

Laboratorio di Fisica

Docenti: Prof. A. Garfagnini - Prof. M. Lunardon

Corso di Laurea in Fisica

Canale 1 A-L

Anno Accademico 2020/2021

ESPERIENZA DI LABORATORIO

Amplificatori Operazionali & Calibrazione Arduino

TURNO T2

NICOLÒ LAI

1193976

nicolo.lai@studenti.unipd.it

DATA ESPERIENZA

28/10/2020 - 29/10/2020

1 Obiettivo

Verificare la linearità di un amplificatore operazionale e misurare il guadagno di un circuito che lo comprenda. Misurare la frequenza di taglio di un filtro attivo. Calcolare il sampling rate e la funzione di calibrazione in tensione di una scheda Arduino Due.

2 Strumentazione e Componenti

Nel corso dell'esperienza vengono utilizzati:

- Multimetro digitale Metrix MTX3292
- Generatore di funzioni Tektronix AFG1022
- Oscilloscopio digitale Tektronix TBS1102B
- Alimentatore di tensione continua TTi
- Circuito integrato TL082C (contenente due amplificatori operazionali)
- Tre resistori R_f , R_1 , R_3 ed un condensatore C_1
- Scheda Arduino Due

3 Amplificatore Operazionale Invertente

In questa sezione ci si propone di studiare il comportamento di un circuito puramente resistivo comprendente un amplificatore operazionale in configurazione invertente (polo positivo a massa, polo negativo collegato al segnale in ingresso). Si vuole in particolare verificare la sua linearità e stimare l'amplificazione del circuito come grandezza derivata sia partendo dalle misure dirette delle resistenze del circuito, sia come parametro di un'interpolazione lineare di misure acquisite con l'oscilloscopio.

3.1 Configurazione Sperimentale

Si inizia assemblando il circuito, rappresentato in Figura 1, utilizzando le resistenze R_f , R_1 , R_3 e l'amplificatore operazionale. La resistenza R_g rappresenta la resistenza interna del generatore, non nulla in quanto ci si trova in condizioni di non idealità. Le resistenze esterne, invece, vengono misurate direttamente utilizzando il multimetro Metrix MTX3292, ottenendo i risultati esposti in Tabella 1. Si utilizza poi un generatore di tensione continua con $V_{cc} = +15\text{ V}$ e $V_{ee} = -15\text{ V}$ per l'alimentazione dell'amplificatore operazionale. Si assume, inoltre, che esso abbia un comportamento ideale, ovvero che il polo positivo ed il polo negativo si trovino allo stesso potenziale. Il segnale viene prelevato nei punti *IN* e *OUT* evidenziati nello schema in Figura 1 (e verrà in seguito richiamato rispettivamente come V_{in} e V_{out}) utilizzando due sonde con fattore di attenuazione 10X. Nel canale CH1 dell'oscilloscopio viene visualizzato il segnale in ingresso V_{in} , mentre il segnale in uscita V_{out} è prelevato dalla sonda collegata al canale CH2. Per entrambi i canali viene selezionata la modalità "attenuazione sonda 10X", in modo da compensare la riduzione del segnale dovuta alle sonde e visualizzare quindi nel display il segnale reale. Il generatore di funzioni viene poi configurato in



Figura 1: Rappresentazione a variabili concentrate del circuito assemblato in laboratorio.

Misure Dirette delle Resistenze		
Resistenza	Valore	F.S.
R_f	$82.46 \pm 0.03 \text{ k}\Omega$	100 k Ω
R_1	$8.089 \pm 0.003 \text{ k}\Omega$	10 k Ω
R_3	$46.54 \pm 0.05 \Omega$	1 k Ω

Tabella 1: Valori di resistenza, misurati direttamente con il multimetro, e relativo fondoscala.

modalità "50 Ohm", in modo che l'impedenza d'uscita del generatore sia comparabile con $R_3 \approx 50 \Omega$. Ci si aspetta così di trovare una tensione in ingresso V_{in} in accordo con la tensione nominale erogata dal generatore. Si imposta infine il generatore di funzioni in modo da erogare un segnale di tipo sinusoidale con frequenza $f_{gen} = 1 \text{ kHz}$, mantenuta costante in questa sezione, e di ampiezza invece variabile tra 200 mV picco picco e 3.5 V picco picco.

Dall'assunzione di idealità dell'amplificatore operazionale segue che, risolvendo il circuito, il segnale in uscita è legato a quello in ingresso da $V_{out} = -R_f/R_1 V_{in}$, dove il segno meno (dovuto alla particolare configurazione dell'operazionale) indica un segnale in output invertito¹ rispetto a quello in ingresso, e amplificato di un fattore $G \equiv R_f/R_1$. Facendo riferimento ai valori delle resistenze R_f ed R_1 riportate in Tabella 1, l'aspettativa teorica per il guadagno del circuito è dunque

$$G = \frac{R_f}{R_1} = 10.194 \pm 0.006 \quad \text{con} \quad \sigma_G = \sqrt{\left(\frac{1}{R_1}\right)^2 \sigma_{R_f}^2 + \left(\frac{R_f}{R_1^2}\right)^2 \sigma_{R_1}^2} \quad (1)$$

3.1.1 Simulazione Spice del Circuito

Si decide di effettuare una simulazione della risposta del circuito ad un segnale sinusoidale di frequenza $f_{gen} = 1 \text{ kHz}$ in ingresso, come da configurazione sperimentale. In Figura 2 sono rappresentate due

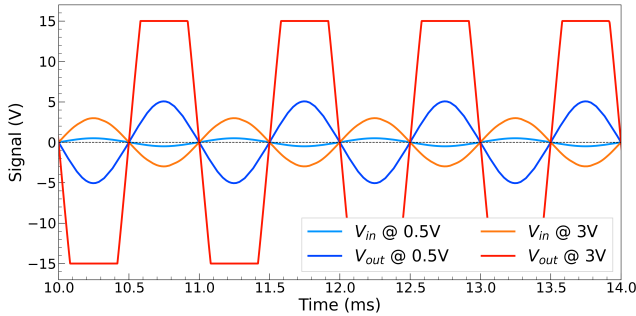


Figura 2: Simulazione Spice della risposta del circuito.

