Philipps-Universität Marburg
Fachbereich Mathematik und Informatik
Arbeitsgruppe Datenbanksysteme

Sommersemester 2023
21. 04. 2023

Prof. Dr. Bernhard Seeger
Jana Holznigenkemper M.Sc.
Marius Kuhrt M.Sc.

Übungen zur Vorlesung
Algorithmen und Datenstrukturen

Abgabe: 30. 04. 2023,
bis **spätestens** 23:59 Uhr
über die ILIAS Plattform

Übung 2

Aufgabe 2.1: $\mathcal{O}$-Notation Zuordnung **(3 Punkte)**

Ordnen Sie die Methoden `f1` und `f2` den niedrigsten Laufzeiten in $\mathcal{O}$-Notation zu:
1 , $\log n$, $\sqrt{n}$, n , $n \log n$, n^2 , n^3 , 2^n , 3^n , $n!$.
Begründen Sie Ihre Antworten.

```
public static int f1(int n) {
    int x = 0;                              O(n)
    for ( int i = 0; i < n; i++ )
        for ( int j = 0; j <= i; j++ )      O(i)
            for ( int k = 0; k < 5; k++ )
                x = x + j;                      O(5)
    return x;
}

public static int f2(int n) {
    if ( n <= 1 )
        return 2;
    else
        return f2(n-1) * f2(n-2);
}
```

Aufgabe 2.2: $\mathcal{O}$-Notation Berechnung (1+1+1+2) **(5 Punkte)**

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Gegeben $f(n) = n^3 + n$, zeigen Sie: $f(n) \in \mathcal{O}(n^3)$

b) Gegeben $f(n) = \log(n^2)$, zeigen Sie: $f(n) \in \mathcal{O}(\log(n))$

c) Gegeben $f(n) = \sqrt{n}$, zeigen Sie: $f(n) \in \Omega(\log(n))$

d) Gegeben $f(n) = 4n^4 + n^3$, zeigen Sie: $f(n) \in \Theta(2n^4 + 15n^3)$

Aufgabe 2.3: $\mathcal{O}$-Notation Aussagen (2+2+2) **(6 Punkte)**

Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) $f(n) \in \mathcal{O}(f(n)^2)$

b) $\forall \varepsilon > 0 : n \log(n) \in \mathcal{O}(n^{1+\varepsilon})$

c) Wenn $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$, dann gilt $2^{f(n)} \in \mathcal{O}(2^{g(n)})$

Aufgabe 2.4: Rekursive Algorithmen* (4+2) **(6 Punkte)**

In der Vorlesung wurde folgende Rekursionsgleichung für die Laufzeit der binären Suche hergeleitet:

$$T(n) = \begin{cases} b + T\left(\frac{n-1}{2}\right) & \text{falls } n > 0, \\ a & \text{sonst.} \end{cases}$$

Folgende Vermutung für die geschlossen Form aufgestellt: $T(n) = \log_2(n+1) \cdot b + a$ (vgl. Skript S. 86).

a) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die geschlossene Form gilt. Bedenken Sie, dass wir vereinfachend annehmen, dass $n = 2^k - 1$ ist und daher die Induktion auch über k vollzogen werden kann.

b) Wie kann die Laufzeit für n abgeschätzt werden, die sich nicht als $2^k - 1$ darstellen lassen?
Hinweis: Die Kostenfunktion ist monoton.

*** Aufgabe 2.4 ist für Lehramtsstudierende optional.**