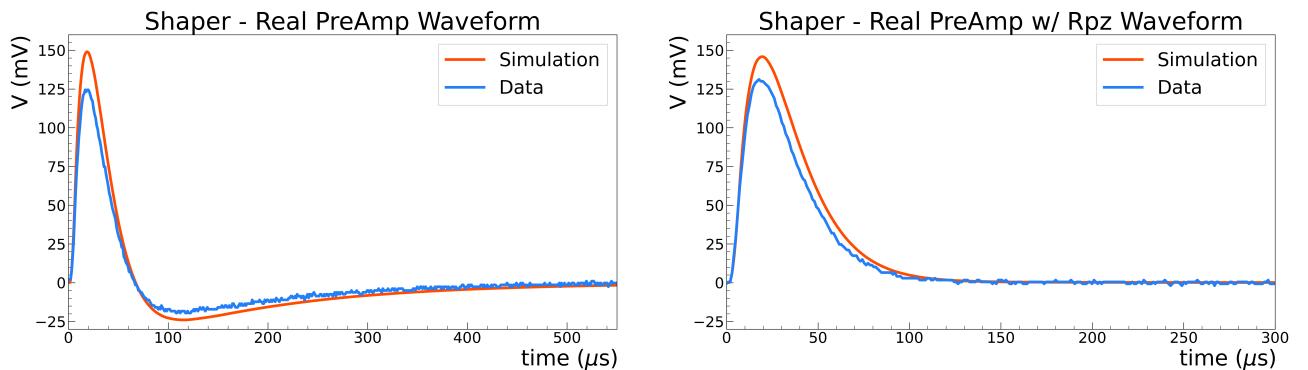


Figura 9: A sinistra: segnale in uscita dallo shaper senza resistenza di compensazione. A destra: segnale in uscita dallo shaper con resistenza di compensazione.

Si vuole ora confrontare le misure sperimentali acquisite con l'oscilloscopio ed i dati acquisiti con la scheda Arduino. In Tabella 7 si riportano quindi le misure del massimo della tensione V_{max} , il tempo in cui tale massimo viene assunto t_{max} e, eventualmente, la tensione di *undershoot* $V_{\text{undershoot}}$.

Shaper - Segnale in uscita <i>senza</i> R_{pz}							
V_{max} (mV)		t_{max} (μ s)		$V_{undershoot}$ (mV)			
Osc.	Arduino	Osc.	Arduino	Osc.	Arduino	Osc.	Arduino
123 ± 2	124 ± 2	17 ± 1	~ 16.8	-19.7 ± 1.1	-20 ± 2		
Shaper - Segnale in uscita <i>con</i> R_{pz}							
V_{max} (mV)		t_{max} (μ s)		$V_{undershoot}$ (mV)			
Osc.	Arduino	Osc.	Arduino	Osc.	Arduino	Osc.	Arduino
129 ± 2	131 ± 2	17 ± 1	~ 17.7	X	X		

Tabella 7: Confronto del segnale in uscita tra le due configurazioni dello shaper.

Si noti allora come tutte le misure acquisite con l'oscilloscopio e con Arduino sono tra loro consistenti. Inoltre, la precisione con cui viene acquisito il segnale risulta essere analoga tra le due tipologie di misure. Osservando l'accordo tra i dati acquisiti con Arduino e la simulazione Spice (Figura 9), invece, si nota una leggera discrepanza. Un effetto analogo è già stato evidenziato in Figura 7: il segnale misurato sia con la scheda Arduino sia con l'oscilloscopio risulta essere sempre lievemente minore delle aspettative. Si ritiene, tuttavia, più rilevante l'elevato accordo tra metodologie di acquisizione differenti, piuttosto che il leggero disaccordo con le simulazioni. Come è già stato evidenziato in precedenza, infatti, questa deviazione dalle aspettative viene attribuita a delle sistematiche inerenti alle componenti circuitali ed al circuito stesso (per esempio capacità parassite di breadboard e cavi). Si noti ora invece come il tempo t_{max} sia ora leggermente aumentato rispetto al caso ideale ($t_{max}^{ideal} = 15.9 \pm 0.6 \mu$ s): la causa di ciò si crede essere, ancora una volta, la perdita di idealità del segnale in ingresso. La salita lineare di questo, infatti, causa un leggero ritardo nel raggiungimento del massimo di tensione. Il tempo t_{max} risulta essere, in ogni caso, in linea con le simulazioni Spice e quindi con le aspettative.

