ZUSAMMENFASSUNG

GRAFISCHE DATENVERARBEITUNG

SOMMERSEMESTER 2025

Niklas Conrad
Fakultät Informatik
Bachelor of Science Inforamtik
Mai 2025

NIKLAS CONRAD
Grafische Datenverarbeitung

FAKULTÄT INFORMATIK:
https://www.hs-schmalkalden.de/hochschule/fakultaeten/fakultaet-informatik

INHALTSVERZEICHNIS

1 GRUNDKONZEPTE DER COMPUTERGRAFIK

SEPARATIONSPRINZIP Das Separationsprinzip trennt klar zwischen Modellierung, Szene und Bildsynthese. Zunächst werden Objekte unabhängig von der Szene erstellt und definiert. Danach wird die Szene komponiert, indem man diese Objekte anordnet und ihre Beziehungen festlegt. Schließlich erfolgt die Bildsynthese, bei der die eigentliche Darstellung (Rendering) entsteht. Szene

SZENE Eine Szene beschreibt eine konkrete Zusammenstellung von Objekten, Lichtquellen, Kameraposition und weiteren grafischen Elementen. Sie bildet die Grundlage für die Erstellung eines computergenerierten Bildes. Betrachter

BETRACHTER Der Betrachter (auch „virtuelle Kamera“) bestimmt den Blickwinkel und Sichtbereich auf eine Szene. Durch seine Position, Ausrichtung, Brennweite und Perspektive definiert der Betrachter, wie die Szene wahrgenommen und später gerendert wird. Bildsynthese

BILDSYNTHESE Bildsynthese (auch Rendering genannt) bezeichnet den Prozess, aus einer definierten Szene ein sichtbares Bild zu erzeugen. Es gibt verschiedene Techniken der Bildsynthese:

- Rasterisierung
- Raytracing (Strahlenverfolgung)
- Radiosity

Je nach gewählter Technik werden Realismusgrad und Berechnungsaufwand unterschiedlich beeinflusst.

LICHT UND OBERFLÄCHEN Das Zusammenspiel von Licht und Oberflächen bestimmt, wie Objekte visuell erscheinen. Lichtquellen (z. B. Punktlichter, gerichtetes Licht) interagieren mit Materialien der Oberflächen durch:

- Reflexion (Spiegelung, diffus, spekular)
- Absorption (Licht wird geschluckt)
- Transmission (Durchdringung, Transparenz)

Dadurch entstehen Farbe, Schatten und Textur auf den dargestellten Objekten.

LICHT ALS GLOBALES PHÄNOMEN berücksichtigt, dass Licht nicht nur direkt auf Oberflächen trifft, sondern indirekt weiter reflektiert und gestreut wird. Diese globalen Effekte umfassen:

- Indirekte Beleuchtung
- Weiche Schatten
- Farbliche Interaktion zwischen Objekten (Farbabstrahlung)

Die realitätsnahe Simulation solcher globalen Lichtphänomene erfordert komplexere Methoden wie Global Illumination, Radiosity oder Photon Mapping.

2 MODELLE

2.1 THEORETISCHE GRUNDLAGEN

2.1.1 Modellbildung in der Computergrafik

In der Computergrafik werden reale, oft komplexe Objekte und Umgebungen in einfachere mathematische und symbolische Modelle übersetzt. Dies dient sowohl zur effizienten und präzisen Abbildung komplexer Geometrien, als auch der Reduzierung von Datenmengen durch Abstraktion.

BEISPIEL

Ein Kreis in der Mathematik wird allgemein durch die implizite Gleichung $X^2 + Y^2 = R^2$ beschrieben. Dabei beschreibt ***R*** den Radius des Kreises. Diese Form nennt man implizit, weil nicht explizit definiert wird, wie *x* und *y* einzeln bestimmt werden, sondern nur ihr Verhältnis. Für die Computergrafik (also zur praktischen Nutzung in Programmen) wird oft eine parametrische Darstellung verwendet. Diese Form beschreibt explizit die Positionen auf dem Kreis durch einen Winkelparameter α:

$$x(\alpha) = R \cdot \sin(\alpha), \qquad y(\alpha) = R \cdot \cos(\alpha)$$

Hier ist α ein Winkel, welcher typischerweise Werte zwischen 0 und 2π annimmt. Die Wahl der Schrittweite von α bestimmt die Genauigkeit der Modellierung. Kleinere Schrittweiten ergeben präzisere Kreismodelle mit mehr Vertices, aber erhöhen den Rechen- und Speicheraufwand.

2.1.2 Rekonstruktion

Unter Rekonstruktion versteht man in der Computergrafik die Wiederherstellung einer visuellen Darstellung aus symbolisch gespeicherten Modellen oder Rasterbildern. Rasterbilder sind pixelbasierte Bilder, welche das Gehirn visuell zu einer zusammenhängenden Struktur rekonstruiert. Rekonstruktion in digitaler Bildverarbeitung erfolgt mithilfe sogenannter Deskriptoren, welche charakteristische Merkmale eines Objekts beschreiben (z.B. Ecken, Kanten).

- Ein Algorithmus findet zunächst wichtige Merkmale wie Kanten oder Eckpunkte in einem Pixelbild.
- Diese Deskriptoren dienen dann als Grundlage, um das Objekt, etwa einen Kreis, wiederherzustellen oder zu rekonstruieren.
- Die Genauigkeit dieser Rekonstruktion hängt stark von den verwendeten Merkmalen (Deskriptoren), der Auflösung der Daten und den eingesetzten Algorithmen ab.

2.1.3 Dreiecksmodelle - Meshes

Meshes sind das wichtigste Modell in der digitalen 3D-Datenverarbeitung. Sie setzen sich aus mehreren grundlegenden Elementen zusammen:

VERTEX Punkt im dreidimensionalen Raum (Plural: Vertices)

EDGE Verbindung zwischen zwei Vertices – kann lineare oder interpolierte Verbindung sein

FACE Flächenstücke zwischen Kanten – häufig Dreiecke, manchmal Vierecke

POLYGON Koplanare Flächen (in derselben Ebene liegend), die eine größere Fläche bilden.

SURFACE Nutzerdefinierte Zusammenfassung von mehreren Polygonen.

SOLID Geschlossenes, "wasserdichtes" Modell (keine offenen Kanten). Alle Nachbarschaftsbeziehungen sind definiert (manifold).

WARUM DREIECKE?

- Dreiecke sind immer koplanar, wodurch Berechnungen einfacher und effizienter werden.
- Sie sind die Grundform für Grafikhardware, da sie mathematisch robust sind.

2.1.4 Einschub: Mannigfaltigkeit

MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN

Eine Mannigfaltigkeit ist ein topologisches Objekt, das lokal so aussieht, als wäre es ein Teil eines reellen euklidischen Raums R^n. Das bedeutet, dass kleine Abschnitte (Nachbarschaften jedes Punktes) einer Mannigfaltigkeit in einem Koordinatensystem dargestellt werden können, auch wenn die gesamte Struktur global komplexer ist.

FORMALE DEFINITION

Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum M, für den gilt:

- Jeder Punkt $pinM$ hat eine offene Umgebung, die homöomorph (struktur-identisch) zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist.
- Diese Eigenschaft nennt man lokal euklidisch.

BEISPIELE

1D-MANNIGFALTIGKEIT Eine Linie oder Kreislinie, denn jeder Punkt darauf hat eine Umgebung, die einer offenen Strecke im $\mathbb{R}$ entspricht.

2D-MANNIGFALTIGKEIT Eine Kugeloberfläche (Sphäre), da jede Umgebung auf der Oberfläche lokal aussieht wie ein Stück ebene Fläche.

NICHT-MANNIGFALTIGKEIT Eine Figur, in der mehrere Flächen an einer einzigen Kante zusammentreffen, sodass diese nicht mehr lokal einer Ebene oder einem Raum entspricht, ist keine Mannigfaltigkeit.

MANNIGFALTIGKEIT IN DER COMPUTERGRAFIK
In der Computergrafik und Modellierung bedeutet ein manifold mesh (mannigfaltiges Netz):

- Jeder Punkt, jede Kante und jede Fläche hat klar definierte Nachbarschaftsbeziehungen.
- Eine Kante darf maximal zwei Flächen verbinden.
- Lokale Struktur ist stets eindeutig definiert, ohne Brüche, Löcher oder überflüssige Überschneidungen.

BEISPIELE IN DER COMPUTERGRAFIK

- Würfel, Kugel, Torus (Donut): Diese Objekte haben jeweils klar definierte Oberflächen ohne offene Kanten. Jeder Punkt auf ihnen ist eindeutig lokal euklidisch → ***manifold Mesh***
- Zwei Würfel, die sich nur an einer einzelnen Kante oder einem einzelnen Vertex berühren (Kanten oder Vertices sind mehrfach belegt). → ***non-manifold Mesh***
- Eine Fläche, von der mehr als zwei andere Flächen abgehen. → ***non-manifold Mesh***

WARUM MANIFOLDS?

- Mannigfaltigkeit garantiert konsistente Berechnungen, klare Modellierung und Simulation.
- Ermöglicht zuverlässige physikalische Simulationen und Kollisionserkennung.
- Vereinfacht Berechnung von Normalen und Beleuchtung (Shading).

2.1.5 Topologie und Geometrie

GEOMETRIE beschreibt konkrete Größen, Positionen, Maße und Formen von Objekten im Raum (z.B. Koordinaten, Winkel, Längen). Geometrie ist essentiell für die präzise Abbildung von Objekten und Messungen (z.B. CAD-Systeme, Simulationen).

TOPOLOGIE beschreibt strukturelle Beziehungen unabhängig von der konkreten Form oder Größe. Sie beschäftigt sich damit, wie Elemente miteinander verbunden oder angeordnet sind (z.B. Nachbarschaftsbeziehungen). Topologie ist besonders wichtig für Modellierungsprozesse und Optimierungen (z.B. Nachbarschaftsbestimmung, Raytracing, Netzanalysen).
Ein Objekt kann dieselbe Topologie, aber unterschiedliche Geometrien haben und umgekehrt.