simulazioni corrispondenti a due ampiezze differenti del segnale in ingresso: la prima (in tonalità *blu*) è la risposta a $V_{gen} = 0.5 \text{ V}$, mentre la seconda (in tonalità *rossa*) a $V_{gen} = 3 \text{ V}$. Dal grafico si nota chiaramente come la risposta V_{out} ad un segnale in ingresso $V_{gen} = 0.5 \text{ V}$ sia perfettamente conforme alle aspettative: viene mantenuta la forma sinusoidale del segnale, amplificato di circa un fattore 10 ed invertito rispetto alla tensione V_{in} . Si nota inoltre come questo non si ripresenti anche nel caso della risposta a $V_{gen} = 3 \text{ V}$: il segnale in uscita presenta, infatti, i picchi di massimo e minimo

tagliati a livello $V_{sat} = \pm 15 \text{ V}$. Questo accade perchè, essendo l'amplificatore operazionale una componente attiva del circuito, è stato alimentato con una tensione continua a $\pm 15 \text{ V}$ (come riportato sopra). Per la conservazione dell'energia, allora, l'operazionale non può fornire in output una tensione maggiore di quanta ne riceve esso stesso in alimentazione. Si parla quindi di *saturazione* del segnale in uscita a $V_{sat} = \pm 15 \text{ V}$. Per quanto detto, avendo $G \approx 10$, ci si aspetta che questo fenomeno inizi a manifestarsi attorno ad un valore nominale di tensione $V_{gen} = 1.5 \text{ V}$.

3.2 Acquisizione Misure

Al fine di verificare la linearità dell'amplificatore operazionale e stimare l'amplificazione G del circuito, vengono acquisite separatamente le misure di un massimo ed un minimo sia del segnale in ingresso sia di quello in uscita facendo variare la tensione nominale erogata dal generatore partendo da 200 mV picco picco fino a 3.5 V picco picco. Per l'acquisizione vengono utilizzati i cursori di tipo tensione dell'oscilloscopio (orizzontali).

¹Ci si aspetta che i massimi del segnale in ingresso corrispondano ai minimi del segnale in uscita e viceversa.

3.3 Dati e Analisi

In questa sezione si vuole inizialmente rappresentare le misure acquisite in laboratorio riportandole in un grafico esplorativo di V_{out} contro V_{in} : da questo si cerca dunque di estrarre informazioni di carattere generale riguardo i dati a disposizione. Le coppie $\{V_{in}, V_{out}\}$ sono costruite associando, per ogni valore di tensione nominale erogata dal generatore, il massimo di V_{out} al rispettivo massimo di V_{in} (analogo per i minimi). Per quanto riportato in Sezione 3.1 ci si aspetta una distribuzione lineare delle coppie con pendenza pari all'amplificazione del circuito G : attraverso un'interpolazione lineare, quindi, è possibile estrarre una stima di tale G . Inoltre è possibile caratterizzare la linearità dell'operazionale tramite la bontà del fit e studiando l'andamento dei residui associati all'interpolazione.

3.3.1 Dataset

Si comincia riportando in Figura 3 le misure acquisite con l'oscilloscopio, alle quali (sia a V_{in} sia a V_{out}) si associa la seguente incertezza:

$$\sigma_V = \sqrt{(\sigma_L \times V/\text{div})^2 + (\sigma_k \times \text{measure})^2} \quad (2)$$

dove $\sigma_L = 0.04$ rappresenta il contributo di lettura e $\sigma_k = 1.5\%$ il contributo di scala associati all'oscilloscopio mentre V/div rappresenta la scala di acquisizione della misura.

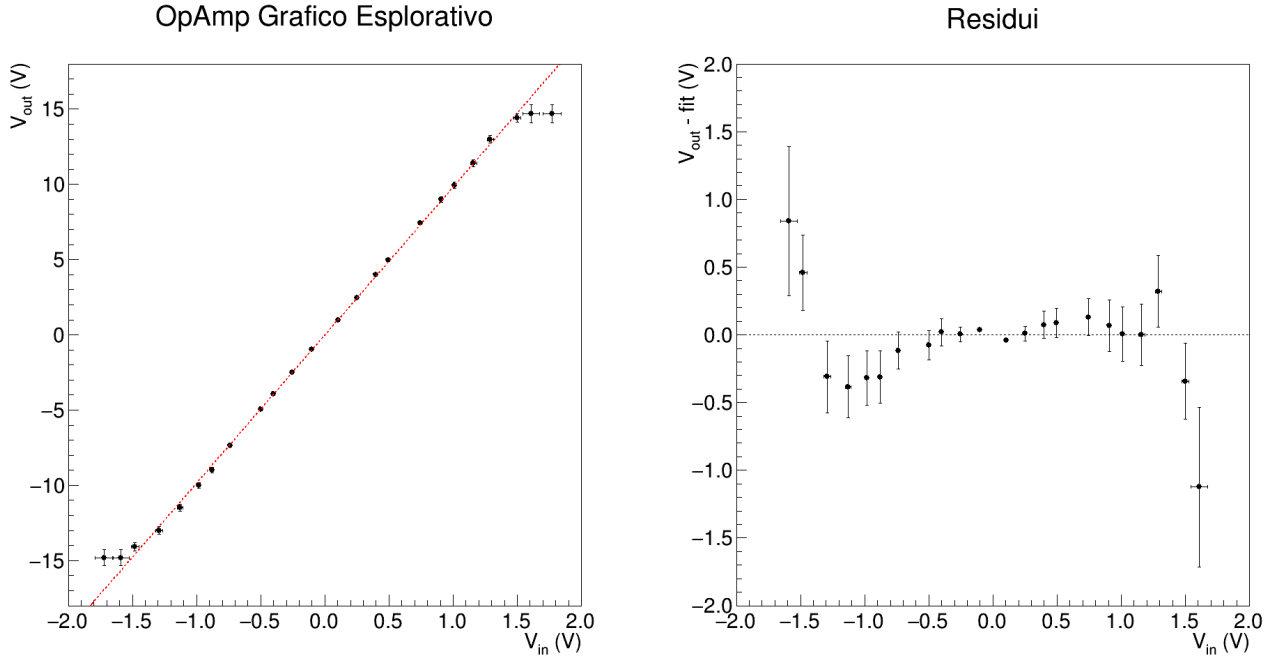


Figura 3: Grafico delle misure acquisite interpolate linearmente e relativo grafico dei residui.