6 Catena Elettronica Completa

Generalmente, in una *catena elettronica* associata ad un rivelatore, lo *shaper* non ha solamente la funzione di modificare la forma del segnale. Viene infatti progettato in modo tale da fornire anche un'amplificazione e, in tal caso, il modulo prende il nome di *shaping amplifier*. Il motivo per cui si è interessati ad amplificare il segnale risulta evidente in Figura 10, in cui è raffigurato sia il segnale in uscita dal *preamplificatore* (in condizione di *pile up*) sia il segnale in uscita dallo *shaper*: l'azione dello *shaper* *CR-RC* montato in laboratorio riduce in modo ottimale la durata effettiva del segnale, rendendo più difficile che si verifichi un *signal pile up*. Tuttavia, l'ampiezza in tensione viene notevolmente ridotta: per questo motivo allora, in laboratorio, si assembla in coda allo *shaper* un circuito amplificatore con operazionale in configurazione non invertente, ovvero l'ultimo stadio della catena rappresenta in Figura 1. Lo scopo di questo terzo ed ultimo stadio della catena è ottimizzare l'ampiezza del segnale per sfruttare al meglio il range in input della DAQ, ovvero in questo caso l'ADC della scheda Arduino Due. Questa, infatti, può ricevere nell'input analogico segnali *positivi* su un range di circa 3 V, nonostante sia opportuno notare che già oltre i 2 V i vari circuiti di protezione dei pin in ingresso tendono ad alterare l'acquisizione del segnale. Quest'ultimo, infine, viene convertito lavorando su 12 bit, cioè 4096 valori. Come è stato evidenziato nelle sezioni precedenti, i segnali acquisiti in uscita dallo *shaper* si aggirano attorno al centinaio di milliVolt: essendo allora il segnale già positivo è sufficiente un'amplificazione lineare non invertente per adattare il segnale al range dell'ADC di Arduino.

6.1 Amplificatore non invertente

Si assembla sulla breadboard il terzo, ed ultimo, modulo rappresentato in Figura 1 utilizzando le due resistenze riportate in Tabella 8. Il circuito è un semplice circuito amplificatore non invertente di

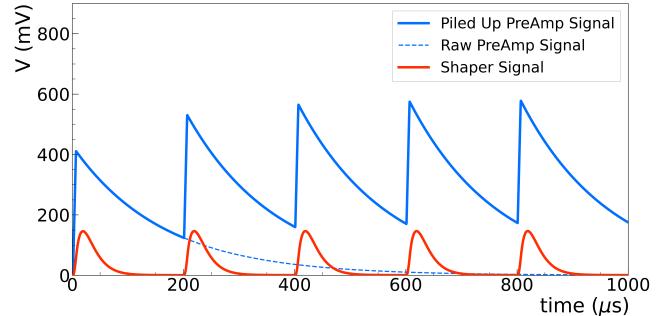


Figura 10: Signal pile-up simulazione Spice.

Misure Dirette - Amplificatore		
Label	Valore	F.S.
R_{1a}	$9.982 \pm 0.006 \text{ k}\Omega$	$100 \text{ k}\Omega$
R_{2a}	$82.39 \pm 0.03 \text{ k}\Omega$	$100 \text{ k}\Omega$

Tabella 8: Misure dirette delle componenti circuituali.

utilizzando l'oscilloscopio una tensione $V_{\text{out}}^{\text{sper}} = 2.32 \pm 0.04 \text{ V}$: emerge nuovamente la leggera discrepanza tra le aspettative sulla tensione e le effettive misure sperimentali.