BEISPIELE

- Gleiche Geometrie – Unterschiedliche Topologie: Zwei identisch aussehende 3D-Modelle (z.B. Würfel), jedoch mit unterschiedlicher interner Struktur (z.B. ein Würfel hohl, einer massiv).
- Gleiche Topologie – Unterschiedliche Geometrie: Ein Würfel und ein verzerrter Würfel (Quader) haben dieselbe Anzahl an Vertices, Edges und Faces und gleiche Verbindungstopologie, unterscheiden sich aber in geometrischen Maßen (Längen, Winkel).

TOPOLOGISCHE VOLLSTÄNDIGKEIT beschreibt, wie gut oder vollständig die Beziehungen zwischen Elementen in einem Modell definiert sind.

- Je mehr Informationen über Topologie (räumliche Beziehungen) vorhanden sind, desto leichter lassen sich Geometrien manipulieren oder rekonstruieren.
- Vollständige Topologie erlaubt z.B. einfache Änderungen am Modell (z.B. Ersetzen von Teilen), ohne dass die Struktur neu berechnet werden muss.

TOPOLOGISCHE BESTIMMTHEIT
Je nach vorhandenem topologischem Informationsgehalt entstehen unterschiedliche Arten von Modellen:

1. Punktwolken (Point Clouds) – Enthalten nur Vertices, keine Beziehungen oder Kanten.
2. Drahtmodelle (Wireframe Models) – Enthalten Vertices und Edges, aber keine Flächeninformationen.
3. Flächenmodelle (Surface Models) – Enthalten Faces zusätzlich zu Vertices und Edges, jedoch keine volumetrischen Informationen.
4. Volumenmodelle (Solid Models) – Geschlossene Modelle mit definierten Volumina. Alle Nachbarschaftsbeziehungen sind klar definiert.

Diese Abstufungen erhöhen sich mit der Komplexität der topologischen Beschreibung und der Möglichkeiten zur Manipulation und Nutzung der Modelle.

2.1.6 Attribute und Merkmale (Features)

Neben geometrischen und topologischen Informationen können Modelle zusätzliche physische oder funktionale Eigenschaften enthalten:

ATTRIBUTE Eigenschaften wie Masse, Material, Farbe, Temperatur, etc.

MERKMALE (FEATURES) Charakteristische Besonderheiten, die z.B. für Simulationen relevant sind (Reibungswerte, Reflexionseigenschaften).

BEISPIEL

Ein Fahrzeugmodell könnte Attribute wie Gewicht, Materialstärke oder Farbe enthalten.

2.1.7 Dimensionalität

Die Dimensionalität eines Modells beschreibt, in welchem Raum es vollständig definiert ist:

- Modelle sind meist vollständig bestimmt im $\mathbb{R}^n$, also einem n-dimensionalen reellen Vektorraum.
- Computergrafik nutzt oft Projektionen vom höherdimensionalen Raum $\mathbb{R}^4$ (3D plus Zeit oder homogene Koordinaten) auf $\mathbb{R}^3$ (rein räumliche Darstellung).

BEISPIEL

3D-Objekt in einer 3D-Szene wird für die Darstellung auf einem 2D-Bildschirm projiziert.

2.1.8 Einschub: Interpolation

Interpolation bezeichnet das mathematische Verfahren, um zwischen bekannten Werten (Punkten) neue, unbekannte Werte zu berechnen und somit eine stetige Kurve oder Fläche zu erzeugen.

ERKLÄRUNG

- Ziel ist eine glatte, kontinuierliche Verbindung zwischen diskreten Punkten.
- Unterschiedliche Arten der Interpolation existieren:
  - Lineare Interpolation: einfachste Form, verbindet Punkte direkt durch Geraden.
  - Polynomial-Interpolation: Kurven höheren Grades.
  - Spline-Interpolation: nutzt Teilpolynome (Splines), um glatte Kurven zu generieren.

VERWENDUNG

- Modellierung glatter Kurven und Oberflächen.
- Animationen in der Computergrafik.
- Rekonstruktion und Approximation in der Bildverarbeitung und 3D-Modellierung.

BEISPIEL – LINEARE INTERPOLATION

Zwei Punkte $P_0(x_0, y_0)$ und $P_1(x_1, y_1)$. Die lineare Interpolation zwischen ihnen lautet:

$$P(t) = P_0 \cdot (1 - t) + P_1 \cdot t, \quad t \in [0, 1]$$

2.1.9 Splines und NURBS (Interpolationstechniken)

SPLINES sind Kurven, definiert durch Kontrollpunkte.

- Interpolierende Splines: Kurve verläuft exakt durch Kontrollpunkte.
- Approximierende Splines (z.B. B-Splines): Kurve nähert sich den Kontrollpunkten an.

NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines):

- Spezialform von B-Splines im homogenen Koordinatensystem.
- Ermöglichen präzise Darstellung komplexer Kurven und Flächen (z.B. exakte Kreise).
- Häufig genutzt im CAD-Bereich.

BEISPIEL

Exakte Modellierung einer Automobil-Karosserie oder Flugzeugoberfläche.

2.2 FLÄCHENMODELLE

Flächenmodelle repräsentieren dreidimensionale Objekte durch ihre äußeren Oberflächen. Sie sind essenziell in der Computergrafik, da sie die Form, das Aussehen und die Oberflächenbeschaffenheit von Objekten definieren. Diese Modelle unterscheiden sich primär nach der Methode, mit der ihre Oberflächen erzeugt werden.

2.2.1 Polygonale Flächen (Facettierung)

Polygonale Flächenmodelle bestehen aus einer Vielzahl einfacher polygonaler Elemente, meist Dreiecken (Triangulation) oder Vierecken (Quadrangulation).

EIGENSCHAFTEN

- Einfache mathematische Struktur
- Schnelle Berechnung und Transformation (Rendering, Animation)
- Breite Unterstützung durch Grafikhardware

TYPISCHE ANWENDUNG

- Echtzeitgrafik (Videospiele, Virtual Reality)
- Animationen und Visualisierungen

2.2.2 Algorithmische Flächen (Parametrische Flächen)

Algorithmische Flächenmodelle sind explizit mathematisch definierte Oberflächen, beschrieben durch parametrische Gleichungen.

BEISPIEL

ELLIPSOID $x(u,v) = a \cdot \sin(u)\cos(v), \;\; y(u,v) = b \cdot \sin(u)\sin(v), \;\; z(u,v) = c \cdot \cos(u)$

KLEINSCHE FLASCHE komplexe Fläche, die nur algorithmisch definiert werden kann: $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ mit komplexen Funktionen und periodischen Parametern u, v

EIGENSCHAFTEN

- Exakte mathematische Beschreibung
- Hohe Genauigkeit
- Ideal für analytische Anwendungen (CAD, Physikalische Simulationen)

2.2.3 Variationsbasierte Flächen (Minimierungsprobleme)

Diese Flächen entstehen durch mathematische Optimierungsverfahren. Ziel ist meist eine Fläche minimaler Energie oder geringster Abweichung von definierten Kriterien.

BEISPIEL – SIGNED DISTANCE FUNCTION (SDF)

- SDF definiert Oberflächen implizit durch Distanzwerte zu einer Fläche. Punkte auf der Oberfläche haben den Wert 0.
- Beliebt in Echtzeit-Rendering (Shader) und 3D-Rekonstruktion.
- Formel SDF (Kugel): $SDF_{\text{Kugel}}(p) = \|p - c\| - r$
  Wobei p ein Punkt im Raum, c Mittelpunkt der Kugel und r Radius ist.

EIGENSCHAFTEN

- Implizite Definition erlaubt flexible Operationen (Vereinigung, Schnitt, Differenz).
- Weit verbreitet in computergenerierten Grafiken und modernen Schriftarten (3D Fonts).

ANWENDUNGEN

- Realistische Rendering-Techniken (Ray Marching).
- Computergestützte 3D-Rekonstruktion.

2.2.4 Ruled Surfaces (Regelflächen)

Regelflächen entstehen durch die Bewegung einer Linie (Gerade) im Raum entlang einer festgelegten Bahn.

BEISPIEL – GAUDIS TECHNIK (SAGRADA FAMILIA)

- Antoni Gaudi verwendete für die Modellierung architektonischer Formen hängende Modelle (Kettenmodelle). Durch Umkehrung der Gravitation (hängende Kette -> stehende Bögen) entstanden Regelflächen.

EIGENSCHAFTEN

- Einfache Herstellung und mathematische Klarheit
- Architektur, Design und Ingenieurwesen nutzen dies zur Herstellung komplexer und dennoch stabiler Strukturen.

2.2.5 Freiformflächen (Freiformmodellierung)

siehe 2.1.9 Splines und NURBS

2.3 MESHES

In der Computergrafik stellen Meshes die wichtigste Form dar, um komplexe dreidimensionale Formen zu modellieren und darzustellen. Besonders verbreitet sind dabei Dreiecks-Meshes, also Netze, die sich aus einer Vielzahl kleiner Dreiecke zusammensetzen. Jedes Dreieck ist definiert durch drei Punkte (Vertices), die durch Kanten (Edges) verbunden sind und eine Fläche (Face) aufspannen.

Der Grund für die Dominanz von Dreiecken liegt in ihrer mathematischen Stabilität: Drei Punkte liegen immer exakt in einer Ebene – anders als bei Vierecken oder anderen Polygonen, die leicht verzogen sein können. Daher können Dreiecke zuverlässig zur Annäherung beliebiger Formen verwendet werden. Komplexe Oberflächen, wie die eines Würfels oder einer Kugel, können durch Triangulation – also das Aufteilen von Flächen in Dreiecke – nachgebildet werden.

Meshes ermöglichen dabei sowohl exakte als auch approximative Modellierungen. Indem viele kleine Dreiecke eingesetzt werden, kann eine Oberfläche nahezu glatt erscheinen, obwohl sie in Wirklichkeit aus vielen flachen Einzelteilen besteht. Die verwendeten Normalenvektoren (senkrechte Vektoren zu den Flächen) sind dabei zentral für Lichtreflexionen und realistische Darstellungen. Allerdings sind die Normalen in einem Mesh nicht kontinuierlich wie bei einer echten glatten Fläche, sondern stückweise konstant innerhalb eines Dreiecks.