Si noti inizialmente che i valori di V_{in} sono conformi a quanto erogato dal generatore: questo è sicuramente indice di una corretta acquisizione del segnale in ingresso, di una corretta configurazione del generatore (modalità "50 Ohm") e dell'oscilloscopio (attenuazione sonda 10X). Osservando poi i valori di V_{out} , si nota un'amplificazione conforme alle aspettative (circa di un fattore 10). Si osserva, inoltre, come le misure acquisite a $V_{gen} \approx 1.5$ V tendano a stabilizzarsi attorno a $V_{out} = V_{sat} = \pm 15$ V, ovvero la tensione massima che l'amplificatore operazionale può fornire in output: questo effetto di saturazione del segnale in uscita segue le previsioni esposte in Sezione 3.1.1. Spostando l'attenzione sul grafico dei residui, si può notare chiaramente che l'effetto della saturazione del segnale si traduce in outliers rispetto al trend lineare dei dati, i quali residui invece si distribuiscono ragionevolmente attorno allo zero.

3.3.2 Interpolazioni Preliminari

Si procede ora considerando il campione di misure dei massimi ed il campione di misure dei minimi separatamente, in quanto a priori non si ha la certezza che queste risentano della stessa amplificazione e che non sia presente una sistematica di offset/shift verticale tra i due dataset. Si cercherà in seguito di caratterizzare l'accordo tra i due dataset studiando la compatibilità tra i coefficienti angolari e tra le intercette della retta interpolante. Osservando le misure in Figura 3 si nota come le incertezze su V_{in} siano generalmente un ordine di grandezza inferiori rispetto a quelle su V_{out} : le prime non sono quindi trascurabili rispetto alle seconde. Per tenere conto dell'incertezza su V_{in} , ci si propone allora di effettuare un fit preliminare, nel quale si considerano unicamente gli errori su V_{out} , per stimare un coefficiente angolare m . Questo viene poi utilizzato per proiettare gli errori di V_{in} lungo l'asse delle ordinate secondo

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma_{V_{\text{out}}}^2 + m^2 \sigma_{V_{\text{in}}}^2} \quad (3)$$

I coefficienti angolari di interesse sono dunque riportati in Tabella 2.

Coefficienti Angolari Preliminari	
Campione di Massimi	Campione di Minimi
$m = 10.02 \pm 0.09$	$m = 10.16 \pm 0.09$

Tabella 2: Valori dei coefficienti angolari restituiti dalle interpolazioni preliminari.

3.3.3 Linearità e Amplificazione

Alla luce di quanto trovato nella sezione precedente, si ripetono le interpolazioni lineari associando ai punti un errore dato da Equazione 3 ed i parametri restituiti dai fit sono riportati in Tabella 3.

Fit Parameters			
Campione di Massimi			
Offset (V)	Slope	χ^2/ndf	$\sigma_{\text{posteriori}}$ (V)
-0.06 ± 0.04	10.02 ± 0.14	0.98/7	0.10
Campione di Minimi			
Offset (V)	Slope	χ^2/ndf	$\sigma_{\text{posteriori}}$ (V)
0.07 ± 0.04	10.16 ± 0.14	0.67/7	0.07

Tabella 3: Parametri della retta interpolante, il valore del χ^2 associato al fit e l'errore a posteriori relativo alla distribuzione dei dati.

Dai parametri presentati in Tabella 3 si riescono ad estrarre numerose informazioni riguardo ai due campioni di dati. Inizialmente, si vuole far notare come i due coefficienti angolari siano in ottima compatibilità tra loro: $\lambda = 0.7$. Da questo si può assumere che i due dataset risentano della stessa amplificazione G , come da aspettative. Successivamente, si può notare invece che le due intercette delle rette interpolanti sono in leggera compatibilità con lo zero ($\lambda \approx 1.5$), mentre tra loro presentano una compatibilità $\lambda = 2.4$, che fa sorgere l'idea di una possibile sistematica di offset/shift verticale tra i due dataset (computando la differenza tra le due intercette si trova uno sfalsamento $d = 0.13 \pm 0.05$ V). Osservando poi il valore del χ^2 , si ritrova in per entrambi i campioni $\chi^2/\nu < 1$ (con $\nu \equiv \text{ndf}$ il numero di gradi di libertà, che coincide con il valore di aspettazione $E(\chi^2)$). Ricordando che le incertezze sul guadagno verticale dell'oscilloscopio sono almeno parzialmente correlate, gli errori associati alle misure sono tra loro correlati: questo spiega i valori di χ^2 eccessivamente ridotti. Un'interpolazione di dati con incertezze correlate restituisce parametri con errori sottostimati, in quanto il fit non tiene conto

della correlazione tra incertezze delle misure. Si può dunque assumere che i parametri *slope* e *offset* riportati in Tabella 3 presentino in realtà una compatibilità maggiore, proprio a causa di una possibile sottostima dell'errore sui parametri. Si vuole allora assumere che i due campioni risentano della stessa amplificazione e che non siano tra loro sfalsati verticalmente in modo significativo: segue quindi un tentativo di "unificazione" del campione di dati ed un'interpolazione lineare unica che tenga conto sia dei massimi che dei minimi. Il grafico rappresentante i due dataset unificati con relativa interpolazione lineare è mostrato in Figura 4.