6.2 Trattazione Analitica

Per il calcolo della funzione di trasferimento complessiva della catena si moltiplicano tra loro le funzioni di trasferimento dei singoli moduli:

$$H(s) = - \underbrace{\frac{1}{R_{\text{in}} C_f} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau^{\text{pre}}}}}_{\text{preamplificatore}} \underbrace{\frac{1}{\tau^{\text{sh}}} \frac{s + \frac{1}{\tau^{\text{pz}}}}{\left(s + \frac{1}{\tau^{\text{sh}}}\right)^2}}_{\text{shaper}} \underbrace{\left(1 + \frac{R_{2a}}{R_{1a}}\right)}_{\text{amplificatore}} \quad \text{con } \begin{cases} \tau^{\text{pre}} = R_f C_f \\ \tau^{\text{sh}} = R_1 C_1 = R_2 C_2 \\ \tau^{\text{pz}} = R_{\text{pz}} C_1 \end{cases} \quad (12)$$

Si ricorda ora che la resistenza di compensazione R_{pz} è stata scelta tale che $R_{\text{pz}} = \frac{\tau^{\text{pre}}}{C_1}$: si trova allora $\tau^{\text{pz}} = \tau^{\text{pre}}$ e la funzione di trasferimento diventa

$$H(s) = - \frac{1 + \frac{R_{2a}}{R_{1a}}}{R_{\text{in}} C_f \tau^{\text{sh}}} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{\tau^{\text{sh}}}\right)^2} \quad (13)$$

Si noti allora che la funzione di trasferimento effettiva della catena elettronica completa non presenta zeri, mentre presenta lo stesso polo doppio dello *shaper*. Ci si aspetta dunque che il comportamento in frequenza della catena sia quello di un filtro passa basso avente frequenza di taglio teorica $f_t = 10.0 \pm 0.4 \text{ kHz}$ (sperimentalmente si è invece trovato, in Sezione 5.4, $f_t = 9.6 \pm 0.2 \text{ kHz}$). Per frequenze minori ci si aspetta, nel grafico di Bode, un andamento costante delle misure mentre, per frequenze maggiori, ci si aspetta una decrescita lineare con pendenza -40 dB/dec . Infine, in analogia a quanto discusso in Sezione 4.3 riguardo la linearità del preamplificatore, siccome lo shaper preserva l'informazione sulla carica in ingresso ed il modulo finale amplifica semplicemente la tensione senza alterarne le altre caratteristiche, ci si aspetta che il valore massimo del segnale in uscita $V_{\text{out}}^{\text{max}}$ dalla catena elettronica completa risulti lineare rispetto alla carica totale Q_c raccolta dal preamplificatore.

6.3 Linearità della Catena Elettronica

Ci si propone qui di verificare la dipendenza lineare del segnale in uscita $V_{\text{out}}^{\text{max}}$ dalla catena elettronica rispetto alla carica totale Q_c raccolta dal preamplificatore. Si fa variare dunque la durata T dell'impulso quadrato erogato dal generatore di funzioni da $3 \mu\text{s}$ a $10 \mu\text{s}$, in modo da modificare di volta in volta la carica iniettata nel preamplificatore: per ogni T viene calcolata la quantità di carica totale Q_c secondo Equazione 3 e si acquisisce poi, utilizzando la scheda Arduino Due, la forma d'onda del segnale in uscita. Da quest'ultima si misura infine l'ampiezza effettiva del segnale in uscita. Per quanto riguarda gli errori sulla carica, in analogia a quanto riportato in Sezione 4.3, questi sono totalmente correlati e non vengono dunque considerati per effettuare il fit, riportato in Figura 11. Si nota immediatamente, osservando il grafico dei residui, come gli errori associati alle misure siano leggermente sovrastimati se confrontati con l'effettiva distribuzione dei punti attorno alla