STRUKTUR VON MESHES

Ein Mesh wird typischerweise in zwei Tabellen organisiert:

- Eine Vertex-Tabelle, die die Positionen aller Punkte enthält.
- Eine Face-Tabelle, die beschreibt, welche drei Vertices jeweils ein Dreieck bilden.

Diese Trennung zwischen Geometrie (Vertex-Positionen) und Topologie (Verbindungen der Vertices) erlaubt flexible Operationen wie das Verschieben einzelner Punkte ohne Veränderung der Verbindungstruktur.
Die Orientierung der Dreiecke - festgelegt durch die Laufrichtung der Vertices (Winding Order) - bestimmt dabei, was als Vorder- oder Rückseite einer Fläche interpretiert wird. Das Kreuzprodukt zweier Kantenvektoren liefert die Flächennormale und spielt eine entscheidende Rolle bei Lichtberechnungen.

TYPEN UND OPTIMIERUNGEN VON MESHES

Um die Effizienz zu erhöhen, existieren verschiedene Varianten der Speicherung:

TRIANGLE SOUP Jedes Dreieck ist unabhängig gespeichert, was Speicherplatz verschwendet und Topologieinformationen verliert. (Abb. 8)

INDEXED FACESETS Vertices werden nur einmal gespeichert, und Dreiecke referenzieren diese über Indizes - spart viel Speicher. (Abb. 9)

TRIANGLE STRIPS UND TRIANGLE FANS Reihen von Dreiecken teilen sich Kanten, was die Datenmenge weiter reduziert. (Abb. 10, Abb. 11)

Subdivision ist eine Technik, bei der ein Mesh durch Teilung von Dreiecken verfeinert wird, um glattere Oberflächen zu erzeugen. Im Gegensatz dazu steht die Simplifikation, bei der komplexe Meshes reduziert werden, um eine effizientere Darstellung bei kleiner Auflösung zu ermöglichen.

ERWEITERTE ANWENDUNGEN UND GRENZEN

Neben klassischen Oberflächenmodellen gibt es auch 1D-Meshes (Polylines) in der Ebene, die aus Punkten und Linien bestehen. Diese Konzepte führen direkt zu grundlegenden Begriffen wie Manifolds - Strukturen, bei denen jede lokale Umgebung flach“ wirkt und die zentrale Voraussetzung für viele stabile Mesh-Verfahren sind.

ZUSAMMENGEFASST BIETEN MESHES eine hohe Flexibilität in der Modellierung und Darstellung von 3D-Objekten, effiziente Speicher- und Rechenoptimierungen durch den Einsatz von Indizierung und Kompression sowie mathematische Sicherheit aufgrund der Verwendung von stabilen Dreiecksstrukturen. Allerdings sind Meshes nicht für alle Objekte geeignet: Strukturen mit feinem Detail auf jeder Skala (z.B. Haare oder gebrochene Oberflächen wie Marmor) lassen sich nur schwer sinnvoll als Mesh darstellen.

2.4 VOLUMENMODELLE

Während viele klassische 3D-Darstellungen auf Oberflächenmodellen basieren, gibt es Situationen, in denen eine Volumenbeschreibung nötig oder vorteilhaft ist. Volumenmodelle (auch als Solid Models bezeichnet) repräsentieren nicht nur die äußere Hülle eines Objekts, sondern das gesamte Volumen — inklusive seines Inneren.

DIESE DARSTELLUNGEN ERMÖGLICHEN:

- Realistische Simulationen von physikalischen Eigenschaften (z.B. Wärmeleitung, Druckverteilung, Materialverformungen)
- Darstellung transparenter oder transluzenter Objekte (wie Flüssigkeiten oder Gewebe)
- Genauere Berechnungen für Effekte wie Lichtbrechung oder Streuung.

TYPEN UND METHODEN DER VOLUMENMODELLIERUNG

1. BREP (Boundary Representation)
   - Klassische Methode auch für Oberflächenmodelle: Kanten und Flächen definieren das Objekt.
   - Erweiterbar auf Volumen, wenn Topologie vollständig angegeben wird (z.B. manifold solids).
   - Typisch bei CAD-Anwendungen.
2. Constructive Solid Geometry (CSG)
   - Komplexe Volumen werden durch Kombination einfacher geometrischer Primitiven erstellt.
   - Verwendet boolesche Operationen:
     – Union ($\bigcup$) - Vereinigung
     – Difference (–) Subtraktion
     – Intersection ($\bigcap$) Schnittmenge
3. Voxel-Modelle
   - Voxel = Volume Element (analog zu Pixel in 2D).
   - Raum wird in ein regelmäßiges 3D-Gitter unterteilt; jeder Voxel speichert Materialeigenschaften oder Dichte.
   - Anwendung in: Medizinischer Bildgebung (CT, MRT), Fluid- und Strömungssimulation, Spieleentwicklung (z.B. Minecraft: bewusst grobe Auflösung für Stil und Performance)
   - Vorteile: Direkte Simulation physikalischer Prozesse, einfache Speicherstruktur (3D-Array), leicht komprimierbar bei großen homogenen Regionen

- Nachteile: Hoher Speicherbedarf bei hoher Auflösung, begrenzte Detaildarstellung

4. Octree
   - Hierarchische Strukturierung von Voxelräumen:
     - Jeder Raumabschnitt wird rekursiv in 8 Unterabschnitte (Oktanten) aufgeteilt.
   - Vorteil: Effiziente Speicherung großer leerer Bereiche.
   - Grundlage für Methoden wie Marching Cubesßur Rekonstruktion glatter Oberflächen aus diskreten Daten
5. Cell Decomposition
   - Zerlegung eines Raums in Zellen identischer Topologie, aber unterschiedlicher Geometrie.
   - Häufig in Finite-Elemente-Methoden (FEM) genutzt, etwa für die Simulation von Kräften und Temperaturfeldern.

3 TRANSFORMATION

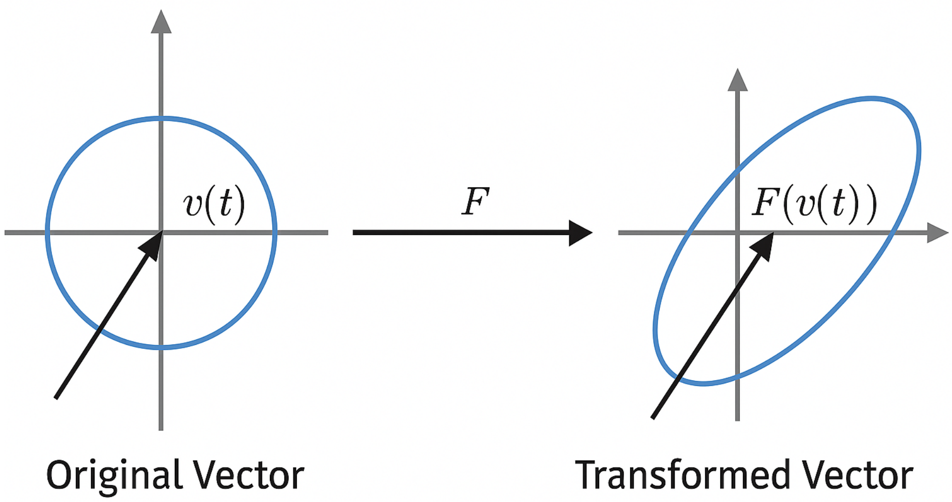
3.1 EINFÜHRUNG

In der Computergrafik ist die Fähigkeit, Objekte im Raum zu bewegen, zu skalieren oder zu drehen, eine Grundvoraussetzung. Diese Vorgänge werden als Transformationen bezeichnet. Transformationen sind essenziell, um Modelle in eine Szene einzufügen, sie richtig auszurichten oder Animationen zu erzeugen.

Man stelle sich vor, wir schieben ein Schachbrett auf einem Tisch (Translation), drehen es leicht, um eine bessere Ausrichtung zu erreichen (Rotation) und vergrößern oder verkleinern es (Skalierung), um es an den Platz anzupassen.
In der Computergrafik vollziehen wir genau diese Operationen mathematisch auf den Koordinaten der Objektpunkte.

BEISPIELE – IN DER COMPUTERGRAFIK

- Das Platzieren eines 3D-Charakters in einer virtuellen Welt
- Das Animieren einer Kamera entlang eines Pfades
- Das Skalieren von Gebäudemodellen auf eine einheitliche Größe
- Das Rotieren von Objekten für eine realistische Darstellung aus unterschiedlichen Perspektiven



Transformationen erlauben es, Geometrie und Topologie von der eigentlichen Manipulation zu trennen. Man verändert nicht das Objekt selbst, sondern nur seine Darstellung im Raum.

3.2 EINSCHUB: VEKTOREN & VEKTORRÄUME

Ein Vektor ist ein Element eines Vektorraumes. Eine nichtleere Menge V heißt Vektorraum über einen fest gegebenen Körper K, falls gilt:

- auf V gibt es eine Verknüpfung $+$, so dass V mit dieser Verknüpfung eine abelsche Gruppe ist, d. h. für alle x, y, z aus V gilt:
  - $(x + y) + z = x + (y + z)$ (Assoziativität der Addition)
  - Es gibt einen Nullvektor o mit: $x + o = x = o + x$. (Nullvektor)
  - Zu jedem $v \in V$ existiert ein $-v \in V$ mit $v + (-v) = 0$ (Additives Inverses)
  - $x + y = y + x$ (Kommutativität der Addition)
- es gibt eine Skalarmultiplikation, d. h. eine Abbildung $K \times V \to V$, so dass für alle $x, y \in V$ und alle $r, s \in K$ gilt:
  - $1 \cdot v = v$, wobei $1 \in K$ das Einselement ist (Neutrales Element der Skalarmultiplikation)
  - $acdot(b \cdot v) = (ab) \cdot v$ (Assoziativität der Skalarmultiplikation)
  - $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$ (Distributivität über Vektoraddition)
  - $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$ (Distributivität über Skalare)

BEISPIEL – VEKTORRÄUME

- Menge aller Polynome mit Koeffizienten aus K
- Menge aller $n \times n$-Matrizen mit reellen Elementen
- Menge aller geordneten Paare (x, y) (x, y reelle Zahlen)
- Menge aller geordneten Tripel (x, y, z) (x, y, z reelle Zahlen)
- Menge aller geordneten n-Tupel $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ (x_i reelle Zahlen)

Besonders die letzten drei Beispiele sind für Computergraphik interessant $\to$ reellwertige Koordinaten in 2D, 3D und nD.