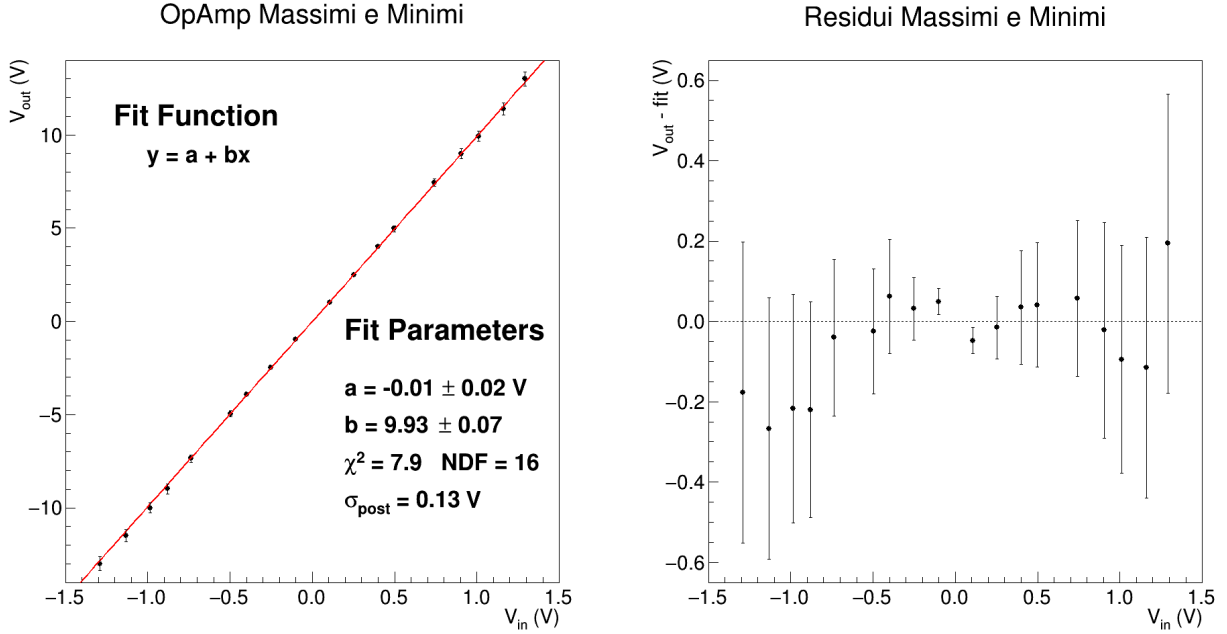


Figura 4: A sinistra: grafico rappresentante il dataset dei massimi ed il dataset dei minimi uniti assieme, con relativa retta interpolante e parametri del fit. A destra: grafico dei residui $V_{out} - \text{fit}$.

Si osserva inizialmente che l'intercetta della retta interpolante è ora ben compatibile con zero, mentre il coefficiente angolare presenta un errore relativo $\sigma_b/b = 0.7\%$, che si può continuare ad assumere sottostimato: la correlazione tra gli errori di scala, infatti, si può notare chiaramente dall'andamento "a farfalla" delle barre d'errore nel grafico dei residui. Il valore del χ^2 migliora leggermente rispetto alle interpolazioni dei dataset separati: la compatibilità con il valore di aspettazione risulta essere $Z = 1.4$. L'errore a posteriori, inoltre, si trova in una zona intermedia rispetto alla gamma di errori associati alle misure: non potendo eliminare la correlazione tra le incertezze si può affermare dunque che l'errore è in media stimato correttamente e l'oscilloscopio lavora entro le specifiche. I residui, infatti, si posizionano tutti entro il loro errore, alcuni anche abbondantemente. Focalizzandosi ora sulla stima del coefficiente angolare si nota che questo, $m = 9.93 \pm 0.07$, pur essendo ben compatibile con i risultati esposti in Tabella 3 relativi ai fit dei due campioni di misure considerati separatamente, si trova essere sensibilmente minore di entrambi: ci si sarebbe aspettato, invece, di trovare un valore intermedio unificando i due campioni di misure. Osservando poi il grafico dei residui, si può notare un andamento leggermente anomalo, quasi parabolico, avente concavità rivolta verso il basso. Si ipotizza dunque che l'assunzione fatta in precedenza riguardo la presenza di una sistematica di offset/shift verticale tra i due dataset trascurabile necessiti di essere rivisitata. Per approfondire maggiormente la questione, si decide di computare le grandezze "picco picco" delle tensioni in ingresso V_{in} e in uscita V_{out} secondo $V_{pp} = V^{\max} - V^{\min}$. Per quanto riguarda l'errore da associare alle grandezze picco picco, si ricorda che l'oscilloscopio misura la differenza Δ tra i due cursori con una precisione ancora maggiore rispetto alla singola misura. Si decide dunque di non aggiungere il fattore moltiplicativo $\sqrt{2}$ alla propagazione presentata in Equazione 2, al fine di evitare sovrastime eccessive dell'errore. Si procede ora come mostrato in Sezione 3.3.2, effettuando inizialmente un fit lineare preliminare considerando solo gli errori

su V_{pp_out} e, utilizzando il coefficiente angolare restituito da tale interpolazione, si prosegue proiettando gli errori secondo Equazione 3. Si ripete quindi il fit, che viene rappresentato in Figura 5. Osservando il grafico dei residui, si nota immediatamente come ora l'andamento anomalo è del tutto assente ed i punti si distribuiscono in modo ottimale attorno allo zero. Rimane, chiaramente, il tipico andamento crescente delle barre d'errore, indice che le incertezze continuano a risentire della correlazione tra esse. Il valore del χ^2 è decisamente basso rispetto al numero di gradi di libertà, come suggerito dal grafico dei residui in cui si nota chiaramente come la distanza punto-retta sia ampiamente compresa entro la barra d'errore del dato. L'errore a posteriori è appena maggiore dell'incertezza associata al primo punto, mentre diventa notevolmente inferiore per i successivi.