Linearità della Catena - Misure		
$T (\mu\text{s})$	$Q_c (\text{pC})$	$V_{\text{out}}^{\text{max}} (\text{V})$
3	54.0 ± 1.0	0.536 ± 0.002
4	72.0 ± 1.3	0.790 ± 0.002
5	90 ± 2	1.044 ± 0.002
6	108 ± 2	1.298 ± 0.002
7	126 ± 2	1.554 ± 0.002
8	144 ± 3	1.810 ± 0.002
9	162 ± 3	2.064 ± 0.002
10	180 ± 3	2.320 ± 0.002

Tabella 9: Dati relativi al grafico in Figura 11.

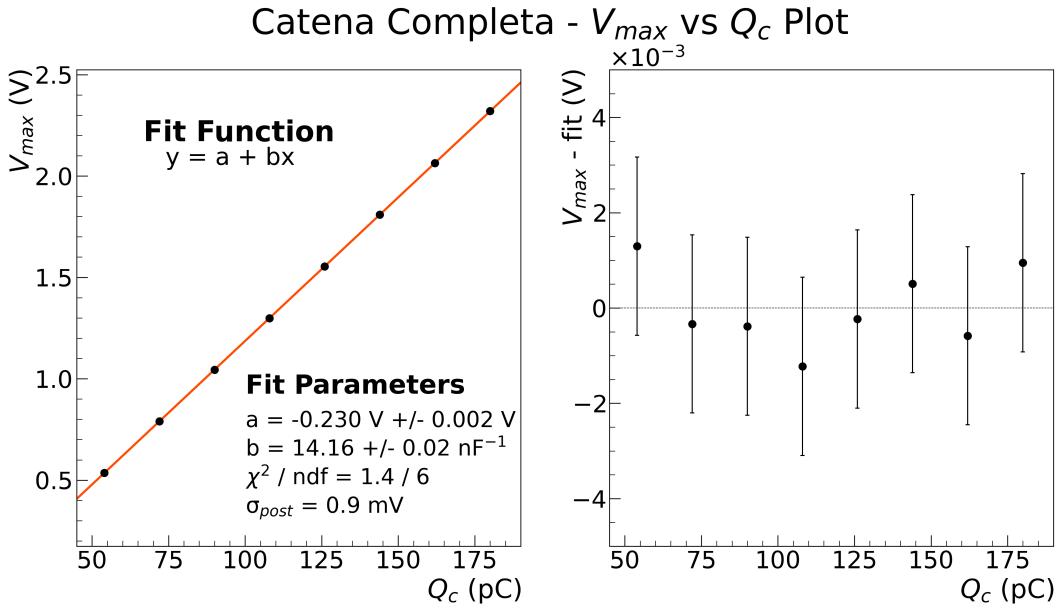


Figura 11: Fit lineare del massimo di tensione in uscita contro la carica totale in ingresso.

retta. Il χ^2 infatti risulta essere minore rispetto al suo valore di aspettazione e l'errore a posteriori risulta essere un ordine di grandezza inferiore rispetto alle incertezze associate alle misure (si rimanda a Sezione 4.4 per gli errori associati alle misure acquisite con Arduino). L'andamento dei residui è sufficientemente regolare e, assieme all'ottima distribuzione delle misure attorno alla retta caratterizzata dall'errore a posteriori, si può quindi affermare una soddisfacente linearità della catena elettronica.

6.4 Analisi in Frequenza

Si vuole ora studiare la risposta in frequenza della catena elettronica: per quanto riportato in Sezione 6.1, ci si aspetta un comportamento da filtro passa basso avente frequenza di taglio analoga alla frequenza relativa al polo dello *shaper* (Sezione 5.4). Si rappresenta allora in Figura 12 il grafico di Bode delle misure acquisite assieme ai punti ottenuti attraverso una simulazione Spice della risposta del circuito.