GEOMETRISCHE INTERPRETATION

- Ein Vektor im $\mathbb{R}^2$ beschreibt eine Richtung in der Ebene.
- Ein Vektor im $\mathbb{R}^3$ beschreibt eine Richtung im Raum.
- Ein Punkt kann als *Ortsvektor* vom Ursprung aus dargestellt werden.

Diese Konzepte bilden die Grundlage für alle geometrischen Transformationen in der Computergrafik.

3.2.1 Vektorräume im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

Die Vektorräume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ sind zentrale Objekte in der Computergrafik. Sie unterscheiden sich nur durch die Anzahl der Dimensionen, gehorchen aber denselben Regeln.

Vektorraum $\mathbb{R}^2$	**Vektorraum $\mathbb{R}^3$**
Vektoren sind Paare reeller Zahlen: $$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$	Vektoren sind Tripel reeller Zahlen: $$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
Addition: $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix}$$	**Addition:** $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \\ z+c \end{pmatrix}$$
Skalarmultiplikation: $$s \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sx \\ sy \end{pmatrix}$$	**Skalarmultiplikation:** $$s \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sx \\ sy \\ sz \end{pmatrix}$$
Nullvektor: $$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$	**Nullvektor:** $$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Basis: $$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$	**Basis:** $$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
Interpretation: Ebene mit zwei Richtungen	**Interpretation:** Raum mit drei orthogonalen Richtungen

Jeder Vektor im jeweiligen Raum lässt sich eindeutig als *Linearkombination* der Basisvektoren darstellen. Diese Struktur bildet die Grundlage für alle geometrischen Berechnungen und Transformationen in der Computergrafik.

3.2.2 Mathematische Abbildungen

Eine Abbildung oder Funktion ist eine Zuordnungsvorschrift, die jedem Element eines Ausgangsraums (Definitionsbereich) genau ein Element eines Zielraums (Wertebereich) zuordnet: $f : X \to Y$
In unserem Kontext:

- Abbildungen verknüpfen Punkte oder Vektoren mit anderen Punkten oder Vektoren.
- Abbildungen können die Struktur (z.B. Geradheit, Längenverhältnisse) erhalten oder verändern.

Ein spezieller Typ sind lineare Abbildungen, die die Vektorstruktur erhalten und sich gut durch Matrizen darstellen lassen.

BEISPIEL – LINEARE ABBILDUNG VOM $\mathbb{R}^2$ IN DEN $\mathbb{R}^3$
Um den Übergang von allgemeinen linearen Abbildungen zu Transformationen in der Computergrafik vorzubereiten, betrachten wir eine lineare Transformation, die einen Vektor aus dem $\mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}^3$ überführt.
Wir definieren eine lineare Abbildung durch eine 3×2-Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Die Abbildung $A\vec{v}$ ergibt dann:

$$A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Interpretation

- Die x- und y-Komponenten bleiben erhalten.
- Die neue z-Koordinate ergibt sich aus $x + y$.
- Eine Fläche im $\mathbb{R}^2$ (z. B. ein Quadrat) wird in eine geneigte Fläche im Raum abgebildet.

Bedeutung in der Computergrafik

- Solche Transformationen erlauben es, 2D-Objekte kontrolliert in den 3D-Raum zu überführen.
- Dies ist beispielsweise nützlich für perspektivische Effekte, dynamische Geometrie oder die Positionierung von UI-Elementen im Raum.
- Das Beispiel demonstriert, dass jede lineare Transformation durch einfache *Matrixmultiplikation* beschrieben werden kann.

3.3 LINEARE TRANSFORMATIONEN

Eine Transformation F eines Vektorraums ist **linear**, wenn sie die Struktur des Raums erhält, d. h. insbesondere die Vektoraddition und Skalarmultiplikation. Formal gilt:

$$F(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha F(\vec{u}) + \beta F(\vec{v}) \quad \text{für alle } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \vec{u}, \vec{v} \in V$$

Diese Eigenschaft nennt man das **Superpositionsprinzip**. Es erlaubt, jede lineare Transformation durch eine Matrixdarstellung zu beschreiben.

Beispiel: Skalierung im $\mathbb{R}^2$

Wir definieren die lineare Abbildung F durch eine Diagonalmatrix:

$$F(\vec{v}) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ by \end{pmatrix}$$

- Wenn $a = b = 2$, ergibt sich eine **uniforme Skalierung** um den Faktor 2.
- Wenn $a = 2, b = 1$, ergibt sich eine **nicht-uniforme Skalierung**, die nur in x-Richtung dehnt.

Diese Transformation ist linear, da sie das Superpositionsprinzip erfüllt:

$$F(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha F(\vec{u}) + \beta F(\vec{v})$$

Nicht-lineares Beispiel: Translation

Eine Translation $F(\vec{v}) = \vec{v} + \vec{u}$ verschiebt alle Punkte um einen festen Vektor $\vec{u}$. Diese Transformation ist *nicht linear*, da:

$$F(\alpha\vec{v}) = \alpha\vec{v} + \vec{u} \neq \alpha(\vec{v} + \vec{u}) = \alpha F(\vec{v})$$

Sie verletzt somit das Superpositionsprinzip und kann nicht durch eine einfache 2×2-Matrix dargestellt werden.

Lineare Abbildungen als Matrizenoperation

Jede lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kann durch eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ beschrieben werden:

$$F(\vec{v}) = A \cdot \vec{v}$$

Beispiel einer linearen Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit Rotation um den Winkel θ:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad F(\vec{v}) = A \cdot \vec{v}$$

Diese Matrix dreht jeden Vektor gegen den Uhrzeigersinn um den Winkel θ.

Lineare Transformationen im Kontext parametrischer Flächen

Gegeben sei ein parametrisierter Kreis im $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Eine lineare Transformation kann hier z. B. eine Dehnung des Kreises zu einer Ellipse darstellen:

$$F(\vec{v}) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix}$$

Für $a = 1, b = 2$ entsteht eine Ellipse mit doppelter Ausdehnung in y-Richtung.

Geometrische Interpretation

- **Lineare Transformationen** bewahren den Ursprung und führen zu Streckung, Spiegelung, Scherung oder Rotation.
- **Nicht-lineare Transformationen** verschieben den Ursprung oder verzerren das Koordinatensystem, z. B. durch Translation.

Lineare Transformationen sind die Grundlage für alle affine Transformationen in der Computergrafik. Durch sie lassen sich geometrische Objekte effizient manipulieren und in verschiedene Koordinatensysteme überführen.

3.4 TRANSFORMATION IM $\mathbb{R}^2$

3.4.1 2D-Translation

BESCHREIBUNG
Eine Translation verschiebt ein Objekt im zweidimensionalen Raum $\mathbb{R}^2$ um einen festen Vektor $\mathbf{t}$. Dabei bleiben Form, Größe und Orientierung des Objekts unverändert.

GEGEBEN
Ein Punkt $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und ein Translationsvektor $\mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

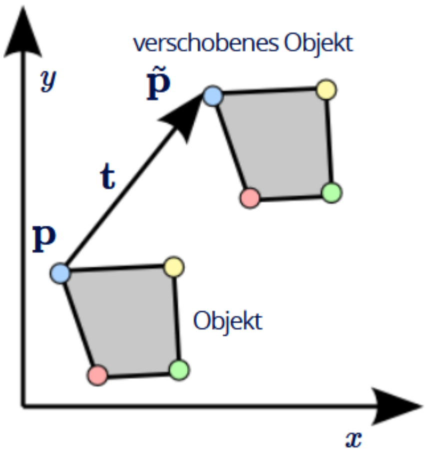
NEUE POSITION
Durch die Translation ergibt sich der verschobene Punkt $\tilde{\mathbf{p}}$ als:

$$\tilde{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \end{pmatrix} = \mathbf{p} + \mathbf{t}$$

BEISPIEL
Ein Punkt $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ wird um den Vektor $\mathbf{t} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ verschoben.

$$\tilde{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Der Punkt wurde somit 4 Einheiten nach rechts und 1 Einheit nach unten verschoben.



3.4.2 Uniforme Skalierung

Die **uniforme Skalierung** ist eine spezielle lineare Transformation, bei der ein Objekt gleichmäßig in alle Richtungen (typischerweise x- und y-Richtung) vergrößert oder verkleinert wird. Mathematisch geschieht dies durch Multiplikation mit einem konstanten Skalar $s > 0$.

MATHEMATISCHE BESCHREIBUNG

Gegeben sei ein Punkt (Ortsvektor) $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Die uniforme Skalierung mit dem Skalierungsfaktor s ergibt den Bildpunkt $\tilde{\vec{p}}$ als:

$$\tilde{\vec{p}} = s \cdot \vec{p} = s \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot x \\ s \cdot y \end{pmatrix}$$

Alternativ formuliert als Matrixtransformation:

$$\tilde{\vec{p}} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \cdot \vec{p}$$

Diese Matrix streckt jeden Vektor im $\mathbb{R}^2$ um den Faktor s vom Ursprung aus.

BEISPIEL – VERGRÖSSERUNG EINER FIGUR

Ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 im Koordinatenursprung wird durch eine uniforme Skalierung mit $s = 2$ zu einem Quadrat der Seitenlänge 2. Dabei bleiben die Winkel und die relative Anordnung der Punkte erhalten – die Figur bleibt ähnlich, nur größer.

BEISPIEL – VERGRÖSSERUNG EINES PUNKTES IM RAUM

Ein Punkt $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ wird bei $s = 3$ auf:

$$\tilde{\vec{p}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

abgebildet. Der Punkt entfernt sich also vom Ursprung, wobei seine Richtung erhalten bleibt.

BEISPIEL – ANWENDUNG AUF EIN 2D-DREIECK

Ein Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$ wird bei $s = 2$ auf die Punkte $(0,0)$, $(2,0)$ und $(0,2)$ transformiert. Das resultierende Dreieck ist doppelt so groß, liegt aber weiterhin an der gleichen Position relativ zum Ursprung.