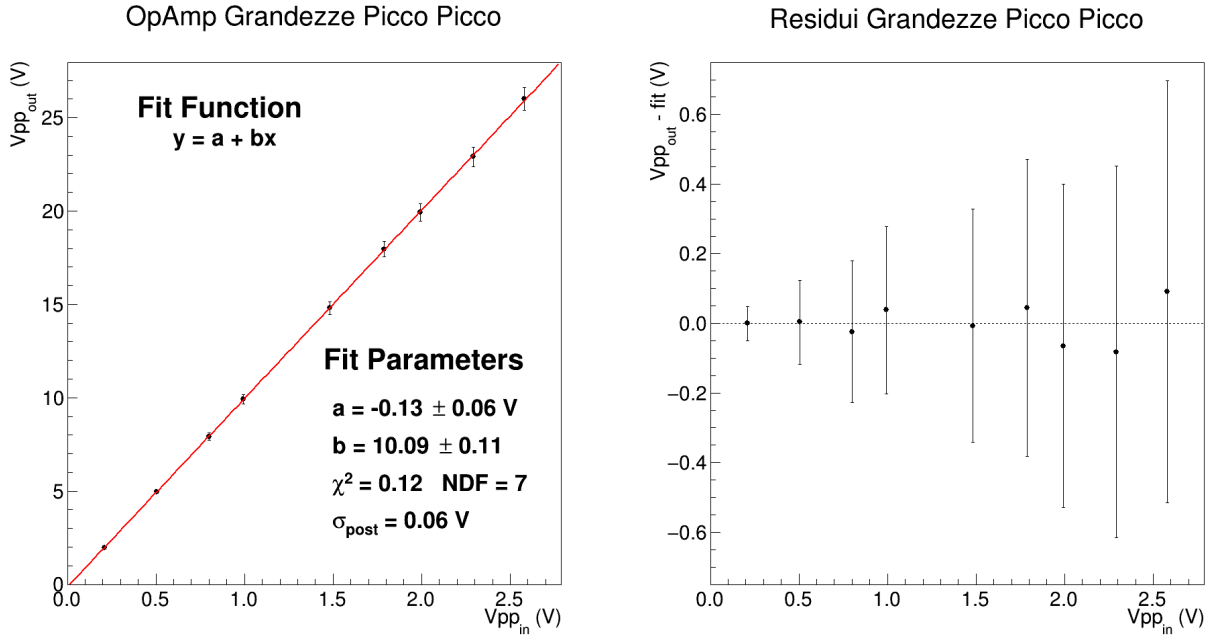


Figura 5: A sinistra: grafico rappresentante il dataset delle grandezze picco picco, con relativa retta interpolante e parametri del fit. A destra: grafico dei residui $V_{pp_out} - \text{fit}$.

Il valore dell'intercetta, scarsamente compatibile con lo zero, suggerisce una conferma all'ipotesi un una sistematica di offset/shift verticale tra i due dataset non trascurabile. Il coefficiente angolare, invece, è perfettamente in linea con i parametri ottenuti considerando i due dataset separatamente: calcolando la media pesata dei due, infatti, si trova $\langle m \rangle_{\text{max, min}} = 10.09 \pm 0.10$ e risulta avere una compatibilità estremamente elevata con il coefficiente angolare riguardante il dataset delle grandezze picco picco ($\lambda = 0.01$). Si assume dunque che questi due valori ($\langle m \rangle_{\text{max, min}}$ ed il coefficiente angolare del campione di grandezze picco picco m_{pp}) rappresentino una soddisfacente stima dell'amplificazione G del circuito. Per quanto riguarda la linearità dell'amplificatore operazionale, invece, i valori estremamente ridotti del χ^2 non permettono nè di confermare l'ipotesi di linearità nè di poterla rigettare. Si ripone allora maggior attenzione alla distribuzione delle misure attorno alla retta (o meglio alla distribuzione dei residui attorno allo zero) che si ritiene invece, in questa occasione, determinante: il campione di misure picco picco suggerisce una soddisfacente distribuzione lineare dei dati.

3.3.4 Confronto tra Stime di G

Si vuole ora esporre e confrontare le stime dell'amplificazione del circuito, rappresentando i valori del guadagno G in Figura 6. Partendo dal primo punto a sinistra, cioè la stima di G tramite le misure dirette delle resistenze R_f e R_1 (riportate in Tabella 1), si nota come questo presenti un errore nettamente inferiore a confronto con le rimanenti stime. Quest'ultime risultano essere quantità compatibili con 1) $G = R_f/R_1$, ad eccezione di 4) quella ottenuta considerando assieme sia i massimi sia i minimi

($\lambda = 3.7$). In particolare, si può osservare come la media pesata 5) tra le stime dell'amplificazione ottenute considerando i campioni separati e la stima ottenuta con le grandezze picco picco 6) si trovino in eccellente accordo: si può concludere dunque che, eliminando la sistematica di offset/shift verticale tra i due dataset (sia attraverso grandezze picco picco, sia considerando la media pesata dei risultati ottenuti dai campioni separati), la stima dell'amplificazione del circuito risulta essere compatibile con le aspettative preliminari. Si assume in ogni caso che l'errore su G sia sottostimato a causa della correlazione delle incertezze: si preferisce dunque la stima ritrovata considerando le tensioni picco picco 6), in quanto presenta un errore relativo leggermente maggiore.

4 Filtro Attivo - Circuito Derivatore

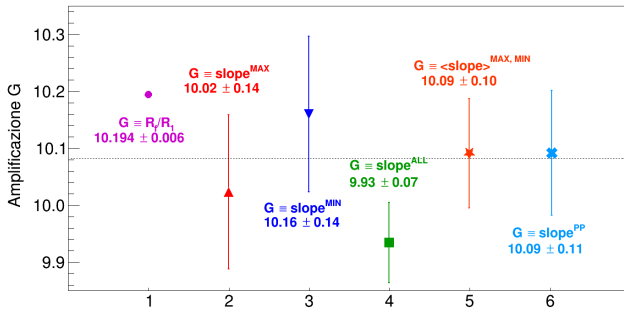


Figura 6: Stime di G . Da sinistra: 1) partendo dalle misure dirette delle resistenze; 2) come coefficiente angolare del dataset di massimi; 3) come coefficiente angolare del dataset di minimi; 4) come coefficiente angolare del dataset unificato; 5) come media pesata di 2 e 3; 6) come coefficiente angolare del dataset delle grandezze picco picco.

Ci si propone di studiare il comportamento *in frequenza* di un circuito simile a quello considerato in Sezione 3, con l'aggiunta di un condensatore C_1 in serie alla resistenza R_1 : questo lo rende dunque un filtro (attivo, in quanto è sempre presente l'amplificatore operazionale) passa alto, derivatore a basse frequenze.