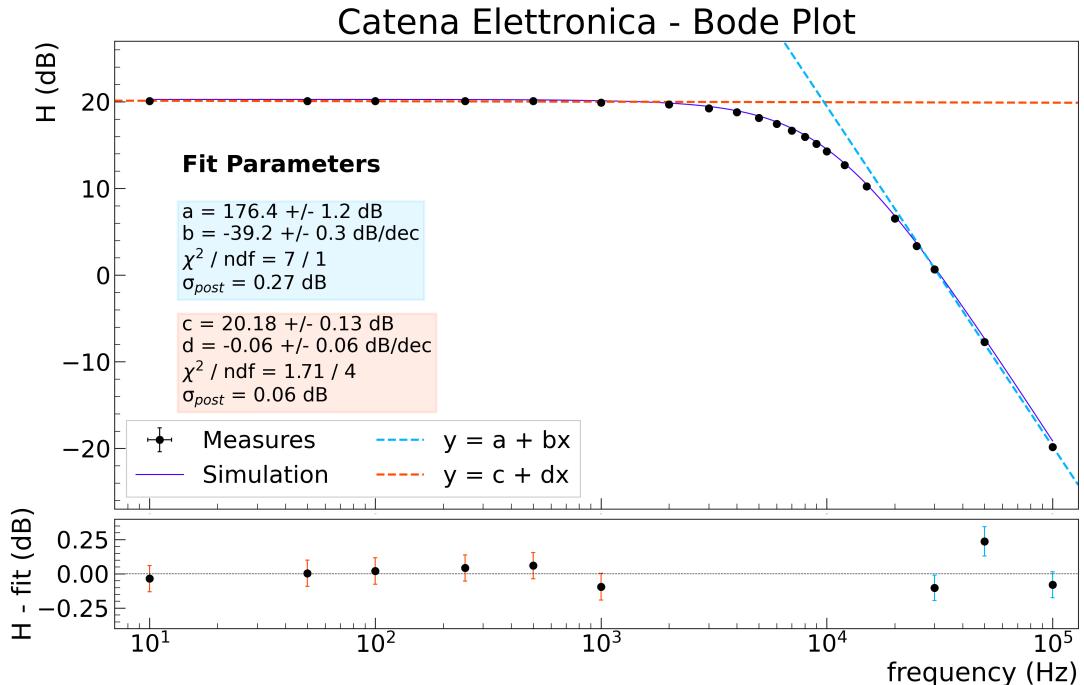


Figura 12: Grafico di Bode delle misure sperimentali e dei dati simulati.

Confrontando inizialmente le misure sperimentali con la simulazione Spice, si nota un ottimo accordo in tutto lo spettro di frequenze. Questo è chiaramente indice di una risposta in frequenza conforme alle aspettative: a basse frequenze la funzione di trasferimento è costante a 20.1 ± 0.2 dB mentre per frequenze crescenti la funzione di trasferimento subisce un'attenuazione lineare di pendenza -39.2 ± 0.3 dB/dec, in linea con l'aspettativa dei -40 dB/dec dovuti al polo doppio. L'ascissa del punto di intersezione tra le due rette di regressione fornisce quindi una stima della frequenza di taglio del circuito $f_t = 9.72 \pm 0.13$ kHz. Si ricorda quindi che la frequenza di taglio teorica attesa è $f_t = 10.0 \pm 0.4$ kHz, mentre la frequenza relativa al polo della funzione di trasferimento dello shaper ricavata dal grafico di Bode in Figura 8 risulta essere $f_t = 9.6 \pm 0.2$ kHz. La stima della frequenza di taglio appena trovata presenta un'ottima compatibilità con queste ultime: in particolare si ha una compatibilità $\lambda = 0.7$ con la stima teorica e $\lambda = 0.3$ con la frequenza relativa al polo dello *shaper*.