Eigenschaften

- Die uniforme Skalierung ist eine **lineare Transformation**.
- Das Objekt wird in **allen Richtungen gleichmäßig** skaliert.
- **Winkel und Formverhältnisse** bleiben erhalten – Figuren bleiben ähnlich.
- Der **Ursprung** bleibt unverändert.

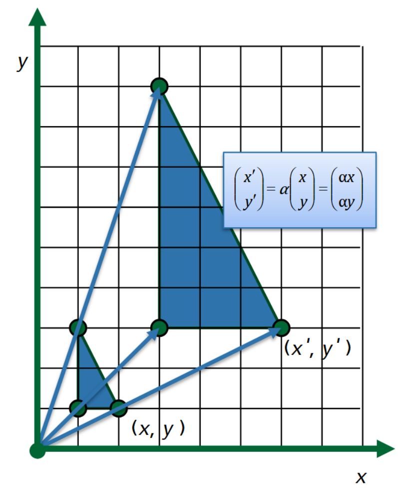


Abbildung 1: Uniforme Skalierung

3.4.3 Nicht-uniforme Skalierung

Die **nicht-uniforme Skalierung** beschreibt eine Transformation, bei der die Skalierung in den einzelnen Raumrichtungen unterschiedlich ist. So kann ein Objekt z. B. nur in x-Richtung gestreckt oder in y-Richtung gestaucht werden. Diese Art der Skalierung verändert die Proportionen eines Objekts.

MATHEMATISCHE BESCHREIBUNG

Gegeben sei ein Ortsvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und zwei Skalierungsfaktoren s_x und s_y für die jeweiligen Achsen. Dann ergibt sich der Bildvektor durch:

$$\vec{p}' = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x \cdot x \\ s_y \cdot y \end{pmatrix}$$

BEISPIEL – STRECKUNG NUR IN x-RICHTUNG

Ein Punkt $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ wird mit $s_x = 3$, $s_y = 1$ transformiert:

$$\vec{p}' = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das Objekt wird in x-Richtung gedehnt, in y-Richtung bleibt es unverändert.

BEISPIEL – DEHNUNG UND STAUCHUNG

Ein Dreieck mit Punkten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$ wird mit $s_x = 2$ und $s_y = 0.5$ skaliert. Die neuen Punkte sind $(0, 0)$, $(2, 0)$ und $(0, 0.5)$. Die Form wird verzerrt, da x und y unterschiedlich verändert werden.

Eigenschaften

- Auch die nicht-uniforme Skalierung ist eine **lineare Transformation**.
- Der Ursprung bleibt erhalten, da keine Verschiebung erfolgt.
- **Verhältnisse** zwischen den Achsen ändern sich – es entstehen gestreckte oder gestauchte Objekte.
- **Winkel** werden im Allgemeinen nicht bewahrt – insbesondere rechtwinklige Formen werden verzerrt.

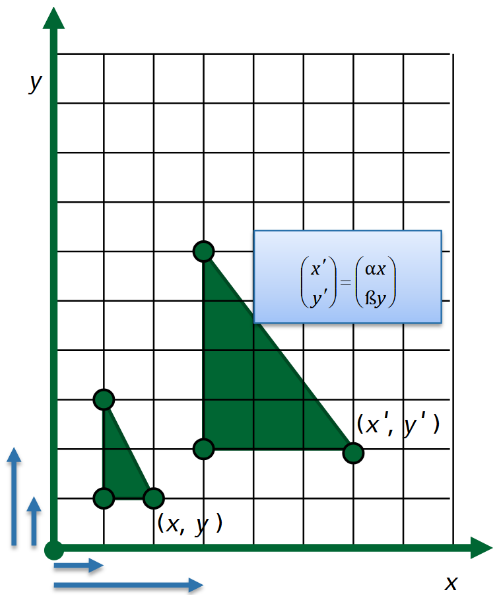


Abbildung 2: Nicht-uniforme Skalierung

3.4.4 2D-Rotation

Die **Rotation** ist eine lineare Transformation, bei der ein Punkt oder ein Objekt in der Ebene um einen festen Winkel α um den Koordinatenursprung gedreht wird. Diese Transformation ist winkel- und längentreu, d.h. sie verändert weder Abstände zwischen Punkten noch die Orientierung von Objekten – lediglich deren Richtung.

MATHEMATISCHE BESCHREIBUNG

Ein Punkt $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ wird bei einer Rotation um den Winkel α gemäß folgender Matrix transformiert:

$$R(\alpha) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot \cos(\alpha) - y \cdot \sin(\alpha) \\ x \cdot \sin(\alpha) + y \cdot \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Der Winkel α wird in der Regel gegen den Uhrzeigersinn gemessen. Negative Werte führen zu einer Drehung im Uhrzeigersinn.

GEOMETRISCHE BEDEUTUNG

Die Basisvektoren $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$ des kartesischen Koordinatensystems werden bei einer Rotation ebenfalls transformiert. Die neuen Richtungen lassen sich als Spalten der Rotationsmatrix interpretieren:

$$\tilde{\vec{b}}_x = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \tilde{\vec{b}}_y = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Somit entspricht eine Rotation auch einer Basisänderung, wobei die gedrehten Achsen den neuen Raum aufspannen.

EIGENSCHAFTEN

- Die Rotation ist eine **lineare Transformation**.
- Der **Ursprung bleibt invariant** – er bewegt sich nicht.
- **Längen und Winkel bleiben erhalten** (isometrisch).
- Die Rotationsmatrix ist **orthogonal**, d. h.:

$$R^{-1}(\alpha) = R^T(\alpha) = R(-\alpha)$$

- Die Determinante der Rotationsmatrix ist:

$$\det(R(\alpha)) = \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

$\rightarrow$ Die Fläche bleibt unter der Transformation erhalten.

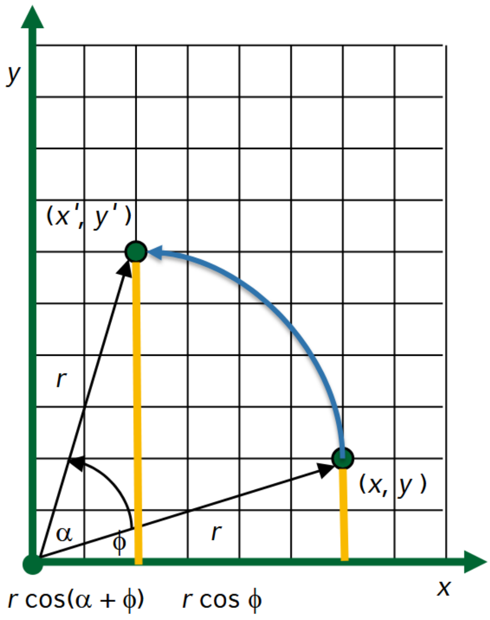


Abbildung 3: Rotation Punkt

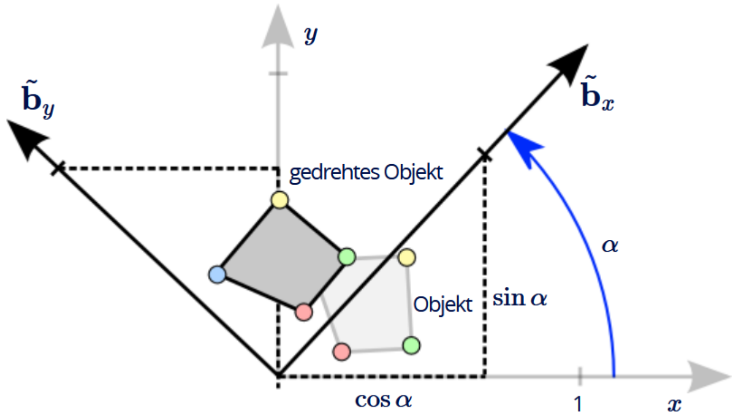


Abbildung 4: Rotation Fläche

Herleitung der Rotationsformel im $\mathbb{R}^2$

Um die Rotationsmatrix herzuleiten, betrachten wir einen Punkt P in der Ebene, gegeben durch kartesische Koordinaten (x, y) sowie seine Darstellung in Polarkoordinaten:

$$x = r\cos(\varphi), \quad y \ = r\sin(\varphi)$$

DREHUNG UM DEN URSPRUNG

Wird der Punkt P um einen Winkel α gegen den Uhrzeigersinn um den Ursprung gedreht, so ergibt sich der neue Winkel $\varphi + \alpha$. Die neuen Koordinaten (x', y') des gedrehten Punkts lauten:

$$x' = r \cdot \cos(\varphi + \alpha)$$
$$y' = r \cdot \sin(\varphi + \alpha)$$

VERWENDUNG TRIGONOMETRISCHER ADDITIONSTHEOREME

$$x' = r \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\alpha) - r \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\alpha)$$
$$y' = r \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\alpha) + r \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\alpha)$$

Nun setzen wir die ursprünglichen Ausdrücke für x und y aus den Polarkoordinaten ein:

$$x' = x \cdot \cos(\alpha) - y \cdot \sin(\alpha)$$
$$y' = x \cdot \sin(\alpha) + y \cdot \cos(\alpha)$$

MATRIXDARSTELLUNG DER ROTATION

Diese Gleichungen lassen sich elegant in Matrixform schreiben:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Diese Matrix nennt man **Rotationsmatrix** $R(\alpha)$ und sie beschreibt eine Drehung um den Ursprung im $\mathbb{R}^2$ um den Winkel α gegen den Uhrzeigersinn.