4.1 Configurazione Sperimentale

Utilizzando la stessa configurazione circuitale rappresentata in Figura 1, viene aggiunta la capacità $C_1 = 0.977 \pm 0.017 \text{ nF}$ (misurata direttamente utilizzando il multimetro digitale a fondo scala 1 nF) in serie alla resistenza R_1 , tra essa e l'amplificatore operazionale. Nel dominio delle frequenze la funzione di trasferimento $H(s) = V_{\text{out}}(s)/V_{\text{in}}(s)$ del circuito risulta essere

$$H(s) = -\frac{R_f}{R_1} \frac{s}{s + \omega_0} \quad \text{con} \quad \omega_0 = \frac{1}{R_1 C_1} \quad (4)$$

Si nota dunque che il termine $-\frac{R_f}{R_1}$ è esattamente il guadagno G (il segno meno è sempre legato al fatto che l'operazionale è posto in configurazione invertente) del circuito studiato in Sezione 3, mentre il termine $\frac{s}{s + \omega_0}$ risulta essere analogo alla funzione di trasferimento di un circuito passa alto passivo. Ci si aspetta dunque che a basse frequenze il circuito si comporti come un derivatore, mentre, essendo un passa alto, ci si aspetta si ottenga il massimo guadagno per $s \rightarrow \infty$ e che questo sia esattamente G . Si imposta allora il generatore in modo da erogare un'onda sinusoidale di ampiezza 1 V picco picco (che verrà mantenuta costante) e frequenza variabile tra 100 Hz e 1 MHz per lo studio della risposta in frequenza del circuito. Avendo misurato le componenti circuitali direttamente con i multimetri, la stima attesa del massimo guadagno è già stata esplicitata in Equazione 1, mentre ci si aspetta una frequenza di taglio

$$f_t = \frac{1}{2\pi R_1 C_1} = 20.1 \text{ kHz} \quad \sigma_{f_t} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{1}{C_1 R_1^2}\right)^2 \sigma_{R_1}^2 + \left(\frac{1}{C_1^2 R_1}\right)^2 \sigma_{C_1}^2} = 0.3 \text{ kHz} \quad (5)$$

4.2 Acquisizione Misure

Per studiare la risposta in frequenza del circuito, si fa variare la frequenza del segnale in ingresso da 100 Hz a 1 MHz e vengono acquisite misure di tensione picco picco sia del segnale in ingresso sia di

quello in uscita: inizialmente viene effettuata un'acquisizione preliminare con il fine di individuare gli intervalli di frequenze più interessanti, quali l'intorno della frequenza di taglio e l'intorno del massimo di amplificazione (si trova infatti che questo non viene assunto al tendere della frequenza verso valori sempre maggiori, ma piuttosto si ha un fenomeno di attenuamento di amplificazione oltre un certo range di frequenze). Così facendo, si riesce a fornire una stima approssimativa della frequenza di taglio. Infatti, infittendo le misure in tali intervalli si trova l'amplificazione massima sperimentale ($G_{\text{per}} \approx 9.8$): questa viene divisa per un fattore $\sqrt{2}$ e, successivamente, si ricerca la frequenza che corrisponde a tale amplificazione ridotta, sempre infittendo le misure nell'intorno della frequenza di taglio. Si trova quindi $f_{t, \text{per}} \approx 19.5 \text{ kHz}$, leggermente minore rispetto a quanto trovato in Equazione 5.

4.3 Dati e Analisi

In questa sezione si vuole studiare il grafico di Bode relativo alle misure acquisite sperimentalmente sia con il fine di estrarre informazioni di carattere generale sui dati, sia per fornire una stima della frequenza di taglio attraverso l'interpolazione delle misure.

4.3.1 Grafico di Bode

Date le misure di tensione V_{in} e V_{out} , viene calcolata la funzione di trasferimento

$$H = \frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} \quad \sigma_H = H \sqrt{\left(\frac{\sigma_L \times V_{\text{in}}/\text{div}}{V_{\text{in}}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L \times V_{\text{out}}/\text{div}}{V_{\text{out}}}\right)^2 + 2\left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2} \quad (6)$$

dove $\sigma_L = 0.04$ rappresenta l'incertezza di lettura associata all'oscilloscopio, i termini V_{in}/div e $V_{\text{out}}/\text{div}$ corrispondono al numero di volt per divisione per il canale di acquisizione rispettivamente del segnale in ingresso e del segnale in uscita, mentre $\sigma_k = 1.5\%$ rappresenta l'incertezza di guadagno associata all'oscilloscopio: quest'ultima viene considerata in quanto le misure non sono state acquisite utilizzando un'unica scala e, inoltre, sono state acquisite utilizzando due diversi canali. Si assume che k sia mediamente pari all'unità. L'incertezza sulla frequenza dell'onda erogata dal generatore si assume trascurabile. Si rappresenta allora in Figura 7 il grafico di Bode delle misure acquisite assieme ai punti simulati con LTSpice. Osservando il grafico si nota che sono state effettuate due interpolazioni: la prima lineare, per la quale sono state considerate le prime tre misure, mentre la seconda parabolica, per la quale sono state considerate le misure nell'intorno del massimo di amplificazione. La strategia per stimare la frequenza di taglio è la seguente: si stima il massimo della funzione di trasferimento come vertice della parabola, si considera quindi la retta orizzontale $y = H_{\text{max}}$ e si calcola il punto di intersezione con la retta $y = a + bx$ interpolante le prime tre misure crescenti. In questo modo, la coordinata x del punto di intersezione coincide con la frequenza di taglio del circuito. Prima di discutere la frequenza di taglio del circuito, tuttavia, si vogliono fare delle considerazioni di carattere più generale sul campione di dati rappresentato in Figura 7. Per la parte lineare (a sinistra) si può notare un soddisfacente accordo tra misure sperimentali e dati simulati, e lo stesso vale nell'intorno della frequenza di taglio e nell'intorno del massimo della funzione di trasferimento. Per questo motivo si può affermare che, siccome nell'analisi per la ricerca della frequenza di taglio vengono utilizzate le misure che sono in accordo con le aspettative, i risultati sono da considerarsi significativi.



Figura 7: Grafico di Bode delle misure sperimentali e dei dati simulati. Le misure sperimentali vengono interpolate con una retta $y = a + bx$ e con una parabola $y = cx^2 + dx + e$. Vengono mostrati anche i residui, rispettivamente per la retta e per la parabola.

Si nota tuttavia che la retta presenta un coefficiente angolare ($b = 19.03 \pm 0.16$ dB/dec) leggermente minore a confronto con le aspettative teoriche ($b_{th} = 20$ dB/dec): questo potrebbe dunque incidere sulla stima della frequenza di taglio restituendo un valore di f_t leggermente maggiore rispetto alle aspettative. Spostando ora l'attenzione verso la zona destra del grafico, si vede chiaramente un effetto di attenuazione tipico di un filtro passa banda. Questo comportamento, infatti, si trova in disaccordo con la simulazione Spice del circuito ed è, con buona probabilità, indice della presenza di una capacità (non considerata nella simulazione) in parallelo al circuito: cavi, sonde, breadboard, oscilloscopio.

Effettuando un'ulteriore simulazione, aggiungendo una capacità $C_2 = 7$ pF in parallelo alla resistenza di feedback R_f , si trova un notevole miglioramento nell'accordo tra punti simulati e misure sperimentali: questo conferma dunque che l'effetto di attenuazione della funzione di trasferimento del circuito è dovuto a dei contributi capacitivi non trascurabili posti in parallelo ad esso. In Figura 8 è messo in evidenza questo confronto tra i dati sperimentali e quelli simulati, sia trascurando la capacità C_2 (in arancione) sia invece tenendone conto (in azzurro). Si procede ora nella ricerca della frequenza di taglio del circuito. Si calcola allora

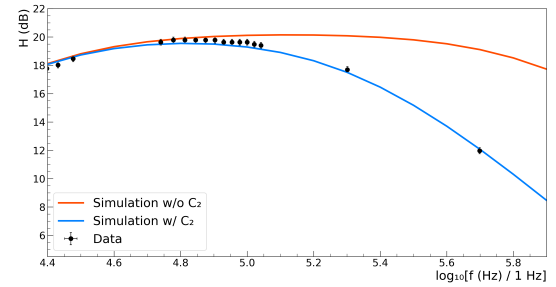


Figura 8: Confronto tra misure sperimentali e punti simulati con LTSpice.

il massimo della funzione di trasferimento, facendo riferimento ai parametri del fit parabolico, come $H_{max} = -\frac{d^2-4ce}{4c} = 19.79 \pm 0.05$ dB, dove nel computo dell'errore sono state tenute in considerazione le opportune covarianze tra i parametri. Successivamente, si calcola il punto di intersezione tra la retta orizzontale passante per H_{max} e la retta interpolante le prime misure secondo $x_{int} = \frac{H_{max}-a}{b} = 4.370 \pm 0.017$ dec (anche in questo caso nel computo dell'errore sono state tenute in considerazione le opportune covarianze tra i parametri a e b della retta). Convertendo quanto trovato in Hertz, la frequenza di taglio così stimata risulta essere $f_t = 23.4 \pm 0.9$ Hz.

Tale valore è però incompatibile sia con le aspettative teoriche, sia con quanto trovato sperimentalmente, seppur in modo approssimativo. Si vuole allora procedere stimando la frequenza di taglio utilizzando un metodo alternativo, con il fine di verificare se questa incompatibilità con le aspettative risulta essere ricorrente. In particolare, si vuole considerare sia la frequenza sia la funzione di trasferimento in scala lineare ed effettuare un fit del tipo $y = mx + q$ in uno stretto intorno della frequenza di taglio. Ricordando poi che la frequenza di taglio è tale da attenuare la funzione di trasferimento di un fattore $\sqrt{2}$, la prima può essere ricavata da

$$\frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} = mx + q \quad \Rightarrow \quad f_t = \frac{\frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} - q}{m} \quad (7)$$

Per effettuare il fit, il contributo di scala presente in Equazione 6 non viene considerato in quanto non altera l'andamento dei residui. Il contributo viene quindi aggiunto in secondo luogo sui parametri dell'interpolazione, in particolare nel calcolo di f_t come segue

$$\sigma_{f_t} = \sqrt{\left(\frac{\partial f_t}{\partial m}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{\partial f_t}{\partial q}\right)^2 \sigma_q^2 + 2 \left(\frac{H_{\max}}{m\sqrt{2}}\right)^2 \sigma_k^2 + 2 \left(\frac{\partial f_t}{\partial m}\right) \left(\frac{\partial f_t}{\partial q}\right) \text{cov}(m, q)} \quad (8)$$

dove appunto $\sigma_k = 1.5\%$ rappresenta il contributo di scala. Si sceglie allora come $H_{\max} = 9.76 \pm 0.05$ il valore trovato attraverso il fit parabolico precedente (in scala lineare) e si estrapolano i parametri m e q dal seguente fit nell'intervallo di frequenze 17 - 24 kHz. Si vuole far notare che in Equazione 8 non è stato considerato il termine relativo ad H_{\max} per comodità, in quanto tale contributo si ritrova essere due ordini di grandezza inferiore rispetto agli altri termini e non modifica in quantità apprezzabile la stima finale dell'errore.



Figura 9: Interpolazione lineare delle misure in un intorno della frequenza di taglio e relativo grafico dei residui.

Si nota immediatamente una leggera tendenza paraolica dell'andamento dei residui, tuttavia, pur avendo trascurato il contributo di scala nel calcolo delle incertezze, i punti si distribuiscono tutti entro il loro errore. Il χ^2 risulta in ogni caso compatibile con il suo valore di aspettazione ($\lambda = 1.2$), pur segnalando una possibile sovrastima dell'errore sulle misure (ipotesi assecondata anche dall'errore a posteriori, che risulta essere circa 1/5 rispetto alle incertezze assegnate ai dati). La stima della frequenza di taglio che si ottiene è dunque $f_t = 19.8 \pm 0.8 \text{ kHz}$: questa risulta essere in ottimo accordo con le previsioni teoriche ($\lambda = 0.4$) e, di conseguenza, si trova essere scarsamente compatibile con quanto ricavato studiando il grafico di Bode ($\lambda = 3.0$).

5 Arduino

In questa sezione si vuole effettuare una calibrazione della scheda Arduino Due. In particolare, si vuole quantificare il sampling rate dell'ADC della scheda e determinare la funzione di calibrazione in tensione, ovvero $V = a + b \cdot \text{ADC}$ dove V è il valore in Volt del segnale, ADC è la tensione in ADC counts acquisita da Arduino, mentre a e b sono i parametri di calibrazione. Si ricorda che la scheda in questione presenta un ADC a 12 bit, ovvero 4096 valori, e l'*operating voltage* caratteristico (ovvero il valore massimo di tensione che può leggere in input) è $V_{\text{op}} = 3.3 \text{ V}$.² La più piccola variazione di tensione rilevabile in ADC counts risulta dunque essere circa 0.8 mV. Ci si aspetta dunque di trovare una funzione di calibrazione in tensione con un coefficiente angolare attorno a tale valore.