EIGENSCHAFTEN DER ROTATIONSMATRIX

- Orthogonal: $R(\alpha)^{-1} = R(\alpha)^T = R(-\alpha)$
- Determinante: $\det(R(\alpha)) = 1$
- Flächen- und längentreu (isometrisch)

3.4.5 Kritische Rückschau

In den vorangegangenen Abschnitten wurden grundlegende Transformationen behandelt:

- **Translation**: Verschiebung durch Addition eines Vektors
- **Skalierung**: Multiplikation mit einem Skalierungsfaktor (diagonale Matrix)
- **Rotation**: Drehung mittels Multiplikation mit einer Rotationsmatrix

PROBLEM: UNEINHEITLICHE DARSTELLUNG

Diese Transformationen lassen sich derzeit auf unterschiedliche Weise beschreiben:

- Translation: $\vec{p}' = \vec{p} + \vec{t}$ (Addition eines Vektors)
- Skalierung, Rotation: $\vec{p}' = M \cdot \vec{p}$ (Matrixmultiplikation)

Diese Differenz wird insbesondere dann zum Problem, wenn mehrere Transformationen kombiniert werden sollen. Eine lineare Matrix lässt sich nicht direkt mit einer Translation additiv verknüpfen. Es existiert keine einheitliche Rechenregel wie:

$$T \cdot (M \cdot \vec{p}) \neq \text{eine Matrix} \cdot \vec{p}$$

ZUSAMMENFASSUNG

- **Keine einheitliche mathematische Struktur**: Nicht alle Transformationen sind linear.
- **Zusammensetzen von Transformationen wird kompliziert**: Rotation gefolgt von Translation benötigt unterschiedliche Rechenregeln.
- **In der Praxis hinderlich**: Besonders in Computergrafik, Robotik oder CAD-Systemen, wo Transformationen ständig verkettet werden.

Lineare Transformationen wie Rotation und Skalierung lassen sich durch 2×2-Matrizen darstellen. Punkte werden dabei als Vektoren im $\mathbb{R}^2$ interpretiert und durch Matrix-Vektor-Multiplikation transformiert. Translation hingegen erforderte bislang eine separate Vektoraddition und ließ sich nicht durch eine reine Matrixoperation ausdrücken.

ZIEL

Gesucht ist ein Modell, das:

- alle Transformationen einheitlich durch Matrizen darstellt,
- das Zusammensetzen (Verkettung) von Transformationen über einfache Matrixmultiplikation erlaubt,
- den Ursprung korrekt mitberücksichtigt,
- Translationen korrekt integriert.

LÖSUNG: HOMOGENE KOORDINATEN

Die Einführung **homogener Koordinaten** erweitert den euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ um eine zusätzliche Dimension. Dadurch lassen sich nun auch Translationen — und damit sämtliche Affintransformationen — **einheitlich als lineare Matrixoperation** darstellen.
Damit wird es möglich, komplexe Transformationen (z. B. Rotation + Skalierung + Translation) elegant und effizient über **Matrixmultiplikation** zu kombinieren. Diese Vereinheitlichung ist die Grundlage für moderne Grafiksysteme, Transformationen in der Robotik oder rechnergestützte Geometrieverarbeitung.

3.4.6 Einführung homogener Koordinaten

Um auch Translationen in eine einheitliche mathematische Darstellung mittels Matrizenoperationen zu integrieren, erweitern wir das Koordinatensystem um eine zusätzliche Dimension. Ein Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ wird durch homogene Koordinaten als Tripel

$$\mathbf{p}_{\text{hom}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{im } \mathbb{R}^3 \text{ dargestellt.}$$

GRUNDIDEE

Durch die zusätzliche dritte Komponente w kann ein Punkt (x, y) in der Ebene durch

$$\begin{pmatrix} x \cdot w \\ y \cdot w \\ w \end{pmatrix} \text{ beschrieben werden.}$$

Wählt man $w = 1$, so ergibt sich die sogenannte **normalisierte Darstellung**.
Wichtig: Jeder Punkt in kartesischen Koordinaten hat unendlich viele äquivalente Darstellungen in homogenen Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda \end{pmatrix} \quad \text{für } \lambda \neq 0$$

MOTIVATION: VEREINHEITLICHUNG DURCH MATRIZENMULTIPLIKATION

Im bisherigen Modell mussten Translationen durch separate Vektoraddition behandelt werden:

$$\tilde{\mathbf{p}} = M \cdot \mathbf{p} + \mathbf{t}$$

Dies ist aus Sicht der Mathematik keine lineare Abbildung. In homogenen Koordinaten kann jedoch jede affine Transformation — einschließlich Translation — durch eine **einzige Matrix** realisiert werden:

$$\tilde{\mathbf{p}}_{\text{hom}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & t_x \\ m_{21} & m_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diese Darstellung erlaubt:

- die **einheitliche Beschreibung** aller Transformationen (Skalierung, Rotation, Translation, Scherung, Spiegelung),
- die **Verkettung beliebiger Transformationen** durch einfache Matrixmultiplikation,
- eine direkte Implementierung in Grafikpipelines, Robotik, CAD-Systemen u.v.m.

UMRECHNUNG: HOMOGEN → KARTESISCH

Ist ein Punkt $\tilde{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ gegeben, so ergibt sich der entsprechende Punkt im $\mathbb{R}^2$ durch:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u/w \\ v/w \end{pmatrix} \quad \text{für } w \neq 0$$

Dabei gilt: Die Multiplikation des homogenen Vektors mit einem Skalar $\lambda \neq 0$ ändert das Ergebnis in kartesischen Koordinaten nicht.

ZUSAMMENFASSUNG

Die Verwendung homogener Koordinaten schafft die Grundlage für eine einheitliche Darstellung und Verarbeitung aller geometrischen Transformationen in der Ebene — sowohl konzeptionell als auch rechentechnisch.

3.4.7 Transformationen in homogenen Koordinaten

Durch die Einführung homogener Koordinaten können alle grundlegenden geometrischen Transformationen — einschließlich Translation — als 3×3-Matrizen formuliert werden. Dies erlaubt die Darstellung jeder Transformation als Matrix-Vektor-Multiplikation.

TRANSLATION

Vorher: Verschiebung durch Vektoraddition $\vec{p}' = \vec{p} + \vec{t}$
Jetzt: Darstellung als Matrixmultiplikation

$$T_{\text{trans}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_{\text{hom}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}' = T_{\text{trans}} \cdot \vec{p}_{\text{hom}} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

UNIFORME SKALIERUNG

Vorher: Skalierung durch Multiplikation mit Skalar
Jetzt: Skalierung entlang beider Achsen durch Diagonalmatrix

$$T_{\text{scale}} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_{\text{hom}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}' = T_{\text{scale}} \cdot \vec{p}_{\text{hom}} = \begin{pmatrix} s_x \cdot x \\ s_y \cdot y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dabei bewirkt:

- $s_x > 1$: Streckung in x-Richtung, $0 < s_x < 1$: Stauchung
- $s_y > 1$: Streckung in y-Richtung, $0 < s_y < 1$: Stauchung
- Bei $s_x = s_y$ spricht man von einer **uniformen Skalierung**

ROTATION

Vorher: Rotation über 2×2-Matrix oder trigonometrische Gleichungen
Jetzt: als 3×3-Rotationsmatrix mit Ursprung als Zentrum

$$T_{\text{rot}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_{\text{hom}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}' = T_{\text{rot}} \cdot \vec{p}_{\text{hom}} = \begin{pmatrix} x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha \\ x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dabei gilt:

- Positive Winkel α bewirken eine Drehung **gegen den Uhrzeigersinn**
- Der **Ursprung** bleibt bei der Rotation unverändert
- Die Form des Objekts bleibt erhalten (Längen und Winkel sind invariant)

SCHERUNG

Die Scherung ist eine affine Transformation, bei der eine Koordinatenachse in Richtung der anderen „verschoben“ wird. Dabei bleiben Linien parallel zu einer Achse erhalten, während sich die relative Lage in der anderen Richtung ändert.

X-Richtung:

$$T_{\text{shear-x}} = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}$$

Y-Richtung:

$$T_{\text{shear-y}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Anwendung der Transformation auf einen Punkt $\vec{p}_{\text{hom}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt:

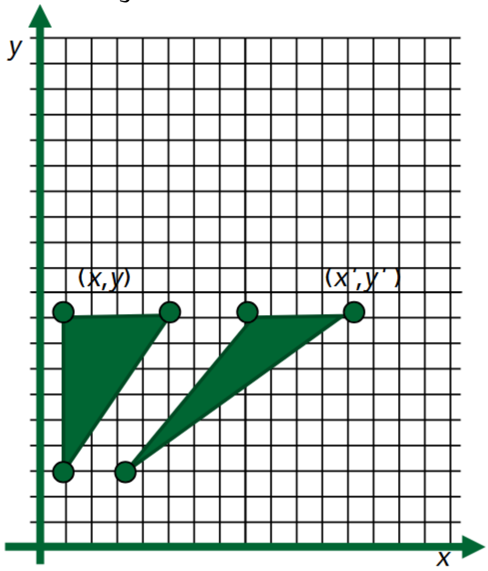


Abbildung 5: Scherung in x- bzw. y-Richtung

- Bei x-Scherung: $x' = x + k \cdot y$
- Bei y-Scherung: $y' = y + k \cdot x$

Eigenschaften:

- Linien bleiben gerade, aber Winkel und Längen werden verändert.
- Die Transformation ist **affin**, aber nicht isometrisch.
- In homogenen Koordinaten vollständig als Matrixmultiplikation darstellbar.

SPIEGELUNG (Reflexion)
Die Spiegelung ist eine Transformation, bei der Punkte an einer bestimmten Achse gespiegelt werden. Diese Transformation ist eine lineare Abbildung mit Determinante -1 und verändert die Orientierung der Objekte.

Spiegelung an der x-Achse:

$$T_{\text{ref-x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Spiegelung an der y-Achse:

$$T_{\text{ref-y}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

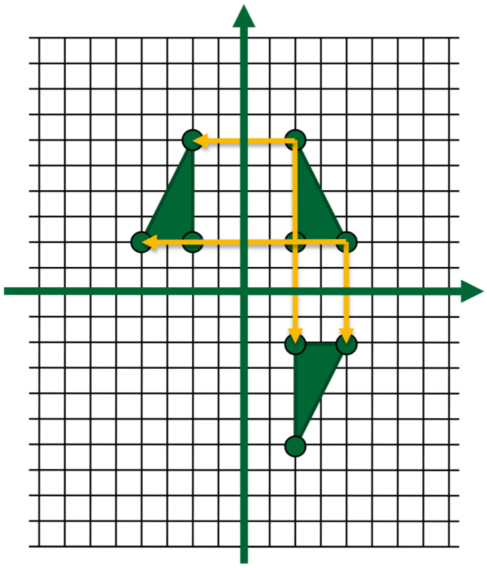


Abbildung 6: Spiegelung in x- bzw. y-Richtung

Die Anwendung erfolgt wie gewohnt durch Multiplikation mit dem homogenen Vektor:

$$\vec{p}\,' = T_{\text{ref}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften:

- Die Form bleibt erhalten, aber die Orientierung kehrt sich um.
- Spiegelungen sind **lineare Transformationen**, aber keine isometrischen Bewegungen im engeren Sinne.
- Spiegelungen entlang anderer Achsen (z. B. beliebiger Winkel) lassen sich durch Kombination aus Rotation, Achs-Spiegelung und Rück-Rotation erzeugen.

ZUSAMMENFASSUNG Allgemeine Transformationsmatrix

Jede Transformation im $\mathbb{R}^2$ kann im homogenen Raum durch eine Matrix beschrieben werden.

Die einzelnen Einträge kodieren:

- **Skalierung**: Diagonal (a, e)
- **Rotation / Scherung**: Off-Diagonal (b, d)
- **Translation**: Rechte Spalte (c, f)

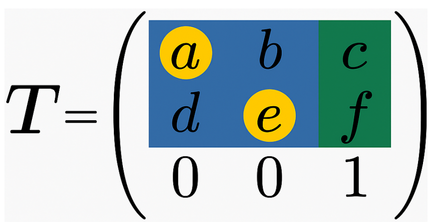


Abbildung 7: Allgemeine Transformationsmatrix

3.4.8 Verkettung von Transformationen

Werden mehrere geometrische Transformationen nacheinander auf ein Objekt angewendet, so entspricht dies der **Verkettung** bzw. **Kombination** dieser Transformationen. Im homogenen Koordinatensystem erfolgt diese Verkettung durch **Matrixmultiplikation**:

$$\vec{p}' = T_n \cdot T_{n-1} \cdots T_1 \cdot \vec{p}$$

Wichtig: Die Reihenfolge der Multiplikation ist entscheidend! Die Transformation, die **zuerst** angewendet wird, steht **rechts** der Multiplikation.

BEISPIEL Translation gefolgt von Skalierung

$$T_{ges} = T_{scale} \cdot T_{trans} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & s_x \cdot t_x \\ 0 & s_y & s_y \cdot t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EIGENSCHAFTEN

- **Translation ist additiv:** Zwei nacheinander ausgeführte Translationen entsprechen einer Verschiebung um den Summenvektor.
- **Skalierung ist multiplikativ:** Zwei Skalierungen multiplizieren ihre Faktoren.
- **Rotation ist additiv:** Zwei aufeinanderfolgende Rotationen ergeben eine Rotation mit der Winkelsumme.

VERKETTUNG ALLGEMEINER TRANSFORMATIONEN

Eine allgemeine Transformationsmatrix in $\mathbb{R}^2$ (homogene Koordinaten) beliebig viele solcher Transformationen können durch Matrixmultiplikation verkettet werden. Dies erlaubt es, eine ganze Transformationsequenz in einer einzigen Matrix zusammenzufassen.

INVERSE TRANSFORMATIONEN

Jede Transformation, die durch eine reguläre 3×3-Matrix T beschrieben wird, besitzt eine **Inverse** T^{-1}, sofern $\det(T) \neq 0$. Damit lässt sich eine Transformation rückgängig machen:

$$\vec{p} = T^{-1} \cdot \vec{p}'$$

HINWEIS: NOTWENDIGKEIT HOMOGENER KOORDINATEN Im euklidischen Raum lässt sich eine Translation nicht als reine Matrixoperation darstellen.

$$F(v) = M \cdot v + u$$

Verkettungen wie $G(F(v)) = M_G(M_F v + u_F) + u_G$ erfordern distributives Ausmultiplizieren. Damit ist keine einfache Darstellung durch eine Matrixmultiplikation möglich.
Nur durch die Erweiterung auf homogene Koordinaten wird die Verkettung linear:

$$T_{ges} = T_G \cdot T_F \quad \text{und} \quad \vec{p}' = T_{ges} \cdot \vec{p}_{hom}$$

3.4.9 Isometrien – Abstands- und Winkeltreue Transformationen

Eine **Isometrie** ist eine Transformation, die den Abstand zwischen allen Punkten erhält:

$$\|f(\vec{u}) - f(\vec{v})\| = \|\vec{u} - \vec{v}\| \quad \text{für alle } \vec{u}, \vec{v}$$

Im $\mathbb{R}^2$ gehören zu den Isometrien:

- **Translation** – verschiebt alle Punkte gleich weit; Orientierung bleibt erhalten
- **Rotation** – dreht um ein Zentrum; Abstände und Winkel bleiben erhalten
- **Spiegelung** – spiegelt an einer Achse; Abstände erhalten, Orientierung kehrt sich um
- **Gleitspiegelung** – Spiegelung + Translation entlang der Spiegelachse

Alle Isometrien bewahren:

- **Längen**
- **Winkel**
- **Form und Fläche**

Unterscheidung:

- *Orientierungserhaltend*: Translation, Rotation, Gleitspiegelung
- *Orientierungsumkehrend*: Spiegelung

ZUSAMMENFASSUNG

Eigenschaft	Isometrie	Ähnlichkeits-abbildung	Affine Abbildung	Projektiv Abbildung
Abstände erhalten	•	–	–	–
Winkel erhalten	•	•	–	–
Geraden bleiben Geraden	•	•	•	•
Parallele Linien bleiben parallel	•	•	•	–
Verhältnisse auf Linien bleiben gleich	•	•	•	–
Form wird bewahrt	•	•	–	–
Flächeninhalt bleibt erhalten	•	–	–	–

Tabelle 1: Vergleich grundlegender Transformationstypen

*Die Isometrien bilden die oberste Klasse in der **Typisierung** homogener Transformationen.*

3.4.10 Typisierung von Transformationen

AFFINE TRANSFORMATIONEN

Affine Transformationen sind eine Kombination aus:

- einer **linearen Transformation** (z. B. Rotation, Skalierung, Scherung)
- einer **Translation**

Allgemein lässt sich eine affine Abbildung schreiben als:

$$\vec{p}\,' = A \cdot \vec{p} + \vec{t} \quad \text{mit} \quad A \in \mathbb{R}^{2\times 2},\ \vec{t} \in \mathbb{R}^2$$

EIGENSCHAFTEN AFFINER TRANSFORMATIONEN

- Geraden bleiben Geraden
- Parallele Linien bleiben parallel
- Verhältnisse entlang von Linien (z. B. Teilungsverhältnisse) bleiben erhalten
- Winkel und Längen werden im Allgemeinen nicht bewahrt

AFFINE TRANSFORMATIONEN IM HOMOGENEN RAUM

Im homogenen Koordinatensystem kann eine affine Transformation als eine 3×3-Matrix geschrieben werden. Die Translation wird in die dritte Spalte eingebettet, die untere Zeile bleibt $(0\ 0\ 1)$:

$$T_{\text{aff}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oder allgemeiner:

$$T_{\text{aff}}(A, \vec{t}) = \begin{pmatrix} A & \vec{t} \\ \vec{0}^T & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } A \in \mathbb{R}^{2\times 2},\ \vec{t} \in \mathbb{R}^2$$

GEOMETRISCHE BEDEUTUNG

Durch affine Transformationen bleiben erhalten:

- **Kollinearität** – Punkte auf einer Linie bleiben auf einer Linie
- **Parallelität** – parallele Linien bleiben parallel
- **Verhältnisse** von Abständen auf Linien

Sie verändern:

- Winkel zwischen Linien
- Längen von Strecken
- Formen (z. B. Rechtecke werden zu Parallelogrammen)

ZUSAMMENFASSUNG Typen homogener Transformationen mit Beispielen

1. TRANSLATION / ISOMETRIE Translation um $\vec{t} = (3, 2)$:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T\vec{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. ÄHNLICHKEITSABBILDUNG Rotation um 90° + Skalierung $s = 2$:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. AFFINE ABBILDUNG

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T\vec{p} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. PROJEKTIVE ABBILDUNG

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{p}_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

3.5 VERKETTUNG AFFINER TRANSFORMATIONEN IM $\mathbb{R}^2$

3.5.1 Motivation und Bedeutung

In komplexeren Anwendungen der Computergrafik, Geometrie und Robotik reicht es oft nicht aus, nur einzelne Transformationen wie eine Rotation oder eine Translation anzuwenden. Stattdessen müssen **mehrere Transformationen miteinander kombiniert** werden. Beispiele dafür sind:

- Ein Objekt wird zunächst lokal skaliert, dann gedreht und anschließend in eine Szene eingefügt.
- Eine Kamera bewegt sich durch den Raum und verändert gleichzeitig ihren Blickwinkel.
- Ein Gelenk eines Roboters dreht sich relativ zu seinem Elternteil.

Für solche Fälle ist es von zentraler Bedeutung, Transformationen zu **verketteten Transformationen** zusammenzufassen. Die homogenen Koordinaten ermöglichen es, diese Kombination durch **Matrixmultiplikation** darzustellen.
Die Vorteile liegen auf der Hand:

- Transformationen können effizient gespeichert und berechnet werden.
- Einzelne Operationen lassen sich vorab zusammenfassen (Preprocessing).
- Transformationen lassen sich als **einheitliche lineare Operation** formulieren.
- Lokale Koordinatensysteme und Hierarchien (z.B. in Szenengraphen) lassen sich sauber beschreiben.

Dieser Abschnitt zeigt daher, wie sich affine Transformationen elegant miteinander kombinieren lassen — inklusive der mathematischen Konsequenzen und praktischen Anwendungen.

3.5.2 Allgemeine Form affiner Transformationen

Affine Transformationen umfassen Kombinationen aus **Rotation**, **Skalierung**, **Scherung** und **Translation**. Im Gegensatz zu rein linearen Transformationen enthalten sie also zusätzlich eine Verschiebung im Raum.
Im homogenen Koordinatensystem lassen sich affine Transformationen durch eine 3×3-Matrix darstellen:

$$T_{\text{aff}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dabei ist:

- $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ eine lineare Transformation (Rotation, Skalierung, Scherung),
- $\vec{t} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$ der Translationsvektor,
- die letzte Zeile `(0 0 1)` stellt sicher, dass wir im homogenen $\mathbb{R}^2$ bleiben.