5.1 Sampling Rate

Si comincia configurando il segnale di trigger. Si imposta quindi nel canale CH2 del generatore un impulso quadrato di durata 10 μs , frequenza 1 kHz e altezza 2 V a partire dallo zero. Sul canale CH1 del generatore, invece, si imposta un'onda quadra di ampiezza 1 V partendo da zero con frequenza 5 kHz. Conoscendo il periodo dell'onda quadra in ingresso ($T = 1/f$), il sampling rate viene computato come $S = N/T = N f$ con N il numero di misure acquisite in un periodo. Per calcolare N viene computata la derivata numerica della forma d'onda: questa presenterà dei picchi positivi quando la funzione passa da zero a 1 V e picchi negativi quando scende da 1 V a zero. Il numero di acquisizioni in un periodo sarà allora il numero di punti compresi tra due picchi positivi della funzione derivata. Si trova allora un sampling rate $S = 955000 \text{ s}^{-1}$, ovvero 955000 acquisizioni al secondo.

5.2 Calibrazione in Tensione

Si vuole ora verificare la linearità dell'ADC interno alla scheda e stimare i parametri a , b della funzione di calibrazione, in quanto si è interessati a convertire il segnale acquisito da ADC counts in Volt. Si acquisiscono allora diverse forme d'onda facendo variare la tensione del generatore, avendo cura di misurare il segnale erogato con i cursori dell'oscilloscopio, in quanto può non essere esattamente uguale a quello nominale indicato dal generatore. Si rappresentano in grafico i valori di tensione V misurati sperimentalmente contro la media dei punti appartenenti ai picchi della relativa forma d'onda (si decide di non considerare unicamente il massimo della forma in quanto è possibile si tratti di una fluttuazione). Per quanto riguarda le incertezze associate ai dati, si associa lungo y l'errore riportato in Equazione 2 (misure acquisite utilizzando i cursori), mentre si assume che l'incertezza di acquisizione delle misure di Arduino sia trascurabile rispetto a quella dell'oscilloscopio e non viene quindi considerata. Effettuando poi un'interpolazione lineare, riportata in Figura 10, si ricavano l'offset (cioè quanti Volt corrispondono allo zero dell'ADC) ed il coefficiente angolare (cioè come scalano i Volt rispetto all'ADC). Osservando il grafico dei residui, si nota un marcato andamento anomalo dei punti a tensioni maggiori, oltre i 2 V: la scheda, cioè, risponde in modo leggermente diverso a seconda della tensione in ingresso. Questo è, molto probabilmente, dovuto al circuito di protezione dei pin di ingresso (limitatore di tensione a diodi, utile per evitare di bruciare la scheda) che ne altera la risposta avvicinandosi a tensioni pericolose. Si prova allora ad effettuare nuovamente l'interpolazione rimuovendo i punti relativi a tensioni in ingresso maggiori di 2 V: nonostante l'andamento dei residui migliori, anche il primo punto (tensione in ingresso pari a 200 mV) si trova essere fuori trend. Si ottengono quindi due zone in cui la linearità dell'ADC risulta essere ottimale: la prima tra 500 mV e 1.8 V (parametri di calibrazione: $a = -0.59 \pm 0.02 \text{ V}$ e $b = 0.776 \pm 0.013 \text{ mV/a.u.}$) mentre la seconda tra 1.8 V e 2.5 V (parametri di calibrazione: $a = -0.44 \pm 0.15 \text{ V}$ e $b = 0.73 \pm 0.04 \text{ mV/a.u.}$).

²<https://www.arduino.cc/en/pmwiki.php?n=Main/arduinoBoardDue>



Figura 10: Grafico di calibrazione in tensione e relativo grafico dei residui.

6 Conclusioni

Ripercorrendo brevemente quanto riscontrato nell'analisi effettuata, si vuole cominciare osservando che non è stato possibile quantificare la linearità di un amplificatore operazionale studiando il χ^2 restituito dalle interpolazioni lineari, in quanto la correlazione tra errori di scala dell'oscilloscopio rendono i χ^2 decisamente ridotti rispetto al valore di aspettazione. L'andamento del grafico dei residui, in particolare ci si riferisce al fit delle grandezze picco picco in Figura 5, tuttavia conferma una soddisfacente linearità dell'operazionale. Per quanto riguarda lo studio dell'amplificazione del circuito (rappresentato in Figura 1), sono stati trovati risultati conformi tra loro e con le aspettative teoriche considerando il campione di massimi ed il campione di minimi separatamente. A causa di sistematiche di offset verticale tra i due campioni di misure il dataset unificato (massimi e minimi) porta ad un'amplificazione, seppur leggermente compatibile, sensibilmente differente dalle precedenti. L'amplificazione estrapolata considerando le grandezze picco picco, invece, risulta essere conforme sia con le aspettative teoriche sia con le due stime ricavate considerando i campioni separati: siccome l'errore sulla stima dell'amplificazione è, con buona probabilità, sottostimato, si sceglie come miglior stima di quest'ultima proprio quella ottenuta considerando le grandezze picco picco $G = 10.29 \pm 0.11$ in quanto presenta un errore leggermente maggiore rispetto alla media pesata tra i valori di amplificazione ottenuti considerando il campione di massimi ed il campione di minimi separatamente. Spostando ora l'attenzione verso il circuito derivatore, dall'analisi in frequenza è emerso un comportamento più fedele ad un filtro passa banda piuttosto che un passa alto (cioè l'aspettativa teorica) e si è ipotizzato che la causa fosse la presenza di una capacità parassita in parallelo al circuito. La frequenza di taglio estrapolata attraverso la prima strategia si è ritrovata essere scarsamente compatibile con le aspettative teoriche, e la causa di ciò potrebbe essere una campionatura troppo rarefatta a basse frequenze che ha portato ad una stima non ottimale della retta a 20 dB/dec. L'interpolazione lineare ristretta all'intorno della frequenza di taglio, nel quale la campionatura è sufficientemente fitta, invece restituisce una stima $f_t = 19.8 \pm 0.8 \text{ kHz}$ in ottimo accordo con le aspettative. Si prende dunque quest'ultima come miglior stima della frequenza di taglio. Per quanto riguarda la calibrazione della scheda Arduino Due, infine, si è stimato un sampling rate di 955000 acquisizioni al secondo e una funzione di calibrazione conforme alle aspettative, ovvero con un coefficiente angolare $m = 0.766 \pm 0.013 \text{ mV/adu counts}$ e un offset $q = -0.59 \pm 0.02 \text{ V}$ per valori di tensione in ingresso sotto i circa 2 V.