BEISPIELE

- **Translation**:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Rotation um den Ursprung (Winkel α)**:

$$T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Nicht-uniforme Skalierung**:

$$T = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da affine Transformationen über eine Matrixmultiplikation angewendet werden, ist ihre Verkettung besonders effizient und erlaubt die einfache Kombination mehrerer geometrischer Operationen in einer einzigen Matrix.
Im nächsten Abschnitt sehen wir, wie solche Matrizen zusammengesetzt werden – und welche Herausforderungen (z.B. Nicht-Kommutativität) dabei auftreten.

3.5.3 Zusammensetzen und Nicht-Kommutativität

Ein großer Vorteil homogener Koordinaten ist die Möglichkeit, mehrere Transformationen durch **Matrixmultiplikation** zu einer einzigen Gesamttransformation zusammenzufassen:

$$T_{\text{gesamt}} = T_n \cdot \dots \cdot T_2 \cdot T_1$$

Dies erlaubt es, z. B. Translation, Skalierung und Rotation effizient zu kombinieren. Die Reihenfolge der Multiplikation entspricht der **Reihenfolge der Anwendung von rechts nach links**:

$$\vec{p}\,' = T_{\text{gesamt}} \cdot \vec{p} = T_n \cdot \dots \cdot T_1 \cdot \vec{p}$$

Wichtig: Die **Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ**! Das bedeutet:

$$T_1 \cdot T_2 \neq T_2 \cdot T_1$$

BEISPIEL

Eine Rotation gefolgt von einer Skalierung liefert ein anderes Ergebnis als die umgekehrte Reihenfolge.

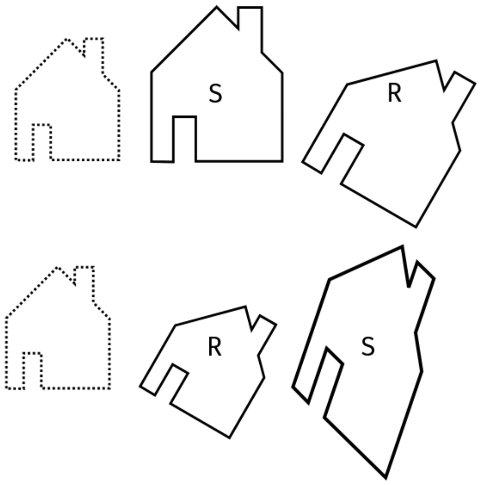


Abbildung: Reihenfolge von R (Rotation) und S (Skalierung) verändert das Ergebnis deutlich.

ZUSAMMENFASSUNG

Beim Aufbau komplexer Transformationen muss die Reihenfolge genau überlegt werden. In der Praxis bedeutet das:

- Transformationen werden oft in einem bestimmten lokalen Kontext (z.B. Objekthierarchie) geplant.
- Die „innere" Transformation (z.B. Rotation) wird zuerst angewendet, die „äußere" (z.B. globale Translation) zuletzt.
- Transformationen können vorab multipliziert und in einer einzigen Matrix gespeichert werden.

3.5.4 Transformation um einen lokalen Punkt (Pivot)

Viele Transformationen wie Rotationen oder Skalierungen sollen nicht um den Ursprung, sondern um einen bestimmten Punkt **im Objekt selbst** ausgeführt werden. Ein typisches Beispiel ist die Drehung einer Tür um ihr Scharnier oder die Bewegung eines Gelenks. Da affine Transformationen in homogenen Koordinaten immer relativ zum Ursprung definiert sind, müssen wir einen Trick anwenden:

- **1.** Verschiebe den Pivotpunkt **in den Ursprung** (Translation T)
- **2.** Führe die gewünschte Transformation (z.B. Rotation R) durch
- **3.** Verschiebe das Objekt zurück (inverse Translation T^{-1})

Die Gesamtransformation ergibt sich dann zu:

$$M = T^{-1} \cdot R \cdot T$$

Diese Formel funktioniert analog auch für andere Transformationen (z.B. Skalierung S):

$$M = T^{-1} \cdot S \cdot T$$

Beispiel:
Ein Objekt soll um den Punkt $\vec{p}_0 = (2, 1)$ um 45° rotiert werden:

- Translation T verschiebt $\vec{p}_0$ in den Ursprung:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Rotation R:

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Rücktranslation T^{-1}:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.6 TRANSFORMATION IM $\mathbb{R}^3$

ABBILDUNGSVERZEICHNIS


```
// Geometrie und Topologie
float[][][] = {
    {{ax,ay,az},{bx,by,bz},{cx,cy,cz}}, //T1
    {{bx,by,bz},{dx,dy,dz},{cx,cy,cz}}, //T2
    {{bx,by,bz},{gx,gy,gz},{dx,dy,dz}}  // T3
};

// Jedes Dreieck hat seinen eigenen
// Speicherbereich, d.h. keine erkennbare
// Topologie zwischen den Dreiecken
```

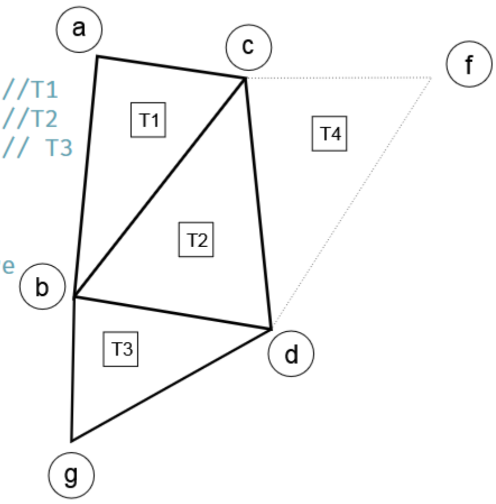


Abbildung 8: Triangle-Soup

```
// Geometrie
float geom[][] = {
    {ax,ay,az}, // Vertex a | 0
    {bx,by,bz}, // Vertex b | 1
    {cx,cy,cz}, // Vertex c | 2
    {dx,dy,dz}, // Vertex d | 3
    {fx,fy,fz}, // Vertex f | 4
    {gx,gy,gz}  // Vertex g | 5
};

// Topologie
uint32_t topo [][] = {
    { 0, 1, 2 },  // face T1
    { 1, 3, 2 }   // face T2
};
```

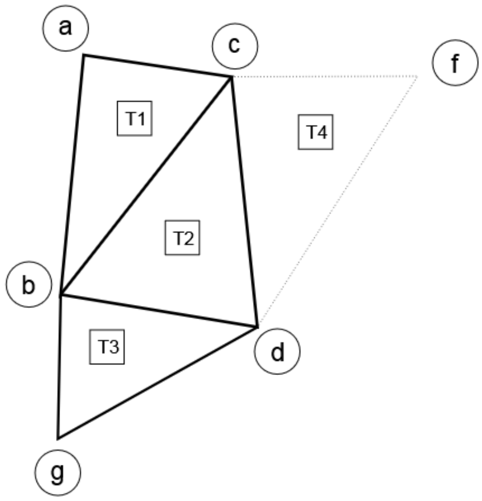


Abbildung 9: Indexed-Faceset

```
// Geometrie
float geom[][] = {
    {ax,ay,az}, // Vertex a | 0
    {bx,by,bz}, // Vertex b | 1
    {cx,cy,cz}, // Vertex c | 2
    {dx,dy,dz}, // Vertex d | 3
    {fx,fy,fz}, // Vertex f | 4
    {gx,gy,gz}  // Vertex g | 5
};

// Topologie
uint32_t topo_ts [] = { 0, 1, 2, 3, 4};

// ergibt T1(abc),T2(bcd),T4(cdf)
// T2 wird umgedreht interpretiert
```

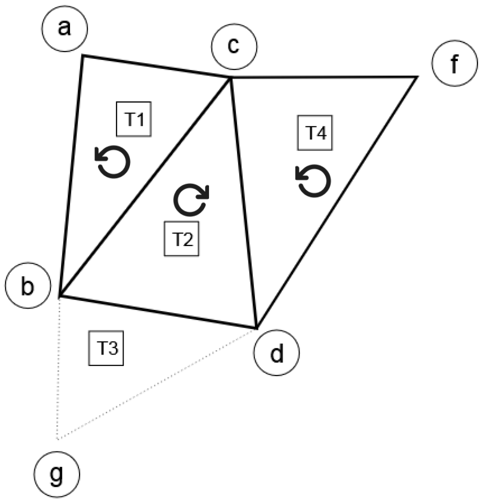


Abbildung 10: Triangle-Strip

```
// Geometrie
float geom[][] = {
    {ax,ay,az}, // Vertex a | 0
    {bx,by,bz}, // Vertex b | 1
    {cx,cy,cz}, // Vertex c | 2
    {dx,dy,dz}, // Vertex d | 3
    {fx,fy,fz}, // Vertex f | 4
    {gx,gy,gz}  // Vertex g | 5
};

// Topologie
uint32_t topo_tf [] = { 1, 5, 3, 2, 0 };
// T3(bgd),T2(bdc),T1(bca)
```

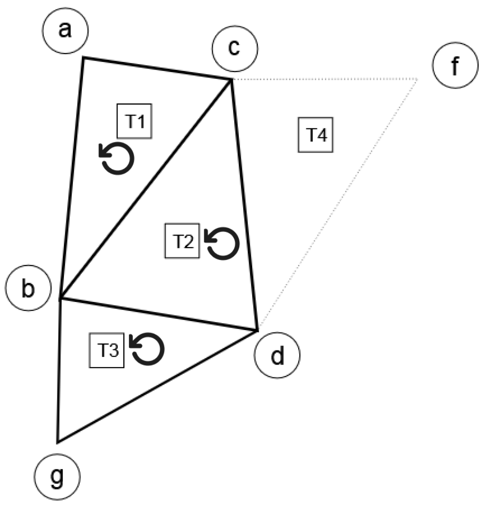


Abbildung 11: Triangle-Fan